Ορισμός Παραγώγου

4.26. Σύμφωνα με την γεωμετρική ερμηνεία της παραγώγου είναι: $f'(2)=\lambda_\varepsilon=\varepsilon\varphi 120^\circ=\varepsilon\varphi\left(180^\circ-120^\circ\right)=-\varepsilon\varphi 60^\circ=-\sqrt{3}$. Άρα $f'(2)=-\sqrt{3}$. Στο τρίγωνο ΑΒΚ είναι: $\varepsilon\varphi\omega_1=\dfrac{AK}{BK}\Leftrightarrow \varepsilon\varphi 60^\circ=\dfrac{AK}{3}\Leftrightarrow\sqrt{3}=\dfrac{AK}{3}\Leftrightarrow AK=3\sqrt{3}$. Άρα $f(2)=3\sqrt{3}$.

4.27. $f'(1)=\lambda_\varepsilon=\dfrac{-2+1}{1-0}=-1$

4.28. Από το σχήμα διαπιστώνουμε ότι $f(-3)=-1$ και $f(4)=4$.

Επίσης $f'(-3)=\lambda_{\varepsilon_2}=\dfrac{2-0}{0-(-2)}=\dfrac{2}{2}=1$ και $f'(4)=\lambda_{\varepsilon_1}=0$.

Οπότε, η παράσταση Π είναι: $\Pi=\dfrac{f(-3)f'(4)+f(4)f'(-3)}{f(-3)-f(-4)}=\dfrac{-1\cdot 0+(-4)\cdot 1}{-1-(-4)}=\dfrac{-4}{3}$.

4.29. **α)** $f(-2)=2$, $g(2)=4$

β) $f'(-2)=g'(2)=\dfrac{4-2}{2-(-2)}=\dfrac{1}{2}$, άρα

$8f'(-2)g'(2)=g(2)-f(-2)\Leftrightarrow 8\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{1}{2}=4-2\Leftrightarrow 2=2$ που ισχύει.

4.30. $f'(5)=\varepsilon\varphi 30^\circ=\dfrac{\sqrt{3}}{3}=\dfrac{f(5)}{5-2}\Leftrightarrow f(5)=\sqrt{3}$

4.31. $f'(3)=\varepsilon\varphi 120^\circ=-\sqrt{3}$, $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(3+h)+2}{h}=f'(3)=-\sqrt{3}$

4.32. **α)** $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{f(x)-f(3)}{x-3}=\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^2-4x+3}{x-3}=\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{(x-1)\cancel{(x-3)}}{\cancel{x-3}}=2=f'(3)$

β) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{g(x)-g(1)}{x-1}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\dfrac{1}{x-2}+1}{x-1}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\cancel{x-1}}{\cancel{(x-1)}(x-2)}=-1=g'(1)$

γ) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{h(x)-h(2)}{x-2}=\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\sqrt{x^2-x}-\sqrt{2}}{x-2}=\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2-x-2}{(x-2)\left(\sqrt{x^2-x}+\sqrt{2}\right)}=$

$$=\lim_{x\to 2}\frac{\cancel{(x-2)}(x+1)}{\cancel{(x-2)}\left(\sqrt{x^2-x}+\sqrt{2}\right)}=\frac{3\sqrt{2}}{4}=h'(2)$$

δ) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\varphi(x)-\varphi(0)}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\dfrac{x+1}{x-2}+\dfrac{1}{2}}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{3\cancel{x}}{2\cancel{x}(x-2)}=-\dfrac{3}{4}=\varphi'(0)$

4.33. **α)** $\lim\limits_{x\to 1^-}\dfrac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim\limits_{x\to 1^-}\dfrac{|x^2-1|}{x-1}=\lim\limits_{x\to 1^-}\dfrac{-\cancel{(x-1)}(x+1)}{\cancel{x-1}}=-2$,

$\lim\limits_{x\to 1^+}\dfrac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim\limits_{x\to 1^-}\dfrac{|x^2-1|}{x-1}=\lim\limits_{x\to 1^-}\dfrac{\cancel{(x-1)}(x+1)}{\cancel{x-1}}=2$, δεν είναι παραγωγίσιμη στο $x_0=-1$

β) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)-f(0)}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^3-5x}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cancel{x}(x^2-5)}{\cancel{x}}=-5=f'(0)$

γ) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)-f(0)}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\eta\mu^2 x}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{\eta\mu x}{x}\eta\mu x\right)=0=f'(0)$

δ) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)-f(0)}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2\sqrt{x}+2\eta\mu x}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\left(x\sqrt{x}+2\dfrac{\eta\mu x}{x}\right)=2=f'(0)$

ε) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\cancel{\sqrt{x}-1}}{\left(\sqrt{x}-1\right)^{\cancel{2}}}=+\infty$, δεν είναι παραγωγίσιμη στο $x_0=1$

στ) $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{f(x)-f(4)}{x-4}=\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{\sqrt{x}+\dfrac{1}{\sqrt{x}}-\dfrac{5}{2}}{x-4}\underset{u\to 2}{\overset{\sqrt{x}=u}{=}}\lim\limits_{u\to 2}\dfrac{\cancel{(u-2)}(2u-1)}{2u\cancel{(u-2)}(u+2)}=\dfrac{3}{16}=f'(4)$

4.34. **α)** $\lim\limits_{x\to 2^-}f(x)=4$, $\lim\limits_{x\to 2^+}f(x)=\dfrac{11}{2}$, η f δεν είναι συνεχής στο 2, οπότε δεν είναι και παραγωγίσιμη στο σημείο αυτό.

β) $\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{f(x)-f(0)}{x}=\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{2\eta\mu x}{x}=2$, $\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{f(x)-f(0)}{x}=\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{\cancel{x}(x+2)}{\cancel{x}}=2$, άρα $f'(0)=2$

γ) $\lim\limits_{x\to 1^-}f(x)=-2$, $\lim\limits_{x\to 1^+}f(x)=\dfrac{1}{3}$, η f δεν είναι συνεχής στο 1, οπότε δεν είναι και παραγωγίσιμη στο σημείο αυτό.

δ) $\lim\limits_{x\to 1^-}\dfrac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim\limits_{x\to 1^-}\dfrac{3x^2-3}{x-1}=\lim\limits_{x\to 1^-}\dfrac{3\cancel{(x-1)}(x+1)}{\cancel{x-1}}=6$ και

$\lim\limits_{x\to 1^+}\dfrac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim\limits_{x\to 1^-}\dfrac{6x-6}{x-1}=\lim\limits_{x\to 1^-}\dfrac{6\cancel{(x-1)}}{\cancel{x-1}}=6$, άρα $f'(1)=6$

4.35. **α)** Για $x=0$ είναι $f(0)=0^2-0+\eta\mu 0=0$.

Αν $x>0$ τότε $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{f(x)-f(0)}{x}=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{\dfrac{x}{\ln x}}{x}=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{1}{\ln x}=0$, γιατί $\lim\limits_{x\to 0^+}\ln x=-\infty$.

Αν $x<0$ τότε $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{f(x)-f(0)}{x}=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{x^2-x+\eta\mu x}{x}=\lim\limits_{x\to 0^+}\left(x-1+\dfrac{\eta\mu x}{x}\right)=0$.

Δηλαδή $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{f(x)-f(0)}{x}=\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{f(x)-f(0)}{x}=0$, άρα η f είναι παραγωγίσιμη στο $x_0=0$ με $f'(0)=0$.

β) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim\limits_{x\to 0}x\eta\mu\dfrac{1}{x}$

$\left|x\eta\mu\dfrac{1}{x}\right|=|x|\left|\eta\mu\dfrac{1}{x}\right|\le|x|\Leftrightarrow-|x|\le x\eta\mu\dfrac{1}{x}\le|x|$

$\lim\limits_{x\to 0}|x|=0=\lim\limits_{x\to 0}(-|x|)$, οπότε από το κριτήριο παρεμβολής είναι και

$\lim\limits_{x\to 0}x\eta\mu\dfrac{1}{x}=0=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}$, άρα $f'(0)=0$

4.36. Είναι: $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{\dfrac{x}{1+e^{\frac{1}{x}}}-0}{x}=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{1}{1+e^{\frac{1}{x}}}$.

Θέτουμε $\dfrac{1}{x}=u$, τότε όταν $x\to 0^+$ είναι $u\to+\infty$ $(x>0)$. Οπότε:

$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim\limits_{u\to+\infty}\dfrac{1}{1+e^u}=0$. Άρα, η f είναι παραγωγίσιμη στο $x_0=0$, με $f'(0)=0$.

4.37. **α)** $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\cancel{\sqrt[3]{x-1}}}{\left(\sqrt[3]{x-1}\right)^{\cancel{3}\,2}}=+\infty$, άρα η f δεν είναι παραγωγίσιμη στο 1.

β) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{f(x)-f(2)}{x-2}=\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\sqrt[3]{x^2}-\sqrt[3]{4}}{x-2}=\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\left(\sqrt[3]{x^2}-\sqrt[3]{4}\right)\left[\left(\sqrt[3]{x^2}\right)^2+\sqrt[3]{x^2}\sqrt[3]{4}+\left(\sqrt[3]{4}\right)^2\right]}{(x-2)\left[\left(\sqrt[3]{x^2}\right)^2+\sqrt[3]{x^2}\sqrt[3]{4}+\left(\sqrt[3]{4}\right)^2\right]}=$

$$=\lim_{x\to 2}\frac{\left(\sqrt[3]{x^2}\right)^3-\left(\sqrt[3]{4}\right)^3}{(x-2)\left[\left(\sqrt[3]{x^2}\right)^2+\sqrt[3]{x^2}\sqrt[3]{4}+\left(\sqrt[3]{4}\right)^2\right]}=$$

$$=\lim_{x\to 2}\frac{\cancel{(x-2)}(x+2)}{\cancel{(x-2)}\left[\left(\sqrt[3]{x^2}\right)^2+\sqrt[3]{x^2}\sqrt[3]{4}+\left(\sqrt[3]{4}\right)^2\right]}=\frac{4}{6\sqrt[3]{2}}=\frac{\sqrt[3]{4}}{3}.$$

Άρα $f'(2)=\dfrac{\sqrt[3]{4}}{3}$

4.38. **α)** $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{f(x)-f(2)}{x-2}=\lim\limits_{x\to 1^-}\dfrac{\cancel{x^2}-1-\cancel{x^2}+16+x^3-x-21}{x-2}=\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\cancel{(x-2)}(x^2+2x+3)}{\cancel{x-2}}=11$

άρα $f'(2)=11$.

β) $\lim\limits_{x\to1^-}\dfrac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim\limits_{x\to1^-}\dfrac{-x^2+1-x^2+16-x^3+x-15}{x-1}=\lim\limits_{x\to1^-}\dfrac{\cancel{(x-1)}(-x^2-3x-2)}{\cancel{x-1}}=-6$

$\lim\limits_{x\to1^+}\dfrac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim\limits_{x\to1^+}\dfrac{\cancel{x^2}-1-\cancel{x^2}+16+x^3-x-15}{x-1}=\lim\limits_{x\to1^-}\dfrac{x\cancel{(x-1)}(x+1)}{\cancel{x-1}}=2$

άρα η f δεν είναι παραγωγίσιμη στο 1.

4.39. $\lim\limits_{x\to2}\dfrac{g(x)-g(2)}{x-2}=\lim\limits_{x\to2}\dfrac{(x-1)\cancel{(x-2)}f(x)}{\cancel{x-2}}=f(2)$, άρα $g'(2)=f(2)$.

4.40. $g'(2)=\lim\limits_{x\to2}\dfrac{g(x)-g(2)}{x-2}=\lim\limits_{x\to2}\dfrac{2xf(x)-4f(2)}{x-2}=\lim\limits_{x\to2}\dfrac{2xf(x)-2xf(2)+2xf(2)-4f(2)}{x-2}=$

$=\lim\limits_{x\to2}\dfrac{2x\big(f(x)-f(2)\big)+2(x-2)f(2)}{x-2}=\lim\limits_{x\to2}\left(2x\dfrac{f(x)-f(2)}{x-2}+2f(2)\right)=2f(2)$.

4.41. $g'(1)=\lim\limits_{x\to1}\dfrac{g(x)-g(1)}{x-1}=\lim\limits_{x\to1}\dfrac{3xf(x)+1-3f(1)-1}{x-1}=\lim\limits_{x\to1}\dfrac{3xf(x)-3xf(1)+3xf(1)-3f(1)}{x-1}=$

$=\lim\limits_{x\to1}\dfrac{3x\big(f(x)-f(1)\big)+3f(1)(x-1)}{x-1}=\lim\limits_{x\to1}\left(3x\dfrac{f(x)-f(1)}{x-1}+3f(1)\right)=0$, άρα

$g'(1)=0$

4.42. $\lim\limits_{x\to1^-}\dfrac{g(x)-g(1)}{x-1}=\lim\limits_{x\to1^-}\dfrac{f(3x+1)-f(4)}{x-1}\underset{u\to4^-}{\overset{3x+1=u}{=}}\lim\limits_{u\to4^-}\dfrac{f(u)-f(4)}{\frac{u-1}{3}-1}=$

$\lim\limits_{u\to4^-}3\dfrac{f(u)-f(4)}{u-4}=3f'(4)=0$

$\lim\limits_{x\to1^+}\dfrac{g(x)-g(1)}{x-1}=\lim\limits_{x\to1^+}\dfrac{f(6x-2)-f(4)}{x-1}\underset{u\to4^+}{\overset{6x-2=u}{=}}\lim\limits_{u\to4^+}\dfrac{f(u)-f(4)}{\frac{u+2}{6}-1}=$

$\lim\limits_{u\to4^+}6\dfrac{f(u)-f(4)}{u-4}=6f'(4)=0$, άρα $g'(1)=0$.

4.43. **α)** $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{g(x)-g(0)}{x}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{2x^{\cancel{2}}f(x)-3x}{\cancel{x}}=-3$, άρα $g'(0)=-3$.

β) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{g(x)-g(0)}{x}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(x)-\dfrac{x}{f(x)}-2}{x}=\lim\limits_{x\to0}\left(\dfrac{f(x)-2}{x}-\dfrac{1}{f(x)}\right)=1-\dfrac{1}{2}=\dfrac{1}{2}$, άρα

$g'(0)=\dfrac{1}{2}$.

γ) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{g(x)-g(0)}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{(x^2+2x)f(x)}{x}-\frac{3\cancel{x}}{\cancel{x}}\right)=$,

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{\cancel{x}(x+2)f(x)}{\cancel{x}}-3\right)=2f(0)-3=1 \text{ άρα } g'(0)=1.$$

δ) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{g(x)-g(0)}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\frac{f^2(x)+x+x^2}{f(x)}-2}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{f^2(x)+x+x^2-2f(x)}{xf(x)}=$

$$\lim_{x\to 0}\left[\frac{(f(x)-2)}{x}+\frac{\cancel{x}(x+1)}{\cancel{x}f(x)}\right]=\frac{3}{2}\text{ , άρα } g'(0)=\frac{3}{2}.$$

4.44. Είναι: $\lim\limits_{x\to \frac{1}{2}^-}\frac{g(x)-g\left(\frac{1}{2}\right)}{x-\frac{1}{2}}=2\lim\limits_{x\to \frac{1}{2}^-}\frac{f(2x)-f(1)}{2x-1}\overset{2x=h}{=}2\lim\limits_{h\to 1^-}\frac{f(h)-f(1)}{h-1}=2f'(1)$

$$\lim_{x\to \frac{1}{2}^+}\frac{g(x)-g\left(\frac{1}{2}\right)}{x-\frac{1}{2}}=2\lim_{x\to \frac{1}{2}^+}\frac{f(2x-1)-f(1)}{2x-1}\overset{2x-1=h}{=}2\lim_{h\to 0^+}\frac{f(h)-f(0)}{h}=2f'(0)$$

Για να είναι η f παραγωγίσιμη στο $\frac{1}{2}$ πρέπει και αρκεί:

$$\lim_{x\to \frac{1}{2}^-}\frac{g(x)-g\left(\frac{1}{2}\right)}{x-\frac{1}{2}}=\lim_{x\to \frac{1}{2}^+}\frac{g(x)-g\left(\frac{1}{2}\right)}{x-\frac{1}{2}}\Leftrightarrow 2f'(1)=2f'(0)\Leftrightarrow f'(1)=f'(0)$$

4.45. Είναι $f'(0)=0\Leftrightarrow \lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x}=0\Leftrightarrow \lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}=0 \quad (1)$.

Εχουμε $\lim\limits_{x\to 0}\frac{h(x)-h(0)}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(4x)\eta\mu\frac{4}{x}}{x}$

Είναι $\left|\frac{f(4x)\eta\mu\frac{4}{x}}{x}\right|=\left|\frac{f(4x)}{x}\right|\left|\eta\mu\frac{4}{x}\right|\le\left|\frac{f(4x)}{x}\right|\Leftrightarrow -\left|\frac{f(4x)}{x}\right|\le\frac{f(4x)\eta\mu\frac{4}{x}}{x}\le\left|\frac{f(4x)}{x}\right|$.

Όμως $\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(4x)}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\left[4\frac{f(4x)}{4x}\right]\overset{4x=u}{=}\lim\limits_{u\to 0}\left(4\frac{f(u)}{u}\right)\overset{(1)}{=}4\cdot 0=0$, οπότε

$\lim\limits_{x\to 0}\left|\frac{f(4x)}{x}\right|=\lim\limits_{x\to 0}\left(-\left|\frac{f(4x)}{x}\right|\right)=0$ και λόγω του κριτηρίου παρεμβολής είναι και

$\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(4x)\eta\mu\frac{4}{x}}{x}=0$. Άρα η h είναι παραγωγίσιμη στο $x_0=0$ με $h'(0)=0$.

4.46. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)-f(0)}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{g(x)}{x}\eta\mu\dfrac{2}{x^3}\right)$

$\left|\dfrac{g(x)}{x}\eta\mu\dfrac{2}{x^3}\right|=\left|\dfrac{g(x)}{x}\right|\left|\eta\mu\dfrac{2}{x^3}\right|\le\left|\dfrac{g(x)}{x}\right|\Leftrightarrow-\left|\dfrac{g(x)}{x}\right|\le\dfrac{g(x)}{x}\eta\mu\dfrac{2}{x^3}\le\left|\dfrac{g(x)}{x}\right|$.

Επειδή $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{g(x)}{x}=g'(0)=0$, από το Κ.Π. είναι και $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{g(x)}{x}\eta\mu\dfrac{2}{x^3}\right)=0$, άρα

$f'(0)=0$.

4.47. Για $x=3$ είναι $10\le f(3)\le 10\Leftrightarrow f(3)=10$

$6x-x^2+1\le f(x)\le x^2-6x+19\Leftrightarrow 6x-x^2-9\le f(x)-f(3)\le x^2-6x+9$

Αν $x>3$, τότε

$\dfrac{6x-x^2-9}{x-3}\le\dfrac{f(x)-f(3)}{x-3}\le\dfrac{x^2-6x+9}{x-3}\Leftrightarrow\dfrac{-(x-3)^{\cancel{2}}}{\cancel{x-3}}\le\dfrac{f(x)-f(3)}{x-3}\le\dfrac{(x-3)^{\cancel{2}}}{\cancel{x-3}}$ και

επειδή $\lim\limits_{x\to 3}(x-3)^2=0$, από το Κ.Π είναι και $\lim\limits_{x\to 3^+}\dfrac{f(x)-f(3)}{x-3}=0$.

Όμοια και $\lim\limits_{x\to 3^-}\dfrac{f(x)-f(3)}{x-3}=0$, άρα $f'(3)=0$.

4.48. Για $x=0$ είναι $\eta\mu 0-2\cdot 0^3\le f(0)\le\eta\mu 0+2\cdot 0^2\Leftrightarrow 0\le f(0)\le 0\Leftrightarrow f(0)=0$.

Αν $x>0$ τότε $\eta\mu x-2x^3\le f(x)\le\eta\mu x+2x^2\Leftrightarrow\dfrac{\eta\mu x}{x}-2x^2\le\dfrac{f(x)-f(0)}{x}\le\dfrac{\eta\mu x}{x}+2x$.

Επειδή $\lim\limits_{x\to 0^+}\left(\dfrac{\eta\mu x}{x}-2x^2\right)=1$ και $\lim\limits_{x\to 0^+}\left(\dfrac{\eta\mu x}{x}+2x\right)=1$, είναι και $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{f(x)-f(0)}{x}=1$

(1).

Αν $x<0$ τότε $\eta\mu x-2x^3\le f(x)\le\eta\mu x+2x^2\Leftrightarrow\dfrac{\eta\mu x}{x}-2x^2\ge\dfrac{f(x)-f(0)}{x}\ge\dfrac{\eta\mu x}{x}+2x$.

Επειδή $\lim\limits_{x\to 0^-}\left(\dfrac{\eta\mu x}{x}-2x^2\right)=1$ και $\lim\limits_{x\to 0^-}\left(\dfrac{\eta\mu x}{x}+2x\right)=1$, είναι και $\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{f(x)-f(0)}{x}=1$

(2).

Από τις σχέσεις (1), (2) προκύπτει ότι $\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{f(x)-f(0)}{x}=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{f(x)-f(0)}{x}=1$ άρα η f είναι παραγωγίσιμη στο $x_0=0$ με $f'(0)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)-f(0)}{x}=1$.

4.49. Για $x=e$ είναι $f(e)\le g(e)\le f(e)\Leftrightarrow g(e)=f(e)$.

Για $x>e$ είναι $f(x)-f(e)\le g(x)-g(e)\le f(x)-f(e)+(x-e)^3\Leftrightarrow$

$\dfrac{f(x)-f(e)}{x-e}\le\dfrac{g(x)-g(e)}{x-e}\le\dfrac{f(x)-f(e)}{x-e}+(x-e)^2$

Είναι $\lim\limits_{x\to e^+}\dfrac{f(x)-f(e)}{x-e}=f'(e)=3$ και $\lim\limits_{x\to e^+}\left(\dfrac{f(x)-f(e)}{x-e}+(x-e)^2\right)=f'(e)=3$, άρα και

$\lim\limits_{x\to e^+}\dfrac{g(x)-g(e)}{x-e}=3$ (1)

Όμοια για $x<e$ είναι $\lim\limits_{x\to e^-}\dfrac{g(x)-g(e)}{x-e}=3$ (2).

Από (1),(2) $\Rightarrow g'(e)=3$.

4.50. Για $x>1$ είναι $f(x)-f(1)\le g(x)-g(1)+x^2-x \Leftrightarrow$

$\dfrac{f(x)-f(1)}{x-1}\le\dfrac{g(x)-g(1)}{x-1}+\dfrac{x\cancel{(x-1)}}{\cancel{x-1}}$, οπότε

$\lim\limits_{x\to 1^+}\dfrac{f(x)-f(1)}{x-1}\le\lim\limits_{x\to 1^+}\left(\dfrac{g(x)-g(1)}{x-1}+x\right)\Leftrightarrow f'(1)\le g'(1)+1$ (1).

Για $x<1$ είναι $f(x)-f(1)\le g(x)-g(1)+x^2-x \Leftrightarrow$

$\dfrac{f(x)-f(1)}{x-1}\ge\dfrac{g(x)-g(1)}{x-1}+\dfrac{x\cancel{(x-1)}}{\cancel{x-1}}$, οπότε

$\lim\limits_{x\to 1^-}\dfrac{f(x)-f(1)}{x-1}\ge\lim\limits_{x\to 1^-}\left(\dfrac{g(x)-g(1)}{x-1}+x\right)\Leftrightarrow f'(1)\ge g'(1)+1$ (2).

Από (1),(2) $\Rightarrow f'(1)=g'(1)+1$

4.51. Η σχέση (1) για $x=0$ γίνεται: $|f(0)-g(0)|\le 0^2\Leftrightarrow f(0)-g(0)=0\Leftrightarrow f(0)=g(0)$

Από την (1) έχουμε: $-x^2\le f(x)-g(x)\le x^2\Leftrightarrow g(x)-x^2\le f(x)\le x^2+g(x)\Leftrightarrow$

$g(x)-g(0)-x^2\le f(x)-f(0)\le x^2+g(x)-g(0)$ (2)

Αν $x>0$ είναι: $\dfrac{g(x)-g(0)}{x}-x\le\dfrac{f(x)-f(0)}{x}\le\dfrac{g(x)-g(0)}{x}+x$

Είναι: $\lim\limits_{x\to 0^+}\left(\dfrac{g(x)-g(0)}{x}-x\right)=g'(0)=2$ και $\lim\limits_{x\to 0^+}\left(\dfrac{g(x)-g(0)}{x}+x\right)=g'(0)=2$

άρα και $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{f(x)-f(0)}{x}=2$ (3).

Αν $x<0$ η (2) γίνεται: $\dfrac{g(x)-g(0)}{x}-x\ge\dfrac{f(x)-f(0)}{x}\ge\dfrac{g(x)-g(0)}{x}+x\Leftrightarrow$

$\dfrac{g(x)-g(0)}{x}+x\le\dfrac{f(x)-f(0)}{x}\le\dfrac{g(x)-g(0)}{x}-x$

Είναι: $\lim\limits_{x\to 0^-}\left(\dfrac{g(x)-g(0)}{x}-x\right)=g'(0)=2$ και $\lim\limits_{x\to 0^-}\left(\dfrac{g(x)-g(0)}{x}+x\right)=g'(0)=2$

άρα και $\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{f(x)-f(0)}{x}=2$ (4).

Από τις σχέσεις (3), (4) προκύπτει: $\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{f(x)-f(0)}{x}=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{f(x)-f(0)}{x}=2$

Οπότε η f είναι παραγωγίσιμη στο $x_0 = 0$ με $f'(0) = 2$.

4.52. $|f(x)| \le \frac{|\eta\mu x|}{\sqrt{1+x^2}} \Leftrightarrow -\frac{|\eta\mu x|}{\sqrt{1+x^2}} \le f(x) \le \frac{|\eta\mu x|}{\sqrt{1+x^2}}$.

Επειδή $\lim\limits_{x\to 0}\frac{|\eta\mu x|}{\sqrt{1+x^2}} = 0$, είναι και $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = 0 = f(0)$

$\lim\limits_{x\to 0}\frac{\varphi(x)-\varphi(0)}{x} = \lim\limits_{x\to 0}\frac{\cancel{x}f(x)}{\cancel{x}} = 0$, άρα $\varphi'(0) = 0$.

4.53. $f(x) \le g(x) \le h(x) \Leftrightarrow f(x)-f(0) \le g(x)-g(0) \le h(x)-h(0)$

Αν $x > 0$, τότε $\frac{f(x)-f(0)}{x} \le \frac{g(x)-g(0)}{x} \le \frac{h(x)-h(0)}{x}$

Είναι $\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x} = f'(0) = 2014$ και $\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{h(x)-h(0)}{x} = h'(0) = 2014$, άρα και $\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{g(x)-g(0)}{x} = 2014$. Όμοια για $x < 0$ είναι $\lim\limits_{x\to 0^-}\frac{g(x)-g(0)}{x} = 2014$, άρα $g'(0) = 2014$.

4.54. Για $x \ne 2$ είναι $\frac{f(x)}{x-2} \ge \frac{x^2-\eta\mu x}{(x-2)^2}$. Επειδή $\lim\limits_{x\to 2}\frac{x^2-\eta\mu x}{(x-2)^2} = +\infty$, είναι και

$\lim\limits_{x\to 2}\frac{f(x)}{x-2} = +\infty$, οπότε

η f δεν είναι παραγωγίσιμη στο 2.

4.55. **α)** Για $x \ne 0$ είναι $f(x) \ge \frac{2x^3+\eta\mu x}{|x|}$, αντικαθιστώντας όπου x το $-x$, έχουμε:

$f(-x) \ge \frac{2(-x)^3+\eta\mu(-x)}{|-x|} \Leftrightarrow -f(x) \ge \frac{-2x^3-\eta\mu x}{|x|} \Leftrightarrow f(x) \le \frac{2x^3+\eta\mu x}{|x|}$.

Άρα $f(x) = \frac{2x^3+\eta\mu x}{|x|}$, $x \ne 0$. Επειδή $f(-x) = -f(x)$ για $x = 0$ είναι

$f(0) = -f(0) \Leftrightarrow 2f(0) = 0 \Leftrightarrow f(0) = 0$.

β) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x} = \lim\limits_{x\to 0}\frac{2x^3+\eta\mu x}{x|x|} = \lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{1}{|x|}\left(2x^2+\frac{\eta\mu x}{x}\right)\right) = +\infty$, άρα η f δεν είναι

παραγωγίσιμη στο 0.

4.56. Επειδή ό συναρτήσεις f, g είναι παραγωγίσιμες στο $x_0 = 0$, ισχύει:

$f'(0) = \lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x}$ και $g'(0) = \lim\limits_{x\to 0}\frac{g(x)-g(0)}{x}$.

Είναι

$$f'(0)+g'(0)=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x}+\lim_{x\to 0}\frac{g(x)-g(0)}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)+g(x)-g(0)}{x}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)+g(x)-(f(0)+g(0))}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)+g(x)-1}{x}.$$

Είναι $f(x)+g(x)\geq \eta\mu x+1 \Leftrightarrow f(x)+g(x)-1\geq \eta\mu x$.

Αν $x>0$, τότε $\frac{f(x)+g(x)-1}{x}\geq\frac{\eta\mu x}{x}$ και $\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{f(x)+g(x)-1}{x}\geq\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{\eta\mu x}{x}$,

δηλαδή $f'(0)+g'(0)\geq 1$ (1).

Αν $x<0$, τότε $\frac{f(x)+g(x)-1}{x}\leq\frac{\eta\mu x}{x}$ και $\lim\limits_{x\to 0^-}\frac{f(x)+g(x)-1}{x}\leq\lim\limits_{x\to 0^-}\frac{\eta\mu x}{x}$,

δηλαδή $f'(0)+g'(0)\leq 1$ (2).

Από τις σχέσεις $(1),(2)$ προκύπτει ότι: $f'(0)+g'(0)=1$.

4.57. Για $x=0$ είναι $|f(0)|\leq 0\Leftrightarrow f(0)=0$

$$|f(x)|\leq x^4+x^8 \overset{x\neq 0}{\Leftrightarrow}\left|\frac{f(x)}{x}\right|\leq x^3+x^7\Leftrightarrow -x^3-x^7\leq g(x)\leq x^3+x^7$$

Επειδή $\lim\limits_{x\to 0}(x^3+x^7)=0$, από το Κ.Π. είναι και $\lim\limits_{x\to 0}g(x)=0=g(0)$.

$$|f(x)|\leq x^4+x^8 \overset{x\neq 0}{\Leftrightarrow}\left|\frac{f(x)}{x^2}\right|\leq x^2+x^6\Leftrightarrow -x^2-x^6\leq\frac{f(x)}{x^2}\leq x^2+x^6\Leftrightarrow$$

$-x^2-x^6\leq\frac{g(x)}{x}\leq x^2+x^6$. Επειδή $\lim\limits_{x\to 0}(x^2+x^6)=0$, από το Κ.Π είναι και

$\lim\limits_{x\to 0}\frac{g(x)}{x}=0$, δηλαδή $g'(0)=0$.

4.58. **α)** Για $x=0$ είναι $|f(0)|\leq 0\Leftrightarrow f(0)=0$.

$$|f(x)-3x|\leq\eta\mu^2x\Leftrightarrow -\eta\mu^2x\leq f(x)-3x\leq\eta\mu^2x\Leftrightarrow 3x-\eta\mu^2x\leq f(x)\leq 3x+\eta\mu^2x$$

Για $x>0$ είναι: $3-\eta\mu x\frac{\eta\mu x}{x}\leq\frac{f(x)}{x}\leq 3+\eta\mu x\frac{\eta\mu x}{x}$.

Επειδή $\lim\limits_{x\to 0^+}\left(3+\eta\mu x\frac{\eta\mu x}{x}\right)=\lim\limits_{x\to 0^+}\left(3-\eta\mu x\frac{\eta\mu x}{x}\right)=3$, είναι και $\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{f(x)}{x}=3$.

Όμοια και $\lim\limits_{x\to 0^-}\frac{f(x)}{x}=3$, οπότε $f'(0)=3$

β) $$\lim_{x\to 0}\frac{f(9x)-f(x)}{f(2x)}=\lim_{x\to 0}\frac{9\frac{f(9x)}{9x}-\frac{f(x)}{x}}{2\frac{f(2x)}{2x}}=\frac{27-3}{6}=4,\text{ γιατί }\lim_{x\to 0}\frac{f(kx)}{kx}\overset{kx=u}{\underset{u\to 0}{=}}\lim_{u\to 0}\frac{f(u)}{u}=3$$

4.59. Στη σχέση $f(x)\geq|x|$ για $x=0$ προκύπτει $f(0)\geq 0$. Πρέπει να αποκλείσουμε την περίπτωση όπου $f(0)=0$. Εστω $f(0)=0$.

- Αν $x>0$ τότε $f(x)\geq x \Leftrightarrow \frac{f(x)}{x}\geq 1$ και $\frac{f(x)-f(0)}{x-0}\geq 1$ άρα $\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x}\geq 1$
  δηλαδή $f'(0)\geq 1$ (1)
- Αν $x<0$ τότε $f(x)\geq -x \overset{:x<0}{\Leftrightarrow} \frac{f(x)}{x}\leq -1$ οπότε $\frac{f(x)-f(0)}{x}\leq -1$ άρα
  $\lim\limits_{x\to 0^-}\frac{f(x)-f(0)}{x}\leq -1$, δηλαδή $f'(0)\leq -1$ (2)

Από (1) και (2) καταλήγουμε σε άτοπο, άρα $f(0)>0$.

4.60. Η σχέση (1) για $x=1$ γίνεται:

$f^3(1)+2f(1)=1-3+2 \Leftrightarrow f(1)\left(f^2(1)+2\right)=0 \Leftrightarrow f(1)=0$ ή $f^2(1)=-2$ αδύνατο.

Επειδή η f είναι παραγωγίσιμη στο $x_0=1$ θα είναι και συνεχής σε αυτό, δηλαδή:

$\lim\limits_{x\to 1}f(x)=f(1)=0$.

Για $x\neq 1$ έχουμε: $f^3(x)+2f(x)=x^2-3x+2 \Leftrightarrow$

$f(x)\left(f^2(x)+2\right)=(x-1)(x-2) \Leftrightarrow \frac{f(x)}{x-1}\left(f^2(x)+2\right)=x-2$, άρα

$\lim\limits_{x\to 1}\left[\frac{f(x)}{x-1}\left(f^2(x)+2\right)\right]=\lim\limits_{x\to 1}(x-2) \Leftrightarrow f'(1)\cdot 2=-1 \Leftrightarrow f'(1)=-\frac{1}{2}$.

4.61. Στη σχέση $g^3(x)+g(x)+4=x^2$ (1) θέτουμε $x=2$, οπότε

$g^3(2)+g(2)+4=4 \Leftrightarrow g(2)\left[g^2(2)+1\right]=0 \Leftrightarrow g(2)=0$, γιατί $g^2(2)+1\neq 0$.

Η συνάρτηση g είναι παραγωγίσιμη στο $x_0=2$, οπότε θα είναι και συνεχής, άρα

$\lim\limits_{x\to 2}g(x)=g(2)=0$ και $g'(2)=\lim\limits_{x\to 2}\frac{g(x)-g(2)}{x-2}=\lim\limits_{x\to 2}\frac{g(x)}{x-2}$.

Από την (1) έχουμε $g^3(x)+g(x)=x^2-4 \Leftrightarrow g(x)\left[g^2(x)+1\right]=(x-2)(x+2)$.

