Λύσεις 3ου Επαναληπτικου διαγωνίσματος στα Μαθηματικά Γενικής Παιδείας

ΘΕΜΑ Α

Α1. $F(x+h)-F(x)=(f(x+h)+g(x+h))-(f(x)+g(x))=(f(x+h)-f(x))+(g(x+h)-g(x))$,

και για $h\neq 0$, $\dfrac{F(x+h)-F(x)}{h}=\dfrac{f(x+h)-f(x)}{h}+\dfrac{g(x+h)-g(x)}{h}$. Επομένως

$$\lim_{h\to 0}\frac{F(x+h)-F(x)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}+\lim_{h\to 0}\frac{g(x+h)-g(x)}{h}=f'(x)+g'(x).$$

Άρα $(f(x)+g(x))'=f'(x)+g'(x)$

Α2. Σε ένα πείραμα με ισοπίθανα αποτελέσματα να ορίσουμε ως πιθανότητα του ενδεχομένου *Α* τον αριθμό: $P(A)=\dfrac{\text{Πλήθος Ευνοϊκών Περιπτώσεων}}{\text{Πλήθος Δυνατών Περιπτώσεων}}=\dfrac{N(A)}{N(\Omega)}$

Α3. Όταν σε ένα δείγμα μεγέθους ν οι παρατηρήσεις μιας μεταβλητής Χ είναι $t_1,t_2,...,t_\nu$, τότε η μέση τιμή συμβολίζεται με $\bar{x}$ και δίνεται από τη σχέση: $\bar{x}=\dfrac{t_1+t_2+...+t_\nu}{\nu}=\dfrac{\sum_{i=1}^{\nu}t_i}{\nu}=\dfrac{1}{\nu}\sum_{i=1}^{\nu}t_i$

Α4. **α)** Λ **β)** Λ **γ)** Λ **δ)** Λ **ε)** Σ

ΘΕΜΑ Β

Β1. Η συνάρτηση f είναι δύο φορές παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με $f'(x)=2\lambda e^{\lambda x}$ και $f''(x)=2\lambda^2e^{\lambda x}$.

Είναι $f''(x)-\lambda f(x)=4\Leftrightarrow 2\lambda^2e^{\lambda x}-\lambda^2\left(2e^{\lambda x}-1\right)=4\Leftrightarrow 2\lambda^2e^{\lambda x}-2\lambda^2e^{\lambda x}+\lambda^2=4\Leftrightarrow \lambda^2=4\Leftrightarrow \lambda=\pm 2$

Β2. $h(x)=f(x)-2\lambda^2x-1=2e^{\lambda x}-1-2\lambda^2x-1=2e^{\lambda x}-2\lambda^2x-2$, $x\in\mathbb{R}$.

Η h είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με $h'(x)=2\lambda e^{\lambda x}-2\lambda^2$.

Είναι $h'(x)\geq 0\Leftrightarrow 2\lambda e^{\lambda x}-2\lambda^2\geq 0\Leftrightarrow 2\lambda e^{\lambda x}\geq 2\lambda^2\Leftrightarrow e^{\lambda x}\geq\lambda\Leftrightarrow \lambda x\geq \ln\lambda\Leftrightarrow x\geq\dfrac{\ln\lambda}{\lambda}$.

Για κάθε $x>\dfrac{\ln\lambda}{\lambda}$ είναι $h'(x)>0\Rightarrow h\nearrow\left[\dfrac{\ln\lambda}{\lambda},+\infty\right)$ και για κάθε $0<x<\dfrac{\ln\lambda}{\lambda}$ είναι $h'(x)<0\Rightarrow h\searrow\left(0,\dfrac{\ln\lambda}{\lambda}\right]$.

Η h έχει ελάχιστο το $h\left(\dfrac{\ln\lambda}{\lambda}\right)=2e^{\lambda\frac{\ln\lambda}{\lambda}}-2\lambda^2\dfrac{\ln\lambda}{\lambda}-2=2\lambda-2\lambda\ln\lambda-2$

Εστω $\varphi(\lambda)=2\lambda-2\lambda\ln\lambda-2$, $\lambda>0$.

