

3ο Επαναληπτικό διαγώνισμα διάρκειας 3 ωρών στα Μαθηματικά Γενικής Παιδείας

ΘΕΜΑ Α

A1. Αν οι συναρτήσεις f, g είναι παραγωγίσιμες στο \mathbb{R} , να αποδείξετε ότι

$$(f(x)+g(x))' = f'(x)+g'(x), x \in \mathbb{R}$$

μ 7

A2. Σε ένα πείραμα με ισοπίθανα αποτελέσματα να δώσετε τον κλασικό ορισμό της πιθανότητας ενός ενδεχομένου A .

μ 4

A3. Αν t_1, t_2, \dots, t_n είναι οι παρατηρήσεις μιας μεταβλητής X ενός δείγματος μεγέθους n , τότε να ορίσετε τη μέση τιμή \bar{x} των παρατηρήσεων.

μ 4

A4. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας τη λέξη Σωστό ή Λάθος δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση.

α) Αν x_i είναι η τιμή μιας ποσοτικής μεταβλητής X , τότε η αθροιστική σχετική συχνότητα F_i εκφράζει το ποσοστό των παρατηρήσεων που είναι μεγαλύτερες της τιμής x_i .

β) Στην κανονική κατανομή το 95% περίπου των παρατηρήσεων βρίσκεται στο διάστημα $(\bar{x}-s, \bar{x}+s)$, όπου \bar{x} η μέση τιμή και s η τυπική απόκλιση.

γ) Η διάμεσος (δ) ενός δείγματος n παρατηρήσεων, οι οποίες έχουν διαταχθεί σε αύξουσα σειρά, ορίζεται πάντα ως η μεσαία παρατήρηση.

δ) Σε μια ομαδοποιημένη κατανομή με κλάσεις ίσου πλάτους το εμβαδόν του χωρίου που ορίζεται από το πολύγωνο σχετικών συχνοτήτων και τον οριζόντιο άξονα είναι ίσο με το μέγεθος n του δείγματος.

ε) Αν $P(A)$ είναι η πιθανότητα ενός ενδεχομένου $A = \{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k\} \neq \emptyset$ τότε $P(A) = P(\alpha_1) + P(\alpha_2) + \dots + P(\alpha_k)$

μ 5x2

ΘΕΜΑ Β

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = 2e^{\lambda x} - 1, x \in \mathbb{R}$.

B1. Να βρείτε τις τιμές του $\lambda \in \mathbb{R}$ για τις οποίες ισχύει $f''(x) - \lambda^2 f(x) = 4$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

μ 4

B2. Δίνεται η συνάρτηση $h(x) = f(x) - 2\lambda^2 x - 1$. Να βρείτε τη τιμή του $\lambda > 0$ για την οποία το ελάχιστο της h παίρνει τη μέγιστη τιμή του.

μ 6

Εστω $\lambda = 2$.

B3. Υλικό σημείο M κινείται επι της C_f . Να αποδείξετε ότι στο σημείο $A(0,1)$ ο ρυθμός μεταβολής της τεταγμένης του M είναι τετραπλάσιος από το ρυθμό μεταβολής της τετμημένης του με δεδομένο ότι το M βρίσκεται διαρκώς σε κίνηση.

μ 5

B4. Να αποδείξετε ότι η εφαπτομένη της C_f στο A σχηματίζει με τους άξονες τρίγωνο με εμβαδό $\frac{1}{8}$.

μ 5

B5. Να αποδείξετε ότι η κλίση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της f διαρκώς αυξάνεται.

μ 5

ΘΕΜΑ Γ

Τα έξοδα που δαπάνησε καθένα από n άτομα κατά τη διάρκεια μιας εκδρομής είναι x_1, x_2, \dots, x_n με μέση τιμή $\bar{x} < 100$, τυπική απόκλιση s και συντελεστή μεταβολής 10%. Έστω ότι

$$\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2 = \frac{5}{2} \sum_{i=1}^n x_i - 100n.$$

Γ1. Να βρείτε τα \bar{x}, s .

μ 7

Γ2. Να υπολογίσετε το άθροισμα των τετραγώνων των x_1, x_2, \dots, x_n συναρτήσει του πλήθους n .

μ 6

Γ3. Αν $x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2 = 2.525.000$, να βρείτε το πλήθος των ατόμων.

μ 6

Γ4. Έστω ότι η κατανομή των x_1, x_2, \dots, x_n είναι περίπου κανονική. Να βρείτε το πλήθος των τιμών που βρίσκονται στο διάστημα: i. (45,50) ii. (40,45)

μ 3+3

ΘΕΜΑ Δ

Έστω A, B ενδεχόμενα δειγματικού χώρου Ω με $A \subseteq B$ και A', B' τα συμπληρωματικά τους ενδεχόμενα. Δίνεται ακόμη η συνάρτηση $f(x) = x(1-x)^3$, $x \in \mathbb{R}$.

Δ1. Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα.

μ 6

Δ2. Να αποδείξετε ότι $P(A)P^3(A') \leq \frac{27}{256}$.

μ 6

Δ3. Αν $P(B) \leq \frac{1}{4}$, να αποδείξετε ότι $P(A)P^3(A') \leq P(B)P^3(B')$.

μ 6

Δ4. Να αποδείξετε ότι $3P^2(A) \leq P(B)[2P(A) + P(B)]$.

μ 7

Καλή τύχη στις εξετάσεις!