Για $x\neq 2$ είναι $\frac{g(x)}{x-2}\cdot\left[g^2(x)+1\right]=x+2 \Leftrightarrow \frac{g(x)}{x-2}=\frac{x+2}{g^2(x)+1}$, οπότε

$\lim\limits_{x\to 2}\frac{g(x)}{x-2}=\lim\limits_{x\to 2}\frac{x+2}{g^2(x)+1}=\frac{2+2}{g^2(2)+1}=4$. Άρα $g'(2)=4$.

4.62. Για $h=0$ είναι $f(-3)=2$

$\lim\limits_{h\to 0}\frac{f(-3+h)-f(-3)}{h}=\lim\limits_{h\to 0}\frac{2-2h+3h^2-4h^3-2}{h}=\lim\limits_{h\to 0}\frac{\cancel{h}\left(-2+3h-4h^2\right)}{\cancel{h}}=-2$,

άρα $f'(-3)=-2$.

4.63. Για $x=1$ είναι $f^3(1)+2f(1)=0 \Leftrightarrow f(1)\left(f^2(1)+2\right)=0 \Leftrightarrow f(1)=0$ ή $f^2(1)=-2$ άτοπο.

$$f(x)\left(f^2(x)+2\right)=x^2-1 \overset{x\neq 1}{\Leftrightarrow} \frac{f(x)}{x-1}\left(f^2(x)+2\right)=\frac{\cancel{(x-1)}(x+1)}{\cancel{x-1}} \Leftrightarrow \frac{f(x)}{x-1}=\frac{x+1}{f^2(x)+2},$$

άρα και $\lim\limits_{x\to 1}\frac{f(x)}{x-1}=\lim\limits_{x\to 1}\frac{x+1}{f^2(x)+2}=\frac{2}{2}=1$, άρα $f'(1)=1$.

4.64. Για $x=2$ είναι $f^3(2)+f(2)=0 \Leftrightarrow f(2)\left(f^2(2)+1\right)=0 \Leftrightarrow f(2)=0$ ή $f^2(2)=-1$ άτοπο.

$f(x)\left(f^2(x)+1\right)=(x-2)(x+1) \overset{x\neq 2}{\Leftrightarrow} \frac{f(x)}{x-2}=\frac{x+1}{f^2(x)+1}$ και $\lim\limits_{x\to 2}\frac{f(x)}{x-2}=\lim\limits_{x\to 2}\frac{x+1}{f^2(x)+1}=3$,

άρα $f'(2)=3$.

4.65. Για $x=1$ είναι $f^3(1)+4f(1)=0 \Leftrightarrow f(1)\left(f^2(1)+4\right)=0 \Leftrightarrow f(1)=0$ ή $f^2(1)=-4$ άτοπο.

Για $x=3$ είναι $f^3(3)+4f(3)=0 \Leftrightarrow f(3)\left(f^2(3)+4\right)=0 \Leftrightarrow f(3)=0$ ή $f^2(3)=-4$ άτοπο.

Είναι $f(x)\left(f^2(x)+4\right)=(x-1)(x-3) \overset{x\neq 1}{\Leftrightarrow} \frac{f(x)}{x-1}=\frac{x-3}{f^2(x)+4}$ και

$\lim\limits_{x\to 1}\frac{f(x)}{x-1}=\lim\limits_{x\to 1}\frac{x-3}{f^2(x)+4}=-\frac{1}{2}$, άρα $f'(1)=-\frac{1}{2}$.

Είναι $f(x)\left(f^2(x)+4\right)=(x-1)(x-3) \overset{x\neq 3}{\Leftrightarrow} \frac{f(x)}{x-3}=\frac{x-1}{f^2(x)+4}$ και

$\lim\limits_{x\to 3}\frac{f(x)}{x-3}=\lim\limits_{x\to 3}\frac{x-1}{f^2(x)+4}=\frac{1}{2}$, άρα $f'(3)=\frac{1}{2}=-f'(1)$.

4.66. Για $x=0$ είναι $f(0)=0$.

Για $x\neq 0$ είναι $2\frac{f^3(x)}{x^3}-2\frac{\eta\mu x}{x}\frac{f^2(x)}{x^2}+\frac{f(x)}{x}=2-\frac{\eta\mu^2 x}{x^2}$ και

$$\lim_{x\to 0}\left(2\frac{f^3(x)}{x^3}-2\frac{\eta\mu x}{x}\frac{f^2(x)}{x^2}+\frac{f(x)}{x}\right)=\lim_{x\to 0}\left(2-\frac{\eta\mu^2 x}{x^2}\right) \Leftrightarrow$$

$$2\left(f'(0)\right)^3-2\left(f'(0)\right)^2+f'(0)=1 \Leftrightarrow 2\left(f'(0)\right)^3-2\left(f'(0)\right)^2+f'(0)-1=0 \Leftrightarrow$$

$2\left(f'(0)\right)^2\left(f'(0)-1\right)+f'(0)-1=0 \Leftrightarrow \left(f'(0)-1\right)\left(2\left(f'(0)\right)^2+1\right)=0 \Leftrightarrow f'(0)=1$ ή

$2\left(f'(0)\right)^2=-1$ που είναι αδύνατο.

4.67. **α)** Για $x=0$ είναι $\left(f(0)-2\right)^2+\left(g(0)+3\right)^2=0 \Leftrightarrow f(0)=2$ και $g(0)=3$ και επειδή οι f,g

είναι συνεχείς στο 0, είναι και $\lim\limits_{x\to 0}f(x)=2$ και $\lim\limits_{x\to 0}g(x)=3$.

β) Για $x\neq 0$ είναι $\frac{\left(f(x)-2\right)^2}{x^2}+\frac{\left(g(x)+3\right)^2}{x^2}=\frac{\left|\sqrt{x^2+9}-3\right|}{x^2} \Leftrightarrow$

$$\left(\frac{f(x)-2}{x}\right)^2+\left(\frac{g(x)+3}{x}\right)^2=\left|\frac{\cancel{x^2}}{\cancel{x^2}\left(\sqrt{x^2+9}+3\right)}\right| \text{ και}$$

$$\lim_{x\to 0}\left[\left(\frac{f(x)-2}{x}\right)^2+\left(\frac{g(x)+3}{x}\right)^2\right]=\lim_{x\to 0}\frac{1}{\sqrt{x^2+9}+3}\Leftrightarrow\left[f'(0)\right]^2+\left[g'(0)\right]^2=\frac{1}{6}$$

4.68. Για $x=1$ είναι $f^2(1)+2f(1)=0\Leftrightarrow f(1)\big(f(1)+2\big)=0\Leftrightarrow f(1)=0$ ή $f(1)=-2$ άτοπο.

Για $x\neq 1$ είναι $f(x)\dfrac{f(x)}{x-1}+2x\dfrac{f(x)}{x-1}=\dfrac{\cancel{(x-1)}(x+1)}{\cancel{x-1}}$ και

$$\lim_{x\to 1}\left(f(x)\frac{f(x)}{x-1}+2x\frac{f(x)}{x-1}\right)=\lim_{x\to 1}(x+1)\Leftrightarrow f(1)f'(1)+2f'(1)=2\Leftrightarrow f'(1)=1$$

4.69. Για $x\neq 0$ είναι $\dfrac{f(x)}{x}\dfrac{\eta\mu x}{x}+\dfrac{f(\eta\mu x)}{\eta\mu x}\dfrac{\eta\mu x}{x}=4$ και

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{f(x)}{x}\frac{\eta\mu x}{x}+\frac{f(\eta\mu x)}{\eta\mu x}\frac{\eta\mu x}{x}\right)=4\Leftrightarrow f'(0)+f'(0)=4\Leftrightarrow f'(0)=2, \text{ γιατί}$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(\eta\mu x)}{\eta\mu x}\underset{u\to 0}{\overset{\eta\mu x=u}{=}}\lim_{u\to 0}\frac{f(u)}{u}=f'(0)$$

4.70. Για $x\neq\rho$ είναι: $f(x)-f(\rho)=g(x)-g(\rho)+x^3-\rho^3\Leftrightarrow$

$$\frac{f(x)-f(\rho)}{x-\rho}=\frac{g(x)-g(\rho)}{x-\rho}+\frac{\cancel{(x-\rho)}\left(x^2+x\rho+\rho^2\right)}{\cancel{x-\rho}} \text{ και}$$

$$\lim_{x\to\rho}\frac{f(x)-f(\rho)}{x-\rho}=\lim_{x\to\rho}\left[\frac{g(x)-g(\rho)}{x-\rho}+x^2+x\rho+\rho^2\right]\Leftrightarrow f'(\rho)=g'(\rho)+3\rho^2>g'(\rho)$$

4.71. **α)** Είναι $\lim\limits_{x\to 1^-}f(x)=\lim\limits_{x\to 1^-}\left(x^2+2\right)=3=f(1)$ και $\lim\limits_{x\to 1^+}f(x)=\lim\limits_{x\to 1^+}(2x+1)=3$, οπότε η f είναι συνεχής στο $x_0=1$. Για την παράγωγο στο $x_0=1$ έχουμε:

Για $x<1$, $\lim\limits_{x\to 1^-}\dfrac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim\limits_{x\to 1^-}\dfrac{x^2+2-3}{x-1}=\lim\limits_{x\to 1^-}\dfrac{(x-1)(x+1)}{x-1}=2$

και για $x>1$, $\lim\limits_{x\to 1^+}\dfrac{2x+1-3}{x-1}=\lim\limits_{x\to 1^+}\dfrac{2(x-1)}{x-1}=2$.

Δηλαδή $f'(1)=2$. Άρα, η f είναι παραγωγίσιμη και συνεχής στο $x_0=1$.

β) Για $x<2$ είναι: $\lim\limits_{x\to 2^-}f(x)=\lim\limits_{x\to 2^-}\left(x^3-x+1\right)=7$

Για $x>2$ είναι: $\lim\limits_{x\to 2^+}f(x)=\lim\limits_{x\to 2^+}(4x-1)=7$ και $f(2)=2^3-2+1=7$

Δηλαδή $\lim\limits_{x\to 2^-}f(x)=\lim\limits_{x\to 2^+}f(x)=f(2)$ οπότε η f είναι συνεχής στο $x_0=2$.

Για $x<2$ είναι: $\lim\limits_{x\to 2^-}\dfrac{f(x)-f(2)}{x-2}=\lim\limits_{x\to 2^-}\dfrac{x^3-x+1-7}{x-2}=\lim\limits_{x\to 2^-}\dfrac{x^3-x-6}{x-2}=$

$$= \lim_{x\to 1^-}\frac{(x-2)(x^2+2x+3)}{x-2} = \lim_{x\to 1^-}(x^2+2x+3) = 11$$

Για $x>2$ είναι: $\lim_{x\to 2^+}\frac{f(x)-f(2)}{x-2} = \lim_{x\to 2^+}\frac{4x-1-7}{x-2} = \lim_{x\to 2^+}\frac{4(x-2)}{x-2} = 4$

Δηλαδή $\lim_{x\to 2^-}\frac{f(x)-f(2)}{x-2} \neq \lim_{x\to 2^+}\frac{f(x)-f(2)}{x-2}$, οπότε η f δεν είναι παραγωγίσιμη στο $x_0=2$.

γ) $\lim_{x\to 1^+} f(x) = \lim_{x\to 1^+}\frac{1}{x-1} = +\infty$, οπότε η f δεν είναι συνεχής στο 1, άρα δεν είναι και παραγωγίσιμη στο σημείο αυτό.

δ) Η f είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$, ως απόλυτη τιμή συνεχούς συνάρτησης.

$\lim_{x\to 2^-}\frac{f(x)-f(2)}{x-2} = \lim_{x\to 2^-}\frac{-\cancel{(x-2)}(x+2)}{\cancel{x-2}} = -4$ και

$\lim_{x\to 2^+}\frac{f(x)-f(2)}{x-2} = \lim_{x\to 2^+}\frac{\cancel{(x-2)}(x+2)}{\cancel{x-2}} = 4$, άρα η f δεν είναι παραγωγίσιμη στο 2.

ε) $-1 \le \eta\mu\frac{1}{x} \le 1 \overset{x\neq 0}{\Leftrightarrow} -x^2 \le x^2\eta\mu\frac{1}{x} \le x^2$, $\lim_{x\to 0}(-x^2) = \lim_{x\to 0}x^2 = 0$, άρα και

$\lim_{x\to 0} f(x) = 0 = f(0)$, άρα f συνεχής στο 0.

$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x} = \lim_{x\to 0} x\eta\mu\frac{1}{x} = 0$, γιατί $\left|x\eta\mu\frac{1}{x}\right| \le |x| \Leftrightarrow -|x| \le x\eta\mu\frac{1}{x} \le |x|$ και από Κ.Π

είναι $\lim_{x\to 0} x\eta\mu\frac{1}{x} = 0$.

στ) $\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+}\left(\frac{1}{2}\eta\mu x + 1\right) = 1 = f(0)$, $\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^-}\left(1 + \frac{1-\sigma\upsilon\nu x}{x}\right) = 1$,

άρα f συνεχής στο 0.

$\lim_{x\to 0^-}\frac{f(x)-f(0)}{x} = \lim_{x\to 0^-}\left(\frac{1}{2}\frac{\eta\mu x}{x} + \frac{1}{x}\right) = -\infty$, άρα η f δεν είναι παραγωγίσιμη στο 0.

4.72. Για να είναι η f παραγωγίσιμη στο $x_0=1$ πρέπει να είναι και συνεχής σ' αυτό, δηλαδή:

$\lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to 1^+} f(x) = f(1)$. Είναι: $\lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to 1^-}(3x^2-1) = 2$,

$\lim_{x\to 1^+} f(x) = \lim_{x\to 1^+}(\alpha x+\beta) = \alpha+\beta$ και $f(1)=2$ άρα $\alpha+\beta=2$ (1)

Για $x<1$ είναι: $\lim_{x\to 1^-}\frac{f(x)-f(1)}{x-1} = \lim_{x\to 1^-}\frac{3x^2-1-2}{x-1} = \lim_{x\to 1^-}\frac{3(x-1)(x+1)}{x-1} = 6$

Για $x>1$ είναι:

$\lim_{x\to 1^+}\frac{f(x)-f(1)}{x-1} = \lim_{x\to 1^+}\frac{\alpha x+\beta-2}{x-1} = \lim_{x\to 1^+}\frac{\alpha x+\beta-\alpha-\beta}{x-1} = \lim_{x\to 1^+}\frac{\alpha(x-1)}{x-1} = \alpha$

Για να είναι η f παραγωγίσιμη στο $x_0=1$ πρέπει $\lim_{x\to 1^-}\frac{f(x)-f(1)}{x-1} = \lim_{x\to 1^+}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}$

άρα $\alpha=6$ και λόγω της (1) είναι $\beta=-4$.

4.73. Επειδή η f είναι παραγωγίσιμη στο $x_0 = 1$, θα είναι και συνεχής, οπότε

$$\lim_{x\to1^-} f(x) = \lim_{x\to1^+} f(x) = f(1) \Leftrightarrow 1+\mu = \frac{1+\lambda+1}{2} = 1+\mu \Leftrightarrow \lambda = 2\mu \ (1).$$

Επίσης, για $x<1$ έχουμε:

$$\lim_{x\to1^-}\frac{f(x)-f(1)}{x-1} = \lim_{x\to1^-}\frac{x^2+\mu x-1-\mu}{x-1} = \lim_{x\to1^-}\frac{(x-1)(x+1)+\mu(x-1)}{x-1} =$$

$$= \lim_{x\to1^-}\left[(x+1)+\mu\right] = 2+\mu$$

και για $x>1$ είναι: $\lim\limits_{x\to1^+}\dfrac{f(x)-f(1)}{x-1} = \lim\limits_{x\to1^+}\dfrac{\dfrac{x^2+\lambda x+1}{x+1}-1-\mu}{x-1} =$

$$= \lim_{x\to1^+}\frac{x^2+\lambda x-x-\mu x-\mu}{(x+1)(x-1)} \overset{(1)}{=} \lim_{x\to1^+}\frac{x^2+2\mu x-x-\mu x-\mu}{(x+1)(x-1)} =$$

$$= \lim_{x\to1^+}\frac{x(x-1)+\mu(x-1)}{(x-1)(x+1)} = \lim_{x\to1^+}\frac{x+\mu}{x+1} = \frac{1+\mu}{2}.$$

Επειδή η f είναι παραγωγίσιμη στο $x_0 = 1$, πρέπει $2+\mu = \dfrac{1+\mu}{2} \Leftrightarrow \mu = -3$ και από την (1) προκύπτει $\lambda = -6$.

4.74. Επειδή η f είναι παραγωγίσιμη στο $x_0 = 0$, θα είναι και συνεχής, οπότε

$$\lim_{x\to0^-} f(x) = \lim_{x\to0^+} f(x) = f(0) \Leftrightarrow 6 = \beta.$$

$$\lim_{x\to 0^-}\frac{f(x)-f(0)}{x}=\lim_{x\to 0^-}\frac{2\alpha x+3\sqrt{4+x^2}-6}{x}=\lim_{x\to 0^-}\left(2\alpha+3\frac{\sqrt{4+x^2}-2}{x}\right)=$$

$$=\lim_{x\to 0^-}\left(2\alpha+3\frac{x^{\cancel{2}}}{\cancel{x}\left(\sqrt{4+x^2}+2\right)}\right)=2\alpha$$

και $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{f(x)-f(0)}{x}=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{2\eta\mu x+\beta-6}{x}=\lim\limits_{x\to 0^+}2\dfrac{\eta\mu x}{x}=2$, άρα $2\alpha=2\Leftrightarrow\alpha=1$.

4.75. Επειδή η f είναι παραγωγίσιμη στο $x_0=2$, θα είναι και συνεχής, οπότε

$$\lim_{x\to 2^-}f(x)=\lim_{x\to 2^+}f(x)=f(2)\Leftrightarrow 4\alpha+3=4-2\beta+\gamma=4\Leftrightarrow\alpha=\frac{1}{4}\ \text{και}\ \gamma=2\beta$$

$$\lim_{x\to 2^-}\frac{f(x)-f(2)}{x-2}=\lim_{x\to 2^-}\frac{\frac{1}{4}x^2+2x-1-4}{x-2}=\lim_{x\to 2^-}\frac{\cancel{(x-2)}(x+10)}{4\cancel{(x-2)}}=3\ \text{και}$$

$$\lim_{x\to 2^+}\frac{f(x)-f(2)}{x-2}=\lim_{x\to 2^+}\frac{x^2-\beta x+2\beta-4}{x-2}=\lim_{x\to 2^+}\frac{\cancel{(x-2)}(x+2-\beta)}{\cancel{x-2}}=4-\beta$$

άρα $4-\beta=3\Leftrightarrow\beta=1$ και $\gamma=2$.

4.76. Επειδή η f είναι παραγωγίσιμη στο $x_0=0$, θα είναι και συνεχής, οπότε

$$\lim_{x\to 0^-}f(x)=\lim_{x\to 0^+}f(x)=f(0)\Leftrightarrow\lim_{x\to 0^-}\frac{\alpha\eta\mu^2x-\beta\sigma\upsilon\nu x+\beta}{x}=\lim_{x\to 0^+}(\eta\mu x+x)=0\Leftrightarrow$$

$$\lim_{x\to 0^-}\left(\alpha\eta\mu x\frac{\eta\mu x}{x}-\beta\frac{1-\sigma\upsilon\nu x}{x}\right)=0\ \text{που ισχύει.}$$

Επειδή η f είναι παραγωγίσιμη στο $x_0=\pi$, θα είναι και συνεχής, οπότε

$$\lim_{x\to\pi^+}f(x)=\lim_{x\to\pi^-}f(x)=f(\pi)\Leftrightarrow\lim_{x\to\pi^+}\left(x+\alpha\sigma\upsilon\nu\frac{x}{2}\right)=\lim_{x\to\pi^-}(\eta\mu x+x)=\pi\ \text{ισχύει}$$

$$\lim_{x\to 0^-}\frac{f(x)-f(0)}{x}=\lim_{x\to 0^-}\frac{\frac{\alpha\eta\mu^2x-\beta\sigma\upsilon\nu x+\beta}{x}}{x}=\lim_{x\to 0^-}\frac{\alpha\eta\mu^2x-\beta\sigma\upsilon\nu x+\beta}{x^2}=$$

$$=\lim_{x\to 0^-}\left(\alpha\frac{\eta\mu^2x}{x^2}-\beta\frac{1-\sigma\upsilon\nu^2x}{x^2(1+\sigma\upsilon\nu x)}\right)=\lim_{x\to 0^-}\left(\alpha\frac{\eta\mu^2x}{x^2}-\beta\frac{\eta\mu^2x}{x^2}\frac{1}{1+\sigma\upsilon\nu x}\right)=\alpha-\frac{\beta}{2}$$

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x}=\lim_{x\to 0^+}\frac{\eta\mu x+x}{x}=\lim_{x\to 0^+}\left(\frac{\eta\mu x}{x}+1\right)=2,\ \text{είναι}\ \alpha-\frac{\beta}{2}=2\Leftrightarrow\alpha=\frac{4+\beta}{2}\quad(1)$$

$$\lim_{x\to\pi^-}\frac{f(x)-f(\pi)}{x-\pi}=\lim_{x\to\pi^-}\frac{\eta\mu x+x-\pi}{x-\pi}=\lim_{x\to\pi^-}\left(\frac{\eta\mu(\pi-x)}{-(\pi-x)}+1\right)=0\ \text{και}$$

$$\lim_{x\to\pi^+}\frac{f(x)-f(\pi)}{x-\pi}=\lim_{x\to\pi^+}\frac{x+\alpha\sigma\upsilon\nu\frac{x}{2}-\pi}{x-\pi}=\lim_{x\to\pi^+}\left(1+\alpha\frac{\eta\mu\left(\frac{\pi-x}{2}\right)}{-2\frac{\pi-x}{2}}\right)=1-\frac{\alpha}{2}.$$

Πρέπει $1-\dfrac{\alpha}{2}=0 \Leftrightarrow \alpha=2$ και από την (1) είναι $\beta=0$

4.77. Επειδή η g είναι παραγωγίσιμη στο $x_0=0$, θα είναι και συνεχής, οπότε

$$\lim_{x\to0^-} g(x)=\lim_{x\to0^+} g(x)=g(0) \Leftrightarrow \lim_{x\to0^-} f^2(x)=\lim_{x\to0^+}(\alpha x+\beta)=f^2(0) \Leftrightarrow \beta=1.$$

$$\lim_{x\to0^-}\frac{g(x)-g(0)}{x}=\lim_{x\to0^-}\frac{f^2(x)-1}{x}=\lim_{x\to0^-}\left(\frac{f(x)-1}{x}\big(f(x)+1\big)\right)=1\cdot2=2 \text{ και}$$

$$\lim_{x\to0^+}\frac{g(x)-g(0)}{x}=\lim_{x\to0^+}\frac{\alpha x+\beta-1}{x}=\lim_{x\to0^+}\frac{\alpha x}{x}=\alpha, \text{ άρα } \alpha=2$$

4.78. $\displaystyle\lim_{x\to0^-}\frac{f(x)-f(0)}{x}=\lim_{x\to0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x} \Leftrightarrow \lim_{x\to0^-}\frac{-\alpha\left(x^2-x\right)}{x}=\lim_{x\to0^+}\frac{\alpha\left(x^2-x\right)}{x} \Leftrightarrow$

$$\lim_{x\to0^-}\frac{-\alpha\cancel{x}(x-1)}{\cancel{x}}=\lim_{x\to0^+}\frac{\alpha\cancel{x}(x-1)}{\cancel{x}} \Leftrightarrow \alpha=-\alpha \Leftrightarrow 2\alpha=0 \Leftrightarrow \alpha=0. \text{ Τότε } f(x)=\beta.$$

4.79. Είναι $\displaystyle\lim_{x\to0}\frac{f(x)-f(0)}{x}=\lim_{x\to0}\frac{x^3\eta\mu\frac{1}{x}}{x}=\lim_{x\to0}\left(x^2\eta\mu\frac{1}{x}\right)$.

Είναι $\left|x^2\eta\mu\frac{1}{x}\right|=\left|x^2\right|\cdot\left|\eta\mu\frac{1}{x}\right|\le x^2 \Leftrightarrow \left|x^2\eta\mu\frac{1}{x}\right|\le x^2$, οπότε $-x^2\le x^2\eta\mu\frac{1}{x}\le x^2$ και

$\lim\limits_{x\to0}\left(-x^2\right)=0$, $\lim\limits_{x\to0}x^2=0$, άρα σύμφωνα με το κριτήριο παρεμβολής και

$\lim\limits_{x\to0}\left(x^2\eta\mu\frac{1}{x}\right)=0$, δηλαδή $f'(0)=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(x)}{x}=0$.

Επειδή η f είναι παραγωγίσιμη στο $x_0=0$, θα είναι και συνεχής.

4.80. $\displaystyle\lim_{x\to0}\frac{g(x)-g(0)}{x}=\lim_{x\to0}\frac{2f(x)-x-2f(0)}{x}=\lim_{x\to0^-}\left(2\frac{f(x)-f(0)}{x}-1\right)=2f'(0)-1=9$

4.81. Επειδή η f είναι παραγωγίσιμη στο $x_0=0$ ισχύει:

$$f'(0)=\lim_{x\to0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to0}\frac{f(x)-2}{x}=2.$$

Επίσης, η f είναι συνεχής στο $x_0=0$ και ισχύει: $\lim\limits_{x\to0}f(x)=f(0)=2$.

Είναι $g(x)-g(0)=f(x)+\dfrac{x-2}{f(x)}-f(0)-\dfrac{-2}{f(0)}=f(x)+\dfrac{x-2}{f(x)}-1$. Είναι:

$$\lim_{x\to0}\frac{g(x)-g(0)}{x-0}=\lim_{x\to0}\frac{f(x)+\frac{x-2}{f(x)}-1}{x}=\lim_{x\to0}\frac{f^2(x)+x-2-f(x)}{xf(x)}=$$

$$=\lim_{x\to0}\left[\frac{f^2(x)-f(x)-2}{xf(x)}+\frac{x}{xf(x)}\right]=\lim_{x\to0}\left[\frac{\big(f(x)-2\big)\big(f(x)+1\big)}{xf(x)}+\frac{1}{f(x)}\right]=$$

$$=\lim_{x\to 0}\left[\frac{f(x)-2}{x}\cdot\frac{f(x)+1}{f(x)}+\frac{1}{f(x)}\right]=2\cdot\frac{f(0)+1}{f(0)}+\frac{1}{f(0)}=2\cdot\frac{2+1}{2}+\frac{1}{2}=\frac{7}{2}.$$

4.82. $$\lim_{x\to 0}\frac{g(x)-g(0)}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{2f(x)+\dfrac{x^2}{9f(x)}-2}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{2f(x)-2+\dfrac{x^2}{9f(x)}}{x}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\left[2\frac{f(x)-1}{x}+\frac{x}{9f(x)}\right]=2f'(0)+\frac{0}{9f(0)}=4$$

4.83. $$\lim_{x\to 2}\frac{f(x)-f(2)}{x-2}=\lim_{x\to 2}\frac{g(x)\eta\mu\dfrac{3x}{x-2}}{x-2}=\lim_{x\to 2}\frac{g(x)}{x-2}\eta\mu\frac{3x}{x-2}=0 \text{ γιατί}$$

$$\left|\frac{g(x)}{x-2}\eta\mu\frac{3x}{x-2}\right|=\left|\frac{g(x)}{x-2}\right|\left|\eta\mu\frac{3x}{x-2}\right|\le\left|\frac{g(x)}{x-2}\right|\Leftrightarrow-\left|\frac{g(x)}{x-2}\right|\le\frac{g(x)}{x-2}\eta\mu\frac{3x}{x-2}\le\left|\frac{g(x)}{x-2}\right|$$

Επειδή $\lim_{x\to 2}\left|\frac{g(x)}{x-2}\right|=|g'(2)|=0$, από το Κ.Π. είναι και $\lim_{x\to 2}\frac{g(x)}{x-2}\eta\mu\frac{3x}{x-2}=0$, άρα

$f'(2)=0$

4.84. Αρχικά επειδή η g είναι παραγωγίσιμη στο $x_0=0$ είναι και συνεχής στο σημείο αυτό.

Δηλαδή: $\lim_{x\to 0}f(x)=f(0)=0$. $f'(0)=1\Leftrightarrow\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}=1$. Είναι

$$\lim_{x\to 0}\frac{g(x)-g(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0}\frac{\eta\mu f(x)-x}{x}=\lim_{x\to 0}\left(\frac{\eta\mu f(x)}{x}-\frac{x}{x}\right)=\lim_{x\to 0}\left(\frac{\eta\mu f(x)}{f(x)}\cdot\frac{f(x)}{x}-1\right)=0$$

γιατί αν θέσουμε $f(x)=u$, τότε $\lim_{x\to 0}u=\lim_{x\to 0}f(x)=f(0)=0$ και

$$\lim_{x\to 0}\frac{\eta\mu f(x)}{f(x)}=\lim_{u\to 0}\frac{\eta\mu u}{u}=1$$

4.85. Επειδή η g είναι συνεχής στο $x_0=\rho$, ισχύει $\lim_{x\to\rho^-}g(x)=\lim_{x\to\rho^+}g(x)=g(\rho)$.

Η f είναι παραγωγίσιμη στο $x_0=\rho$, αν και μόνο αν:

$$\lim_{x\to\rho^-}\frac{f(x)-f(\rho)}{x-\rho}=\lim_{x\to\rho^+}\frac{f(x)-f(\rho)}{x-\rho}\Leftrightarrow$$

$$\lim_{x\to\rho^-}\frac{|x-\rho|g(x)}{x-\rho}=\lim_{x\to\rho^+}\frac{|x-\rho|g(x)}{x-\rho}\Leftrightarrow\lim_{x\to\rho^-}\frac{-(x-\rho)g(x)}{x-\rho}=\lim_{x\to\rho^+}\frac{(x-\rho)g(x)}{x-\rho}\Leftrightarrow$$

$$\lim_{x\to\rho^-}(-g(x))=\lim_{x\to\rho^+}g(x)\Leftrightarrow-g(\rho)=g(\rho)\Leftrightarrow 2g(\rho)=0\Leftrightarrow g(\rho)=0.$$

4.86. Αν η g ήταν παραγωγίσιμη στο $x_0=3$, θα ίσχυε:

$$\lim_{x\to 3^-}\frac{g(x)-g(3)}{x-3}=\lim_{x\to 3^+}\frac{g(x)-g(3)}{x-3}\Leftrightarrow\lim_{x\to 3^-}\frac{-(x^2-9)f(x)}{x-3}=\lim_{x\to 3^+}\frac{(x^2-9)f(x)}{x-3}\Leftrightarrow$$

$$\lim_{x\to 3^-}\frac{-\cancel{(x-3)}(x+3)f(x)}{\cancel{x-3}}=\lim_{x\to 3^+}\frac{\cancel{(x-3)}(x+3)f(x)}{\cancel{x-3}}\Leftrightarrow$$

$-6f(3)=6f(3)\Leftrightarrow 12f(3)=0\Leftrightarrow f(3)=0$ που είναι άτοπο.

4.87. Αν $f(x)>0$, τότε $\lim\limits_{x\to 2}\frac{g(x)-g(2)}{x-2}=\lim\limits_{x\to 2}\frac{f(x)-f(2)}{x-2}=f'(2)$ και αν $f(x)<0$, τότε $\lim\limits_{x\to 2}\frac{g(x)-g(2)}{x-2}=\lim\limits_{x\to 2}\frac{-f(x)+f(2)}{x-2}=-f'(2)$, άρα η g είναι παραγωγίσιμη στο $x_0=2$.

4.88. Είναι $\lim\limits_{x\to 0^-}\frac{g(x)-g(0)}{x-0}=\lim\limits_{x\to 0^-}\frac{-xf(-x)}{x}=\lim\limits_{x\to 0^-}\left[-f(-x)\right]\overset{-x=u}{=}\lim\limits_{u\to 0^-}\left[-f(u)\right]=f(0)=0$ και $\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{g(x)-g(0)}{x-0}=\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{xf(x)}{x}=\lim\limits_{x\to 0^+}f(x)=f(0)=0$. Άρα $g'(0)=0$

4.89. Επειδή η f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$, είναι και συνεχής. Οπότε

$$f(0)=\lim_{x\to 0}f(x)\overset{x=u^4}{\underset{u\to 0}{=}}\lim_{u\to 0}f\left(u^4\right)=\lim_{u\to 0}\frac{\left(e^{u^4}-1\right)\eta\mu u}{u}=\lim_{u\to 0}\left[\left(e^{u^4}-1\right)\frac{\eta\mu u}{u}\right]=0\cdot 1=0.$$

$$f'(0)=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}\overset{x=u^4}{\underset{u\to 0}{=}}\lim_{u\to 0}\frac{f\left(u^4\right)}{u^4}=\lim_{u\to 0}\frac{\frac{\left(e^{u^4}-1\right)\eta\mu u}{u}}{u^4}=\lim_{u\to 0}\left(\frac{e^{u^4}-1}{u^4}\frac{\eta\mu u}{u}\right)$$

Αν $g(t)=e^t$, $t\in\mathbb{R}$, τότε $g'(t)=e^t$ και $g'(0)=1$.

Είναι $\lim\limits_{u\to 0}\frac{e^{u^4}-1}{u^4}\overset{u^4=t}{=}\lim\limits_{t\to 0}\frac{e^t-1}{t}=\lim\limits_{t\to 0}\frac{g(t)-g(0)}{t-0}=g'(0)=1$, άρα $f'(0)=1\cdot 1=1$.

4.90. **α)** $f'(0)=\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}\Leftrightarrow\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}=2$.

β) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(\eta\mu x)}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(\eta\mu x)\eta\mu x}{x\eta\mu x}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(\eta\mu x)}{\eta\mu x}\frac{\eta\mu x}{x}$.

Αν $\eta\mu x=u$, τότε $\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(\eta\mu x)}{\eta\mu x}=\lim\limits_{u\to 0}\frac{f(u)}{u}=2$ και $\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(\eta\mu x)}{x}=2\cdot 1=2$

4.91. **α)** $\frac{f(x)}{x-3}=h(x)\overset{x\neq 3}{\Leftrightarrow}f(x)=h(x)(x-3)$ και $f(3)=\lim\limits_{x\to 3}f(x)=\lim\limits_{x\to 3}h(x)(x-3)=0$

β) $f'(3)=\lim\limits_{x\to 3}\frac{f(x)}{x-3}=3$

γ) $\frac{g(x)}{x-3}=t(x)\overset{x\neq 3}{\Leftrightarrow}g(x)=t(x)(x-3)$, $\lim\limits_{x\to 3}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim\limits_{x\to 3}\frac{h(x)\cancel{(x-3)}}{t(x)\cancel{(x-3)}}=\frac{3}{8}$

4.92. Εστω $\frac{f(x)-3x}{x^2}=g(x)\overset{x\neq 0}{\Leftrightarrow}f(x)=x^2g(x)+3x$.

Είναι $f(0)=\lim\limits_{x\to 0}f(x)=\lim\limits_{x\to 0}\left(x^2g(x)+3x\right)=0$

$\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{x^2g(x)+3x}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\left(xg(x)+3\right)=3$, άρα $f'(0)=3$.

4.93. **α)** Εστω $\frac{f(2+h)}{h}=g(h)\overset{h\neq 0}{\Leftrightarrow} f(2+h)=hg(h)$. Είναι $f(2)=\lim\limits_{h\to 0}f(2+h)=\lim\limits_{h\to 0}hg(h)=0$

β) $\lim\limits_{h\to 0}\frac{f(2+h)-f(2)}{h}=\lim\limits_{h\to 0}\frac{\cancel{h}g(h)}{\cancel{h}}=3$, άρα $f'(2)=3$.