Η φ είναι παραγωγίσιμη στο $(0,+\infty)$ με $\varphi'(\lambda)=2-2\ln\lambda-2=-2\ln\lambda$.

$\varphi'(\lambda)\geq 0\Leftrightarrow -2\ln\lambda\geq 0\Leftrightarrow \ln\lambda\leq 0\Leftrightarrow \lambda\leq 1$.

Για κάθε $\lambda\in(0,1)$ είναι $\varphi'(\lambda)>0\Rightarrow \varphi\nearrow(0,1]$ και για κάθε $\lambda>1$ είναι $\varphi'(\lambda)<0\Rightarrow\varphi\searrow[1,+\infty)$.

Το ελάχιστο της, δηλαδή η φ, γίνεται μέγιστο για $\lambda=1$.

Β3. Για $\lambda=2$ είναι $f(x)=2e^{2x}-1$.

Εστω ότι το Μ έχει συντεταγμένες $\left(x(t),y(t)\right)$. Τότε $y(t)=2e^{2x(t)}-1$.

Είναι $y'(t)=2e^{2x(t)}\left(2x(t)\right)'=4e^{2x(t)}x'(t)$.

Επειδή ο ρυθμός μεταβολής της τεταγμένης του Μ είναι τετραπλάσιος από το ρυθμό μεταβολής της

τετμημένης του, ισχύει ότι $y'(t)=4x'(t)\Leftrightarrow 4e^{2x(t)}x'(t)\overset{x'(t)\neq 0}{=}4x'(t)\Leftrightarrow e^{2x(t)}=1\Leftrightarrow 2x(t)=0\Leftrightarrow x(t)=0$.
Τότε $y(t)=2e^0-1=1$, άρα $M\equiv A$.

B4. Η εφαπτομένη της C_f στο A είναι η ευθεία ε: $y-1=f'(0)(x-0)\Leftrightarrow y=4x+1$.
Για $x=0$ είναι $y=1$ και για $y=0$ είναι $x=-\dfrac{1}{4}$. Η ε τέμνει τους άξονες στα σημεία $A(0,1)$ και $B\left(-\dfrac{1}{4},0\right)$. Το εμβαδόν του τριγώνου ΟΑΒ είναι: $E=\dfrac{1}{2}(OA)(OB)=\dfrac{1}{2}\cdot 1\cdot\dfrac{1}{4}=\dfrac{1}{8}$ τετραγ. μονάδες.

B5. Είναι $f''(x)=4e^{2x}>0\Rightarrow f'\uparrow\mathbb{R}$ οπότε η κλίση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της f διαρκώς αυξάνεται.

ΘΕΜΑ Γ

Γ1. Είναι $CV=10\%\Leftrightarrow\dfrac{s}{\bar{x}}=\dfrac{1}{10}\Leftrightarrow\bar{x}=10s$ (1)

$$\sum_{i=1}^{\nu}(x_i-\bar{x})^2=\frac{5}{2}\sum_{i=1}^{\nu}x_i-100\nu\Leftrightarrow\frac{1}{\nu}\sum_{i=1}^{\nu}(x_i-\bar{x})^2=\frac{5}{2}\frac{\sum_{i=1}^{\nu}x_i}{\nu}-100\Leftrightarrow s^2=\frac{5}{2}\bar{x}-100\overset{(1)}{\Rightarrow}$$
$$s^2=\frac{5}{2}10s-100\Leftrightarrow s^2-25s+100=0\Leftrightarrow s=5 \text{ ή } s=20$$

Αν $s=5$, τότε $(1)\Rightarrow\bar{x}=50<100$ δεκτή.
Αν $s=20$, τότε $\bar{x}=200$ απορρίπτεται.