4.94. Είναι $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\underset{x=x_0-3h}{\overset{\theta\acute{\varepsilon}\tau\omega}{=}}\lim\limits_{h\to 0}\frac{f(x_0+3h)-f(x_0)}{x_0+3h-x_0}=\lim\limits_{h\to 0}\left[\frac{f(x_0+3h)-f(x_0)}{3h}\right]$

η είναι f συνεχής στο x_0 άρα

$f(x_0)=\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=\lim\limits_{h\to 0}f(x_0+3h)=\lim\limits_{h\to 0}\left[\frac{f(x_0+3h)}{3h}\cdot 3h\right]=k\cdot 0=0$,

οπότε $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=\lim\limits_{x\to x_0}\left[\frac{f(x_0+3h)}{3h}\right]=\frac{k}{3}$.

4.95. $\frac{f(x-1)}{x}=g(x)\overset{x\neq 0}{\Leftrightarrow} f(-1+x)=xg(x)$

$f(-1)=\lim\limits_{x\to 0}f(-1+x)=\lim\limits_{x\to 0}xg(x)=0$

$\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(-1+x)-f(-1)}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(-1+x)}{x}=4\Leftrightarrow f'(-1)=4$

4.96. Εστω $x+2=u$. Τότε $x=u-2$. Όταν $x\to 1$, τότε $u\to 3$.

Είναι: $\lim\limits_{x\to 1}\frac{f(x+2)}{x-1}=1\Leftrightarrow \lim\limits_{u\to 3}\frac{f(u)}{u-3}=1$

Εστω $g(u)=\frac{f(u)}{u-3}$, $u\neq 3$ και $\lim\limits_{u\to 3}g(u)=1$. Τότε $f(u)=(u-3)g(u)$.

Επειδή η f είναι συνεχής στο $x_0=3$, ισχύει: $f(3)=\lim\limits_{u\to 3}f(u)=\lim\limits_{u\to 3}(u-3)g(u)=0$.

Για τη παράγωγο της f στο $x_0=3$ έχουμε $\lim\limits_{u\to 3}\frac{f(u)-f(3)}{u-3}=\lim\limits_{u\to 3}\frac{f(u)}{u-3}=1$.

4.97. **α)** Εστω $\frac{f(1-h)+3}{h}=g(h)$, $h\neq 0$ με $\lim\limits_{h\to 0}g(h)=5$, τότε: $f(1+h)=hg(h)-3$ και

$\lim\limits_{h\to 0}f(1+h)=\lim\limits_{h\to 0}\left(hg(h)-3\right)=-3$.

Επειδή η f είναι συνεχής στο $x_0=1$ είναι $\lim\limits_{h\to 0}f(1+h)=f(1)=-3$.

Είναι: $\lim\limits_{x\to 1}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim\limits_{h\to 1}\frac{f(1+h)-f(1)}{h}=\lim\limits_{h\to 1}\frac{f(1+h)+3}{h}=5$. Άρα η f είναι παραγωγίσιμη στο $x_0=1$ με $f'(1)=5$

β) $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{2f(x)+x^2+x+4}{x^2-1}=\lim\limits_{x\to1}\dfrac{2f(x)+6+x^2+x-2}{x^2-1}=\lim\limits_{x\to1}\dfrac{2\big(f(x)+3\big)+(x+2)(x-1)}{(x-1)(x+1)}=$

$$=\lim_{x\to1}\frac{2\dfrac{f(x)+3}{x-1}+x+2}{x+1}=\frac{2f'(1)+1+2}{1+1}=\frac{13}{2}.$$

4.98. Θέτουμε $3x-1=u\Leftrightarrow x=\dfrac{u+1}{3}$. Όταν $x\to1$ τότε $u\to2$. Είναι

$$\lim_{x\to1}\frac{f(3x-1)-\sqrt{x^2+3}}{x-1}=\frac{3}{2}\Leftrightarrow\lim_{u\to2}\frac{f(u)-\sqrt{\left(\dfrac{u+1}{3}\right)^2+3}}{\dfrac{u+1}{3}-1}=\frac{3}{2}\Leftrightarrow$$

$$\lim_{u\to2}\frac{3f(u)-\sqrt{u^2+2u+28}}{u-2}=\frac{3}{2}.$$

Εστω $\dfrac{3f(u)-\sqrt{u^2+2u+28}}{u-2}=g(u)\overset{u\neq2}{\Leftrightarrow}f(u)=\dfrac{g(u)(u-2)+\sqrt{u^2+2u+28}}{3}$

$$f(2)=\lim_{u\to2}f(u)=\lim_{u\to2}\frac{g(u)(u-2)+\sqrt{u^2+2u+28}}{3}=2$$

$$\lim_{x\to2}\frac{f(x)-f(2)}{x-2}=\lim_{x\to2}\frac{\dfrac{g(x)(x-2)+\sqrt{x^2+2x+28}}{3}-2}{x-2}=$$

$$=\lim_{x\to2}\frac{g(x)(x-2)+\sqrt{x^2+2x+28}-6}{3(x-2)}=\lim_{x\to2}\left(\frac{g(x)}{3}-\frac{\sqrt{x^2+2x+28}-6}{3(x-2)}\right)$$

$$=\lim_{x\to2}\left(\frac{g(x)}{3}-\frac{x^2+2x-8}{3(x-2)\left(\sqrt{x^2+2x+28}+6\right)}\right)=$$

$$=\lim_{x\to2}\left(\frac{g(x)}{3}-\frac{(x+4)\cancel{(x-2)}}{3\cancel{(x-2)}\left(\sqrt{x^2+2x+28}+6\right)}\right)=\frac{1}{2}-\frac{6}{36}=\frac{1}{3}.$$

Άρα $f'(2)=\dfrac{1}{3}$.

4.99. **α)** Εστω $\dfrac{\eta\mu x f(x)-x^3\eta\mu\dfrac{1}{x}}{x^4}=g(x)\overset{x\neq0}{\Leftrightarrow}f(x)=\dfrac{x^4g(x)}{\eta\mu x}+\dfrac{x^3\eta\mu\dfrac{1}{x}}{\eta\mu x}$, $x\in\left(-\dfrac{\pi}{2},0\right)\cup\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$

$$f(0)=\lim_{x\to0}f(x)=\lim_{x\to0}\left(\frac{x^3g(x)}{\dfrac{\eta\mu x}{x}}+\frac{x^2\eta\mu\dfrac{1}{x}}{\dfrac{\eta\mu x}{x}}\right)=0\text{, γιατί}$$

$-1\le\eta\mu\dfrac{1}{x}\le1\Leftrightarrow-x^2\le x^2\eta\mu\dfrac{1}{x}\le x^2$ και από το Κ.Π είναι $\lim\limits_{x\to0}x^2\eta\mu\dfrac{1}{x}=0$.

β) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)-f(0)}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{x^2g(x)}{\dfrac{\eta\mu x}{x}}+\dfrac{x\eta\mu\dfrac{1}{x}}{\dfrac{\eta\mu x}{x}}\right)=0$, άρα $f'(0)=0$

4.100. **α)** Εστω $\dfrac{f(x)-2x}{x^2}=g(x)\overset{x\neq 0}{\Leftrightarrow} f(x)=x^2g(x)+2x$ και

$f(0)=\lim\limits_{x\to 0}f(x)=\lim\limits_{x\to 0}\left(x^2g(x)+2x\right)=0$

β) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)-f(0)}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2g(x)+2x}{x}\lim\limits_{x\to 0}\left(xg(x)+2\right)=2$, άρα $f'(0)=2$

γ)

$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)+x\eta\mu x-2x}{1-\sigma\upsilon\nu x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{g(x)x^2+\cancel{2x}+x\eta\mu x-\cancel{2x}}{1-\sigma\upsilon\nu x}=$

$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\left(g(x)x^2+x\eta\mu x\right)(1+\sigma\upsilon\nu x)}{1-\sigma\upsilon\nu^2 x}=$

$$=\lim_{x\to 0}\left[\left(\frac{g(x)}{\left(\dfrac{\eta\mu x}{x}\right)^2}+\frac{1}{\dfrac{\eta\mu x}{x}}\right)(1+\sigma\upsilon\nu x)\right]=4$$

4.101. Εστω $\dfrac{g(x^2+2)}{x\cdot\eta\mu 2x}=\varphi(x)$, $x\neq 0$ και $\lim\limits_{x\to 0}\varphi(x)=5$. Τότε $g(x^2+2)=x\cdot\eta\mu 2x\varphi(x)$.

Επειδή η g είναι συνεχής στο $x_0=2$, ισχύει: $g(2)=\lim\limits_{x\to 2}g(x)$.

Θέτουμε $x=2+h^2$. Τότε όταν $x\to 2$, είναι $h\to 0$. Οπότε:

$g(2)=\lim\limits_{h\to 0}g(2+h^2)=\lim\limits_{h\to 0}\left(h\cdot\eta\mu 2h\cdot\varphi(h)\right)=0$.

Για να είναι η g παραγωγίσιμη στο $x_0=2$, αρκεί να υπάρχει στο $\mathbb{R}$ το όριο

$\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{g(x)-g(2)}{x-2}=\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{g(x)}{x-2}$.

Θέτουμε $x=2+h^2$, οπότε όταν $x\to 2$ είναι $h\to 0$. Τότε:

$\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{g(x)}{x-2}=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{g(2+h^2)}{2+h^2-2}=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{h\cdot\eta\mu 2h\cdot\varphi(h)}{h^2}=$

$=\lim\limits_{h\to 0}\left[\dfrac{\eta\mu 2h}{h}\cdot\varphi(h)\right]=\lim\limits_{h\to 0}\left[2\dfrac{\eta\mu 2h}{2h}\cdot\varphi(h)\right]=2\cdot 1\cdot 5=10$.

Οπότε, η g είναι παραγωγίσιμη στο $x_0=2$ με $g'(2)=10$.

4.102. $\lim\limits_{x\to\alpha}\dfrac{f^2(x)-f^2(\alpha)}{x^2-\alpha^2}=\lim\limits_{x\to\alpha}\left(\dfrac{f(x)-f(\alpha)}{x-\alpha}\cdot\dfrac{f(x)+f(\alpha)}{x+\alpha}\right)=f'(\alpha)\dfrac{f(\alpha)}{\alpha}$

4.103. $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f^2(1+h)-f^2(1)}{h}=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(1+h)-f(1)}{h}\left(f(1+h)+f(1)\right)=f'(1)2f(1)=10f'(1)$.

4.104. $\lim\limits_{x\to k}\dfrac{kf(x)-xf(k)}{x-k}=\lim\limits_{x\to k}\dfrac{kf(x)-kf(k)+kf(k)-xf(k)}{x-k}=$

$$=\lim_{x\to k}\left[k\frac{f(x)-f(k)}{x-k}+f(k)\frac{x-k}{x-k}\right]=kf'(k)+f(k)$$

4.105. **α)** Αφού η f είναι παραγωγίσιμη στο $x_0=1$ ισχύει: $f'(1)=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{f(x)-f(1)}{x-1}$, οπότε:

$$\lim_{x\to 1}\frac{f(x)-f(1)}{\sqrt{4x}-2}=\lim_{x\to 1}\frac{[f(x)-f(1)]\cdot\left(\sqrt{4x}+2\right)}{\left(\sqrt{4x}-2\right)\left(\sqrt{4x}+2\right)}=\lim_{x\to 1}\frac{[f(x)-f(1)]\cdot\left(\sqrt{4x}+2\right)}{4(x-1)}=$$

$$=\lim_{x\to 1}\left(\frac{f(x)-f(1)}{x-1}\cdot\frac{\sqrt{4x}+2}{4}\right)=f'(1)\cdot 1=f'(1)$$

β) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{(f(x))^2-(f(1))^2}{\sqrt{4x}-2}=\lim\limits_{x\to 1}\left[\left(\dfrac{f(x)-f(1)}{\sqrt{4x}-2}\right)(f(x)+f(1))\right]=f'(1)\cdot 2\cdot f(1)$

(αφού η f είναι παραγωγίσιμη είναι και συνεχής στο $x_0=1$, δηλαδή $\lim\limits_{x\to 1}f(x)=f(1)$.

4.106. Είναι $f'(0)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)-f(0)}{x}=2$. Εστω $g(x)=\dfrac{f(x)-f(0)}{x}$, $x\neq 0$ και $\lim\limits_{x\to 0}g(x)=2$ Τότε $f(x)=xg(x)+f(0)$

Είναι: $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)-f(0)\sqrt{x^2+1}}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{xg(x)+f(0)-f(0)\sqrt{x^2+1}}{x}=$

$$=\lim_{x\to 0}\left[\frac{xg(x)}{x}+\frac{f(0)\left(1-\sqrt{x^2+1}\right)}{x}\right]=$$

$$=\lim_{x\to 0}\left[g(x)+\frac{f(0)\left(1-\sqrt{x^2+1}\right)\left(1+\sqrt{x^2+1}\right)}{x\left(1+\sqrt{x^2+1}\right)}\right]=$$

$$=\lim_{x\to 0}\left[g(x)+f(0)\frac{-x^2}{x\left(1+\sqrt{x^2+1}\right)}\right]=$$

$$=\lim_{x\to 0}\left[g(x)-f(0)\frac{x}{\left(1+\sqrt{x^2+1}\right)}\right]=2-f(0)\cdot 0=2.$$

4.107. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{2f(x)-f(1)\sqrt{x^2+3}}{x-1}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{2f(x)-2f(1)+2f(1)-f(1)\sqrt{x^2+3}}{x-1}=$

$$=\lim_{x\to 1}\left[2\frac{f(x)-f(1)}{x-1}-f(1)\frac{\sqrt{x^2+3}-2}{x-1}\right]=$$

$$=\lim_{x\to1}\left[2\frac{f(x)-f(1)}{x-1}-f(1)\frac{x^2+3-4}{(x-1)\left(\sqrt{x^2+3}+2\right)}\right]=$$

$$=\lim_{x\to1}\left[2\frac{f(x)-f(1)}{x-1}-f(1)\frac{\cancel{(x-1)}(x+1)}{\cancel{(x-1)}\left(\sqrt{x^2+3}+2\right)}\right]=$$

$$=2f'(1)-\frac{1}{2}f(1)=10-\frac{1}{2}f(1)$$

4.108. $\lim_{x\to3}\frac{f^2(x)-25}{x^2-x-6}=\lim_{x\to3}\left(\frac{f(x)-5}{x-3}\cdot\frac{f(x)+5}{x-2}\right)=f'(3)\left(f(3)+5\right)=50$

4.109. $\lim_{x\to1}\frac{f(x)-2x}{\sqrt{x+3}-2}=\lim_{x\to1}\frac{\left(f(x)-2x\right)\left(\sqrt{x+3}+2\right)}{x+3-4}=\lim_{x\to1}\left[\frac{f(x)-2+2-2x}{x+3-4}\left(\sqrt{x+3}+2\right)\right]=$

$$=\lim_{x\to1}\left[\left(\frac{f(x)-2}{x-1}-2\frac{\cancel{x-1}}{\cancel{x-1}}\right)\left(\sqrt{x+3}+2\right)\right]=\left(f'(1)-2\right)4=8$$

4.110. $\lim_{x\to h}\frac{f(x)\sqrt{x}-f(h)\sqrt{h}}{x-h}=\lim_{x\to h}\frac{f(x)\sqrt{x}-f(h)\sqrt{x}+f(h)\sqrt{x}-f(h)\sqrt{h}}{x-h}=$

$$=\lim_{x\to h}\left(\sqrt{x}\,\frac{f(x)-f(h)}{x-h}+f(h)\frac{\sqrt{x}-\sqrt{h}}{x-h}\right)=$$

$$=\lim_{x\to h}\left(\sqrt{x}\,\frac{f(x)-f(h)}{x-h}+f(h)\frac{\cancel{x-h}}{\cancel{(x-h)}\left(\sqrt{x}+\sqrt{h}\right)}\right)=$$

$$=\sqrt{x}f'(h)+\frac{f(h)}{2\sqrt{h}}=\frac{2hf'(h)+f(h)}{2\sqrt{h}}$$

4.111. **α)** $\lim_{h\to0}\frac{f(x_0+h)+f(x_0-h)-2f(x_0)}{h}=\lim_{h\to0}\left(\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}+\frac{f(x_0-h)-f(x_0)}{h}\right)=$

$$=f'(x_0)-f'(x_0)=0$$

Για όλα τα σκέλη, ισχύει:

$$\lim_{h\to0}\frac{f(x_0+kh)-f(x_0)}{h}\overset{kh=u}{\underset{u\to0}{=}}\lim_{u\to0}\frac{f(x_0+u)-f(x_0)}{\frac{u}{k}}=\lim_{u\to0}k\frac{f(x_0+u)-f(x_0)}{u}=kf'(x_0)$$

β) $\lim_{h\to0}\frac{f(x_0+2h)-2f(x_0+h)+f(x_0)}{h}=\lim_{h\to0}\left(\frac{f(x_0+2h)-f(x_0)}{h}-2\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}\right)=$

$$=2f'(x_0)-2f'(x_0)=0$$

γ) $\lim_{h\to0}\frac{f^2(x_0+2h)-f^2(x_0+h)}{h}=$

$$=\lim_{h\to 0}\left[\frac{f(x_0+2h)-f(x_0+h)}{h}\left(f(x_0+2h)+f(x_0+h)\right)\right]=$$

$$=\lim_{h\to 0}\left[\left(\frac{f(x_0+2h)-f(x_0)}{h}-\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}\right)\left(f(x_0+2h)+f(x_0+h)\right)\right]=$$

$$=\left(2f'(x_0)-f'(x_0)\right)\left(f(x_0)+f(x_0)\right)=2f'(x_0)f(x_0)$$

δ) $$\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0-h)}{\eta\mu h}=\lim_{h\to 0}\left[\frac{1}{\frac{\eta\mu h}{h}}\left(\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}-\frac{f(x_0-h)-f(x_0)}{h}\right)\right]=$$

$$=f'(x_0)+f'(x_0)=2f'(x_0)$$

4.112. **α)** Θέτουμε $kh=u\Leftrightarrow h=\frac{u}{k}$. Όταν $h\to 0$ τότε $u\to 0$.

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+kh)-f(x_0)}{h}=\lim_{u\to 0}\frac{f(x_0+u)-f(x_0)}{\frac{u}{k}}=\lim_{u\to 0}k\frac{f(x_0+u)-f(x_0)}{u}=kf'(x_0)$$

β) Επειδή η f είναι παραγωγίσιμη στο $x_0\in\mathbb{R}$, υπάρχει στο $\mathbb{R}$ το

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}=f'(x_0).$$

Είναι $$\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+\mu h)-f(x_0-\nu h)}{(\mu+\nu)h}=\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+\mu h)-f(x_0)+f(x_0)-f(x_0-\nu h)}{(\mu+\nu)h}=$$

$$=\lim_{h\to 0}\left(\frac{f(x_0+\mu h)-f(x_0)}{(\mu+\nu)h}-\frac{f(x_0-\nu h)-f(x_0)}{(\mu+\nu)h}\right)$$

Θέτουμε $\mu h=u\Leftrightarrow h=\frac{u}{\mu}$. Όταν $h\to 0$ είναι $u\to 0$. Τότε

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+\mu h)-f(x_0)}{(\mu+\nu)h}=\lim_{u\to 0}\frac{f(x_0+u)-f(x_0)}{(\mu+\nu)\frac{u}{\mu}}=\frac{1}{\frac{\mu+\nu}{\mu}}\lim_{u\to 0}\frac{f(x_0+u)-f(x_0)}{u}=\frac{\mu}{\mu+\nu}f'(x_0)$$

Θέτουμε $-\nu h=t\Leftrightarrow h=-\frac{t}{\nu}$. Όταν $h\to 0$ είναι $t\to 0$. Τότε

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0-\nu h)-f(x_0)}{(\mu+\nu)h}=\lim_{t\to 0}\frac{f(x_0+t)-f(x_0)}{-(\mu+\nu)\frac{t}{\nu}}=-\frac{1}{\frac{\mu+\nu}{\nu}}\lim_{t\to 0}\frac{f(x_0+t)-f(x_0)}{t}=-\frac{\nu}{\mu+\nu}f'(x_0)$$

Άρα $$\lim_{h\to 0}\left(\frac{f(x_0+\mu h)-f(x_0)}{(\mu+\nu)h}-\frac{f(x_0-\nu h)-f(x_0)}{(\mu+\nu)h}\right)=\frac{\mu}{\mu+\nu}f'(x_0)+\frac{\nu}{\mu+\nu}f'(x_0)=$$

$$\frac{\mu+\nu}{\mu+\nu}f'(x_0)=f'(x_0)$$

4.113. Είναι $f'(0)=\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x}=\alpha$. Εχουμε

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(3x)-f(x)}{6x}=\lim_{x\to 0}\frac{f(3x)-f(0)+f(0)-f(x)}{6x}=\lim_{x\to 0}\left(\frac{f(3x)-f(0)}{6x}-\frac{f(x)-f(0)}{6x}\right).$$

Θέτουμε $3x=u\Leftrightarrow x=\frac{u}{3}$. Για $x\to 0$ είναι $u\to 0$, οπότε:

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(3x)-f(0)}{6x}=\lim_{u\to 0}\frac{f(u)-f(0)}{2u}=\frac{1}{2}\alpha \text{ και } \lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{6x}=\frac{1}{6}\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x}=\frac{1}{6}\alpha.$$

Άρα, $\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(3x)-f(x)}{6x}=\frac{1}{2}\alpha-\frac{1}{6}\alpha=\frac{\alpha}{3}$.

4.114. Είναι $\lim\limits_{y\to+\infty}\left[y\left(f\left(x_0+\frac{1}{y}\right)-f(x_0)\right)\right]=\lim\limits_{y\to+\infty}\frac{f\left(x_0+\frac{1}{y}\right)-f(x_0)}{\frac{1}{y}}$.

Θέτουμε $\frac{1}{y}=h$. Όταν $y\to+\infty$ είναι $h\to 0$.

Οπότε: $\lim\limits_{y\to+\infty}\left[y\left(f\left(x_0+\frac{1}{y}\right)-f(x_0)\right)\right]=\lim\limits_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}=f'(x_0)$.

4.115. Θέτουμε $\frac{1-2x}{x}=u\Leftrightarrow\frac{1}{x}-2=u\Leftrightarrow\frac{1}{x}=u+2\Leftrightarrow x=\frac{1}{u+2}$

Όταν $x\to+\infty$, τότε $u\to-2$.

Είναι $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[x\left(f\left(\frac{1-2x}{x}\right)-f(-2)\right)\right]=\lim\limits_{u\to-2}\left[\frac{1}{u+2}\left(f(u)-f(-2)\right)\right]=$

$$=\lim_{u\to-2}\frac{f(u)-f(-2)}{u+2}=f'(-2)=\lambda$$

4.116. Επειδή η f είναι παραγωγίσιμη στο $x_0=1$ ισχύει:

$$f'(1)=\lim_{x\to 1}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim_{x\to 1}\frac{f(x^3)-3}{x-1}\overset{x^3=u\Leftrightarrow x=\sqrt[3]{u}}{\underset{u\to 1}{=}}\lim_{u\to 1}\frac{f(u)-3}{\sqrt[3]{u}-1}=$$

$$\lim_{u\to 1}\frac{(f(u)-3)\left(\sqrt[3]{u^2}+\sqrt[3]{u}+1\right)}{\left(\sqrt[3]{u}-1\right)\left(\sqrt[3]{u^2}+\sqrt[3]{u}+1\right)}\Leftrightarrow f'(1)=\lim_{u\to 1}\left[\frac{f(u)-3}{u-1}\left(\sqrt[3]{u^2}+\sqrt[3]{u}+1\right)\right]=3f'(1)\Leftrightarrow$$

$2f'(1)=0\Leftrightarrow f'(1)=0$.

$$\lim_{x\to 1}\frac{xf(x)-3}{x^3-1}=\lim_{x\to 1}\frac{xf(x)-3x+3x-3}{(x-1)(x^2+x+1)}=$$

$$\lim_{x\to 1}\left[\frac{x(f(x)-3)}{(x-1)}\frac{1}{x^2+x+1}+\frac{3}{x^2+x+1}\right]=f'(1)\frac{1}{3}+1=1$$

4.117. Θέτουμε $2\dfrac{f(x)-f'(x)}{x-1}=g(x)\overset{x\neq 1}{\Leftrightarrow} f'(x)=f(x)-\dfrac{1}{2}g(x)(x-1)$

$$f'(1)=\lim_{x\to1}f'(x)=\lim_{x\to1}\left(f(x)-\frac{1}{2}g(x)(x-1)\right)=f(1)=2$$

$$\lim_{x\to1}\frac{f'(x)-f'(1)}{x-1}=\lim_{x\to1}\frac{f(x)-\frac{1}{2}g(x)(x-1)-2}{x-1}=$$

$$=\lim_{x\to1}\left(\frac{f(x)-2}{x-1}-\frac{1}{2}g(x)\right)=f'(1)-\frac{5}{2}=2-\frac{5}{2}=-\frac{1}{2}$$

4.118. $f(x+y)=f(x)-f(y)$ (1). Για $x=y=0$ είναι: $f(0)=f(0)-f(0)\Leftrightarrow f(0)=0$.

Επειδή η f είναι παραγωγίσιμη στο $x_0=0$ ισχύει:

$$f'(0)=\lim_{x\to0}\frac{f(x)-f(0)}{x}\Leftrightarrow f'(0)=\lim_{x\to0}\frac{f(x)}{x}\quad(2).$$

Για να είναι f παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$, αρκεί να υπάρχει στο $\mathbb{R}$ το όριο

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0},\ x_0\in\mathbb{R}.$$

Είναι:

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=\lim_{h\to0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}\overset{(1)}{=}$$

$$\lim_{h\to0}\frac{f(x_0)-f(h)-f(x_0)}{h}=-\lim_{h\to0}\frac{f(h)}{h}\overset{(2)}{=}-f'(0)$$

Άρα η f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με $f'(x)=-f'(0)$.

4.119. Για $x=y=0$ είναι $f(0)=f(0)+f(0)\Leftrightarrow f(0)=0$

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=\lim_{h\to0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}=\lim_{h\to0}\frac{\cancel{f(x_0)}+f(h)-x_0h-\cancel{f(x_0)}}{h}=$$

$$=\lim_{h\to0}\left(\frac{f(h)}{h}-x_0\right)=f'(0)-x_0,\ \text{άρα}\ f'(x_0)=f'(0)-x_0$$

4.120. Για $x=y=0$ είναι $f(0)=f(0)+f(0)\Leftrightarrow f(0)=0$

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=\lim_{h\to0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}=\lim_{h\to0}\frac{f(x_0)\sigma\upsilon\nu h+\sigma\upsilon\nu x_0 f(h)-f(x_0)}{h}=$$

$$=\lim_{h\to0}\left(f(x_0)\frac{\sigma\upsilon\nu h-1}{h}+\sigma\upsilon\nu x_0\frac{f(h)}{h}\right)=f(x_0)\cdot0+\sigma\upsilon\nu x_0\cdot5=5\sigma\upsilon\nu x_0$$

άρα $f'(x_0)=5\sigma\upsilon\nu x_0$

4.121. Για $\alpha=\beta=0$ είναι $f(0)=f^2(0)\Leftrightarrow f(0)-f^2(0)=0\Leftrightarrow f(0)\big(f(0)-1\big)=0\Leftrightarrow$

$f(0)=0$ ή $f(0)=1$

Όμως $\lim\limits_{x\to0}f(x)=\lim\limits_{x\to0}\big(1+xg(x)\big)=1$, και η f είναι συνεχής στο 0, άρα $f(0)=1$.

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{1+xg(x)-1}{x}=\lim_{x\to 0}g(x)=1,\text{ άρα } f'(0)=1$$

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0)f(h)-f(x_0)}{h}=$$

$$=\lim_{h\to 0}f(x_0)\frac{f(h)-1}{h}=f(x_0)f'(0)=f(x_0),$$

δηλαδή $f'(x_0)=f(x_0)$ για κάθε $x_0\in\mathbb{R}$, άρα $f'(x)=f(x)$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

4.122. Για $x=y=0$ είναι $f(0)=f(0)+f(0)+1\Leftrightarrow f(0)=-1$

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}=$$

$$\lim_{h\to 0}\frac{\cancel{f(x_0)}+f(h)+2x_0h(x_0+h)+1-\cancel{f(x_0)}}{h}=$$

$$=\lim_{h\to 0}\left(\frac{f(h)+1}{h}+2x_0(x_0+h)\right)=1+2x_0^2,$$ άρα η f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$.

4.123. Για $x=y=0$ είναι: $f(0)=\dfrac{2f(0)}{1-f^2(0)}\Leftrightarrow 2f(0)=f(0)-f^3(0)\Leftrightarrow$

$f^3(0)+f(0)=0\Leftrightarrow f(0)\left[f^2(0)+1\right]=0\Leftrightarrow f(0)=0$, επειδή $f^2(0)+1\neq 0$. Οπότε

$f'(0)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)-f(0)}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x}\in\mathbb{R}$ και αφού η f είναι παραγωγίσιμη στο 0, θα είναι και συνεχής, οπότε $\lim\limits_{x\to 0}f(x)=f(0)=0$. Εστω τυχαίο $x_0\in\mathbb{R}$, τότε:

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}\overset{(1)}{=}\lim_{h\to 0}\frac{\dfrac{f(x_0)+f(h)}{1-f(x_0)f(h)}-f(x_0)}{h}=$$

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0)+f(h)-f(x_0)+f^2(x_0)f(h)}{h\left(1-f(x_0)f(h)\right)}=$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{f(h)\left[1+f^2(x_0)\right]}{h\left(1-f(x_0)f(h)\right)}=\lim_{h\to 0}\left[\frac{f(h)}{h}\cdot\frac{1+f^2(x_0)}{1-f(x_0)f(h)}\right]=$$

$$f'(0)\frac{1+f^2(x_0)}{1-f(x_0)f(0)}=$$

$$=f'(0)\frac{1+f^2(x_0)}{1-f(x_0)\cdot 0}=f'(0)\left[1+f^2(x_0)\right].$$

Οπότε, η f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$.

4.124. Για $x=y=1$ είναι $f(1)=f(1)+f(1)\Leftrightarrow f(1)=0$.

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=\lim_{h\to 1}\frac{f(x_0h)-f(x_0)}{x_0h-x_0}=\lim_{h\to 1}\frac{hf(x_0)+x_0f(h)-f(x_0)}{x_0(h-1)}=$$

$$=\lim_{h\to 1}\left(f(x_0)\frac{\cancel{h-1}}{x_0\,\cancel{(h-1)}}x_0\frac{f(h)}{h-1}\right)=\frac{f(x_0)}{x_0}+x_0f'(1)$$

Άρα η f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}^*$,

4.125. **α)** Για $x=y=1\Rightarrow f(1)=0$.

β) $\lim\limits_{h\to 1}\frac{f(xh)-f(x)}{xh-x}=\lim\limits_{h\to 1}\left[\frac{x^2f(h)+h^2f(x)-f(x)}{x(h-1)}\right]=\lim\limits_{h\to 1}\left[\frac{f(x)(h^2-1)}{x(h-1)}+\frac{x^2f(h)}{x(h-1)}\right]=...=$

$$=\frac{2f(x)}{x}+xf'(1)=\frac{2f(x)}{x}+x.$$

γ) Για κάθε $x>0$ $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\underset{x=x_0h}{\overset{\text{θέτω}}{=}}\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f(x_0h)-f(x_0)}{x_0h-x_0}=...=\frac{2f(x_0)}{x_0}+x_0$

άρα $f'(x)=\frac{2f(x)}{x}+x\Leftrightarrow xf'(x)=2f(x)+x^2\overset{\cdot x>0}{\Leftrightarrow}x^2f'(x)=2xf(x)+x^3$.

4.126. **α)** Στην αρχική για $\alpha=\beta=0\Rightarrow f(0)=f^2(0)\overset{f(0)\neq 0}{\Leftrightarrow}f(0)=1$.

β) Είναι $f'(0)=\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)-1}{x}$

$$f'(x_0)=\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\overset{x-x_0=h}{=}\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}\overset{(i)}{=}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{(f(x_0)+x_0)(f(h)+h)-x_0-h-f(x_0)}{h}=$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0)\cdot f(h)+hf(x_0)+x_0f(h)+x_0h-x_0-h-f(x_0)}{h}=$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0)(f(h)-1)+x_0(f(h)-1)+h(x_0-1)+f(x_0)h}{h}=$$

$$=f(x_0)f'(0)+x_0f'(0)+x_0-1+f(x_0)=f'(0)(f(x_0)+x_0)+f(x_0)+x_0-1=$$

$$=(f(x_0)+x_0)(f'(0)+1)-1.$$

4.127. **α)** Αρκεί $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=f(x_0)$ ή $\lim\limits_{h\to 0}f(x_0+h)=f(x_0)$, $x_0\in\mathbb{R}$.

Για $x=x_0$ και $y=h$ είναι: $f(x_0)-3h^2\le f(x_0+h)\le f(x_0)+2h^2$ (1).

Είναι $\lim\limits_{h\to 0}\left(f(x_0)-3h^2\right)=f(x_0)$ και $\lim\limits_{h\to 0}\left(f(x_0)+2h^2\right)=f(x_0)$, οπότε και

$\lim\limits_{h\to 0}f(x_0+h)=f(x_0)$, άρα η f είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$.

β) Αν $h>0$ η (1) γίνεται:

$$-3h^2\le f(x_0+h)-f(x_0)\le 2h^2\Leftrightarrow -3h\le\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}\le 2h.$$

Είναι $\lim\limits_{h\to 0^+}(-3h)=0$ και $\lim\limits_{h\to 0^+}(2h)=0$, οπότε και $\lim\limits_{h\to 0^+}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}=0$. (2).

Αν $h<0$ η (1) γίνεται:

$$-3h \geq \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} \geq 2h \Leftrightarrow 2h \leq \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} \leq -3h.$$

Είναι $\lim\limits_{h\to 0^-}(2h)=0$ και $\lim\limits_{h\to 0^-}(-3h)=0$, οπότε και $\lim\limits_{h\to 0^-}\dfrac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}=0 \quad (3)$.

Από τις (2), (3) προκύπτει ότι η f είναι παραγωγίσιμη στο $x_0\in\mathbb{R}$ με $f'(x_0)=0$, οπότε η f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$.

4.128. **α)** Αν $x<0$ τότε $\lim\limits_{\lambda\to+\infty} e^{\lambda x}=0$ και $f(x)=\dfrac{4x^2+(\alpha x+3\beta)\cdot 0}{0+2}=2x^2$.

Αν $x=0$ τότε $f(0)=\lim\limits_{\lambda\to+\infty}\dfrac{4\cdot 0^2+(\alpha\cdot 0+3\beta)e^{\lambda\cdot 0}}{e^{\lambda\cdot 0}+2}=\dfrac{3\beta}{3}=\beta$.

Αν $x>0$ τότε $\lim\limits_{\lambda\to+\infty} e^{\lambda x}=+\infty$ και

$$f(x)=\lim_{\lambda\to+\infty}\frac{4\dfrac{x^2}{e^{\lambda x}}+\alpha x+3\beta}{1+\dfrac{2}{e^{\lambda x}}}=\frac{4\cdot 0+\alpha x+3\beta}{1+0}=\alpha x+3\beta.$$

β) Για να είναι η f παραγωγίσιμη στο $x_0=0$ πρέπει να είναι και συνεχής σε αυτό.

Δηλαδή: $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=f(0)\Leftrightarrow \lim\limits_{x\to 0^-}2x^2=\lim\limits_{x\to 0^+}(\alpha x+3\beta)=\beta\Leftrightarrow 0=3\beta=\beta$

άρα $\beta=0$.

Είναι $\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{2x^2}{x}=\lim\limits_{x\to 0^-}2x=0$ και $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{\alpha x}{x}=\alpha$.

Πρέπει $\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}\Leftrightarrow \alpha=0$.

4.129. **α)** Για $x=1$ στη σχέση $\left|f(x)-(x-1)\sigma\upsilon\nu(x-1)\right|\leq (x-1)^2 \quad (1)$, έχουμε

$\left|f(1)-0\sigma\upsilon\nu 0\right|\leq 0\Leftrightarrow |f(1)|\leq 0\Leftrightarrow f(1)=0$.

β) Από την (1) έχουμε $\left|f(x)-(x-1)\sigma\upsilon\nu(x-1)\right|\leq |x-1|^2$ και για $x\neq 1$, διαιρώντας με $|x-1|$, έχουμε:

$$\frac{\left|f(x)-(x-1)\sigma\upsilon\nu(x-1)\right|}{|x-1|}\leq\frac{|x-1|^2}{|x-1|}\Leftrightarrow\left|\frac{f(x)-(x-1)\sigma\upsilon\nu(x-1)}{x-1}\right|\leq |x-1|\Leftrightarrow$$

$$\left|\frac{f(x)}{x-1}-\sigma\upsilon\nu(x-1)\right|\leq |x-1|\Leftrightarrow -|x-1|\leq\frac{f(x)}{x-1}-\sigma\upsilon\nu(x-1)\leq |x-1|\Leftrightarrow$$

$$\sigma\upsilon\nu(x-1)-|x-1|\leq\frac{f(x)}{x-1}\leq\sigma\upsilon\nu(x-1)+|x-1|.$$

Όμως, $\lim\limits_{x\to 1}\left[\sigma\upsilon\nu(x-1)-|x-1|\right]=\sigma\upsilon\nu 0=1$ και $\lim\limits_{x\to 1}\left[\sigma\upsilon\nu(x-1)+|x-1|\right]=\sigma\upsilon\nu 0=1$,

οπότε από το κριτήριο παρεμβολής και

$$\lim_{x\to 1}\frac{f(x)}{x-1}=1\Leftrightarrow\lim_{x\to 1}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=1\Leftrightarrow f'(1)=1.$$

γ) Είναι $L=\lim\limits_{x\to1}\dfrac{f(3x-2)-f(x)}{f(2x-1)}=\lim\limits_{x\to1}\dfrac{\dfrac{f(3x-2)}{x-1}-\dfrac{f(x)}{x-1}}{\dfrac{f(2x-1)}{x-1}}$. Θέτουμε

$u=3x-2\Leftrightarrow x=\dfrac{u+2}{3}$, οπότε όταν $x\to1$, τότε $u\to1$ και

$$\lim_{x\to1}\frac{f(3x-2)}{x-1}=\lim_{u\to1}\frac{f(u)}{\frac{u+2}{3}-1}=\lim_{u\to1}\frac{f(u)}{\frac{u-1}{3}}=3\lim_{u\to1}\frac{f(u)}{u-1}=3f'(1)=3.$$

Εστω $\omega=2x-1\Leftrightarrow x=\dfrac{\omega+1}{2}$. Όταν $x\to1$, τότε $u\to1$ και

$$\lim_{x\to1}\frac{f(2x-1)}{x-1}=\lim_{\omega\to1}\frac{f(\omega)}{\frac{\omega+1}{2}-1}=\lim_{\omega\to1}\frac{f(\omega)}{\frac{\omega-1}{2}}=2\lim_{\omega\to1}\frac{f(\omega)}{\omega-1}=2f'(1)=2.$$

Άρα, $L=\dfrac{3-1}{2}=1$.

4.130. **α)** Στη σχέση $f^3(x)+2x^2f(x)=x^4+x^2+1$ (1) αντικαθιστούμε όπου $x=1$ και έχουμε: $f^3(1)+2f(1)=3\Leftrightarrow(f(1))(f^2(1)+f(1)+3)=0$

Οπότε $f(1)=1$ αφού $f^2(1)+f(1)+3>0$.

β) Εστω ότι η f δεν διατηρεί σταθερό πρόσημο στο $\mathbb{R}$. Δηλαδή υπάρχουν $x_1,x_2\in\mathbb{R}$ με $x_1<x_2$ τέτοια ώστε $f(x_1)\cdot f(x_2)<0$. Αφού η f είναι συνεχής στο $[x_1,x_2]$ τότε σύμφωνα με το Θ. Bolzano υπάρχει $\xi\in x_1,x_2:f(\xi)=0$. Στην (1) για $x=\xi$ έχουμε $f^3(\xi)+2\xi^2f(\xi)=\xi^4+\xi^2+1\Leftrightarrow\xi^4+\xi^2+1=0$ (άτοπο) αφού $\xi^4+\xi^2+1>0$.

Οπότε η f διατηρεί σταθερό πρόσημο στο $\mathbb{R}$. Επειδή $f(1)=1>0$ είναι $f(x)>0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

γ) Επειδή η f είναι παραγωγίσιμη στο $x_0=1$ υπάρχει το

$f'(1)=\lim\limits_{x\to1}\dfrac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim\limits_{x\to1}\dfrac{f(x)-1}{x-1}\in\mathbb{R}$.

Επίσης η f είναι συνεχής στο $x_0=1$, δηλαδή $\lim\limits_{x\to1}f(x)=f(1)=1$.

Από την (1) έχουμε $f^3(x)-1+2x^2f(x)-2x^2=x^4-x^2\Leftrightarrow$

$$(f(x)-1)(f^2(x)+f(x)+1)+2x^2(f(x)-1)=x^2(x-1)(x+1)$$

Για $x\neq1$ είναι: $\dfrac{f(x)-1}{x-1}\cdot(f^2(x)+f(x)+1)+2x^2\dfrac{f(x)-1}{x-1}=x^2(x+1)$ άρα

$$\lim_{x\to1}\left[\frac{f(x)-1}{x-1}\cdot(f^2(x)+f(x)+1)+2x^2\frac{f(x)-1}{x-1}\right]=\lim_{x\to1}\left[x^2(x+1)\right]\Leftrightarrow$$

$$3f'(1)+2f'(1)=2\Leftrightarrow f'(1)=\frac{2}{5}.$$

4.130. Για $x=y=0\Rightarrow f(0)=0$.

Επειδή η g είναι συνεχής στο x_0, ισχύει ότι $\lim\limits_{x\to x_0} g(x)=\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=g(x_0)$

άρα $f'(x_0)=g(x_0)$. Όμως

$$f'(x_0)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{f(h+x_0)-f(x_0)}{h}=$$

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(h)+\cancel{f(x_0)}+2hx_0+h-\cancel{f(x_0)}}{h}=\lim_{h\to 0}\left(\frac{f(h)}{h}+2x_0+1\right)=f'(0)+2x_0+1=$$

$$2x_0+3\Leftrightarrow f'(x_0)-2x_0-3=0$$

Για $x=x_0$ η εξίσωση γίνεται $g(x_0)-2x_0-3=0\Leftrightarrow f'(x_0)-2x_0-3=0$ που ισχύει.

4.132. **α)** Για $x=y=0$ προκύπτει $f(0)=1$.

β) $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=\lim\limits_{h\to 0} f(x_0+h)=\lim\limits_{h\to 0}\left[f(x_0)f(h)\right]=f(x_0)$.

γ) $$\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0)f(h)-f(x_0)}{h}=$$

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0)(f(h)-1)}{h}=f(x_0)f'(0)=f(x_0)$$

Άρα $f'(x)=f(x)\ \ \forall x\in\mathbb{R}$.

4.133. **α)** Είναι $f'(2)>0\Leftrightarrow \lim\limits_{x\to 2}\dfrac{f(x)-f(2)}{x-2}>0\Leftrightarrow \lim\limits_{x\to 2}\dfrac{f(x)}{x-2}>0$ οπότε και $\dfrac{f(x)}{x-2}>0$ κοντά στο 2, άρα $f(x)(x-2)>0$.

β) Αφού $f(x)(x-2)>0$ κοντά στο 2, τότε υπάρχει $\theta\in(0,2)$ τέτοιο ώστε $f(\theta)(\theta-2)>0$ και αφού $\theta<2$ είναι $f(\theta)<0$. Επίσης $f(0)>0$, άρα $f(0)f(\theta)<0$ και επειδή η f είναι συνεχής, σύμφωνα με το Θ.Bolzano, υπάρχει $x_0\in(0,2)$ τέτοιο ώστε $f(x_0)=0$.

4.134. **α)** Εστω $\varphi(x)=\dfrac{|f(x)-g(x)|}{x-x_0}\Rightarrow |f(x)-g(x)|=(x-x_0)\varphi(x),\ x\neq x_0$

$\lim\limits_{x\to x_0}|f(x)-g(x)|=\lim\limits_{x\to x_0}\left[(x-x_0)\varphi(x)\right]\Leftrightarrow |f(x_0)-g(x_0)|=0\cdot\kappa\Leftrightarrow f(x_0)=g(x_0)\ (1)$.

β) Είναι $\lim\limits_{x\to x_0}\left|\dfrac{f(x)-g(x)}{x-x_0}\right|=|\kappa|$ οπότε

$$\left.\begin{aligned}|\kappa|&=\lim_{x\to x_0^-}\left|\frac{f(x)-g(x)}{x-x_0}\right|=\lim_{x\to x_0^-}\frac{|f(x)-g(x)|}{-(x-x_0)}=-\kappa\\ |\kappa|&=\lim_{x\to x_0^+}\left|\frac{f(x)-g(x)}{x-x_0}\right|=\lim_{x\to x_0^+}\frac{|f(x)-g(x)|}{-(x-x_0)}=\kappa\end{aligned}\right\}\Rightarrow -\kappa=\kappa\Rightarrow \kappa=0$$

Οπότε $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)-g(x)}{x-x_0}=0$.

γ) Εστω $\dfrac{f(x)-g(x)}{x-x_0}=h(x)\Leftrightarrow f(x)=g(x)+h(x)(x-x_0)$, $x\neq x_0$

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=\lim_{x\to x_0}\frac{g(x)+h(x)(x-x_0)-f(x_0)}{x-x_0}\overset{(1)}{=}$$

$$=\lim_{x\to x_0}\left[\frac{g(x)-g(x_0)}{x-x_0}+h(x)\right]=g'(x_0)+0$$

Κανόνες παραγώγισης

4.154. **α)** $f'(x)=6x^2-8x+3$ **β)** $f'(x)=\sigma\upsilon\nu x-2\eta\mu x$ **γ)** $f'(x)=\frac{1}{x}-e^x$

δ) $f'(x)=-\frac{1}{x^2}+\frac{6}{x^3}$ **ε)** $f'(x)=\frac{2}{x}-2x-\frac{1}{x^2}$ **στ)** $f'(x)=\frac{1}{\sqrt{x}}$

ζ) $f'(x)=3e^x$ **η)** $f'(x)=\left(x^{\frac{5}{2}}\right)'=\frac{5}{2}x\sqrt{x}$ **θ)** $f'(x)=\frac{1}{\sigma\upsilon\nu^2 x}-\frac{1}{\eta\mu^2 x}$

4.155. **α)** $f'(x)=2x\ln x+x^{\cancel{2}}\frac{1}{\cancel{x}}=x(2\ln x+1)$ **β)** $f'(x)=3x^2e^x\eta\mu x+x^3e^x\eta\mu x+x^3e^x\sigma\upsilon\nu x$

γ) $f'(x)=te^x\eta\mu x+te^x\sigma\upsilon\nu x$ **δ)** $f'(x)=\frac{2x(x+1)-(x^2-2)}{(x+1)^2}=\frac{x^2+2x+2}{(x+1)^2}$

ε) $f'(x)=\frac{\frac{1}{x}x-\ln x}{x^2}=\frac{1-\ln x}{x^2}$ **στ)** $f'(x)=\frac{x\sigma\upsilon\nu x-\eta\mu x}{x^2}$

ζ) $f'(x)=\frac{x+2-(x-1)}{(x+2)^2}=\frac{3}{(x+2)^2}$ **η)** $f'(x)=2\eta\mu t\frac{e^xx^2-e^x2x}{x^4}=2\eta\mu t\frac{\cancel{x}e^x(x-2)}{x^{\cancel{4}3}}$

θ) $f'(x)=\frac{\sigma\upsilon\nu x(\eta\mu x-2)-(\eta\mu x+2)\sigma\upsilon\nu x}{(\eta\mu x-2)^2}=\frac{-4\sigma\upsilon\nu x}{(\eta\mu x-2)^2}$

4.156. **α)** $f'(x)=-\frac{1}{x^2}-\frac{\cancel{x}+1-\cancel{x}}{(x+1)^2}=-\frac{1}{x^2}-\frac{1}{(x+1)^2}$, $f'(4)=-\frac{1}{16}-\frac{1}{25}=-\frac{41}{400}$

β) $f'(x)=\frac{1}{x}-2x+\frac{1}{2\sqrt{x}}$, $f'(1)=1-2+\frac{1}{2}=-\frac{1}{2}$

γ) $f'(x)=e^x\eta\mu x+e^x\sigma\upsilon\nu x$, $f'(0)=1$

4.157. **α)** $f'(x)=10(x^2-3x+5)^9(2x-3)$ **β)** $f'(x)=-\sigma\upsilon\nu(\sigma\upsilon\nu x)\eta\mu x$

γ) $f'(x)=-e^{\frac{1}{x}}\frac{1}{x^2}$ **δ)** $f'(x)=\frac{2x-1}{x^2-x+4}$

ε) $f'(x)=\frac{3^x\ln 3}{\sigma\upsilon\nu^2(3^x)}$ **στ)** $f'(x)=\frac{2x-6}{2\sqrt{x^2-6x+11}}=\frac{x-3}{\sqrt{x^2-6x+11}}$

ζ) $f'(x)=\left[3(x^2-2)^{-4}\right]=-12(x^2-2)^{-5}2x=\frac{-24x}{(x^2-2)^5}$

η) $f'(x)=2\ln(x^3-3x^2)\frac{3x^2-6x}{x^3-3x^2}$ **θ)** $f'(x)=\frac{\cancel{2}\eta\mu x\sigma\upsilon\nu x}{\cancel{2}\sqrt{\eta\mu^2 x+1}}$

ι) $f'(x)=5\eta\mu^4 x\sigma\upsilon\nu x$ **κ)** $f'(x)=5x^4\sigma\upsilon\nu x^5$

λ) $f'(x)=2\eta\mu(x^2-5x)\sigma\upsilon\nu(x^2-5x)(2x-5)$

4.158. **α)** $f'(x)=5(x^2-3x)^4(2x-3)$ **β)** $f'(x)=2xe^{x^2}$

γ) $f'(x)=6\ln x\frac{1}{x}=\frac{6\ln x}{x}$ **δ)** $f'(x)=2\sigma\upsilon\nu(2x+1)$

ε) $f'(x)=-\eta\mu(\eta\mu x)\sigma\upsilon\nu x$ **στ)** $f'(x)=e^x\sigma\upsilon\nu(e^x)$

ζ) $f'(x)=-\eta\mu(x^3-3x^2)(3x^2-6x)$ **η)** $f'(x)=6\eta\mu^2 x\sigma\upsilon\nu x$

θ) $f'(x)=2^{x^2-5x}\ln 2\cdot(2x-5)$ **ι)** $f'(x)=\frac{-3\eta\mu(3x+2)}{2\sqrt{1+\sigma\upsilon\nu(3x+2)}}$

κ) $f'(x)=\left[(\eta\mu x+2)^{\frac{1}{3}}\right]'=\frac{1}{3}(\eta\mu x+2)^{-\frac{2}{3}}\sigma\upsilon\nu x=\frac{\sigma\upsilon\nu x}{3\sqrt[3]{(\eta\mu x+2)^2}}$

λ) $f'(x)=\left[(1+\eta\mu^2 x)^{\frac{1}{2}}\right]'=\frac{1}{2}(1+\eta\mu^2 x)^{-\frac{1}{2}}2\eta\mu x\sigma\upsilon\nu x=\frac{\eta\mu x\sigma\upsilon\nu x}{\sqrt{1+\eta\mu^2 x}}$

4.159. **α)** $f(x)=x^x=e^{\ln x^x}=e^{x\ln x}$

$$f'(x)=\left(e^{x\ln x}\right)'=e^{x\ln x}\cdot(x\ln x)'=x^x\cdot\left(\ln x+x\cdot\frac{1}{x}\right)=x^x\cdot(\ln x+1)$$

β) $f(x)=e^{x\ln(\ln x)}$, $f'(x)=e^{x\ln(\ln x)}\left(\ln(\ln x)+\cancel{x}\frac{1}{\ln x}\frac{1}{\cancel{x}}\right)=(\ln x)^x\left(\ln(\ln x)+\frac{1}{\ln x}\right)$

γ) $f(x)=e^{\ln^3 x}$, $f'(x)=e^{\ln^3 x}3\ln^2 x\frac{1}{x}=3x^{\ln^2 x-1}\ln^2 x$

δ) $f(x)=\left(\frac{2}{x}\right)^x=e^{\ln\left(\frac{2}{x}\right)^x}=e^{x\ln\frac{2}{x}}$

$$f'(x)=\left(e^{x\ln\frac{2}{x}}\right)'=e^{x\ln\frac{2}{x}}\cdot\left(x\ln\frac{2}{x}\right)'=\left(\frac{2}{x}\right)^x\cdot\left[\ln\frac{2}{x}+x\cdot\frac{1}{\frac{2}{x}}\cdot\left(\frac{2}{x}\right)'\right]\Rightarrow$$

$$f'(x)=\left(\frac{2}{x}\right)^x\cdot\left[\ln\frac{2}{x}+x\cdot\frac{x}{2}\left(-\frac{2}{x^2}\right)\right]=\left(\frac{2}{x}\right)^x\cdot\left(\ln\frac{2}{x}-1\right)$$

ε) $f(x)=(x^2+1)^{x^4}=e^{\ln(x^2+1)^{x^4}}=e^{x^4\cdot\ln(x^2+1)}$

$$f'(x)=\left[e^{x^4\cdot\ln(x^2+1)}\right]'=e^{x^4\cdot\ln(x^2+1)}\cdot\left[x^4\cdot\ln(x^2+1)\right]'\Rightarrow$$

$$f'(x)=(x^2+1)^{x^4}\cdot\left[4x^3\cdot\ln(x^2+1)+x^4\cdot\frac{1}{x^2+1}(x^2+1)'\right]\Rightarrow$$

$$f'(x)=(x^2+1)^{x^4}\left[4x^3\ln(x^2+1)+\frac{2x^5}{x^2+1}\right]$$

στ) $f(x)=e^{x\ln(\eta\mu x)}$,

$$f'(x)=e^{x\ln(\eta\mu x)}\left(\ln(\eta\mu x)+x\frac{1}{\eta\mu x}\sigma\upsilon\nu x\right)=(\eta\mu x)^x\left(\ln(\eta\mu x)+x\sigma\varphi x\right)$$

ζ) $f(x)=t^t+e^{x^2\ln x}$, $f'(x)=e^{x^2\ln x}\left(2x\ln x+x^{\cancel{2}}\dfrac{1}{\cancel{x}}\right)=x^{x^2+1}(2\ln x+1)$

η) $f(x)=e^{x\ln x}2^{x^2}$, $f'(x)=e^{x\ln x}(\ln x+1)2^{x^2}+e^{x\ln x}2^{x^2}2x\ln 2$

θ) $f(x)=x^x(1-x)^{1-x}=e^{x\ln x}e^{(1-x)\ln(1-x)}=e^{x\ln x+(1-x)\ln(1-x)}$

$$f'(x)=e^{x\ln x+(1-x)\ln(1-x)}\left[\ln x+1-\ln(1-x)-1\right]=x^x(1-x)^{1-x}\ln\frac{x}{1-x}$$

4.160. α) $f'(x)=\begin{cases}6x-2 & ,x<1\\ 4 & ,x>1\end{cases}$. Στο $x_0=1$, έχουμε:

$$\lim_{x\to1^-}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim_{x\to1^-}\frac{3x^2-2x-1}{x-1}=\lim_{x\to1^-}\frac{\cancel{(x-1)}(3x+1)}{\cancel{x-1}}=4 \text{ και}$$

$$\lim_{x\to1^+}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim_{x\to1^+}\frac{4x-3-1}{x-1}=\lim_{x\to1^+}\frac{4\cancel{(x-1)}}{\cancel{x-1}}=4, \text{ άρα } f'(1)=4 \text{ και } f'(x)=\begin{cases}6x-2 & ,x\le1\\ 4 & ,x>1\end{cases}$$

β) $f'(x)=\begin{cases}\sigma\upsilon\nu x+3 & ,x<0\\ 2x+4 & ,x>0\end{cases}$. Στο $x_0=0$, έχουμε:

$$\lim_{x\to0^-}\frac{f(x)-f(0)}{x}=\lim_{x\to0^-}\frac{\eta\mu x+3x+1-1}{x}=\lim_{x\to0^-}\left(\frac{\eta\mu x}{x}+3\right)=4 \text{ και}$$

$$\lim_{x\to0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x}=\lim_{x\to0^+}\frac{x^2+4x+1-1}{x}=\lim_{x\to0^+}\frac{\cancel{x}(x+4)}{\cancel{x}}=4, \text{ άρα } f'(0)=4 \text{ και}$$

$$f'(x)=\begin{cases}\sigma\upsilon\nu x+3 & ,x\le0\\ 2x+4 & ,x>0\end{cases}$$

4.161. α) $f(x)=\begin{cases}x^2 & ,x\le0 \text{ ή } x\ge1\\ -x^2+x & ,0<x<1\end{cases}$, $f'(x)=\begin{cases}2x & ,x<0 \text{ ή } x>1\\ -2x+2 & ,0<x<1\end{cases}$

Στο $x_0=0$, έχουμε: $\lim\limits_{x\to0^-}\dfrac{f(x)-f(0)}{x}=\lim\limits_{x\to0^-}\dfrac{x^{\cancel{2}}}{\cancel{x}}=0$, $\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{f(x)-f(0)}{x}=\lim\limits_{x\to0^-}\dfrac{\cancel{x}(-x+2)}{\cancel{x}}=2$,

οπότε η f δεν είναι παραγωγίσιμη στο $x_0=0$.

Στο $x_0=1$, έχουμε: $\lim\limits_{x\to1^+}\dfrac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim\limits_{x\to1^+}\dfrac{x^2-1}{x-1}=\lim\limits_{x\to1^+}\dfrac{\cancel{(x-1)}(x+1)}{\cancel{x-1}}=2$,

$\lim\limits_{x\to1^-}\dfrac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim\limits_{x\to1^-}\dfrac{-x^2+2x-1}{x-1}=\lim\limits_{x\to1^-}\dfrac{-(x-1)^{\cancel{2}}}{\cancel{x-1}}=0$ οπότε η f δεν είναι παραγωγίσιμη στο $x_0=1$.

β) $f(x)=\begin{cases}x^2-x+3, & x<3\\ x^2+x-3, & x\ge3\end{cases}$. Είναι $f'(x)=\begin{cases}2x-1, & x<3\\ 2x+1, & x>3\end{cases}$. Στο $x_0=3$, έχουμε:

$$\lim_{x\to3^-}\frac{f(x)-f(3)}{x-3}=\lim_{x\to3^-}\frac{x^2-x+3-9}{x-3}=\lim_{x\to3^-}\frac{x^2-x-6}{x-3}=\lim_{x\to3^-}\frac{\cancel{(x-3)}(x+2)}{\cancel{x-3}}=5 \text{ και}$$

$$\lim_{x\to 3^+}\frac{f(x)-f(3)}{x-3}=\lim_{x\to 3^+}\frac{x^2+x-3-9}{x-3}=\lim_{x\to 3^+}\frac{x^2-x-12}{x-3}=\lim_{x\to 3^+}\frac{\cancel{(x-3)}(x+4)}{\cancel{x-3}}=7$$

οπότε η f δεν είναι παραγωγίσιμη στο $x_0=3$.

γ) $f(x)=\begin{cases}x^2-4 & , \ x\le -2 \text{ ή } x\ge 2\\ -x^2+4 & , -2<x<2\end{cases}$. Είναι $f'(x)=\begin{cases}2x & , \ x<-2 \text{ ή } x>2\\ -2x & , -2<x<2\end{cases}$

Στο $x_0=2$, έχουμε: $\lim_{x\to 2^-}\frac{f(x)-f(2)}{x-2}=\lim_{x\to 2^-}\frac{-x^2+4}{x-2}=\lim_{x\to 2^-}\frac{-\cancel{(x-2)}(x+2)}{\cancel{x-2}}=-4$,

$\lim_{x\to 2^+}\frac{f(x)-f(2)}{x-2}=\lim_{x\to 2^-}\frac{x^2-4}{x-2}=\lim_{x\to 2^-}\frac{\cancel{(x-2)}(x+2)}{\cancel{x-2}}=4$, οπότε η f δεν είναι παραγωγίσιμη στο $x_0=2$.

Στο $x_0=-2$, έχουμε: $\lim_{x\to -2^-}\frac{f(x)-f(-2)}{x-2}=\lim_{x\to -2^-}\frac{x^2-4}{x+2}=\lim_{x\to -2^-}\frac{\cancel{(x+2)}(x-2)}{\cancel{x+2}}=-4$,

$\lim_{x\to -2^+}\frac{f(x)-f(-2)}{x+2}=\lim_{x\to 2^-}\frac{-x^2+4}{x+2}=\lim_{x\to 2^+}\frac{-\cancel{(x+2)}(x-2)}{\cancel{x+2}}=4$, οπότε η f δεν είναι παραγωγίσιμη στο $x_0=-2$.

4.162. α) $f'(x)=\begin{cases}3x^2+1 & , x<0\\ 2x+1 & , x>0\end{cases}$. Στο $x_0=0$, έχουμε:

$\lim_{x\to 0^-}\frac{f(x)-f(0)}{x}=\lim_{x\to 0^-}\frac{x^3+x}{x}=\lim_{x\to 0^-}\frac{\cancel{x}(x^2+1)}{\cancel{x}}=1$ και

$\lim_{x\to 0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x}=\lim_{x\to 0^+}\frac{x^2+x}{x}=\lim_{x\to 0^+}\frac{\cancel{x}(x+1)}{\cancel{x}}=1$, άρα $f'(0)=1$ και $f'(x)=\begin{cases}3x^2+1 & , x\le 0\\ 2x+1 & , x>0\end{cases}$

β) $f'(x)=\begin{cases}2x+1 & , x<0\\ \text{συν}x & , x>0\end{cases}$. Στο $x_0=0$, έχουμε:

$\lim_{x\to 0^-}\frac{f(x)-f(0)}{x}=\lim_{x\to 0^-}\frac{x^2+x}{x}=\lim_{x\to 0^-}\frac{\cancel{x}(x+1)}{\cancel{x}}=1$ και $\lim_{x\to 0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x}=\lim_{x\to 0^+}\frac{\text{ημ}x}{x}=1$ άρα

$f'(0)=1$ και $f'(x)=\begin{cases}2x+1 & , x\le 0\\ \text{συν}x & , x>0\end{cases}$

γ) $f'(x)=\begin{cases}6x-1 & , x<1\\ 3x^2+2 & , x>1\end{cases}$. Στο $x_0=1$, έχουμε:

$\lim_{x\to 1^-}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim_{x\to 1^-}\frac{3x^2-x-2}{x-1}=\lim_{x\to 1^-}\frac{\cancel{(x-1)}(3x+2)}{\cancel{x-1}}=5$ και

$\lim_{x\to 1^+}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim_{x\to 1^+}\frac{x^3+2x-1-2}{x-1}=\lim_{x\to 1^+}\frac{\cancel{(x-1)}(x^2+x+3)}{\cancel{x-1}}=5$, άρα $f'(1)=5$ και

$f'(x)=\begin{cases}6x-1 & , x\le 1\\ 3x^2+2 & , x>1\end{cases}$

δ) $f'(x)=3x^2\eta\mu\frac{1}{x}+x^3\sigma\upsilon\nu\frac{1}{x}\left(-\frac{1}{x^2}\right)=3x^2\eta\mu\frac{1}{x}-x\sigma\upsilon\nu\frac{1}{x}$, $x\neq 0$.

Στο $x_0=0$, έχουμε: $\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x}=\lim\limits_{x\to 0}x^2\eta\mu\frac{1}{x}$

$\left|x^2\eta\mu\frac{1}{x}\right|=x^2\left|\eta\mu\frac{1}{x}\right|\leq x^2 \Leftrightarrow -x^2\leq x^2\eta\mu\frac{1}{x}\leq x^2$ και από Κ.Π είναι $\lim\limits_{x\to 0}x^2\eta\mu\frac{1}{x}=0$.

Άρα $f'(x)=\begin{cases}3x^2\eta\mu\frac{1}{x}-x\sigma\upsilon\nu\frac{1}{x}, & x\neq 0\\ 0 & , x=0\end{cases}$

4.163. α) $f(x)=x^2\cdot x^{\frac{1}{2}}=x^{\frac{5}{2}}$, $x\geq 0$. Για κάθε $x>0$ είναι $f'(x)=\frac{5}{2}x^{\frac{3}{2}}=\frac{5}{2}x\sqrt{x}$.

Στο $x_0=0$, έχουμε: $\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{x^{\cancel{2}}\sqrt{x}}{\cancel{x}}=0$

β) $f(x)=\begin{cases}x^{\frac{2}{5}} & , x>0\\ 0 & , x=0\\ (-x)^{\frac{2}{5}} & , x<0\end{cases}$. Για $x>0$ είναι $f'(x)=\frac{2}{5}x^{-\frac{3}{5}}=\frac{2}{5\sqrt[5]{x^3}}$ και για $x<0$ είναι

$f'(x)=-\frac{2}{5}(-x)^{-\frac{3}{5}}=-\frac{2}{5\sqrt[5]{-x^3}}$.

Στο $x_0=0$, έχουμε: $\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x}=\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{x^{\frac{2}{5}}}{x}=\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{1}{\sqrt[5]{x^3}}=+\infty$, οπότε η f δεν είναι παραγωγίσιμη στο $x_0=0$

γ) $f(x)=\sqrt[3]{(x-1)^2}=|x-1|^{\frac{2}{3}}=\begin{cases}(x-1)^{\frac{2}{3}} & , x>1\\ 0 & , x=1\\ (-x+1)^{\frac{2}{3}} & , x<1\end{cases}$

- Αν $x>1$, είναι : $f'(x)=\left[(x-1)^{\frac{2}{3}}\right]'=\frac{2}{3}(x-1)^{-\frac{1}{3}}=\frac{2}{3\sqrt[3]{x-1}}$
- Αν $x<1$, είναι : $f'(x)=\left[(-x+1)^{\frac{2}{3}}\right]'=-\frac{2}{3}(-x+1)^{-\frac{1}{3}}=-\frac{2}{3\sqrt[3]{-x+1}}$

Στο $x_0=1$ έχουμε:

$$\lim_{x\to 1^-}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim_{x\to 1^-}\frac{(-x+1)^{\frac{2}{3}}}{x-1}=\lim_{x\to 1^-}\frac{(-x+1)^{\frac{2}{3}}}{-(-x+1)}=-\lim_{x\to 1^-}\frac{1}{(-x+1)^{\frac{1}{3}}}=-\infty$$

Οπότε η συνάρτηση f δεν είναι παραγωγίσιμη στο $x_0=1$.

Άρα : $f'(x)=\begin{cases}\frac{2}{3\sqrt[3]{x-1}} & , x>1\\ -\frac{2}{3\sqrt[3]{-x+1}} & , x<1\end{cases}$

δ) $f'(x)=\left(x^{\frac{9}{5}}\right)'=\frac{9}{5}x^{\frac{4}{5}}=\frac{9}{5}\sqrt[5]{x^4}$, $x>0$, $f'(x)=\left((-x)^{\frac{9}{5}}\right)'=-\frac{9}{5}(-x)^{\frac{4}{5}}=-\frac{9}{5}\sqrt[5]{x^4}$, $x<0$.

Στο $x_0=0$, έχουμε: $\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\cancel{x}\sqrt[5]{x^4}}{\cancel{x}}=0$.

ε) $f(x)=\begin{cases}(x^2-1)^{\frac{2}{3}} & , x\le -1 \text{ ή } x\ge 1\\ (-x^2+1)^{\frac{2}{3}} & , -1<x<1\end{cases}$.

Για $x\in(-\infty,-1)\cup(1,+\infty)$ είναι: $f'(x)=\frac{2}{3}(x^2-1)^{-\frac{1}{3}}2x=\frac{4x}{2\sqrt[3]{x^2-1}}$

Για $x\in(-1,1)$ είναι $f'(x)=-\frac{2}{3}(-x^2+1)^{-\frac{1}{3}}2x=-\frac{4x}{2\sqrt[3]{-x^2+1}}$.

Στο $x_0=-1$ έχουμε:

$$\lim_{x\to -1^-}\frac{f(x)-f(-1)}{x+1}=\lim_{x\to -1^-}\frac{(x^2-1)^{\frac{2}{3}}}{x+1}=\lim_{x\to -1^-}\frac{\sqrt[3]{(x-1)^2(x+1)^2}}{\sqrt[3]{(x+1)^3}}=\lim_{x\to -1^-}\sqrt[3]{\frac{(x-1)^2\,\cancel{(x+1)^2}}{(x+1)^{\cancel{3}}}}=+\infty,$$

άρα η f δεν είναι παραγωγίσιμη στο $x_0=-1$.

Στο $x_0=1$ έχουμε:

$$\lim_{x\to 1^+}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim_{x\to -1^-}\frac{(x^2-1)^{\frac{2}{3}}}{x-1}=\lim_{x\to 1^+}\frac{\sqrt[3]{(x-1)^2(x+1)^2}}{\sqrt[3]{(x-1)^3}}=\lim_{x\to 1^+}\sqrt[3]{\frac{(x+1)^2\,\cancel{(x-1)^2}}{(x-1)^{\cancel{3}}}}=+\infty,$$

άρα η f δεν είναι παραγωγίσιμη στο $x_0=1$.

στ) $f'(x)=\left(2x-x^{\frac{5}{3}}\right)'=2-\frac{5}{3}x^{\frac{2}{3}}=2-\frac{5}{3}\sqrt[3]{x^2}$, $x>0$

$f'(x)=\left(2x-(-x)^{\frac{5}{3}}\right)'=2+\frac{5}{3}(-x)^{\frac{2}{3}}=2+\frac{5}{3}\sqrt[3]{x^2}$, $x<0$

Στο $x_0=0$ έχουμε: $\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{2x-x\sqrt[3]{x^2}}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\left(2-\sqrt[3]{x^2}\right)=2$

ζ) $f'(x)=\left(x^{\frac{3}{2}}\right)'=\frac{3}{2}x^{\frac{1}{2}}=\frac{3}{2}\sqrt{x}$, $x>0$.

Στο $x_0=0$ έχουμε: $\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\cancel{x}\sqrt{x}}{\cancel{x}}=0$

η) $f'(x)=\left((x^2+1)^{\frac{1}{3}}-1\right)'=\frac{1}{3}(x^2+1)^{-\frac{2}{3}}2x=\frac{2x}{3\sqrt[3]{(x^2+1)^2}}$

θ) $f'(x)=\left((x+1)^{\frac{1}{3}}-1\right)'=\frac{1}{3}(x+1)^{-\frac{2}{3}}=\frac{1}{3\sqrt[3]{(x+1)^2}}$, $x>-1$.