Γ2. $$s^2=\frac{1}{\nu}\left(\sum_{i=1}^{\nu}x_i^2-\frac{\left(\sum_{i=1}^{\nu}x_i\right)^2}{\nu}\right)=\frac{1}{\nu}\sum_{i=1}^{\nu}x_i^2-\bar{x}^2\Leftrightarrow s^2+\bar{x}^2=\frac{1}{\nu}\sum_{i=1}^{\nu}x_i^2\Leftrightarrow 2525=\frac{1}{\nu}\sum_{i=1}^{\nu}x_i^2\Leftrightarrow\sum_{i=1}^{\nu}x_i^2=2525\nu$$

Γ3. Είναι $x_1^2+x_2^2+\ldots+x_\nu^2=2.525.000\Leftrightarrow\sum_{i=1}^{\nu}x_i^2=2.525.000\Leftrightarrow 2525\nu=2.525.000\Leftrightarrow\nu=1000$

Γ4. i. Το 68% των παρατηρήσεων βρίσκονται στο διάστημα $(\bar{x}-s,\bar{x}+s)$, δηλαδή στο διάστημα $(45,55)$, οπότε στο διάστημα $(45,50)$ βρίσκεται το 34% των τιμών, δηλαδή $\dfrac{34}{100}1000=340$ τιμές.

ii. Το 95% των παρατηρήσεων βρίσκονται στο διάστημα $(\bar{x}-2s,\bar{x}+2s)$, δηλαδή στο διάστημα $(40,60)$.
Άρα στο διάστημα $(40,45)$, βρίσκεται το $\dfrac{95\%-68\%}{2}=13{,}5\%$ των τιμών, δηλαδή $\dfrac{13{,}5}{100}1000=135$ τιμές.

ΘΕΜΑ Δ

Δ1. Η f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με
$$f'(x)=(1-x)^3-3x(1-x)^2=(1-x)^2(1-x-3x)=(1-x)^2(1-4x)$$
$$f'(x)\geq 0\Leftrightarrow(1-x)^2(1-4x)\geq 0\Leftrightarrow x=1 \text{ ή } 1-4x\geq 0\Leftrightarrow x\leq\frac{1}{4}$$
Για κάθε $x<\dfrac{1}{4}$ είναι $f'(x)>0\Rightarrow f\uparrow\left(-\infty,\dfrac{1}{4}\right]$, για κάθε $\dfrac{1}{4}<x<1$ είναι $f'(x)<0\Rightarrow f\downarrow\left[\dfrac{1}{4},1\right]$ και για κάθε $x>1$ είναι $f'(x)<0\Rightarrow f\downarrow[1,+\infty)$.

Η f έχει μέγιστο το $f\left(\frac{1}{4}\right)=\frac{1}{4}\left(1-\frac{1}{4}\right)^3=\frac{27}{256}$

Δ2. Επειδή η f έχει μέγιστο στο $x=\frac{1}{4}$, ισχύει ότι $f(x)\le f\left(\frac{1}{4}\right)$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$, άρα και

$$f(P(A))\le f\left(\frac{1}{4}\right)\Leftrightarrow P(A)(1-P(A))^3\le\frac{27}{256}\Leftrightarrow P(A)P^3(A')\le\frac{27}{256}$$

Δ3. Επειδή $A\subseteq B$, είναι $P(A)\le P(B)$ και επειδή $P(A),P(B)\in\left(-\infty,\frac{1}{4}\right]$, όπου η f είναι γνησίως αύξουσα, ισχύει ότι:

$$f(P(A))\le f(P(B))\Leftrightarrow P(A)(1-P(A))^3\le P(B)(1-P(B))^3\Leftrightarrow P(A)P^3(A')\le P(B)P^3(B')$$

Δ4. $3P^2(A)\le P(B)\left[2P(A)+P(B)\right]\Leftrightarrow 3P^2(A)\le 2P(A)P(B)+P^2(B)\Leftrightarrow$

$3P^2(A)-2P(A)P(B)-P^2(B)\le 0\Leftrightarrow 3(P(A)-P(B))\left(P(A)+\frac{P(B)}{3}\right)\le 0$ που ισχύει αφού

$0\le P(A)\le P(B)$.