Στο $x_0=-1$ έχουμε: $\lim\limits_{x\to-1}\frac{f(x)-f(-1)}{x+1}=\lim\limits_{x\to-1}\frac{\sqrt[3]{x+1}}{x+1}=\lim\limits_{x\to-1}\frac{\cancel{\sqrt[3]{x+1}}}{\left(\sqrt[3]{x+1}\right)^{\cancel{3}2}}=+\infty$, δηλαδή η f δεν είναι παραγωγίσιμη στο $x_0=-1$.

4.164. **α)** $f'(x)=20x^3-18x^2+2x-1,\ f''(x)=60x^2-36x+2$

β) $f'(x)=\eta\mu x+x\sigma\upsilon\nu x$, $f''(x)=\sigma\upsilon\nu x+\sigma\upsilon\nu x-x\eta\mu x=2\sigma\upsilon\nu x-x\eta\mu x$

γ) $f'(x)=\dfrac{\cancel{2}x}{\cancel{2}\sqrt{x^2+2}}$, $f''(x)=\dfrac{\sqrt{x^2+2}-x\dfrac{\cancel{2}x}{\cancel{2}\sqrt{x^2+2}}}{x^2+2}=\dfrac{2}{\sqrt{x^2+2}\left(x^2+2\right)}$

δ) $f'(x)=\dfrac{\frac{1}{\cancel{x}}\cancel{x}-\ln x}{x^2}=\dfrac{1-\ln x}{x^2}$, $f''(x)=\dfrac{-\frac{1}{x}x^2-(1-\ln x)2x}{x^4}=\dfrac{\cancel{x}(2\ln x-3)}{x^{\cancel{4}3}}$

4.165. $A_{f\circ g}=\{x\in A_g/g(x)\in A_f\}=\{x\in\mathbb{R}/3x\in\mathbb{R}\}=\mathbb{R}$

$f(g(x))=2(3x)-1=6x-1$

$f'(x)=2$, $A_{f'\circ g}=\{x\in A_g\ /\ g(x)\in A_{f'}\}=\{x\in\mathbb{R}\ /\ 3x\in\mathbb{R}\}=\mathbb{R}$, $f'(g(x))=2$

$g'(x)=3$, $A_{f'\circ g'}=\{x\in A_{g'}\ /\ g'(x)\in A_{f'}\}=\{x\in\mathbb{R}\ /\ 3\in\mathbb{R}\}=\mathbb{R}$, $f'(g'(x))=2$

$\left[f(g(x))\right]'=(6x-1)'=6$

4.166. $\left(f(x^2+2x)\right)'=\left[\left(x^2+1\right)^2\right]'\Leftrightarrow f'(x^2+2x)(2x+2)=2(x^2+1)2x$

Για $x=1$, είναι $4f'(3)=2\cdot2\cdot2\Leftrightarrow f'(3)=2$

4.167. $\left(f(\ln x)\right)'=\left(\ln^2x+1\right)'\Leftrightarrow\cancel{\frac{1}{x}}f'(\ln x)=2\ln x\cancel{\frac{1}{x}}$. Για $x=1$, είναι $f'(0)=0$

4.168. $\left(f(x^2+3x+1)\right)'=\left(e^x-4\eta\mu x\right)'\Leftrightarrow f'(x^2+3x+1)(2x+3)=e^x-4\sigma\upsilon\nu x$

Για $x=0$ είναι: $3f'(1)=1-4\Leftrightarrow f'(1)=-1$

4.169. $\left(f(x^2-x)\right)'=\left(\left(x^3-6x+2\right)^4\right)'\Leftrightarrow f'(x^2-x)(2x-1)=4\left(x^3-6x+2\right)^3\left(3x^2-6\right)$.

Για $x=2$ είναι $3f'(2)=4(-2)^3 6\Leftrightarrow f'(2)=-64$

4.170. $\left(f(x^3)\right)'=\left(6x^4+1\right)'\Leftrightarrow3x^2f'(x^3)=24x^3$ και για $x=1$, είναι $3f'(1)=24\Leftrightarrow f'(1)=8$

$f'(0)=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(x)-f(0)}{x}\overset{x=u^3}{\underset{u\to0}{=}}\lim\limits_{u\to0}\dfrac{f(u^3)-f(0)}{u^3}=\lim\limits_{u\to0}\dfrac{6u^4+\cancel{1}-\cancel{1}}{u^3}=\lim\limits_{u\to0}\dfrac{6u^{\cancel{4}}}{\cancel{u^3}}=0$

4.171. **α)** Επειδή η f είναι περιττή, ισχύει $f(-x)=-f(x)$, $x\in\mathbb{R}$.

Παραγωγίζοντας κατά μέλη, προκύπτει: $\left(f(-x)\right)'=\left(-f(x)\right)'\Leftrightarrow f'(-x)(-x)'=-f'(x)\Leftrightarrow$ $-f'(-x)=-f'(x)\Leftrightarrow f'(-x)=f'(x)$. Οπότε, η f' είναι άρτια.

β) Επειδή η f είναι άρτια, ισχύει: $f(-x)=f(x)$, $x\in\mathbb{R}$. Παραγωγίζοντας κατά μέλη προκύπτει: $\left(f(-x)\right)'=f'(x)\Leftrightarrow f'(-x)(-x)'=f'(x)\Leftrightarrow -f'(-x)=f'(x)\Leftrightarrow f'(-x)=-f'(x)$.

Οπότε, η f' είναι περιττή.

4.172. Η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο $(0,+\infty)$ με:

$$f'(x)=\left(x^3\ln x+1\right)'=\left(x^3\right)'\ln x+x^3\left(\ln x\right)'=3x^2\ln x+x^3\cdot\frac{1}{x}=3x^2\ln x+x^2.$$

Είναι: $xf'(x)-3f(x)=x\left(3x^2\ln x+x^2\right)-3\left(x^3\ln x+1\right)=3x^3\ln x+x^3-3x^3\ln x-3=x^3-3$.

4.173. Για $x=0$ είναι: $f^5(0)+f(0)=0\Leftrightarrow f(0)\left(f^4(0)+1\right)=0\Leftrightarrow f(0)=0$.

$5f^4(x)f'(x)-2xf(-x)+x^2f'(-x)+f'(x)=5\sigma\upsilon\nu 5x$.

Για $x=0$ είναι: $5f^4(0)f'(0)+f'(0)=5\Leftrightarrow f'(0)=5$

4.174. $f'(x)=e^{-\frac{x^2}{2}}+xe^{-\frac{x^2}{2}}(-x)=e^{-\frac{x^2}{2}}-x^2e^{-\frac{x^2}{2}}=xe^{-\frac{x^2}{2}}\left(\frac{1}{x}-x\right)=\left(\frac{1}{x}-x\right)f(x)$

4.175. $g(x_0)=0\Leftrightarrow \lambda e^{\beta_1x_0}+\mu e^{\beta_2x_0}=0\Leftrightarrow \lambda e^{\beta_1x_0}=-\mu e^{\beta_2x_0}\Leftrightarrow \lambda e^{\beta_1x_0-\beta_2x_0}=-\mu\ \ (1)$

$g'(x)=\lambda\beta_1e^{\beta_1x}+\mu\beta_2e^{\beta_2x}$, $g'(x_0)=0\Leftrightarrow \lambda\beta_1e^{\beta_1x_0}+\mu\beta_2e^{\beta_2x_0}=0\Leftrightarrow \lambda\beta_1e^{\beta_1x_0}=-\mu\beta_2e^{\beta_2x_0}\Leftrightarrow$

$\lambda\beta_1e^{\beta_1x_0-\beta_2x_0}=-\mu\beta_2\overset{(1)}{\Leftrightarrow}\beta_1(-\mu)+\mu\beta_2=0\Leftrightarrow \mu(\beta_1-\beta_2)=0\Leftrightarrow \mu=0$ ή $\beta_1=\beta_2$ που είναι άτοπο.

Για $\mu=0$, $(1)\Rightarrow\lambda=0$

4.176. Είναι $f'(1)=\lim\limits_{x\to1}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}$ και $g'(1)=\lim\limits_{x\to1}\frac{g(x)-g(1)}{x-1}\neq0$.

Επειδή $\varphi'(1)=0\Leftrightarrow \lim\limits_{x\to1}\frac{\varphi(x)-\varphi(1)}{x-1}=0\Leftrightarrow$

$$\lim_{x\to1}\frac{\frac{f(x)}{g(x)}-\frac{f(1)}{g(1)}}{x-1}=0\Leftrightarrow \lim_{x\to1}\frac{\frac{f(x)g(1)-f(1)g(x)}{g(x)g(1)}}{x-1}=0\Leftrightarrow \lim_{x\to1}\frac{f(x)g(1)-f(1)g(x)}{g(x)g(1)(x-1)}=0\Leftrightarrow$$

$$\lim_{x\to1}\frac{f(x)g(1)-f(1)g(1)+f(1)g(1)-f(1)g(x)}{g(x)g(1)(x-1)}=0\Leftrightarrow$$

$$\lim_{x\to1}\left[\frac{g(1)\left(f(x)-f(1)\right)}{g(x)g(1)(x-1)}-\frac{f(1)\left(g(x)-g(1)\right)}{g(x)g(1)(x-1)}\right]=0\Leftrightarrow$$

$$\lim_{x\to1}\left[\frac{1}{g(x)}\cdot\frac{f(x)-f(1)}{x-1}-\frac{1}{g(x)}\cdot\frac{f(1)}{g(1)}\cdot\frac{g(x)-g(1)}{x-1}\right]=0\ \ (1).$$

Επειδή η g είναι παραγωγίσιμη στο $x_0=1$, θα είναι και συνεχής, οπότε από την (1):

$$\frac{1}{g(1)}f'(1)-\frac{1}{g(1)}\cdot\frac{f(1)}{g(1)}g'(1)=0\Leftrightarrow\frac{f'(1)}{g(1)}-\frac{\varphi(1)g'(1)}{g(1)}=0\Leftrightarrow$$

$$f'(1)-\varphi(1)g'(1)=0\Leftrightarrow\varphi(1)=\frac{f'(1)}{g'(1)}$$

4.177. $f(x)=e^{g(3x)}\neq 0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$. $f'(x)=3e^{g(3x)}g'(3x)=3f(x)g'(3x)$.

Για $x=0$ είναι $f'(0)=3f(0)g'(0)\Leftrightarrow\dfrac{f'(0)}{f(0)}=3g'(0)$

4.178. $\dfrac{1}{f(x)}-\dfrac{1}{g(x)}=\dfrac{1}{e^x}\quad(1)$

$$\left(\frac{1}{f(x)}-\frac{1}{g(x)}\right)'=\left(\frac{1}{e^x}\right)'\Leftrightarrow-\frac{f'(x)}{f^2(x)}+\frac{g'(x)}{g^2(x)}=-\frac{1}{e^x}\Leftrightarrow$$

$$\frac{f'(x)}{f^2(x)}-\frac{g'(x)}{g^2(x)}=\frac{1}{e^x}=\frac{1}{f(x)}-\frac{1}{g(x)}\Leftrightarrow\frac{f'(x)}{f^2(x)}-\frac{1}{f(x)}=\frac{g'(x)}{g^2(x)}-\frac{1}{g(x)}\Leftrightarrow$$

$$\frac{f'(x)-f(x)}{f^2(x)}=\frac{g'(x)-g(x)}{g^2(x)}$$

4.179. $\varphi'(x)=\dfrac{f'(x)g(x)-f(x)g'(x)}{g^2(x)}$

$$\varphi'(\rho)=0\Leftrightarrow\frac{f'(\rho)g(\rho)-f(\rho)g'(\rho)}{g^2(\rho)}=0\Leftrightarrow f'(\rho)g(\rho)-f(\rho)g'(\rho)=0\Leftrightarrow$$

$$f'(\rho)g(\rho)=f(\rho)g'(\rho)\Leftrightarrow\frac{f'(\rho)}{g'(\rho)}=\frac{f(\rho)}{g(\rho)}=\phi(\rho)$$

4.180. $f(x)=\begin{cases}-(\alpha x+\beta)(\gamma x+\delta)&,\ x<-\dfrac{\delta}{\gamma}\\[2mm](\alpha x+\beta)(\gamma x+\delta)&,\ x\geq-\dfrac{\delta}{\gamma}\end{cases}$.

$$\lim_{x\to-\frac{\delta}{\gamma}^-}\frac{f(x)-f\left(-\frac{\delta}{\gamma}\right)}{x+\frac{\delta}{\gamma}}=\lim_{x\to-\frac{\delta}{\gamma}^-}\frac{-(\alpha x+\beta)\cancel{(\gamma x+\delta)}}{\frac{\cancel{\gamma x+\delta}}{\gamma}}=-\gamma\left(-\frac{\alpha\delta}{\gamma}+\beta\right)=\alpha\delta-\beta\gamma,$$

$$\lim_{x\to-\frac{\delta}{\gamma}^+}\frac{f(x)-f\left(-\frac{\delta}{\gamma}\right)}{x+\frac{\delta}{\gamma}}=\lim_{x\to-\frac{\delta}{\gamma}^+}\frac{(\alpha x+\beta)\cancel{(\gamma x+\delta)}}{\frac{\cancel{\gamma x+\delta}}{\gamma}}=\gamma\left(-\frac{\alpha\delta}{\gamma}+\beta\right)=-\alpha\delta+\beta\gamma$$

Για $x \neq -\frac{\delta}{\gamma}$ η f είναι παραγωγίσιμη ως πράξεις παραγωγίσιμων συναρτήσεων. Η f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$, αν και μόνο αν είναι παραγωγίσιμη στο $x_0 = -\frac{\delta}{\gamma}$ δηλαδή όταν

$$\alpha\delta - \beta\gamma = -\alpha\delta + \beta\gamma \Leftrightarrow \alpha\delta = \beta\gamma \Leftrightarrow \frac{\beta}{\alpha} = \frac{\delta}{\gamma}$$

4.181. Εστω $P(x) = \alpha x^2 + \beta x + \gamma$, $\alpha \neq 0$. Τότε: $P(0) = 2 \Leftrightarrow \gamma = 2$

$P(1) = 0 \Leftrightarrow \alpha + \beta + 2 = 0 \Leftrightarrow \alpha + \beta = -2$

$P'(x) = (\alpha x^2 + \beta x + \gamma)' = 2\alpha x + \beta$ άρα $P'(1) = -1 \Leftrightarrow 2\alpha + \beta = -1$

Είναι: $\begin{cases} \alpha + \beta = -2 \\ 2\alpha + \beta = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \beta = -2 - \alpha \\ 2\alpha - 2 - \alpha = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \beta = -3 \\ \alpha = 1 \end{cases}$. Οπότε $P(x) = x^2 - 3x + 2$.

4.182. Εστω $P(x) = \alpha x^3 + \beta x^2 + \gamma x + \delta$.

$P'(x) = 3\alpha x^2 + 2\beta x + \gamma$, $P''(x) = 6\alpha x + 2\beta$, $P^{(3)}(x) = 6\alpha$

$$P(0) + xP'(0) + \frac{x^2}{2}P''(0) + \frac{x^3}{6}P^{(3)}(0) = \delta + x\gamma + \frac{x^2}{2}2\beta + \frac{x^3}{6}6\alpha = P(x)$$

4.183. Επειδή τα ρ_1, ρ_2, ρ_3 είναι ρίζες του $P(x)$, τα $x - \rho_1$, $x - \rho_2$, $x - \rho_3$ θα είναι παράγοντές του.

Δηλαδή $P(x) = (x - \rho_1)(x - \rho_2)(x - \rho_3)$.

Είναι $P'(x) = (x - \rho_2)(x - \rho_3) + (x - \rho_1)(x - \rho_3) + (x - \rho_1)(x - \rho_2)$ και

$P'(\rho_1) = (\rho_1 - \rho_2)(\rho_1 - \rho_3)$, $P'(\rho_2) = (\rho_2 - \rho_1)(\rho_2 - \rho_3)$ και $P'(\rho_3) = (\rho_3 - \rho_1)(\rho_3 - \rho_2)$. Άρα

$$\frac{\rho_1}{P'(\rho_1)} + \frac{\rho_2}{P'(\rho_2)} + \frac{\rho_3}{P'(\rho_3)} = \frac{\rho_1}{(\rho_1 - \rho_2)(\rho_1 - \rho_3)} + \frac{\rho_2}{(\rho_2 - \rho_1)(\rho_2 - \rho_3)} + \frac{\rho_3}{(\rho_3 - \rho_1)(\rho_3 - \rho_2)} \Leftrightarrow$$

$$\frac{\rho_1}{P'(\rho_1)} + \frac{\rho_2}{P'(\rho_2)} + \frac{\rho_3}{P'(\rho_3)} = \frac{\rho_1}{(\rho_1 - \rho_2)(\rho_1 - \rho_3)} - \frac{\rho_2}{(\rho_1 - \rho_2)(\rho_2 - \rho_3)} + \frac{\rho_3}{(\rho_1 - \rho_3)(\rho_2 - \rho_3)} \Leftrightarrow$$

$$\frac{\rho_1}{P'(\rho_1)} + \frac{\rho_2}{P'(\rho_2)} + \frac{\rho_3}{P'(\rho_3)} = \frac{\rho_1(\rho_2 - \rho_3) - \rho_2(\rho_1 - \rho_3) + \rho_3(\rho_1 - \rho_2)}{(\rho_1 - \rho_2)(\rho_1 - \rho_3)(\rho_2 - \rho_3)} \Leftrightarrow$$

$$\frac{\rho_1}{P'(\rho_1)} + \frac{\rho_2}{P'(\rho_2)} + \frac{\rho_3}{P'(\rho_3)} = \frac{\rho_1\rho_2 - \rho_1\rho_3 - \rho_2\rho_1 + \rho_2\rho_3 + \rho_3\rho_1 - \rho_3\rho_2}{(\rho_1 - \rho_2)(\rho_1 - \rho_3)(\rho_2 - \rho_3)} = 0$$

4.184. $f'(x) = \kappa(x - \rho_1)^{\kappa-1}(x - \rho_2)^{\lambda} + \lambda(x - \rho_1)^{\kappa}(x - \rho_2)^{\lambda-1}$

$$\frac{f'(x)}{f(x)} = \frac{\kappa\cancel{(x - \rho_1)^{\kappa-1}}\cancel{(x - \rho_2)^{\lambda}}}{(x - \rho_1)^{\cancel{\kappa}}\cancel{(x - \rho_2)^{\lambda}}} + \frac{\lambda\cancel{(x - \rho_1)^{\kappa}}\cancel{(x - \rho_2)^{\lambda-1}}}{\cancel{(x - \rho_1)^{\kappa}}(x - \rho_2)^{\cancel{\lambda}}} \Leftrightarrow \frac{f'(x)}{f(x)} = \frac{\kappa}{x - \rho_1} + \frac{\lambda}{x - \rho_2}$$

4.185. Εστω ότι το $P(x)$ είναι ν-οστού βαθμού. Τότε το $P'(x)$ είναι $(\nu - 1)$ βαθμού και το $(P'(x))^2$

είναι $2(\nu - 1)$ βαθμού.

Για να ισχύει η σχέση $\left[P'(x)\right]^2 = 8P(x)+1$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$, πρέπει τα πολυώνυμα $\left[P'(x)\right]^2$ και $8P(x)+1$ να είναι του ίδιου βαθμού, δηλαδή: $2(\nu-1)=\nu \Leftrightarrow 2\nu-2=\nu \Leftrightarrow \nu=2$.
Άρα το $P(x)$ είναι 2ου βαθμού.

Εστω $P(x)=\alpha x^2+\beta x+\gamma$, $\alpha\neq 0$. Τότε $P'(x)=2\alpha x+\beta$. Είναι $\left[P'(x)\right]^2=8P(x)+1\Leftrightarrow$
$(2\alpha x+\beta)^2=8(\alpha x^2+\beta x+\gamma)+1\Leftrightarrow 4\alpha^2x^2+4\alpha\beta x+\beta^2=8\alpha x^2+8\beta x+8\gamma+1 \ (1)$.

Για να ισχύει η (1) για κάθε $x\in\mathbb{R}$, πρέπει: $\begin{cases} 4\alpha^2=8\alpha \\ 4\alpha\beta=8\beta \\ \beta^2=8\gamma+1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha=2 \\ \beta\in\mathbb{R} \\ \gamma=\dfrac{\beta^2-1}{8} \end{cases}$.

Άρα, $P(x)=2x^2+\beta x+\dfrac{\beta^2-1}{8}$, $\beta\in\mathbb{R}$.

4.186. Εστω ότι το $P(x)$ είναι ν-οστού βαθμού. Τότε το $P'(x)$ θα είναι $(\nu-1)$ βαθμού και το $\left[P'(x)\right]^2$ θα είναι $(2\nu-2)$ βαθμού. Οπότε για να ισχύει η ισότητα $4P(x)=\left[P'(x)\right]^2$ πρέπει $\nu=2\nu-2\Leftrightarrow\nu=2$. Άρα το πολυώνυμο είναι 2ου βαθμού.
Εστω $P(x)=\alpha x^2+\beta x+\gamma$, $\alpha\neq 0$. Τότε $P'(x)=2\alpha x+\beta$.

$4P(x)=\left[P'(x)\right]^2 \Leftrightarrow 4\alpha x^2+4\beta x+4\gamma=(2\alpha x+\beta)^2\Leftrightarrow$

$4\alpha x^2+4\beta x+4\gamma=4\alpha^2x^2+4\alpha\beta x+\beta^2 \Leftrightarrow \begin{cases} \cancel{4\alpha}=\cancel{4}\alpha^{\cancel{2}} \\ 4\beta=4\alpha\beta \\ 4\gamma=\beta^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1=\alpha \\ 4\beta=4\beta \\ \gamma=\dfrac{\beta^2}{4} \end{cases}$.

Άρα $P(x)=x^2+\beta x+\dfrac{\beta^2}{4}$, $\beta\in\mathbb{R}$.

4.187. **α)** Αν $f(x)=e^x$, τότε $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-1}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}=f'(0)=1$.

β) Αν $f(x)=e^{2x}$, τότε $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{e^{2x}-e^2}{x-1}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{f(x)-f(1)}{x-1}=f'(1)=2e^2$ γιατί $f'(x)=2e^{2x}$, $f'(1)=2e^2$

γ) Αν $g(x)=e^{e^x}$, τότε $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{e^x}-e}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{g(x)-g(0)}{x-0}=g'(0)$.

Όμως, $g'(x)=e^{e^x}e^x$ και $g'(0)=e$.

δ) Εστω $f(x)=\ln x$, $f'(x)=\dfrac{1}{x}$, $x>0$, τότε $\lim\limits_{x\to e}\dfrac{\ln x-1}{x-e}=\lim\limits_{x\to e}\dfrac{f(x)-f(e)}{x-e}=f'(e)=\dfrac{1}{e}$

ε) $\lim\limits_{x\to e}\dfrac{\ln^4x-1}{x-e}=\lim\limits_{x\to e}\dfrac{\ln^4x-\ln^4e}{x-e}=\lim\limits_{x\to e}\dfrac{\varphi(x)-\varphi(e)}{x-e}=\varphi'(e)$.

Αν $\varphi(x)=\ln^4x$, τότε $\varphi'(x)=\dfrac{4\ln^3x}{x}$ και $\varphi'(e)=\dfrac{4}{e}$.

στ) Εστω $f(x)=\ln x$, $f'(x)=\frac{1}{x}$, $x>0$, $g(x)=e^x$, $g'(x)=e^x$, τότε:

$$\lim_{x\to1}\frac{e^x+\ln x-e}{x-1}=\lim_{x\to1}\left(\frac{e^x-e}{x-1}+\frac{\ln x}{x-1}\right)=g'(1)+f'(1)=e+1$$

ζ) Εστω $f(x)=\sigma\upsilon\nu x$, $f'(x)=-\eta\mu x$, τότε: $\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{\sigma\upsilon\nu x-\frac{\sqrt{2}}{2}}{x-\frac{\pi}{4}}=f'(x)=-\eta\mu\frac{\pi}{4}=-\frac{\sqrt{2}}{2}$

η) $$\lim_{x\to\frac{\pi}{3}}\frac{4\eta\mu^2x-3}{3x-\pi}=\lim_{x\to\frac{\pi}{3}}\frac{4\left(\eta\mu^2x-\frac{3}{4}\right)}{3\left(x-\frac{\pi}{3}\right)}=\lim_{x\to\frac{\pi}{3}}\frac{4\left(h(x)-h\left(\frac{\pi}{3}\right)\right)}{3\left(x-\frac{\pi}{3}\right)}=\frac{4}{3}h'\left(\frac{\pi}{3}\right).$$

Αν $h(x)=\eta\mu^2x$, τότε $h'(x)=2\eta\mu x\sigma\upsilon\nu x$ και $h'\left(\frac{\pi}{3}\right)=2\eta\mu\frac{\pi}{3}\sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{3}=\frac{\sqrt{3}}{2}$,

άρα $\lim_{x\to\frac{\pi}{3}}\frac{4\eta\mu^2x-3}{3x-\pi}=\frac{4}{3}\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{2\sqrt{3}}{3}$.

4.188. $f(x)=x^3+\alpha x^2+\beta x+4$, $f'(x)=3x^2+2\alpha x+\beta$

$P(1)=0\Leftrightarrow f(2)+f'(1)=0\Leftrightarrow 12+4\alpha+2\beta+3+2\alpha+\beta=0\Leftrightarrow 2\alpha+\beta=-5\ (1)$. Είναι:

$Q(-1)=0\Leftrightarrow f(-2)-f'(-1)=0\Leftrightarrow -4+4\alpha-2\beta-3+2\alpha-\beta=0\Leftrightarrow 6\alpha-3\beta=7\ (2)$

Από το σύστημα των (1), (2) προκύπτει $\alpha=-\frac{2}{3}$ και $\beta=-\frac{11}{3}$.

4.189. $\left(f(x)g(x)\right)'=\left(x^3-2\eta\mu x\right)'\Leftrightarrow f'(x)g(x)+f(x)g'(x)=3x^2-2\sigma\upsilon\nu x$.

Για $x=0$ $f'(0)g(0)+f(0)g'(0)=-2\Leftrightarrow 0=-2$ που είναι άτοπο.

4.190. $\left(f(2-x)\right)'=\left(f(x-2)\right)'\Leftrightarrow -f'(2-x)=f'(x-2)$ και για $x=2$, έχουμε:

$-f'(0)=f'(0)\Leftrightarrow 2f'(0)=0\Leftrightarrow f'(0)=0$

4.191. $f'(x)=3\left(\alpha x^2-\beta\right)^2 2\alpha x=6\alpha x\left(\alpha^2x^4-2\alpha\beta x^2+\beta^2\right)=6\alpha^3x^5-12\alpha^2\beta x^3+6\alpha\beta^2x$.

Πρέπει $\begin{cases}6\alpha^3=6\\-12\alpha^2\beta=-24\\6\alpha\beta^2=24\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\alpha=1\\\beta=2\\6\cdot1\cdot4=24\ \text{ισχύει}\end{cases}$

4.192. **α)** Είναι $f'(1)=\lambda_\varepsilon=\varepsilon\varphi135^o=\varepsilon\varphi\left(180^o-45^o\right)=-\varepsilon\varphi45^o=-1\Leftrightarrow f'(1)=-1$.

Στο τρίγωνο ΑΒΚ είναι $\varepsilon\varphi\omega_1=\frac{AK}{BK}\Leftrightarrow\varepsilon\varphi45^o=\frac{AK}{3}\Leftrightarrow 1=\frac{AK}{3}\Leftrightarrow AK=3$, άρα $f(1)=3$.

β) Είναι $g(x)=-3x^2-2x+5$, οπότε $g'(x)=-6x-2$ και $(g\circ f)'(x)=g'(f(x))f'(x)=$ $(-6f(x)-2)f'(x)$. Άρα $(g\circ f)'(1)=(-6f(1)-2)f'(1)=(-6\cdot 3-2)\cdot(-1)=20$.

4.193. α) $f(3)=3$, $f'(3)=\varepsilon\varphi 45^\circ=1$, $(f\circ f)'(3)=f'(f(3))f'(3)=f'(3)f'(3)=1$

$g(f(3))=g(3)=9-3=6$, $(g\circ f)'(3)=g'(f(3))f'(3)=g'(3)=7$

β) $(g+f)'(3)=g'(3)+f'(3)=7+1=8$

$(gf)'(3)=g'(3)f(3)+g(3)f'(3)=7\cdot 3+6\cdot 1=27$

$$\left(\frac{g}{f}\right)'(3)=\frac{g'(3)f(3)-g(3)f'(3)}{f^2(3)}=\frac{7\cdot 3-6\cdot 1}{9}=\frac{5}{3}$$

4.194. Είναι $f(3)=3$ και $g(3)=-5$, επίσης $f'(3)=\varepsilon\varphi AK\Lambda=\frac{A\Lambda}{K\Lambda}=\frac{3}{1}=3$ και $g'(3)=\varepsilon\varphi\omega_2=-\varepsilon\varphi\Lambda\Delta B=-\frac{\Lambda B}{\Delta\Lambda}=-\frac{5}{5}=-1$. Από τους κανόνες παραγώγισης έχουμε:

$(f-g)'(x)=f'(x)-g'(x)$, $(fg)'(x)=f'(x)g(x)+f(x)g'(x)$ και

$\left(\frac{f}{g}\right)'(x)=\frac{f'(x)g(x)-f(x)g'(x)}{g^2(x)}$. Οπότε: $(f-g)'(3)=f'(3)-g'(3)=3-(-1)=4$,

$(f\cdot g)'(3)=f'(3)g(3)+f(3)g'(3)=3(-5)+3(-1)=-15-3=-18$ και

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(3)=\frac{f'(3)g(3)-f(3)g'(3)}{g^2(3)}=\frac{3(-5)-3(-1)}{(-5)^2}=\frac{-12}{25}$$

4.195. α) $f'(-1)=g'(-1)=\varepsilon\varphi 60^\circ=\sqrt{3}$

β) $\varepsilon: y=\sqrt{3}(x-1)\Leftrightarrow y=\sqrt{3}x-\sqrt{3}$

γ) $f(-1)=\sqrt{3}(-1)-\sqrt{3}=-2\sqrt{3}=g(-1)$

δ) $(gf)'(-1)=g'(-1)f(-1)+g(-1)f'(-1)=2\sqrt{3}\left(-2\sqrt{3}\right)=-12$

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(-1)=\frac{f'(-1)g(-1)-f(-1)g'(-1)}{g^2(-1)}=0$$

4.196. $f'(x\ln x)(\ln x+1)=e^x$, για $x=1$ είναι $f'(0)=e$

$f''(x\ln x)(\ln x+1)^2+f'(x\ln x)\frac{1}{x}=e^x$ και για $x=1$ είναι $f''(0)+f'(0)=e\Leftrightarrow f''(0)=0$

4.197. α) $f'(x)=2xe^{x^2}$, $f''(x)=2e^{x^2}+4x^2e^{x^2}=2e^{x^2}\left(1+2x^2\right)$

$f''(x)-2xf'(x)-2f(x)=2e^{x^2}\left(1+2x^2\right)-4x^2e^{x^2}-2e^{x^2}=0$

β) $2f''(x)+9f'(x)\le 0 \Leftrightarrow 4e^{x^2}\left(1+2x^2\right)+18xe^{x^2}\le 0 \overset{e^{x^2}>0}{\Leftrightarrow} 2+4x^2+9x\le 0 \Leftrightarrow$

$4x^2+9x+2\le 0 \Leftrightarrow x\in\left[-2,-\frac{1}{4}\right]$

4.198. α) $f'(x)=\dfrac{\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)'}{2\sqrt{x+\sqrt{1+x^2}}}=\dfrac{1+\dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}}{2f(x)}=\dfrac{\sqrt{1+x^2}+x}{2f(x)\sqrt{1+x^2}}=\dfrac{f^{\cancel{2}}(x)}{2\cancel{f(x)}\sqrt{1+x^2}}\Leftrightarrow$

$2f'(x)\sqrt{1+x^2}=f(x)$

β) $2f''(x)\sqrt{1+x^2}+2f'(x)\dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}=f'(x)\Leftrightarrow 2f''(x)\left(1+x^2\right)+2f'(x)=f'(x)\sqrt{1+x^2}\Leftrightarrow$

$4f''(x)\left(1+x^2\right)+4f'(x)=2f'(x)\sqrt{1+x^2}=f(x)$.

4.199. Η συνάρτηση f είναι δύο φορές παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$, με $f'(x)=\left(e^{\alpha x}\right)'=\alpha\cdot e^{\alpha x}$ και

$f''(x)=\left(\alpha\cdot e^{\alpha x}\right)'=\alpha^2\cdot e^{\alpha x}$. Είναι: $f''(x)+2f'(x)=3f(x)\Leftrightarrow \alpha^2\cdot e^{\alpha x}+2\alpha\cdot e^{\alpha x}=3e^{\alpha x}\Leftrightarrow$

$e^{\alpha x}\left(\alpha^2+2\alpha\right)=3e^{\alpha x}\Leftrightarrow \alpha^2+2\alpha=3\Leftrightarrow \alpha^2+2\alpha-3=0\Leftrightarrow \alpha=-3$ ή $\alpha=1$.

4.200. $f'(x)=2xe^{2x}+2x^2e^{2x}=e^{2x}\left(2x+2x^2\right)$,

$f''(x)=2e^{2x}\left(2x+2x^2\right)+e^{2x}\left(2+4x\right)=e^{2x}\left(6x+2x^2+2\right)$

$\kappa f''(x)+\lambda f'(x)=(\mu-1)f(x)\Leftrightarrow \kappa\cancel{e^{2x}}\left(6x+2x^2+2\right)+\lambda\cancel{e^{2x}}\left(2x+2x^2\right)=(\mu-1)x^2\cancel{e^{2x}}\Leftrightarrow$

$$\begin{cases}2\kappa+2\lambda=\mu-1\\ 2\lambda+6\kappa=0\\ 2\kappa=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\mu=1\\ \lambda=0\\ \kappa=0\end{cases}.$$

4.201. $f'(x)=2\alpha\eta\mu\alpha x\sigma\upsilon\nu\alpha x$, $f''(x)=2\alpha^2\sigma\upsilon\nu^2\alpha x-2\alpha^2\eta\mu^2\alpha x$.

$f''(x)+4\alpha^2f^2(x)=2\Leftrightarrow 2\alpha^2\sigma\upsilon\nu^2\alpha x-2\alpha^2\eta\mu^2\alpha x+4\alpha^2\eta\mu^2\alpha x=2\Leftrightarrow$

$2\alpha^2\sigma\upsilon\nu^2\alpha x+2\alpha^2\eta\mu^2\alpha x=2\Leftrightarrow 2\alpha^2\left(\sigma\upsilon\nu^2\alpha x+\eta\mu^2\alpha x\right)=2\Leftrightarrow \alpha^2=1\Leftrightarrow \alpha=\pm1$

4.202. $f(0)=4\Leftrightarrow \alpha+\gamma=4$ (1)

$f'(x)=-\alpha\eta\mu x+2\beta\sigma\upsilon\nu 2x$, $f'(0)=4\Leftrightarrow 2\beta=4\Leftrightarrow \beta=2$

$f''(x)=-\alpha\sigma\upsilon\nu x-4\beta\eta\mu 2x$, $f''(0)=4\Leftrightarrow -\alpha=4\Leftrightarrow \alpha=-4$, (1) $\Rightarrow -4+\gamma=4\Leftrightarrow \gamma=8$

4.203. $f'(x)=2xe^x+x^2e^x=\left(2x+x^2\right)e^x$, $f''(x)=(2+2x)e^x+\left(2x+x^2\right)e^x=e^x\left(x^2+4x+2\right)$

$$\alpha f''(x)-\beta f'(x)+\gamma f(x)=2e^x \Leftrightarrow \alpha \cancel{e^x}\left(x^2+4x+2\right)-\beta\left(2x+x^2\right)\cancel{e^x}+\gamma x^2\cancel{e^x}=2\cancel{e^x} \Leftrightarrow$$

$$(\alpha-\beta+\gamma)x^2+(4\alpha-2\beta)x+2\alpha-2=0 \Leftrightarrow \begin{cases}\alpha-\beta+\gamma=0\\ 4\alpha-2\beta=0\\ 2\alpha-2=0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\gamma=1\\ \beta=2\\ \alpha=1\end{cases}$$

4.204. **α)** $f'(x)=2\eta\mu x\sigma\upsilon\nu x$, $f''(x)=2\sigma\upsilon\nu^2x-2\eta\mu^2x$,

$f^{(3)}(x)=-4\sigma\upsilon\nu x\eta\mu x-4\eta\mu x\sigma\upsilon\nu x=-8\eta\mu x\sigma\upsilon\nu x$

β) $g'(x)=-4\sigma\upsilon\nu 2x\eta\mu 2x$, $g''(x)=8\eta\mu^2 2x-8\sigma\upsilon\nu^2 2x$,

$g^{(3)}(x)=32\eta\mu 2x\sigma\upsilon\nu 2x+32\eta\mu 2x\sigma\upsilon\nu 2x=64\eta\mu 2x\sigma\upsilon\nu 2x$

4.205. $f'(x)=e^x\eta\mu x+e^x\sigma\upsilon\nu x=e^x(\eta\mu x+\sigma\upsilon\nu x)$,

$f''(x)=e^x(\eta\mu x+\sigma\upsilon\nu x)+e^x(\sigma\upsilon\nu x-\eta\mu x)=2e^x\sigma\upsilon\nu x$

$f^{(3)}(x)=2e^x\sigma\upsilon\nu x-2e^x\eta\mu x=2e^x(\sigma\upsilon\nu x-\eta\mu x)$,

$g(x)=e^x\eta\mu x-e^x\sigma\upsilon\nu x=f(x)-e^x\sigma\upsilon\nu x$, $g'(x)=f'(x)-e^x(\sigma\upsilon\nu x-\eta\mu x)$,

$g''(x)=2e^x(\sigma\upsilon\nu x+\eta\mu x)$, $g^{(3)}(x)=4e^x\sigma\upsilon\nu x$

$$g^{(3)}(x)(1-\varepsilon\varphi x)=4e^x\cancel{\sigma\upsilon\nu x}\frac{\sigma\upsilon\nu x-\eta\mu x}{\cancel{\sigma\upsilon\nu x}}=2f^{(3)}(x)$$

4.206. $\left[f(x)g(x)\right]'=f(x)g(x)$, $\left[f(x)g(x)\right]''=\left[f(x)g(x)\right]'=f(x)g(x)\Leftrightarrow$

$\left[f'(x)g(x)+f(x)g'(x)\right]'=f(x)g(x)\Leftrightarrow f''(x)g(x)+2f'(x)g'(x)+f(x)g''(x)=f(x)g(x)\Leftrightarrow$

$$\frac{f''(x)\cancel{g(x)}}{f(x)\cancel{g(x)}}+2\frac{f'(x)g'(x)}{f(x)g(x)}+\frac{\cancel{f(x)}g''(x)}{\cancel{f(x)}g(x)}=1\Leftrightarrow\frac{f''(x)}{f(x)}+2\frac{f'(x)g'(x)}{f(x)g(x)}+\frac{g''(x)}{g(x)}=1$$

4.207. $g'(x)=f'\left(3x^2-2x+3\right)(6x-2)$, $g''(x)=f''\left(3x^2-2x+3\right)(6x-2)^2+6f'\left(3x^2-2x+3\right)$,

$g''(1)=16f''(4)+6f'(4)=44$

4.208. **α)** Εστω $g(x)=\ln x$, $x>0$. Είναι $g'(x)=\frac{1}{x}$, $g'(e)=\frac{1}{e}=\lim\limits_{x\to e^-}\frac{g(x)-g(e)}{x-e}=\lim\limits_{x\to e^+}\frac{g(x)-g(e)}{x-e}$.

Τότε $\lim\limits_{x\to e^+}\frac{f(x)-f(e)}{x-e}=g'(e)=\frac{1}{e}$.

Εστω $h(x)=e^{\frac{x}{e}-1}$, $x\in\mathbb{R}$. Είναι $h'(x)=e^{\frac{x}{e}-1}\frac{1}{e}$, $h'(e)=\frac{1}{e}$

$\lim\limits_{x\to e^-}\frac{f(x)-f(e)}{x-e}=h'(e)=\frac{1}{e}$. Άρα $f'(e)=\frac{1}{e}$ και $f'(x)=\begin{cases}\frac{1}{x}, & x\geq e\\ e^{\frac{x}{e}-2}, & x<e\end{cases}$

β) Εστω $\varphi(x)=\frac{1}{x}$, $\varphi'(x)=-\frac{1}{x^2}$, $\varphi'(e)=-\frac{1}{e^2}$, $\lim\limits_{x\to e^+}\frac{f'(x)-f'(e)}{x-e}=\varphi'(e)=-\frac{1}{e^2}$

Εστω $t(x)=e^{\frac{x}{e}-2}$, $t'(x)=e^{\frac{x}{e}-2}\frac{1}{e}=e^{\frac{x}{e}-3}$, $t'(e)=e^{-2}=\frac{1}{e^2}$.

Είναι $\lim\limits_{x\to e^-}\frac{f'(x)-f'(e)}{x-e}=t'(e)=\frac{1}{e^2}$. Δεν υπάρχει το $f''(e)$.

4.209. **α)** Για $x>-1$ είναι $f'(x)=\frac{3\ln^2(x+2)}{x+2}$, $f''(x)=\frac{6\ln(x+2)-3\ln^2(x+2)}{(x+2)^2}$

Για $x<-1$ είναι $f'(x)=3(x+1)^2$, $f''(x)=6(x+1)$.

Στο $x=-1$, έχουμε: $\lim\limits_{x\to-1^-}\frac{f(x)-f(-1)}{x+1}=\lim\limits_{x\to-1^-}\frac{(x+1)^{\cancel{3}}}{\cancel{x+1}}=0$.

Εστω $g(x)=\ln^3(x+2)$, $x>-2$. Είναι $g'(x)=\frac{3\ln^2(x+2)}{x+2}$ και $g'(-1)=0$, οπότε

$\lim\limits_{x\to-1^+}\frac{f(x)-f(-1)}{x+1}=g'(-1)=0$. Άρα $f'(x)=\begin{cases}\frac{3\ln^2(x+2)}{x+2} & ,x\geq-1\\ 3(x+1)^2 & ,x<-1\end{cases}$

Είναι $g''(x)=\frac{6\ln(x+2)-3\ln^2(x+2)}{(x+2)^2}$, $g''(-1)=0$ και $\lim\limits_{x\to-1^+}\frac{f'(x)-f'(-1)}{x+1}=g''(-1)=0$,

$\lim\limits_{x\to-1^-}\frac{f'(x)-f'(-1)}{x+1}=\lim\limits_{x\to-1^-}\frac{3(x+1)^{\cancel{2}}}{\cancel{x+1}}=0$, άρα

$$f''(x)=\begin{cases}\frac{6\ln(x+2)(x+2)-3\ln^2(x+2)}{(x+2)^2} & ,x\geq-1\\ 6(x+2) & ,x<-1\end{cases}$$

β) Για $x<-1$ είναι $g'(x)=e^{x-1}$, $g''(x)=e^{x-1}$.

Για $x>-1$ είναι $g'(x)=\frac{1}{x+2}$, $g''(x)=-\frac{1}{(x+2)^2}$

Εστω $h(x)=e^{x-1}-1$, $x\in\mathbb{R}$. Είναι $h'(x)=e^{x-1}$, $h'(-1)=e^{-2}=\frac{1}{e^2}$,

$\lim\limits_{x\to-1^-}\frac{g(x)-g(-1)}{x+1}=h'(-1)=\frac{1}{e^2}$.

Εστω $\varphi(x)=\ln(x+2)$, $x>-2$. Είναι $\varphi'(x)=\frac{1}{x+2}$, $\varphi'(-1)=1$ και

$\lim\limits_{x\to-1^+}\frac{g(x)-g(-1)}{x+1}=\varphi'(-1)=1$. Άρα η g δεν είναι παραγωγίσιμη στο -1, οπότε δεν είναι και δύο φορές παραγωγίσιμη στο σημείο αυτό.

Είναι $g''(x)=\begin{cases}e^{x-1}, & x<-1\\ -\frac{1}{(x+2)^2}, & x>-1\end{cases}$

4.210. **α)** Για $x \neq 0$ είναι $f'(x) = 3x^2 ημ\frac{1}{x} + x^3 συν\frac{1}{x}\left(-\frac{1}{x^2}\right) = 3x^2 ημ\frac{1}{x} - xσυν\frac{1}{x}$.

Στο $x = 0$ είναι: $\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x} = \lim\limits_{x\to 0}\frac{x^3 ημ\frac{1}{x}}{x} = \lim\limits_{x\to 0} x^2 ημ\frac{1}{x} = 0$, γιατί

$-1 \leq ημ\frac{1}{x} \leq 1 \overset{x\neq 0}{\Leftrightarrow} -x^2 \leq x^2 ημ\frac{1}{x} \leq x^2$ και από Κ.Π. είναι $\lim\limits_{x\to 0} x^2 ημ\frac{1}{x} = 0$.

β) $\lim\limits_{x\to 0} f'(x) = \lim\limits_{x\to 0}\left(3x^2 ημ\frac{1}{x} - xσυν\frac{1}{x}\right) = 0 = f'(0)$, γιατί $\left|xσυν\frac{1}{x}\right| \leq |x| \Leftrightarrow -|x| \leq xσυν\frac{1}{x} \leq |x|$ και

από Κ.Π είναι $\lim\limits_{x\to 0} xσυν\frac{1}{x} = 0$.

γ) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{f'(x)-f'(0)}{x} = \lim\limits_{x\to 0}\frac{3x^2 ημ\frac{1}{x} - xσυν\frac{1}{x}}{x} = \lim\limits_{x\to 0}\left(3xημ\frac{1}{x} - συν\frac{1}{x}\right)$.

Επειδή για τη συνάρτηση $συν\frac{1}{x}$ δεν εφαρμόζεται το Κ.Π. δεν υπάρχει το $\lim\limits_{x\to 0} συν\frac{1}{x}$

επομένως δεν υπάρχει και το $\lim\limits_{x\to 0}\frac{f'(x)-f'(0)}{x}$, άρα η f δεν είναι δύο φορές παραγωγίσιμη

στο $x = 0$.

4.211. $f'(ημx)συνx = 2ημxσυνx + ημx = ημx(2συνx + 1)$ και

$f''(ημx)συν^2x - f'(ημx)ημx = συνx(2συνx+1) - 2ημ^2x = 2συν^2x + συνx - 2ημ^2x$

Για $x = \frac{\pi}{6}$ είναι $f'\left(\frac{1}{2}\right)\frac{\sqrt{3}}{\cancel{2}} = \frac{1}{\cancel{2}}\left(\cancel{2}\frac{\sqrt{3}}{\cancel{2}} + 1\right) \Leftrightarrow f'\left(\frac{1}{2}\right)\sqrt{3} = \left(\sqrt{3}+1\right) \Leftrightarrow f'\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{3+\sqrt{3}}{3}$

και $f''\left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 - f'\left(\frac{1}{2}\right)\frac{1}{2} = 2\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 + \frac{\sqrt{3}}{2} - 2\left(\frac{1}{2}\right)^2 \Leftrightarrow$

$f''\left(\frac{1}{2}\right)\frac{3}{4} - \frac{3+\sqrt{3}}{6} = \frac{2+\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow f''\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{18+8\sqrt{3}}{9}$

$3f''\left(\frac{1}{2}\right) - 2f'\left(\frac{1}{2}\right) = \cancel{3}\,\frac{18+8\sqrt{3}}{\cancel{9}^{3}} - 2\frac{3+\sqrt{3}}{3} = 4 + 2\sqrt{3}$

4.212. **α)** Εστω $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ με $f(x_1) = f(x_2)$, τότε: $f^5(x_1) = f^5(x_2)$, $3f(x_1) = 3f(x_2)$, άρα και

$f^5(x_1) + 3f(x_1) = f^5(x_2) + 3f(x_2) \Leftrightarrow x_1 - 2 = x_2 - 2 \Leftrightarrow x_1 = x_2$

άρα η f είναι 1–1 και αντιστρέφεται.

β) Θέτουμε $f(x) = y$ και έχουμε: $y^5 + 3y = x - 2 \Leftrightarrow x = y^5 + 3y + 2$, άρα

$f^{-1}(y) = y^5 + 3y + 2$, $y \in \mathbb{R}$, οπότε και $f^{-1}(x) = x^5 + 3x + 2$, $x \in \mathbb{R}$.

$\left(f^{-1}(x)\right)' = 5x^4 + 3$ και $\left(f^{-1}\right)'(1) = 5 + 3 = 8$.

4.213. Η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $(0, \pi)$, άρα είναι και 1–1 και ορίζεται η αντίστροφή της.

Είναι: $f^{-1}(f(x))=x$, οπότε: $\left(f^{-1}(f(x))\right)'=(x)'\Leftrightarrow\left(f^{-1}\right)'(f(x))f'(x)=1$. Επειδή $f'(x)=(\sigma\upsilon\nu x)'=-\eta\mu x$, έχουμε: $\left(f^{-1}\right)'(\sigma\upsilon\nu x)(-\eta\mu x)=1\Leftrightarrow\left(f^{-1}\right)'(\sigma\upsilon\nu x)=-\dfrac{1}{\eta\mu x}$ (1).

Εστω $\sigma\upsilon\nu x=y$. Τότε: $\eta\mu^2x+\sigma\upsilon\nu^2x=1\Leftrightarrow\eta\mu^2x=1-\sigma\upsilon\nu^2x$ και επειδή $x\in(0,\pi)$, είναι $\eta\mu x>0$, οπότε: $\eta\mu x=\sqrt{1-\sigma\upsilon\nu^2x}=\sqrt{1-y^2}$ με $y\in(-1,1)$.

Η (1) γίνεται $\left(f^{-1}\right)'(y)=-\dfrac{1}{\sqrt{1-y^2}}$, άρα: $\left(f^{-1}\right)'(x)=-\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$, $x\in(-1,1)$.

4.214. α) Γνωρίζουμε ότι $\varepsilon\varphi x\uparrow\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$, οπότε η f είναι 1–1 και αντιστρέφεται.

β) $\left(f^{-1}(f(x))\right)'=(x)'\Leftrightarrow\left(f^{-1}\right)'(f(x))f'(x)=1\Leftrightarrow\left(f^{-1}\right)'(\varepsilon\varphi x)\dfrac{1}{\sigma\upsilon\nu^2x}=1\Leftrightarrow$

$\left(f^{-1}\right)'(\varepsilon\varphi x)\dfrac{\eta\mu^2x+\sigma\upsilon\nu^2x}{\sigma\upsilon\nu^2x}=1\Leftrightarrow\left(f^{-1}\right)'(\varepsilon\varphi x)\left(\varepsilon\varphi^2x+1\right)=1\Leftrightarrow\left(f^{-1}\right)'(\varepsilon\varphi x)=\dfrac{1}{\varepsilon\varphi^2x+1}$

Θέτουμε $\varepsilon\varphi x=u$, τότε $\left(f^{-1}\right)'(u)=\dfrac{1}{u^2+1}$, $u>0$, άρα $\left(f^{-1}\right)'(x)=\dfrac{1}{x^2+1}$, $x>0$.

4.215. α) Εστω $x_1,x_2\in\mathbb{R}$ με $x_1<x_2$ τότε ... $f(x_1)<f(x_2)$ και η f είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$ και επομένως αντιστρέφεται.

β) Είναι $f^{-1}(f(x))=x$, οπότε $\left(f^{-1}(f(x))\right)'=(x)'$ ή $\left(f^{-1}\right)'(f(x))f'(x)=1$ (1).

Παρατηρούμε ότι $f(0)=3$ και $f'(0)=2$, οπότε η σχέση (1) για $x=0$ γίνεται:

$\left(f^{-1}\right)'(3)\cdot2=1\Leftrightarrow\left(f^{-1}\right)'(3)=\dfrac{1}{2}$.

4.216. α) $\left(f^{-1}(f(x))\right)'=(x)'\Leftrightarrow\left(f^{-1}\right)'(f(x))f'(x)=1\Leftrightarrow\left(f^{-1}\right)'(f(x))=x^2+1$

Επειδή η x^2+1 και η f είναι παραγωγίσιμες συναρτήσεις, ισχύει: $\left(f^{-1}\right)''(f(x))f'(x)=2x$

β) $\left(f^{-1}\right)''(f(x))f'(x)=2x\Leftrightarrow\left(f^{-1}\right)''(f(x))\dfrac{1}{x^2+1}=2x\Leftrightarrow\left(f^{-1}\right)''(f(x))=2x\left(x^2+1\right)$

Θέτουμε $f(x)=u\Leftrightarrow x=f^{-1}(u)$, τότε: $\left(f^{-1}\right)''(u)=2f^{-1}(u)\left(\left(f^{-1}(u)\right)^2+1\right)$, $u\in\mathbb{R}$, άρα και

$\left(f^{-1}\right)''(x)=2f^{-1}(x)\left(\left(f^{-1}(x)\right)^2+1\right)$, $x\in\mathbb{R}$

4.217. α) $\left(f^{-1}(f(x))\right)'=(x)'\Leftrightarrow\left(f^{-1}\right)'(f(x))f'(x)=1\Leftrightarrow\left(f^{-1}\right)'(f(x))=e^{-x^2}$

Επειδή η e^{-x^2} και η f είναι παραγωγίσιμες συναρτήσεις, ισχύει:

$\left(f^{-1}\right)''(f(x))f'(x)=-2xe^{-x^2}$

β) Είναι $\left(f^{-1}\right)''\left(f(x)\right)f'(x)=-2xe^{-x^2} \Leftrightarrow \left(f^{-1}\right)''\left(f(x)\right)e^{x^2}=-2xe^{-x^2} \Leftrightarrow \left(f^{-1}\right)''\left(f(x)\right)=-2xe^{-2x^2}$

Θέτουμε $f(x)=u \Leftrightarrow x=f^{-1}(u)$, τότε: $\left(f^{-1}\right)''(u)=-2f^{-1}(u)e^{-2\left(f^{-1}(u)\right)^2}$, άρα

$\left(f^{-1}\right)''(x)=-2f^{-1}(x)e^{-2\left(f^{-1}(x)\right)^2}$

4.218. Παραγωγίζοντας ως προς x, έχουμε: $f'(x+y)=f'(x)$ και παραγωγίζοντας ως προς y, έχουμε: $f'(x+y)=-f'(y)$, άρα $f'(x)=-f'(y) \Leftrightarrow f'(x)+f'(y)=0$

4.219. Παραγωγίζοντας ως προς x, έχουμε: $f'(xy)y=f'(x) \Leftrightarrow f'(xy)=\dfrac{f'(x)}{y}$ και παραγωγίζοντας ως προς y, έχουμε: $f'(xy)x=f'(y) \Leftrightarrow f'(xy)=\dfrac{f'(y)}{x}$, άρα $\dfrac{f'(x)}{y}=\dfrac{f'(y)}{x} \Leftrightarrow xf'(x)-yf'(y)=0$

4.220. Παραγωγίζοντας ως προς x, είναι: $f'(x+y)=f'(x)+y$ και ως προς y, έχουμε: $f'(x+y)=f'(y)+x$. Άρα, $f'(x)+y=f'(y)+x \Leftrightarrow f'(y)-f'(x)=y-x \Leftrightarrow$

$\dfrac{f'(y)-f'(x)}{y-x}=1 \Leftrightarrow \lambda_{AB}=1 \Leftrightarrow \varepsilon\varphi\omega=1$, άρα $\omega=45^\circ$.

4.221. Για $x=y=1$ είναι $f(1)=0$.

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\overset{x=x_0h}{\underset{h\to1}{=}}\lim_{h\to1}\frac{f(x_0h)-f(x_0)}{x_0h-x_0}=\lim_{h\to1}\frac{x_0^2f(h)+h^2f(x_0)-f(x_0)}{x_0(h-1)}=$$

$$\lim_{h\to1}\left(x_0\frac{f(h)}{h-1}+f(x_0)\frac{\cancel{(h-1)}(h+1)}{\cancel{h-1}}\right)=x_0f'(1)+2f(x_0)=2x_0+2f(x_0)$$

4.222. Παραγωγίζοντας ως προς x, έχουμε: $f'(xy)y=f'(x) \Leftrightarrow f'(xy)=\dfrac{f'(x)}{y}$ και παραγωγίζοντας ως προς y, έχουμε: $f'(xy)x=f'(y) \Leftrightarrow f'(xy)=\dfrac{f'(y)}{x}$, άρα $\dfrac{f'(x)}{y}=\dfrac{f'(y)}{x} \Leftrightarrow xf'(x)=yf'(y)$

4.223. Παραγωγίζοντας ως προς x, έχουμε: $f'(x+y)=e^{-y}f'(x)-e^{-x}f(y)$.
Παραγωγίζοντας ως προς y, έχουμε: $f'(x+y)=-e^{-y}f(x)+e^{-x}f'(y)$, άρα
$e^{-y}f'(x)-e^{-x}f(y)=-e^{-y}f(x)+e^{-x}f'(y) \Leftrightarrow e^{-y}f'(x)+e^{-y}f(x)=e^{-x}f'(y)+e^{-x}f(y) \Leftrightarrow$
$e^{-y}\left(f'(x)+f(x)\right)=e^{-x}\left(f'(y)+f(y)\right)$

4.224. Παραγωγίζοντας ως προς y, έχουμε: $f'(xy)x=x^2f'(y)+2yf(x)$ και για $y=1$ είναι

$f'(x)x=x^2f'(1)+2f(x) \Leftrightarrow f'(x)=xf'(1)+2\dfrac{f(x)}{x}$

Η f' είναι παραγωγίσιμη στο $(0+\infty)$ ως άθροισμα παραγωγίσιμων συναρτήσεων, με:

$$f''(x)=f'(1)+2\frac{xf'(x)-f(x)}{x^2}=f'(1)+2\frac{x\left(xf'(1)+2\frac{f(x)}{x}\right)-f(x)}{x^2}\Leftrightarrow$$

$$f''(x)=f'(1)+2\frac{x^2f'(1)+2f(x)-f(x)}{x^2}=f'(1)+2f'(1)+\frac{2f(x)}{x^2}=3f'(1)+\frac{2f(x)}{x^2}.$$

Άρα $f''(x)-f''(y)=\cancel{3f'(1)}+\frac{2f(x)}{x^2}-\cancel{3f'(1)}-\frac{2f(y)}{y^2}=\frac{2f(x)}{x^2}-\frac{2f(y)}{y^2}$

4.225. Παραγωγίζοντας ως προς x, έχουμε: $f'(x+y)+f'(x-y)=2f'(x)f(y)$ και

$f''(x+y)+f''(x-y)=2f''(x)f(y)$ (1)

Παραγωγίζοντας ως προς y, έχουμε: $f'(x+y)-f'(x-y)=2f(x)f'(y)$ και

$f''(x+y)+f''(x-y)=2f(x)f''(y)$ (2)

Από τις (1), (2) έχουμε: $f''(x)f(y)=f(x)f''(y)$

4.226. Για $\nu=1$ είναι $f'(x)=e^{\alpha x}(1+\alpha x)$ που ισχύει.

Εστω ότι ισχύει για $\nu=k$, δηλαδή $f^{(k)}(x)=\alpha^{k-1}e^{\alpha x}(k+\alpha x)$.

Θα δείξουμε ότι αληθεύει και για $\nu=k+1$, δηλαδή $f^{(k+1)}(x)=\alpha^k e^{\alpha x}(k+1+\alpha x)$. Είναι

$$f^{(k+1)}(x)=\left(f^{(k)}(x)\right)'=\left(\alpha^{k-1}e^{\alpha x}(k+\alpha x)\right)'=\alpha^{k-1}\alpha e^{\alpha x}(k+\alpha x)+\alpha^{k-1}e^{\alpha x}\alpha=\alpha^k e^{\alpha x}(k+1+\alpha x)$$

4.227. Θα προσπαθήσουμε πρώτα να προσδιορίσουμε τον τύπο της νιοστής παραγώγου, υπολογίζοντας μερικές από τις πρώτες παραγώγους. Είναι

$$f'(x)=\sigma\upsilon\nu(\alpha x+\beta)(\alpha x+\beta)'=\alpha\sigma\upsilon\nu(\alpha x+\beta)=\alpha\eta\mu\left(\frac{\pi}{2}+\alpha x+\beta\right).$$

$$f''(x)=-\alpha^2\eta\mu(\alpha x+\beta)=\alpha^2\eta\mu(\pi+\alpha x+\beta)=\alpha^2\eta\mu\left(2\frac{\pi}{2}+\alpha x+\beta\right).$$

$$f^{(3)}(x)=-\alpha^3\sigma\upsilon\nu(\alpha x+\beta)=\alpha^3\eta\mu\left(3\frac{\pi}{2}+\alpha x+\beta\right).$$

Ισχυριζόμαστε ότι $f^{(\nu)}(x)=\alpha^\nu\eta\mu\left(\nu\frac{\pi}{2}+\alpha x+\beta\right)$ και θα το αποδείξουμε με επαγωγή.

Για $\nu=1$ έχουμε $f'(x)=\alpha\eta\mu\left(\frac{\pi}{2}+\alpha x+\beta\right)=\alpha\sigma\upsilon\nu(\alpha x+\beta)$ που ισχύει.

Εστω ότι ισχύει για $\nu=\kappa$, δηλαδή $f^{(\kappa)}(x)=\alpha^\kappa\eta\mu\left(\kappa\frac{\pi}{2}+\alpha x+\beta\right)$. Θα δείξουμε ότι ισχύει για $\nu=\kappa+1$. Δηλαδή: $f^{(\kappa+1)}(x)=\alpha^{\kappa+1}\eta\mu\left[(\kappa+1)\frac{\pi}{2}+\alpha x+\beta\right]$.

Πράγματι, $f^{(\kappa+1)}(x)=\left(f^{(\kappa)}(x)\right)'=\left[\alpha^{\kappa}\eta\mu\left(\kappa\frac{\pi}{2}+\alpha x+\beta\right)\right]'=\alpha^{\kappa}\alpha\sigma\upsilon\nu\left(\kappa\frac{\pi}{2}+\alpha x+\beta\right)=$

$\alpha^{\kappa+1}\eta\mu\left(\frac{\pi}{2}+\kappa\frac{\pi}{2}+\alpha x+\beta\right)=\alpha^{\kappa+1}\eta\mu\left[(\kappa+1)\frac{\pi}{2}+\alpha x+\beta\right]$.

Άρα, ο τύπος της νιοστής παραγώγου, είναι: $f^{(\nu)}(x)=\alpha^{\nu}\eta\mu\left(\nu\frac{\pi}{2}+\alpha x+\beta\right)$.

4.228. Είναι $f'(x)=\frac{1}{2}\sigma\upsilon\nu(2x+5)(2x+5)'=\frac{1}{2}2\sigma\upsilon\nu(2x+5)=\sigma\upsilon\nu(2x+5)$.

$f''(x)=-\eta\mu(2x+5)(2x+5)'=-2\eta\mu(2x+5)$.

$f^{(3)}(x)=-2\sigma\upsilon\nu(2x+5)(2x+5)'=-4\sigma\upsilon\nu(2x+5)$.

Θα δείξουμε πρώτα για τις παραγώγους περιττής τάξης, ότι ο τύπος είναι:
$f^{(2\nu+1)}(x)=(-1)^{\nu}2^{2\nu}f'(x)$.

Για $\nu=1$ είναι $f^{(3)}(x)=(-1)^{1}2^{2}f'(x)=-4\sigma\upsilon\nu(2x+5)$ που ισχύει.

Εστω ότι ισχύει για $\nu=\kappa$, δηλαδή $f^{(2\kappa+1)}(x)=(-1)^{\kappa}2^{2\kappa}f'(x)$. Θα δείξουμε ότι ισχύει για $\nu=\kappa+1$, δηλαδή $f^{(2\kappa+3)}(x)=(-1)^{\kappa+1}2^{2(\kappa+1)}f'(x)$.

Πράγματι, $f^{(2\kappa+3)}(x)=\left[f^{(2\kappa+2)}(x)\right]'=\left[\left(f^{(2\kappa+1)}(x)\right)'\right]'=\left[\left((-1)^{\kappa}2^{2\kappa}f'(x)\right)'\right]'=$

$\left((-1)^{\kappa}2^{2\kappa}f''(x)\right)'=(-1)^{\kappa}2^{2\kappa}f^{(3)}(x)=(-1)^{\kappa}2^{2\kappa}(-1)4\sigma\upsilon\nu(2x+5)=(-1)^{\kappa+1}2^{2\kappa+2}f'(x)$.

Για τις παραγώγους άρτιας τάξης, έχουμε:

Για $\nu=1$, $f''(x)=(-1)^{1}2^{2}f(x)=-4\frac{1}{2}\eta\mu(2x+5)=-2\eta\mu(2x+5)$, ισχύει.

Εστω ότι ισχύει για $\nu=\kappa$, δηλαδή $f^{(2\kappa)}(x)=(-1)^{\kappa}2^{2\kappa}f(x)$.

Θα δείξουμε ότι ισχύει για $\nu=\kappa+1$, δηλαδή $f^{(2\kappa+2)}(x)=(-1)^{\kappa+1}2^{2\kappa+2}f(x)$.

Είναι $f^{(2\kappa+2)}(x)=\left[f^{(2\kappa+1)}(x)\right]'=\left[\left(f^{(2\kappa)}(x)\right)'\right]'=\left[\left((-1)^{\kappa}2^{2\kappa}f(x)\right)'\right]'=\left((-1)^{\kappa}2^{2\kappa}f'(x)\right)'=$

$(-1)^{\kappa}2^{2\kappa}f''(x)=(-1)^{\kappa}2^{2\kappa}(-1)2\eta\mu(2x+5)=(-1)^{\kappa+1}2^{2\kappa}4\frac{1}{2}\eta\mu(2x+5)=(-1)^{\kappa+1}2^{2\kappa+2}f(x)$.

4.229. **α)** Είναι $S_1=\left(x+x^2+x^3+\ldots+x^{\nu}\right)'$.

Όμως για $x\neq 1$ είναι $x+x^2+x^3+\ldots+x^{\nu}=x\frac{x^{\nu}-1}{x-1}=\frac{x^{\nu+1}-x}{x-1}$, άρα

$$S_1=\left(\frac{x^{\nu+1}-x}{x-1}\right)'=\frac{\nu x^{\nu+1}-(\nu+1)x^{\nu}+1}{(x-1)^2}.$$

Για $x=1$ είναι $S_1=1+2+3+\ldots+\nu=\frac{\nu(\nu+1)}{2}$.

β) Το S_2 προκύπτει με αντικατάσταση στο S_1 για $x=2$, άρα

$$S_2=\frac{\nu 2^{\nu+1}-(\nu+1)2^{\nu}+1}{(2-1)^2}=(\nu-1)2^{\nu}-1.$$

4.230. **α)** Εστω $f(x)=(x-\rho)^2\Pi(x)$, τότε για $x=\rho$, $f(\rho)=(\rho-\rho)^2\Pi(\rho)=0$.

Επίσης, $f'(x)=2(x-\rho)\Pi(x)+(x-\rho)^2\Pi'(x)$, θέτοντας $x=\rho$, είναι:

$f'(\rho)=2(\rho-\rho)\Pi(\rho)+(\rho-\rho)^2\Pi'(\rho)=0$.

Αντίστροφα, αν $f(\rho)=0$, τότε σύμφωνα με τη θεωρία πολυωνύμων, θα είναι

$f(x)=(x-\rho)Q(x)$, (1). Παραγωγίζοντας τη σχέση, είναι $f'(x)=Q(x)+(x-\rho)Q'(x)$.

Επειδή $f'(\rho)=0\Leftrightarrow Q(\rho)+(\rho-\rho)Q'(\rho)=0\Leftrightarrow Q(\rho)=0$, οπότε $Q(x)=(x-\rho)\Pi(x)\ \ (2)$.

Από $(1),(2)$ συνάγεται ότι $f(x)=(x-\rho)^2\Pi(x)$.

β) Σύμφωνα με το (I) ερώτημα, αρκεί να δείξουμε ότι $g(-1)=g'(-1)=0$.

Πράγματι $g(-1)=(-1)^{2\nu}-\nu(-1)^2+\nu-1=1-\nu+\nu-1=0$.

Επίσης $g'(x)=2\nu x^{2\nu-1}-2\nu x$ και $g'(-1)=2\nu(-1)^{2\nu-1}-2\nu(-1)=-2\nu+2\nu=0$.

γ) Για να είναι το $(x-1)^2$ παράγοντας του $h(x)=\alpha x^{2\nu}+\beta x^{\nu-1}+4$, πρέπει $h(1)=h'(1)=0$.

Είναι $h'(x)=2\nu\alpha x^{2\nu-1}+\beta(\nu-1)x^{\nu-2}$. Οπότε:

$$\left.\begin{aligned}h(1)&=\alpha+\beta+4=0\\ h'(1)&=2\alpha\nu+\beta(\nu-1)=0\end{aligned}\right\}\Leftrightarrow\left.\begin{aligned}&\beta=-4-\alpha\\ &2\alpha\nu+(\nu-1)(-4-\alpha)=0\end{aligned}\right\}\ \alpha=\frac{4\nu-4}{\nu+1}\ \text{και}\ \beta=\frac{-8\nu}{\nu+1}.$$

4.231. **α)** Για $x=1$ είναι $f(1^3+1)=2f(1+1)+2\Leftrightarrow f(2)=-2$.

β) Παραγωγίζοντας τη σχέση (1) κατά μέλη, προκύπτει:

$\left(f(x^3+x)\right)'=\left(2f(x+1)+2x\right)'$ ή $f'(x^3+x)(3x^2+1)=2f'(x+1)+2$

και για $x=1$, έχουμε: $f'(2)\cdot 4=2f'(2)+2\Leftrightarrow 2f'(2)=2\Leftrightarrow f'(2)=1$.

γ) Εστω $h(x)=xf(x)$, $x\in\mathbb{R}$. Τότε $h(2)=2f(2)=-4$

και $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{xf(x)+4}{x-2}=\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{h(x)-h(2)}{x-2}=h'(2)$. Είναι $h'(x)=(xf(x))'=f(x)+xf'(x)$,

άρα $h'(2)=f(2)+2f'(2)=-2+2=0$

δ) Εστω ότι υπάρχει παραγωγίσιμη συνάρτηση f που να ικανοποιεί τη σχέση:

$f^3(x^2+1)=3f^3(x+1)+16x$, $x\in\mathbb{R}$. Τότε: $\left(f^3(x^2+1)\right)'=\left(3f^3(x+1)\right)'+(16x)'$ ή

$3f^2(x^2+1)f'(x^2+1)(x^2+1)'=9f^2(x+1)f'(x+1)(x+1)'+16$ ή

$6xf^2(x^2+1)f'(x^2+1)=9f^2(x+1)f'(x+1)+16$.

Για $x=1$, είναι $6f^2(2)f'(2)=9f^2(2)f'(2)+16\Leftrightarrow$

$$6\cdot(-2)^2\cdot 1=9\cdot(-2)^2\cdot 1+16\Leftrightarrow 24=36+16 \text{ που είναι αδύνατο.}$$

4.232. **α)** Επειδή θέλουμε να δείξουμε τη σχέση $f(\nu x)=\nu e^{(\nu-1)x}f(x)$, για κάθε $\nu\in\mathbb{N}$,

θα το αποδείξουμε με τη βοήθεια της μαθηματικής επαγωγής.

Για $\nu=1$ είναι $f(1\cdot x)=1\cdot e^0 f(x)\Leftrightarrow f(x)=f(x)$. Έστω ότι ισχύει για $\nu=\kappa\in\mathbb{N}$, δηλαδή

$f(\kappa x)=\kappa e^{(\kappa-1)x}f(x)$, (1). Θα δείξουμε ότι ισχύει για $\nu=\kappa+1$, δηλαδή

$f[(\kappa+1)x]=(\kappa+1)e^{\kappa x}f(x)$. Πράγματι,

$$f[(\kappa+1)x]=f(\kappa x+x)=e^{\kappa x}f(x)+e^x f(\kappa x)\overset{(1)}{=}e^{\kappa x}f(x)+e^x\kappa e^{(\kappa-1)x}f(x)=$$

$$e^{\kappa x}f(x)+\kappa e^{x+\kappa x-x}f(x)=e^{\kappa x}f(x)+\kappa e^{\kappa x}f(x)=(\kappa+1)e^{\kappa x}f(x).$$

β) Θέτουμε στην $f(x+y)=e^x f(y)+e^y f(x)$, (2), $x=y=0$, οπότε:

$f(0)=e^0 f(0)+e^0 f(0)\Leftrightarrow f(0)=0$.

γ) Παραγωγίζουμε την (2) ως προς x, θεωρώντας το y σταθερά, οπότε:

$$f'(x+y)(x+y)'=e^x f(y)+e^y f'(x)\Leftrightarrow f'(x+y)=e^x f(y)+e^y f'(x),\ (3).$$

Επίσης, παραγωγίζουμε την (2) ως προς y, θεωρώντας το x σταθερά, οπότε:

$f'(x+y)=e^x f'(y)+e^y f(x)$, (4).

Από (3), (4) προκύπτει $e^x f(y)+e^y f'(x)=e^x f'(y)+e^y f(x)$. Θέτοντας όπου $y=0$, είναι:

$e^x f(0)+e^0 f'(x)=e^x f'(0)+e^0 f(x)\Leftrightarrow f'(x)=2e^x+f(x)$.

4.233. $$\lim_{x\to\gamma^-}\frac{f(x)}{x-\gamma}=\lim_{x\to\gamma^-}\frac{-(\alpha x-\beta^2)(x-\gamma)}{x-\gamma}=-(\alpha\gamma-\beta^2)$$

$$\lim_{x\to\gamma^+}\frac{f(x)}{x-\gamma}=\lim_{x\to\gamma^+}\frac{(\alpha x-\beta^2)(x-\gamma)}{x-\gamma}=(\alpha\gamma-\beta^2)$$

Η f παραγωγίσιμη στο γ αν και μόνο αν $\alpha\gamma-\beta^2=-\alpha\gamma+\beta^2\Leftrightarrow\beta^2=\alpha\gamma$, δηλαδή οι αριθμοί α,β,γ είναι διαδοχικοί όροι γεωμετρικής προόδου.

4.234. **α)** Εστω $f(x)=\alpha x^2+\beta x+\gamma$ με $\alpha\neq 0$. Αν η f έχει πραγματικές ρίζες, τότε

$\Delta\geq 0\Leftrightarrow\beta^2-4\alpha\gamma\geq 0$ (1).

Είναι $f'(x)=2\alpha x+\beta$ και $f''(x)=2\alpha$, οπότε:

$$[f'(x)]^2-2f(x)f''(x)=(2\alpha x+\beta)^2-2\cdot 2\alpha(\alpha x^2+\beta x+\gamma)=$$

$$4\alpha^2x^2+4\alpha\beta x+\beta^2-4\alpha^2x^2-4\alpha\beta x-4\alpha\gamma=\beta^2-4\alpha\gamma\overset{(1)}{\geq}0.$$

β) Εστω $f(x)$ πολυώνυμο 3ου βαθμού. Επειδή η f είναι 3ου βαθμού, έχει τουλάχιστον μία πραγματική ρίζα ρ και γράφεται $f(x)=(x-\rho)\Pi(x)$, όπου $\Pi(x)$ πολυώνυμο 2ου βαθμού με πραγματικές ρίζες, οπότε με βάση το α) ερώτημα θα ισχύει:

$(\Pi'(x))^2-2\Pi(x)\Pi''(x)\geq 0$.

Επειδή $f(x)=(x-\rho)\Pi(x)$ έχουμε $f'(x)=\Pi(x)+(x-\rho)\Pi'(x)$ και

$f''(x)=\Pi'(x)+\Pi'(x)+(x-\rho)\Pi''(x)=2\Pi'(x)+(x-\rho)\Pi''(x)$.

Οπότε, για την παράσταση $A=2\left[f'(x)\right]^2-3f(x)f''(x)$ έχουμε:

$$2A=4\left[f'(x)\right]^2-6f(x)f''(x)=$$
$$4\left[\Pi(x)+(x-\rho)\Pi'(x)\right]-6(x-\rho)\Pi(x)\left[2\Pi'(x)+(x-\rho)\Pi''(x)\right]=$$
$$4\Pi^2(x)+4(x-\rho)^2\left(\Pi'(x)\right)^2+8\Pi(x)\Pi'(x)(x-\rho)-12(x-\rho)\Pi(x)\Pi'(x)$$
$$-6(x-\rho)^2\Pi(x)\Pi''(x)=4\Pi^2(x)+(x-\rho)^2\left(\Pi'(x)\right)^2+$$
$$3(x-\rho)^2\left(\Pi'(x)\right)^2-4(x-\rho)\Pi(x)\Pi'(x)-6(x-\rho)^2\Pi(x)\Pi''(x)=$$
$$3(x-\rho)^2\left[\left(\Pi'(x)\right)^2-2\Pi(x)\Pi''(x)\right]+\left[2\Pi(x)-(x-\rho)\Pi'(x)\right]^2\geq 0.$$

γ) Επειδή το πολυώνυμο $f(x)=x^3-x+\kappa$ έχει τρεις πραγματικές ρίζες με βάση το (ΙΙ) ερώτημα θα είναι: $2\left(f'(x)\right)^2-3f(x)f''(x)\geq 0$. Είναι $f'(x)=3x^2-1$ και $f''(x)=6x$, οπότε:

$$2\left(3x^2-1\right)^2-3\cdot 6x\left(x^3-x+\kappa\right)\geq 0\Leftrightarrow 2\left(9x^4-6x^2+1\right)-18x\left(x^3-x+\kappa\right)\geq 0\Leftrightarrow$$
$$18x^4-12x^2+2-18x^4+18x^2-18\kappa x\geq 0\Leftrightarrow 6x^2-18\kappa x+2\geq 0\Leftrightarrow 3x^2-9\kappa x+1\geq 0.$$

Για να είναι όμως $3x^2-9\kappa x+1\geq 0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$, θα πρέπει:

$$\Delta\leq 0\Leftrightarrow 81\kappa^2-12\leq 0\Leftrightarrow \kappa^2\leq\frac{4}{27}\Leftrightarrow|\kappa|\leq\frac{2}{3\sqrt{3}}\Leftrightarrow|\kappa|\leq\frac{2\sqrt{3}}{9}\Leftrightarrow-\frac{2\sqrt{3}}{9}\leq\kappa\leq\frac{2\sqrt{3}}{9}.$$

4.235. α) $P(x)=\alpha(x-\rho_1)(x-\rho_2)$, $P'(x)=\alpha(x-\rho_1)+\alpha(x-\rho_2)$

$$\frac{P'(x)}{P(x)}=\frac{\alpha(x-\rho_1)+\alpha(x-\rho_2)}{\alpha(x-\rho_1)(x-\rho_2)}=\frac{\alpha(x-\rho_1)}{\alpha(x-\rho_1)(x-\rho_2)}+\frac{\alpha(x-\rho_2)}{\alpha(x-\rho_1)(x-\rho_2)}=\frac{1}{x-\rho_1}+\frac{1}{x-\rho_2}$$

β) Αν $P'(\rho_1)=0$ τότε... $\rho_1=\rho_2$ άτοπο.

γ) $P''(x)P(x)<\left[P'(x)\right]^2\Leftrightarrow 2\alpha\left(\alpha x^2+\beta x+\gamma\right)<(2\alpha x+\beta)^2\Leftrightarrow\ldots\Leftrightarrow$

$2\alpha^2x^2+2\alpha\beta x+\beta^2-2\alpha\gamma>0$ που ισχύει αφού $\Delta=-4\alpha^2\left(\beta^2-4\alpha\gamma\right)<0$

δ) $$\frac{\rho_1}{\alpha(\rho_1-\rho_2)}+\frac{\rho_2}{\alpha(\rho_2-\rho_1)}=\frac{\rho_1}{\alpha(\rho_1-\rho_2)}-\frac{\rho_2}{\alpha(\rho_1-\rho_2)}=\frac{\rho_1-\rho_2}{\alpha(\rho_1-\rho_2)}=\frac{1}{\alpha}$$

ε) $$\frac{1}{\rho_1}+\frac{1}{\rho_2}=\frac{\rho_2+\rho_1}{\rho_2\rho_1}=\frac{\rho_2+\rho_1}{\frac{\gamma}{\alpha}}=\frac{\alpha}{\gamma}(\rho_1+\rho_2)$$

4.236. Α) α) Εστω $x_1,x_2\in(0,+\infty)$ με $f(x_1)=f(x_2)$, τότε

$f\left(f(x_1)\right)=f\left(f(x_2)\right)\Leftrightarrow x_1^4=x_2^4\Leftrightarrow x_1=x_2$, άρα 1–1.

β) $f\left(f(x)\right)=x^4$, όπου x το $f(x)$, έχουμε $f\left(f\left(f(x)\right)\right)=f^4(x)\Leftrightarrow f\left(x^4\right)=f^4(x)$ (1).

Β) α) Αν η f ήταν γνησίως φθίνουσα, τότε για κάθε $x>0$ θα ήταν $f(x)<f(0)=0$ το οποίο είναι άτοπο.

β) $(1)\overset{x=1}{\Rightarrow}f(1)=f^4(1)\overset{f(x)>0}{\Leftrightarrow}f^3(1)=1\Leftrightarrow f(1)=1$

$\left[f\left(f(x)\right)\right]'=\left(x^4\right)'\Leftrightarrow f'\left(f(x)\right)f'(x)=4x^3$ και για $x=1$ $\left[f'(1)\right]^2=4$

γ) Αν $f(x)>x$, τότε $f\left(f(x)\right)>f(x)\Leftrightarrow x^4>f(x)>x\Leftrightarrow x^4-x>0\Leftrightarrow x\left(x^3-1\right)>0\Leftrightarrow x<0$

ή $x>1$ που είναι άτοπο.

4.237. α) Για $x\neq 0$ είναι $f'(x)=\dfrac{2\pi x^2 \sigma\upsilon\nu(\pi x^2)-\eta\mu(\pi x^2)}{x^2}$. Στο $x_0=0$ είναι:

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{\eta\mu(\pi x^2)}{x^2}=\pi. \text{ Άρα } f'(x)=\begin{cases}\dfrac{2\pi x^2\sigma\upsilon\nu(\pi x^2)-\eta\mu(\pi x^2)}{x^2}, & x\neq 0\\ \pi, & x=0\end{cases}$$

β) i. $|f(x)|=\left|\dfrac{\eta\mu(\pi x^2)}{x}\right|\le\dfrac{1}{|x|}\overset{x>0}{\Leftrightarrow}-\dfrac{1}{x}\le f(x)\le\dfrac{1}{x}$ και από το Κ.Π. είναι $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=0$.

ii. $f'(x)=2\pi\sigma\upsilon\nu(\pi x^2)-\dfrac{\eta\mu(\pi x^2)}{x^2}$, $\dfrac{f'(x)}{x}=\dfrac{2\pi\sigma\upsilon\nu(\pi x^2)}{x}-\dfrac{\eta\mu(\pi x^2)}{x^3}$

$$\left|\frac{2\pi\sigma\upsilon\nu(\pi x^2)}{x}\right|\le\left|\frac{2\pi}{x}\right|\Leftrightarrow-\left|\frac{2\pi}{x}\right|\le\frac{2\pi\sigma\upsilon\nu(\pi x^2)}{x}\le\left|\frac{2\pi}{x}\right|,\ \lim_{x\to-\infty}\left|\frac{2\pi}{x}\right|=\lim_{x\to-\infty}\left(-\left|\frac{2\pi}{x}\right|\right)=0$$

άρα και $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{2\pi\sigma\upsilon\nu(\pi x^2)}{x}=0$.

Όμοια και $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{\eta\mu(\pi x^2)}{x^3}=0$, άρα $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{f'(x)}{x}=0$

γ) $\lim\limits_{x\to 0}f'(x)=\pi=f'(0)$, άρα f' συνεχή στο $x_0=0$.

4.238. α) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2\eta\mu\frac{1}{x}+\alpha x}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\left(x\eta\mu\dfrac{1}{x}+\alpha\right)=\alpha\in\mathbb{R}$, γιατί $\left|x\eta\mu\dfrac{1}{x}\right|\le|x|\Leftrightarrow-|x|\le x\eta\mu\dfrac{1}{x}\le|x|$ και από

Κ.Π είναι $\lim\limits_{x\to 0}x\eta\mu\dfrac{1}{x}=0$. Άρα $f'(0)=\alpha$ άρα $f'(x)=\begin{cases}2x\eta\mu\dfrac{1}{x}-\sigma\upsilon\nu\dfrac{1}{x}+\alpha, & x\neq 0\\ \alpha, & x=0\end{cases}$

β) $f'\left(\dfrac{1}{2\pi}\right)=-1+\alpha<0$, $f'\left(\dfrac{1}{\pi}\right)=1+\alpha>0$, οπότε η f' αλλάζει πρόσημο στο $\left(\dfrac{1}{2\pi},\dfrac{1}{\pi}\right)$

4.239. α) $f'(0)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x}=\dfrac{\alpha_1\eta\mu x+\alpha_2\eta\mu 2x+\ldots+\alpha_\nu\eta\mu(\nu x)}{x}=$

$$\alpha_1\frac{\eta\mu x}{x}+2\alpha_2\frac{\eta\mu 2x}{2x}+\ldots+\nu\alpha_\nu\frac{\eta\mu(\nu x)}{\nu x}=\alpha_1+2\alpha_2+\ldots+\nu\alpha_\nu$$

β) $|f(x)|\le|\eta\mu x|\Leftrightarrow\left|\dfrac{f(x)}{x}\right|\le\left|\dfrac{\eta\mu x}{x}\right|\Rightarrow\lim\limits_{x\to 0}\left|\dfrac{f(x)}{x}\right|\le\lim\limits_{x\to 0}\left|\dfrac{\eta\mu x}{x}\right|\Leftrightarrow|\alpha_1+2\alpha_2+3\alpha_3+\ldots+\nu\alpha_\nu|\le 1$

4.240. α) Είναι $g(x)=\alpha(x-\rho_1)(x-\rho_2)$ και $g'(x)=\alpha(x-\rho_2)+\alpha(x-\rho_1)$,

οπότε $\dfrac{g'(x)}{g(x)}=\dfrac{1}{x-\rho_1}+\dfrac{1}{x-\rho_2}$

β) Εστω $h(x)=\dfrac{g'(x)}{g(x)}f(x)$, τότε $h(x)=\dfrac{f(x)}{x-\rho_1}+\dfrac{f(x)}{x-\rho_2}$ και

$$h'(x)=\frac{f'(x)(x-\rho_1)-f(x)}{(x-\rho_1)^2}+\frac{f'(x)(x-\rho_2)-f(x)}{(x-\rho_2)^2}=$$

$$=\frac{xf'(x)-f(x)-\rho_1 f'(x)}{(x-\rho_1)^2}+\frac{xf'(x)-f(x)-\rho_2 f'(x)}{(x-\rho_2)^2}\le 0$$ γιατί $xf'(x)-f(x)\le f'(x)\rho_i$.

Άρα $h'(x)\le 0 \Leftrightarrow \left(\dfrac{g'(x)}{g(x)}f(x)\right)'\le 0 \Leftrightarrow \dfrac{(g'(x)f(x))'g(x)-g'(x)f(x)g'(x)}{g^2(x)}\le 0 \Leftrightarrow$

$(g''(x)f(x)+g'(x)f'(x))g(x)-g'(x)f(x)g'(x)\le 0 \Leftrightarrow$

$g''(x)f(x)g(x)\le g'(x)f(x)g'(x)-g'(x)f'(x)g(x) \Leftrightarrow$

$f(x)g(x)g''(x)\le g'(x)\big(f(x)g'(x)-f'(x)g(x)\big)$

Εξίσωση Εφαπτομένης

4.253. Αν φέρουμε τις εφαπτομένες της γραφικής παράστασης της f στα σημεία Α,Β,Γ,Δ, τότε παρατηρούμε ότι οι εφαπτόμενες $\varepsilon_1,\varepsilon_3,\varepsilon_4$ στα σημεία Α,Γ,Δ αντίστοιχα, σχηματίζουν οξεία γωνία με τον άξονα $x'x$, οπότε $f'(-1)>0$, $f'(8)>0$ και $f'(10)>0$. Ενώ η εφαπτομένη ε_2 στο σημείο Β σχηματίζει αμβλεία γωνία με τον άξονα $x'x$, οπότε $f'(5)<0$. Άρα $A<0$.

4.254. **α)** Από το ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΚ, έχουμε: $f'(4)=\varepsilon\varphi ABK=\frac{AK}{BK}=\frac{2}{5}$, άρα η κλίση της C_f στο $x_0=4$ είναι $\frac{2}{5}$. Επίσης $f(4)=2$. Για την κλίση της C_h στο $x_0=4$ πρέπει να βρούμε την $h'(x)$ για να υπολογίσουμε το $h'(4)$. Οπότε:

$$h'(x)=\frac{\left(f(x)-x^3\right)'5x-(5x)'\left(f(x)-x^3\right)}{(5x)^2}=\frac{\left(f'(x)-3x^2\right)5x-5\left(f(x)-x^3\right)}{25x^2}=$$

$$=\frac{5xf'(x)-10x^3-5f(x)}{25x^2}=\frac{xf'(x)-2x^3-f(x)}{5x^2}.$$

Οπότε: $h'(4)=\frac{4f'(4)-2\cdot4^3-f(4)}{5\cdot4^2}=-\frac{321}{200}$.

β) Η εφαπτομένη της C_f στο $x_0=4$ είναι:

$$y-f(4)=f'(4)(x-4)\Leftrightarrow y-2=\frac{2}{5}(x-4)\Leftrightarrow 2x-5y+2=0.$$

γ) Είναι $h(4)=\frac{f(4)-4^3}{5\cdot4}=\frac{2-64}{20}=-\frac{31}{10}$, οπότε η εφαπτομένη της h στο $x_0=4$ είναι:

$$y-h(4)=h'(4)(x-4)\Leftrightarrow y+\frac{31}{10}=-\frac{321}{200}(x-4)\Leftrightarrow 321x+200y-664=0.$$

4.255. $f'(x)=2x-\frac{1}{x^2}$, $f'(1)=1$, $f(1)=1+1=2$

$\varepsilon: y-f(1)=f'(1)(x-1)\Leftrightarrow y-2=x-1\Leftrightarrow y=x+1$

4.256. $f(x)=\left|6-2x^2\right|=\begin{cases}6-2x^2, & -\sqrt{3}\le x\le\sqrt{3}\\ 2x^2-6, & x<-\sqrt{3} \text{ ή } x>\sqrt{3}\end{cases}$.

Για $x>\sqrt{3}$ είναι $f'(x)=4x$, $f'(2)=8$, $f(2)=2\cdot2^2-6=2$, οπότε

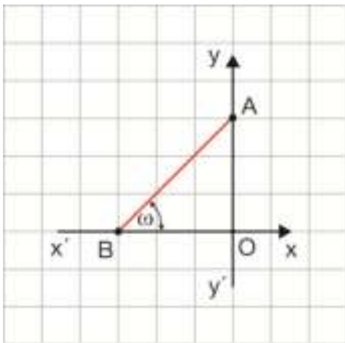
$\varepsilon: y-f(2)=f'(2)(x-2)\Leftrightarrow y-2=8(x-2)\Leftrightarrow y=8x-14$

4.257. $\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{f(x)-f(0)}{x}=\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{\sigma\upsilon\nu x+2x-1}{x}=\lim\limits_{x\to 0^-}\left(\dfrac{\sigma\upsilon\nu x-1}{x}+2\right)=2$

$\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{f(x)-f(0)}{x}=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{x^2+2x}{x}=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{\cancel{x}(x+2)}{\cancel{x}}=2$, άρα $f'(2)=2$

$\varepsilon: y-f(0)=f'(0)x \Leftrightarrow y-3=2x \Leftrightarrow y=2x+3$

4.258. $f(x)=x^x+2=e^{\ln x^x}+2=e^{x\ln x}+2$, $f'(x)=e^{x\ln x}(\ln x+1)$



α) $f'(1)=e^0(0+1)=1$

β) $\varepsilon: y-f(1)=f'(1)(x-1)\Leftrightarrow y-3=x-1\Leftrightarrow y=x+2$

γ) $f'(1)=1\Leftrightarrow \varepsilon\varphi\omega=1\Leftrightarrow \omega=45^\circ$.

Αν Α,Β τα σημεία τομής της ε με τους άξονες, τότε, επειδή το τρίγωνο ΟΑΒ είναι ορθογώνιο και έχει $\omega=45^\circ$, είναι και ισοσκελές. Για $x=0$ είναι $y=0+2=2$, άρα $A(0,2)$ και για $y=0$ είναι $x=-2$, άρα $B(-2,0)$

$(OAB)=\dfrac{1}{2}(OA)(OB)=\dfrac{1}{2}\cdot 2\cdot 2=2$

4.259. $f(x)=x^{\frac{2}{x}}=e^{\ln x^{\frac{2}{x}}}=e^{\frac{2\ln x}{x}}$, $f'(x)=e^{\frac{2\ln x}{x}}\left(\dfrac{2\ln x}{x}\right)'=2e^{\frac{2\ln x}{x}}\dfrac{1-\ln x}{x^2}$, $f'(1)=2$

$\varepsilon: y-f(1)=f'(1)(x-1)\Leftrightarrow y-1=2(x-1)\Leftrightarrow y=2x-1$

Η ε τέμνει τους άξονες στα σημεία $A(0,-1)$ και $B\left(\dfrac{1}{2},0\right)$.

$(OAB)=\dfrac{1}{2}(OA)(OB)=\dfrac{1}{2}\cdot 1\cdot\dfrac{1}{2}=\dfrac{1}{4}$

4.260. $f'(x+\sigma\upsilon\nu x)(1-\eta\mu x)=e^x+2e^{2x}$ για $x=0$ είναι $f'(1)=1+2=3$, $f(1)=1+1=2$

$\varepsilon: y-f(1)=f'(1)(x-1)\Leftrightarrow y-2=3(x-1)\Leftrightarrow y=3x-1$

Η ε τέμνει τους άξονες στα σημεία $A(0,-1)$ και $B\left(\dfrac{1}{3},0\right)$.

$(OAB)=\dfrac{1}{2}(OA)(OB)=\dfrac{1}{2}\cdot 1\cdot\dfrac{1}{3}=\dfrac{1}{6}$

4.261. Επειδή $f(0)=0$ η C_f διέρχεται από την αρχή των αξόνων.

$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)-f(0)}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^3\eta\mu\frac{1}{x}}{x}=\lim\limits_{x\to 0}x^2\eta\mu\dfrac{1}{x}$.

Είναι $-1\le\eta\mu\dfrac{1}{x}\le 1\overset{x\neq 0}{\Leftrightarrow}-x^2\le x^2\eta\mu\dfrac{1}{x}\le x^2$. Επειδή $\lim\limits_{x\to 0}(-x^2)=\lim\limits_{x\to 0}x^2=0$, είναι και

$\lim\limits_{x\to 0}x^2\eta\mu\dfrac{1}{x}=0$, άρα $f'(0)=0$, οπότε η εφαπτομένη της C_f στο Ο είναι ό άξονας $x'x$.

4.262. $f(x)=g(x)\Leftrightarrow x^3+\cancel{x^2}-5x-1=\cancel{x^2}-2x-3\Leftrightarrow x^3-3x+2=0\Leftrightarrow$

$(x-1)(x^2+x-2)=0\Leftrightarrow x=1$ ή $x^2+x-2=0\Leftrightarrow x=1$ ή $x=-2$

$f'(x)=3x^2+2x-5$, $f'(1)=0$, $f'(-2)=3$

$g'(x)=2x-2$, $g'(1)=0$, $g'(-2)=-6$,

Στο $x=1$ είναι $y-f(1)=f'(1)(x-1)\Leftrightarrow y+4=0\Leftrightarrow y=-4$ και

$y-g(1)=g'(1)(x-1)\Leftrightarrow y+4=0\Leftrightarrow y=-4$

Στο $x=-2$ είναι $y-f(-2)=f'(-2)(x+2)\Leftrightarrow y-21=3(x+2)\Leftrightarrow y=3x+27$ και

$y-g(-2)=g'(-2)(x+2)\Leftrightarrow y-5=-6(x+2)\Leftrightarrow y=-6x-7$

4.263. **α)** Για $x=1$ είναι $f^3(1)+f(1)=1^2-5\cdot1+2\Leftrightarrow f^3(1)+f(1)+2=0\Leftrightarrow$

$(f(1)+1)(f^2(1)-f(1)+2)=0\Leftrightarrow f(1)=-1$

$(f^3(x)+xf(x))'=(x^2-5x+2)'\Leftrightarrow 3f^2(x)f'(x)+f(x)+xf'(x)=2x-5$ και

για $x=1$ είναι $3f^2(1)f'(1)+f(1)+f'(1)=2-5\Leftrightarrow 3f'(1)-1+f'(1)=-3\Leftrightarrow f'(1)=-\frac{1}{2}$

β) $y-f(1)=f'(1)(x-1)\Leftrightarrow y+1=-\frac{1}{2}(x-1)\Leftrightarrow y=-\frac{1}{2}x-\frac{1}{2}$

4.264. $(x^3+x^2f^3(x)+f^4(x))'=(3)'\Leftrightarrow 3x^2+2xf^3(x)+3x^2f^2(x)f'(x)+4f^3(x)f'(x)=0$ και

για $x=1$ είναι $3+2f^3(1)+3f^2(1)f'(1)+4f^3(1)f'(1)=0\Leftrightarrow$

$3+2+3f'(1)+4f'(1)=0\Leftrightarrow f'(1)=-\frac{5}{7}$

$\varepsilon: y-f(1)=f'(1)(x-1)\Leftrightarrow y-1=-\frac{5}{7}(x-1)\Leftrightarrow y=-\frac{5}{7}x+\frac{12}{7}$

4.265. $(f(-x))'=(-f(x))'\Rightarrow -f'(-x)=-f'(x)\Leftrightarrow f'(-x)=f'(x)$

$f'(-1)=f'(1)=2$

4.266. **α)** Για $x=0$ είναι $f(1)+2f(1)=-5\Leftrightarrow f(1)=-\frac{5}{3}$

$(f(x+1)+2f(x^2+1))'=(x^3-2x^2-5)'\Leftrightarrow f'(x+1)+2f'(x^2+1)2x=3x^2-4x$ και

για $x=0$, έχουμε: $f'(1)=0$

β) Για $x=1$ είναι $f(2)+2f(2)=-6\Leftrightarrow f(2)=-2$ και $f'(2)+4f'(2)=3-4\Leftrightarrow f'(2)=-\frac{1}{5}$

$\varepsilon: y-f(2)=f'(2)(x-2)\Leftrightarrow y+2=-\frac{1}{5}(x-2)\Leftrightarrow y=-\frac{1}{5}x-\frac{8}{5}$

4.267. $(f(2+x)+f(2-x))'=(e^x-\text{συν}x)'\Rightarrow f'(2+x)-f'(2-x)=e^x+\text{ημ}x$

$$\left(f'(2+x)-f'(2-x)\right)'=\left(e^x+\eta\mu x\right)'\Rightarrow f''(2+x)+f''(2-x)=e^x+\sigma\upsilon\nu x$$

Για $x=0$ είναι $f''(0)=1\Rightarrow \varepsilon\varphi\omega=1\Leftrightarrow \omega=45^\circ$

4.268. α) Εστω $g(x)=\dfrac{f(x)-\sqrt{x-1}}{x-2}\Leftrightarrow f(x)=g(x)(x-2)+\sqrt{x-1}$, $x\in[1,2)\cup(2,+\infty)$

$$f(2)=\lim_{x\to2}f(x)=\lim_{x\to2}\left(g(x)(x-2)+\sqrt{x-1}\right)=1$$

$$\lim_{x\to2}\frac{f(x)-f(2)}{x-2}=\lim_{x\to2}\frac{g(x)(x-2)+\sqrt{x-1}-1}{x-2}=\lim_{x\to2}\left(g(x)+\frac{\sqrt{x-1}-1}{x-2}\right)=$$

$$\lim_{x\to2}\left(g(x)+\frac{\cancel{x-2}}{\cancel{(x-2)}\left(\sqrt{x-1}+1\right)}\right)=3+\frac{1}{2}=\frac{7}{2}\Rightarrow f'(2)=\frac{7}{2}$$

β) $\varepsilon: y-f(2)=f'(2)(x-2)\Leftrightarrow y-1=\dfrac{7}{2}(x-2)\Leftrightarrow y=\dfrac{7}{2}x-6$

4.269. α) Εστω $g(x)=\dfrac{f(x)-x^2+3}{x-1}\Leftrightarrow f(x)=g(x)(x-1)+x^2-3$, $x\neq1$

$$f(1)=\lim_{x\to1}f(x)=\lim_{x\to1}\left(g(x)(x-1)+x^2-3\right)=-2$$

$$\lim_{x\to1}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim_{x\to1}\frac{g(x)(x-1)+x^2-1}{x-1}=\lim_{x\to1}\frac{\cancel{(x-1)}\left(g(x)+x+1\right)}{\cancel{x}}=4\Rightarrow f'(1)=4$$

β) $y-f(1)=f'(1)(x-1)\Leftrightarrow y+2=4(x-1)\Leftrightarrow y=4x-6$

4.270. α) Εστω $g(x)=\dfrac{\eta\mu x f(x)-x^5\eta\mu\frac{1}{x}}{x^7}$, $x\neq0$.

Τότε, $f(x)=\dfrac{x^7g(x)+x^5\eta\mu\frac{1}{x}}{\eta\mu x}=\dfrac{x^6g(x)+x^4\eta\mu\frac{1}{x}}{\frac{\eta\mu x}{x}}$.

Από κριτήριο παρεμβολής, ισχύει: $\lim\limits_{x\to0}x^4\eta\mu\dfrac{1}{x}=0$. Οπότε $\lim\limits_{x\to0}f(x)=0$, άρα $f(0)=0$.

β) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x^6g(x)+x^4\eta\mu\frac{1}{x}}{\eta\mu x}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x^5g(x)+x^3\eta\mu\frac{1}{x}}{\frac{\eta\mu x}{x}}=0$, άρα $f'(0)=0$.

4.271. α) Για να ορίζεται η συνάρτηση f πρέπει $x\neq3$. Δηλαδή $A=\mathbb{R}-\{3\}$.

Για $y=0$ είναι $f(x)=0\Leftrightarrow\dfrac{x-6}{x-3}=0\Leftrightarrow x-6=0\Leftrightarrow x=6$ και για $x=0$ είναι $f(0)=\dfrac{0-6}{0-3}=2$.

Η C_f τέμνει τους άξονες στα σημεία $A(6,0)$ και $B(0,2)$.

β) Η f είναι παραγωγίσιμη για $x\neq3$ με $f'(x)=\dfrac{x-3-x+6}{(x-3)^2}=\dfrac{3}{(x-3)^2}$.

Είναι $f'(6)=\dfrac{3}{(6-3)^2}=\dfrac{1}{3}$ και $f'(0)=\dfrac{3}{(0-3)^2}=\dfrac{1}{3}$,

$\varepsilon_1: y-f(0)=f'(0)x \Leftrightarrow y=\dfrac{1}{3}x+2$ και

$\varepsilon_2: y-f(6)=f'(6)(x-6) \Leftrightarrow y=\dfrac{1}{3}x-2$

γ) Είναι $f'(0)=f'(6)$, οπότε οι εφαπτομένες της C_f στα Α και Β είναι παράλληλες.

4.272. **α)** Επειδή η f είναι άρτια ισχύει ότι: $f(-x)=f(x)$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

Τότε: $\left(f(-x)\right)'=\left(f(x)\right)'$ ή $-f'(-x)=f'(x) \Leftrightarrow f'(-x)=-f'(x)$, δηλαδή η f' είναι περιττή.

Για $x=-\alpha$ προκύπτει $f'(-\alpha)=-f'(\alpha)=3$ και για $x=0$ είναι

$f'(0)=-f'(0) \Leftrightarrow 2f'(0)=0 \Leftrightarrow f'(0)=0$.

β) Επειδή η f είναι άρτια συνάρτηση ισχύει ότι $f(-\alpha)=f(\alpha)=2$.

Η εφαπτομένη της C_f στο $x=\alpha$ είναι η ευθεία $\varepsilon_1: y-f(\alpha)=f'(\alpha)(x-\alpha) \Leftrightarrow$

$y-2=-3(x-\alpha) \Leftrightarrow y=-3x+3\alpha+2 \ (1)$.

Η εφαπτομένη της C_f στο $x=-\alpha$ είναι η ευθεία $\varepsilon_2: y-f(-\alpha)=f'(-\alpha)(x+\alpha) \Leftrightarrow$

$y-2=3(x+\alpha) \Leftrightarrow y=3x+3\alpha+2 \ (2)$.

Με πρόσθεση κατά μέλη των $(1),(2)$ προκύπτει: $2y=6\alpha+4 \Leftrightarrow y=3\alpha+2$.

Τότε: $3\alpha+2=3x+3\alpha+2 \Leftrightarrow x=0$. Άρα το σημείο τομής των $\varepsilon_1,\varepsilon_2$ είναι το $(0,3\alpha+2)$.

4.273. Επειδή το Α ανήκει στη C_f είναι $f(-2)=4 \Leftrightarrow 4-2\alpha+\beta=4 \Leftrightarrow \beta=2\alpha$

Επειδή η εφαπτομένη της C_f στο σημείο $A(-2,4)$ σχηματίζει με τον άξονα $x'x$, γωνία 45^o,

είναι $f'(-2)=\varepsilon\varphi 45^\circ=1 \Leftrightarrow 2(-2)+\alpha=1 \Leftrightarrow \alpha=5$ και $\beta=2\cdot 5=10$

4.274. Επειδή το Α ανήκει στη C_f και στην ε, ισχύει: $f(1)=2 \Leftrightarrow \alpha-3+\beta=2 \Leftrightarrow \alpha+\beta=5 \ (1)$

και $2=\beta+\gamma \ (2)$. Είναι $f'(x)=2\alpha x-3$. Επειδή η ε εφάπτεται της C_f στο Α, είναι

$f'(1)=\beta \Leftrightarrow 2\alpha-3=\beta \ (3)$

Από $(1),(3) \Rightarrow \alpha+2\alpha-3=5 \Leftrightarrow \alpha=\dfrac{8}{3}$, τότε $(3) \Rightarrow \dfrac{16}{3}-3=\beta \Leftrightarrow \beta=\dfrac{7}{3}$ και από

$(2) \Rightarrow 2=\dfrac{7}{3}+\gamma \Leftrightarrow \gamma=-\dfrac{1}{3}$

4.275. $f(2)=5 \Leftrightarrow 4\alpha+2\beta+\gamma=5 \ (1)$ και $5=2\alpha+\beta \ (2)$. Είναι $f'(x)=2\alpha x+\beta$ και

$f'(2)=\alpha \Leftrightarrow 4\alpha+\beta=\alpha \Leftrightarrow \beta=-3\alpha$, τότε $(2) \Rightarrow 5=2\alpha-3\alpha \Leftrightarrow \alpha=-5$ και

$\beta=-3(-5)=15$. $(1) \Rightarrow -20+30+\gamma=5 \Leftrightarrow \gamma=-5$

4.276. Είναι $g'(x)=3\alpha x^2+2\beta x+\gamma$.

Πρέπει: $\left.\begin{array}{r} g(-1)=0 \\ g'(-1)=\lambda_{\varepsilon_1}=8 \\ g(2)=-12 \\ g'(-2)=\lambda_{\varepsilon_2}=-7 \end{array}\right\} \Leftrightarrow \begin{array}{ll} -\alpha+\beta-\gamma+\delta=0 & (1) \\ 3\alpha-2\beta+\gamma=8 & (2) \\ 8\alpha+4\beta+2\gamma+\delta=-12 & (3) \\ 12\alpha+4\beta+\gamma=-7 & (4) \end{array}$

Από την $(1) \Leftrightarrow \delta=\alpha-\beta+\gamma$ (5). Η (3) με βάση την (5) γίνεται:

$8\alpha+4\beta+2\gamma+\alpha-\beta+\gamma=-12 \Leftrightarrow 9\alpha+3\beta+3\gamma=-12 \Leftrightarrow 3\alpha+\beta+\gamma=-4 \Leftrightarrow 3\alpha+\beta=-4-\gamma$ (6).

Άρα, η (4) με βάση την (6) γίνεται:

$4(3\alpha+\beta)+\gamma=-7 \Leftrightarrow 4(-4-\gamma)+\gamma=-7 \Leftrightarrow -16-4\gamma+\gamma=-7 \Leftrightarrow \gamma=-3$.

Οπότε, από την (2) και την (6) έχουμε: $\left.\begin{array}{r} 3\alpha-2\beta=11 \\ 3\alpha+\beta=-1 \end{array}\right\} \Leftrightarrow \begin{array}{l} \alpha=1 \\ \beta=-4 \end{array}$ και από την $(5) \Rightarrow \delta=2$.

Άρα, $\alpha=1$, $\beta=-4$, $\gamma=-3$, $\delta=2$.

4.277. $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=f(0) \Leftrightarrow \beta=\sqrt{\gamma}$

$$\lim_{x\to 0^-}\frac{f(x)-f(0)}{x}=\lim_{x\to 0^-}\frac{x^2+\alpha x}{x}=\lim_{x\to 0^-}\frac{\cancel{x}(x+\alpha)}{\cancel{x}}=\alpha,$$

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x}=\lim_{x\to 0^+}\frac{\sqrt{x+\gamma}-\sqrt{\gamma}}{x}=\lim_{x\to 0^+}\frac{\cancel{x}}{\cancel{x}\left(\sqrt{x+\gamma}+\sqrt{\gamma}\right)}=\frac{1}{2\sqrt{\gamma}}$$

Επειδή η f έχει στο $x_0=0$ εφαπτόμενη που σχηματίζει με τον άξονα $x'x$ γωνία 45°, είναι

$f'(0)=\varepsilon\varphi 45^\circ=1$, άρα $\alpha=1=\dfrac{1}{2\sqrt{\gamma}} \Leftrightarrow \alpha=1$ και $\gamma=\dfrac{1}{4}$. Τότε $\beta=\sqrt{\dfrac{1}{4}}=\dfrac{1}{2}$

4.278. $\lim\limits_{x\to 2^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 2^+} f(x)=f(2)=2+1=3 \Leftrightarrow 2\alpha+\beta=4+2\gamma+\delta=3$

$$\lim_{x\to 2^-}\frac{f(x)-f(2)}{x-2}=\lim_{x\to 2^-}\frac{\alpha x+\beta-(2\alpha+\beta)}{x-2}=\alpha,$$

$$\lim_{x\to 2^+}\frac{f(x)-f(2)}{x-2}=\lim_{x\to 2^+}\frac{x^2+\gamma x+\delta-(4+2\gamma+\delta)}{x-2}=4+\gamma$$

Επειδή η ευθεία $y=x+1$ είναι εφαπτόμενη της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f στο σημείο $x_0=2$, είναι $f'(2)=\lambda_\varepsilon=1$, άρα $\alpha=1$ και $4+\gamma=1 \Leftrightarrow \gamma=-3$.

Τότε $2+\beta=4 \Leftrightarrow \beta=2$ και $4-6+\delta=3 \Leftrightarrow \delta=5$

4.279. $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 1^+} f(x)=f(1) \Leftrightarrow \alpha+2=1+\beta+3 \Leftrightarrow \alpha=\beta+2$ (1)

$f'(x)=\begin{cases} 2\alpha x & ,\ x<1 \\ 2x+\beta & ,\ x>1 \end{cases}$. $f'(2)f'\left(\dfrac{1}{2}\right)=-1 \Leftrightarrow (4+\beta)\alpha=-1 \overset{(1)}{\Leftrightarrow}$

$(4+\beta)(\beta+2)=-1 \Leftrightarrow \beta^2+6\beta+9=0 \Leftrightarrow (\beta+3)^2=0 \Leftrightarrow \beta=-3$

$(1) \Rightarrow \alpha=-1$

4.280. Εστω $M(x_0, y_0)$ το σημείο επαφής. Τότε $y_0 = x_0 = f(x_0) = \alpha^{x_0}$.

Επίσης $f'(x_0) = \lambda_\varepsilon = 1 \Leftrightarrow \alpha^{x_0}\ln\alpha = 1 \Leftrightarrow x_0 \ln\alpha = 1 \Leftrightarrow x_0 = \dfrac{1}{\ln\alpha}$.

Τότε $\dfrac{1}{\ln\alpha} = \alpha^{\frac{1}{\ln\alpha}} \Leftrightarrow \ln\dfrac{1}{\ln\alpha} = \ln\alpha^{\frac{1}{\ln\alpha}} \Leftrightarrow -\ln(\ln\alpha) = 1 \Leftrightarrow \ln(\ln\alpha) = -1 \Leftrightarrow \ln\alpha = e^{-1} \Leftrightarrow \alpha = e^{\frac{1}{e}}$

4.281. Επειδή το σημείο $(3, f(3))$ ανήκει στην ε, είναι: $f(3) = 3 - 1 = 2$.

Επειδή η ε εφάπτεται της C_f στο $(3, f(3))$, είναι: $f'(3) = 1$.

$g(1) = f(3) = 2$ και $g'(x) = f'(2^x + x^2)(2^x \ln 2 + 2x)$, $g'(1) = f'(3)(2\ln 2 + 2) = 2\ln 2 + 2$

$\varepsilon: y - g(1) = g'(1)(x-1) \Leftrightarrow y = 2(\ln 2 + 1)x - 2\ln 2$

4.282. **α)** Είναι $f'(\ln x)\dfrac{1}{x} = \ln x + 1 - 1$ και για $x = 1$ είναι $f'(0) = 0$

β) $y - f(0) = f'(0)x \Leftrightarrow y + 1 = 0 \Leftrightarrow y = -1$

γ) Για $x = e$ είναι $f(\ln e) = e\ln e - e \Leftrightarrow f(1) = 0$ και $f'(\ln e)\dfrac{1}{e} = \ln e \Leftrightarrow f'(1) = e$

$\varepsilon: y - f(1) = f'(1)(x - e1) \Leftrightarrow y = ex - e$

Για $x = 0$ είναι $y = -e$, άρα $A(0, -e)$ και για $y = 0$ είναι $x = 1$, άρα $B(1,0)$

$(OAB) = \dfrac{1}{2}(OA)(OB) = \dfrac{1}{2}e \cdot 1 = \dfrac{e}{2}$

4.283. Είναι $f'(x) = 4x^3 - \dfrac{21}{2}x^2 + 8x$, οπότε: $f'(x_0) = 0 \Leftrightarrow 4x_0^3 - \dfrac{21}{2}x_0^2 + 8x_0 = 0 \Leftrightarrow$

$x_0\left(4x_0^2 - \dfrac{21}{2}x_0 + 8\right) = 0 \Leftrightarrow x_0 = 0$ ή $4x_0^2 - \dfrac{21}{2}x_0 + 8 = 0$ (αδύνατο, γιατί $\Delta < 0$).

Άρα, το σημείο Μ είναι $M(0, f(0)) = (0, \alpha)$ και η εφαπτομένη στο σημείο Μ είναι:

$y - \alpha = 0(x - 0) \Leftrightarrow y = \alpha$.

Εστω σημείο $M(x_1, f(x_1))$, σημείο της C_f διαφορετικό από το Μ. Τότε, η εφαπτομένη στο M_1 έχει εξίσωση $\varepsilon_1: y - f(x_1) = f'(x_1)(x - x_1)$. Για να διέρχεται η ε_1 από το $M(0, \alpha)$, πρέπει:

$$\alpha - f(x_1) = f'(x_1)(-x_1) \Leftrightarrow \alpha - \left(x_1^4 - \frac{7}{2}x_1^3 + 4x_1^2 + \alpha\right) = -x_1\left(4x_1^3 - \frac{21}{2}x_1^2 + 8x_1\right) \Leftrightarrow$$

$$\alpha - x_1^4 + \frac{7}{2}x_1^3 - 4x_1^2 - \alpha = -4x_1^4 + \frac{21}{2}x_1^3 - 8x_1^2 \Leftrightarrow 3x_1^4 - 7x_1^3 + 4x_1^2 = 0 \Leftrightarrow x_1^2(3x_1^2 - 7x_1 + 4) = 0$$

Επειδή το M_1 είναι διαφορετικό από το Μ, τότε $x_1 \neq 0$, οπότε:

$3x_1^2 - 7x_1 + 4 = 0 \Leftrightarrow x_1 = \dfrac{4}{3}$ ή $x_1 = 1$.

Άρα, έχουμε ακόμη δύο σημεία της C_f, το $M_1\left(\dfrac{4}{3}, f\left(\dfrac{4}{3}\right)\right)$ και το $M_2(1, f(1))$, στα οποία η εφαπτόμενες διέρχονται από το σημείο Μ. Μαζί με την οριζόντια εφαπτομένη $y = \alpha$, από το Μ διέρχονται τελικά 3 εφαπτόμενες της C_f.

4.284. Για $x=k$ είναι $|f(k)-k|\le 0 \Leftrightarrow f(k)=k$, δηλαδή το σημείο (k,k) ανήκει στη C_f

Για $x\ne k$ είναι $|f(x)-k|\le (x-k)^2 \Leftrightarrow |f(x)-k|\le |x-k|^2 \Leftrightarrow \left|\dfrac{f(x)-k}{x-k}\right|\le |x-k| \Leftrightarrow$

$-|x-k|\le \dfrac{f(x)-f(k)}{x-k}\le |x-k|$.

Επειδή $\lim\limits_{x\to k}(-|x-k|)=\lim\limits_{x\to k}|x-k|=0$, είναι και $\lim\limits_{x\to k}\dfrac{f(x)-f(k)}{x-k}=0 \Leftrightarrow f'(k)=0$.

Η εφαπτομένη της C_f στο (k,k), είναι: $y-f(k)=f'(k)(x-k)\Leftrightarrow y=k$.

4.285. Είναι $g(x_0)=f(x_0)-x_0$. Είναι $g'(x_0)=f'(x_0)-1$. Η εφαπτομένη της C_f στο $x=x_0$ είναι η ευθεία ε_1: $y-f(x_0)=f'(x_0)(x-x_0)\Leftrightarrow y=xf'(x_0)+f(x_0)-x_0f'(x_0)$ και για $x=0$ είναι $y=f(x_0)-x_0f'(x_0)$. Η ε_1 τέμνει τον $y'y$ στο $A(0,f(x_0)-x_0f'(x_0))$.

Η εφαπτομένη της C_g στο $x=x_0$ είναι η ευθεία

ε_2: $y-g(x_0)=g'(x_0)(x-x_0)\Leftrightarrow y=xg'(x_0)+g(x_0)-x_0g'(x_0)$ και για $x=0$ είναι

$y=g(x_0)-x_0g(x_0)=f(x_0)-x_0-x_0(f'(x_0)-1)=f(x_0)-\cancel{x_0}-x_0f'(x_0)+\cancel{x_0}$.

Η ε_2 τέμνει τον $y'y$ στο $A(0,f(x_0)-x_0f'(x_0))$.

4.286. $g(x_0)=0\Leftrightarrow \dfrac{f(x_0)}{f'(x_0)}=0\Leftrightarrow f(x_0)=0$

$$g'(x_0)=\frac{(f'(x_0))^2-\cancelto{0}{f(x_0)}f''(x_0)}{(f'(x_0))^2}=\frac{(f'(x_0))^2}{(f'(x_0))^2}=1$$

Είναι $\lambda_\varepsilon=-1$ και $g'(x_0)\lambda_\varepsilon=-1$

4.287. **α)** Οι εξισώσεις των εφαπτόμενων της C_f στα σημεία M και M′ είναι:

ε_1: $y-f(x_0)=f'(x_0)(x-x_0)$ και ε_2: $y-f(-x_0)=f'(-x_0)(x+x_0)$.

Αν η f είναι άρτια ισχύει: $f(-x)=f(x)$ για κάθε $x\in[-\alpha,\alpha]$. Παραγωγίζοντας κατά μέλη, έχουμε: $(f(-x))'=f'(x)$ ή $-f'(-x)=f'(x)\Leftrightarrow f'(-x)=-f'(x)$. Η ε_2 γίνεται: $y-f(x_0)=-f'(x_0)(x+x_0)\Leftrightarrow y=-f'(x_0)x-f'(x_0)x_0+f(x_0)$. Για να βρούμε το σημείο τομής των $\varepsilon_1,\varepsilon_2$, αρκεί να λύσουμε το σύστημα των εξισώσεων τους. Είναι:

$$\begin{cases} y-f(x_0)=f'(x_0)(x-x_0) \\ y=-f'(x_0)x-f'(x_0)x_0+f(x_0) \end{cases}\Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} -f'(x_0)x-f'(x_0)x_0+f(x_0)-f(x_0)=f'(x_0)x-f'(x_0)x_0 \\ y=-f'(x_0)x-f'(x_0)x_0+f(x_0) \end{cases}\Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} -2f'(x_0)x=0 \\ y=-f'(x_0)x-f'(x_0)x_0+f(x_0) \end{cases}\Leftrightarrow \begin{cases} x=0 \\ y=-f'(x_0)x_0+f(x_0) \end{cases}$$

Οπότε το σημείο τομής των $\varepsilon_1,\varepsilon_2$ είναι το $(0,-f'(x_0)x_0+f(x_0))$, που ανήκει στον $y'y$.

β) Αν η f είναι περιττή ισχύει: $f(-x)=-f(x)$ για κάθε $x\in[-\alpha,\alpha]$, οπότε: $\left(f(-x)\right)'=-f'(x)$ ή $-f'(-x)=-f'(x)\Leftrightarrow f'(-x)=f'(x)$. Άρα $f'(-x_0)=f'(x_0)$ και οι $\varepsilon_1,\varepsilon_2$ είναι παράλληλες.

4.288. **α)** Για $x=1$ είναι $f(f(1))=1$ και για $x=f(1)$ είναι

$$f\left(\underbrace{f(f(1))}_{1}\right)=9f(1)-8\Leftrightarrow f(1)=9f(1)-8\Leftrightarrow f(1)=1$$

β) $\left(f(f(x))\right)'=(9x-8)'\Rightarrow f'(f(x))f'(x)=9$ και για $x=1$ είναι

$$f'(f(1))f'(1)=9\Leftrightarrow f'(1)f'(1)=9\Leftrightarrow (f'(1))^2=9\overset{f'(1)>0}{\Leftrightarrow} f'(1)=3$$

$$\varepsilon: y-f(1)=f'(1)(x-1)\Leftrightarrow y-1=3(x-1)\Leftrightarrow y=3x-2$$

4.289. $f'(x)=\lambda_\varepsilon=-1\Leftrightarrow 3x^2-12x+8=-1\Leftrightarrow x^2-4x+3=0\Leftrightarrow x=1$ ή $x=3$

$f(1)=3$, $f(3)=-3$. Οι εφαπτόμενες είναι:

$\varepsilon_1: y-f(1)=f'(1)(x-1)\Leftrightarrow y-3=-(x-1)\Leftrightarrow y=-x+4$ και

$\varepsilon_2: y-f(3)=f'(3)(x-3)\Leftrightarrow y+3=-(x-3)\Leftrightarrow y=-x$

$f(x)=-x\Leftrightarrow x^3-6x^2+8x=-x\Leftrightarrow x^3-6x^2+9x=0\Leftrightarrow x(x-3)^2=0\Leftrightarrow x=0$ ή $x=3$

Η $y=-x$ επανατέμνει τη C_f, στο σημείο με $x=0$.

4.290. Είναι $f'(x)=2x-3x^2$. Έστω $M(\mu, f(\mu))=(\mu,\ \mu^2-\mu^3)$ τυχαίο σημείο της C_f, τότε η εφαπτομένη στο M είναι: $\varepsilon: y-f(\mu)=f'(\mu)(x-\mu)\Leftrightarrow y-(\mu^2-\mu^3)=(2\mu-3\mu^2)(x-\mu)\Leftrightarrow$

$y=(2\mu-3\mu^2)x+2\mu^3-\mu^2$. Λύνουμε το σύστημα:

$$\left.\begin{array}{l} f(x)=x^2-x^3\\ y=(2\mu-3\mu^2)x+2\mu^3-\mu^2\end{array}\right\}\Leftrightarrow \begin{array}{l} f(x)=x^2-x^3\\ x^3-x^2+(2\mu-3\mu^2)x+2\mu^3-\mu^2=0\end{array}\Leftrightarrow$$

$$\left\{\begin{array}{l} f(x)=x^2-x^3\\ (x-\mu)^2(x-1+2\mu)=0\end{array}\right.\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{l} x=\mu\\ y=\mu^2-\mu^3\end{array}\right. \text{ ή } \left\{\begin{array}{l} x=1-2\mu\\ y=2\mu(1-2\mu)^2\end{array}\right.$$

Άρα, η ε έχει και άλλο κοινό σημείο με την C_f το $M'\left(1-2\mu,\ 2\mu(1-2\mu)^2\right)$.

4.291. $f'(x)=\varepsilon\varphi 45^\circ=1\Leftrightarrow 3x^2-2=1\Leftrightarrow x^2=1\Leftrightarrow x=\pm1$. Οι εφαπτομένες είναι:

$\varepsilon_1: y-f(1)=f'(1)(x-1)\Leftrightarrow y-3=x-1\Leftrightarrow y=x+2$ και

$\varepsilon_2: y-f(-1)=f'(-1)(x+1)\Leftrightarrow y-5=x+1\Leftrightarrow y=x+6$

4.292. Εστω $M(x_0,f(x_0))$ το σημείο επαφής της ζητούμενης εφαπτομένης.

Είναι: $f'(x)=(x^2-5x+5)'=2x-5$. Πρέπει: $f'(x_0)=\varepsilon\varphi 45^\circ=1$ ή $2x_0-5=1\Leftrightarrow x_0=3$

Τότε: $f(3)=-1$ και η ζητούμενη εφαπτομένη έχει εξίσωση:

$y-f(3)=f'(3)(x-3)\Leftrightarrow y+1=x-3\Leftrightarrow y=x-4$.

4.293. $f'(x)=\lambda_\varepsilon=\frac{6}{5}\Leftrightarrow 2\frac{\cancel{2}x}{\cancel{2}\sqrt{x^2+9}}=\frac{6}{5}\overset{x>0}{\Leftrightarrow}\frac{x^2}{x^2+9}=\frac{9}{25}\Leftrightarrow 25x^2=9x^2+81\Leftrightarrow 16x^2=81\Leftrightarrow x=\pm\frac{9}{4}$,

$f\left(\frac{9}{4}\right)=2\sqrt{\frac{81}{16}+9}=2\sqrt{\frac{225}{16}}=\frac{15}{2}=f\left(-\frac{9}{4}\right)$.

Η ζητούμενη εφαπτομένη έχει εξίσωση:

$y-f\left(\frac{9}{4}\right)=f'\left(\frac{9}{4}\right)\left(x-\frac{9}{4}\right)\Leftrightarrow y-\frac{15}{2}=\frac{6}{5}\left(x-\frac{9}{4}\right)\Leftrightarrow y=\frac{6}{5}x+\frac{24}{5}$

4.294. $f'(x)\lambda_\varepsilon=-1\Leftrightarrow\left(\frac{3}{x}-1\right)\left(-\frac{1}{2}\right)=-1\Leftrightarrow\frac{3}{x}-1=2\Leftrightarrow\frac{3}{x}=1\Leftrightarrow x=3$

$\varepsilon: y-f(1)=f'(1)(x-1)\Leftrightarrow y+1=2(x-1)\Leftrightarrow y=2x-3$

4.295. $f'(x)=0\Leftrightarrow 3x^2-12x+9=0\Leftrightarrow x=1$ ή $x=3$. $f(1)=-1$, $f(3)=-5$.

Τα ζητούμενα σημεία είναι $(1,-1)$ και $(3,-5)$.

4.296. $f'(x)=0\Leftrightarrow 2x\ln x+x=0\Leftrightarrow x(2\ln x+1)=0\Leftrightarrow x=0$ που απορρίπτεται

ή $2\ln x+1=0\Leftrightarrow \ln x=-\frac{1}{2}\Leftrightarrow x=e^{-\frac{1}{2}}=\frac{1}{\sqrt{e}}$

4.297. $f'(x)\lambda_\varepsilon=-1\Leftrightarrow\left(\frac{\alpha}{\alpha x-1}+\alpha\right)\left(-\frac{1}{\alpha}\right)=-1\Leftrightarrow\frac{\alpha}{\alpha x-1}+\cancel{\alpha}=\cancel{\alpha}\Leftrightarrow\frac{\alpha}{\alpha x-1}=0\Leftrightarrow\alpha=0$

που είναι αδύνατο.

4.298. $f'(x)=\lambda_\varepsilon\Leftrightarrow 2x-k=1\Leftrightarrow x=\frac{k+1}{2}$.

$f\left(\frac{k+1}{2}\right)=\left(\frac{k+1}{2}\right)^2-k\frac{k+1}{2}+3=\frac{k^2+\cancel{2k}+1-2k^2-\cancel{2k}+12}{4}=\frac{13-k^2}{4}$

Η εφαπτομένη είναι:

$y-f\left(\frac{k+1}{2}\right)=f'\left(\frac{k+1}{2}\right)\left(x-\frac{k+1}{2}\right)\Leftrightarrow y-\frac{13-k^2}{4}=x-\frac{k+1}{2}\Leftrightarrow y=x+\frac{11-k^2-2k}{4}$.

Επειδή η εφαπτομένη είναι η $x-y-6=0\Leftrightarrow y=x-6$, ισχύει ότι

$\frac{11-k^2-2k}{4}=-6\Leftrightarrow k^2+2k-35=0\Leftrightarrow k=5$ ή $k=-7$

Αν $k=5$ τότε $x=\frac{5+1}{2}=3$, $f(3)=-3$ και σημείο επαφής το $(3,-3)$,

ενώ για $k=-7$ είναι $x=\frac{-7+1}{2}=-3$, $f(-3)=-9$ και σημείο επαφής το $(-3,-9)$,

4.299. **α)** Εστω $M(x_0,f(x_0))$ σημείο της C_f. Είναι $f'(x)=-\frac{\lambda}{x^2}$ και η εφαπτομένη της C_f στο M

είναι: $\varepsilon: y-\frac{\lambda}{x_0}=-\frac{\lambda}{x_0^2}(x-x_0)\Leftrightarrow y=-\frac{\lambda}{x_0^2}x+\frac{2\lambda}{x_0}$.

Η ε τέμνει τους άξονες στα σημεία $A(2x_0,0)$ και $B\left(0,\dfrac{2\lambda}{x_0}\right)$.

Για το τρίγωνο ΟΑΒ, ισχύει: $E=\dfrac{1}{2}(OA)(OB)=\dfrac{1}{2}|2x_0|\left|\dfrac{2\lambda}{x_0}\right|=\dfrac{1}{2}\left|2x_0\dfrac{2\lambda}{x_0}\right|=2|\lambda|=$σταθερό.

β) Από το σύστημα των ε, C_f, προκύπτει: $x=x_0$ και $y=\dfrac{\lambda}{x_0}$, δηλαδή μοναδικό κοινό τους σημείο είναι το Μ.

4.300. $f'(x)=\dfrac{x^2-2x+3}{(x-1)^2}$. Εστω $M(x_0,f(x_0))$. Η εφαπτομένη της C_f στο Μ είναι η ευθεία

$\varepsilon: y-f(x_0)=f'(x_0)(x-x_0)$. Επειδή διέρχεται από το Α, ισχύει: $-\dfrac{3}{2}-f(x_0)=-x_0f'(x_0)\Leftrightarrow$

$-\dfrac{3}{2}-\dfrac{x_0^2-3}{x_0-1}=-x_0\dfrac{x_0^2-2x_0+3}{(x_0-1)^2}\Leftrightarrow ...\ 5x_0^2-18x_0+9=0\Leftrightarrow x=3$ ή $x=\dfrac{3}{5}$.

Άρα οι εφαπτόμενες έχουν εξισώσεις:

$y-f(3)=f'(3)(x-3)\Leftrightarrow ...\Leftrightarrow 3x-2y-3=0$ και

$y-f\left(\dfrac{3}{5}\right)=f'\left(\dfrac{3}{5}\right)\left(x-\dfrac{3}{5}\right)\Leftrightarrow ...\Leftrightarrow 27x-2y-3=0$

4.301. Εστω $M(x_0,f(x_0))$. Η εφαπτομένη της C_f στο Μ είναι η ευθεία

$\varepsilon: y-f(x_0)=f'(x_0)(x-x_0)\Leftrightarrow y=3x_0^2x-2x_0^3$. Επειδή διέρχεται από το $(0,-2)$, ισχύει:

$-2=-2x_0^3\Leftrightarrow x_0=1$. Η εφαπτομένη είναι η ευθεία ε: $y=3x-2$

Για $x=0$ είναι $y=-2$, δηλαδή $A(0,-2)$ και για $y=0$ είναι $x=\dfrac{2}{3}$, δηλαδή $B\left(\dfrac{2}{3},0\right)$.

Είναι $(AB)^2=(OA)^2+(OB)^2=4+\dfrac{4}{9}=\dfrac{40}{9}\Leftrightarrow (AB)=\dfrac{2\sqrt{10}}{3}$

4.302. Εστω $M(x_0,f(x_0))$. Η εφαπτομένη της C_f στο Μ είναι η ευθεία

$\varepsilon: y-f(x_0)=f'(x_0)(x-x_0)\Leftrightarrow y=2x_0x-x_0^2$.

Επειδή διέρχεται από το Ρ, είναι: $\beta=2x_0\alpha-x_0^2\Leftrightarrow x_0^2-2x_0\alpha+\beta=0\ (1)$.

$\Delta=4\alpha^2-4\beta=4(\alpha^2-\beta)>0$, οπότε η (1) έχει δύο ρίζες και η C_f δέχεται δύο εφαπτομένες που διέρχονται από το Ρ.

4.303. Είναι $f'(x)=2\alpha x+\beta$. Έστω $M(x_0,f(x_0))$ σημείο της C_f.

Η εφαπτομένη της C_f στο Μ έχει εξίσωση:

$\varepsilon: y-f(x_0)=f'(x_0)(x-x_0)\Leftrightarrow y=f'(x_0)x+f(x_0)-x_0f'(x_0)\Leftrightarrow$

$y=(2\alpha x_0+\beta)x+\alpha x_0^2+\beta x_0+\gamma-2\alpha x_0^2-\beta x_0\Leftrightarrow y=(2\alpha x_0+\beta)x-\alpha x_0^2+\gamma$.

Για να διέρχεται η ε από το σημείο Α, πρέπει:

$\lambda=(2\alpha x_0+\beta)\kappa-\alpha x_0^2+\gamma\Leftrightarrow \alpha x_0^2-2\alpha\kappa x_0+\lambda-\gamma-\kappa\beta=0\ (1)$.

Επειδή υπάρχουν δύο εφαπτομένες της C_f που διέρχονται από το Α, η (1) έχει δύο ρίζες, οπότε: $\Delta>0 \Leftrightarrow 4\alpha^2\kappa^2-4\alpha(\lambda-\gamma-\kappa\beta)>0 \Leftrightarrow \alpha^2\kappa^2-\alpha\lambda+\alpha\gamma+\alpha\kappa\beta>0$.

4.304. Εστω $K(x_0,f(x_0))$. Η εφαπτομένη της C_f στο Μ είναι η ευθεία

$\varepsilon: y-f(x_0)=f'(x_0)(x-x_0) \Leftrightarrow y=2\lambda x_0 x-\lambda x_0^2$.

Για να διέρχεται η ε από το Μ πρέπει $\beta=2\lambda x_0\alpha-\lambda x_0^2 \Leftrightarrow \lambda x_0^2-2\lambda x_0\alpha+\beta=0 \ (1)$.

Για να διέρχονται από το Μ δύο εφαπτομένες της C_f, πρέπει η (1) να έχει δύο ρίζες και αυτό συμβαίνει όταν $\Delta>0 \Leftrightarrow 4\lambda^2\alpha^2-4\lambda\beta>0 \Leftrightarrow \lambda\alpha^2>\beta$.

4.305. Εστω $M(x_0,f(x_0))$. Η εφαπτομένη της C_f στο Μ είναι η ευθεία $\varepsilon: y-f(x_0)=f'(x_0)(x-x_0)$.

Για να διέρχεται η ε από το Ο, πρέπει:

$$0-f(x_0)=f'(x_0)(0-x_0) \Leftrightarrow x_0^4-\lambda x_0+3=x_0(4x_0^3-\lambda) \Leftrightarrow$$

$$x_0^4-\cancel{\lambda x_0}+3=4x_0^4-\cancel{\lambda x_0} \Leftrightarrow x_0=\pm 1$$

Για να είναι οι εφαπτόμενες στα σημεία αυτά κάθετες, πρέπει:

$$f'(1)f'(-1)=-1 \Leftrightarrow (4-\lambda)(-4-\lambda)=-1 \Leftrightarrow \lambda^2-16=-1 \Leftrightarrow \lambda^2=15 \Leftrightarrow \lambda=\pm\sqrt{15}$$

4.306. Είναι $f'(x)=\left(\dfrac{\lambda}{125x^4}-1\right)'=-\dfrac{4\lambda}{125x^5}$. Έστω $M(x_0,f(x_0))$ σημείο της C_f.

Η εφαπτομένη της C_f στο Μ έχει εξίσωση $\varepsilon: y-f(x_0)=f'(x_0)(x-x_0)$.

Για να διέρχεται η ε από την αρχή των αξόνων, πρέπει: $-f(x_0)=-x_0 f'(x_0) \Leftrightarrow$

$$\frac{\lambda}{125x_0^4}-1=-x_0\frac{4\lambda}{125x_0^5} \Leftrightarrow \frac{\lambda}{125x_0^4}+\frac{4\lambda}{125x_0^4}=1 \Leftrightarrow \frac{5\lambda}{125x_0^4}=1 \Leftrightarrow x_0^4=\frac{\lambda}{25} \Leftrightarrow x_0=\pm\sqrt[4]{\frac{\lambda}{25}}.$$

Επομένως, υπάρχουν δύο σημεία της C_f στα οποία οι εφαπτόμενες διέρχονται από την αρχή των αξόνων. Για να είναι αυτές οι εφαπτόμενες κάθετες, πρέπει:

$$f'\left(\sqrt[4]{\frac{\lambda}{25}}\right)f'\left(-\sqrt[4]{\frac{\lambda}{25}}\right)=-1 \Leftrightarrow -\frac{-4\lambda}{125\left(\sqrt[4]{\frac{\lambda}{25}}\right)^5}\cdot\frac{-4\lambda}{125\left(-\sqrt[4]{\frac{\lambda}{25}}\right)^5}=-1 \Leftrightarrow \frac{16\lambda^2}{125^2\left(\sqrt[4]{\frac{\lambda}{25}}\right)^{10}}=1$$

$$\Leftrightarrow 16\lambda^2=125^2\left(\sqrt[4]{\frac{\lambda}{25}}\right)^8\cdot\left(\sqrt[4]{\frac{\lambda}{25}}\right)^2 \Leftrightarrow 16\lambda^2=\left(5^3\right)^2\cdot\left(\frac{\lambda}{25}\right)^2\cdot\frac{\sqrt{\lambda}}{\sqrt{25}} \Leftrightarrow 16\lambda^2=5^6\cdot\frac{\lambda^2}{5^4}\cdot\frac{\sqrt{\lambda}}{5} \Leftrightarrow$$

$$\sqrt{\lambda}=\frac{16}{5} \Leftrightarrow \lambda=\frac{256}{25}.$$

4.307. Η f είναι παραγωγίσιμη για $x\neq -1$ με $f'(x)=\left(\dfrac{x}{x+1}\right)'=\dfrac{1}{(x+1)^2}$.

Είναι $f(-2)=2$ και $f'(-2)=1$

Η εφαπτομένη της C_f στο $x_0=-2$ είναι η ευθεία:

$$\varepsilon: y-f(-2)=f'(-2)(x-2) \Leftrightarrow y-2=x+2 \Leftrightarrow y=x+4$$

Για τα κοινά σημεία των ε, C_g έχουμε: $\begin{cases} y = x^2+5x+8 \\ y = x+4 \end{cases} \Leftrightarrow$

$$\begin{cases} x^2+5x+8 = x+4 \\ y = x+4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2+4x+4 = 0 \\ y = x+4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x+2)^2 = 0 \\ y = x+4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -2 \\ y = 2 \end{cases}$$

Κοινό σημείο των ε, C_g το $A(-2,2)$. Είναι: $g'(x) = 2x+5$ και $g'(-2) = 1 = \lambda_\varepsilon$ άρα η ε εφάπτεται της C_g στο Α.

4.308. Επειδή το $A(x_0, y_0)$ είναι κοινό σημείο των f και g, τότε ισχύει $f(x_0) = g(x_0)$.

Για να δέχονται οι C_f, C_g κοινή εφαπτομένη στο Α, αρκεί να δείξουμε ότι $f'(x_0) = g'(x_0)$.

Στη σχέση $g(x) = f(x)h'(x) \Leftrightarrow h'(x) = \dfrac{g(x)}{f(x)}$ (1), αν θέσουμε $x = x_0$, είναι:

$h'(x_0) = \dfrac{g(x_0)}{f(x_0)} = \dfrac{f(x_0)}{f(x_0)} \Leftrightarrow h'(x_0) = 1$. Οπότε, η σχέση $\left[h(x)\right]^2 + \left[h'(x)\right]^2 = 1$ (2) για $x = x_0$ γίνεται: $\left[h(x_0)\right]^2 + \left[h'(x_0)\right]^2 = 1 \Leftrightarrow \left[h(x_0)\right]^2 + 1 = 1 \Leftrightarrow h(x_0) = 0$ (3).

Παραγωγίζουμε την (2) κατά μέλη και έχουμε: $2h(x)h'(x) + 2h'(x)h''(x) = 0$

και για $x = x_0$ είναι: $2h(x_0)h'(x_0) + 2h'(x_0)h''(x_0) = 0 \overset{(3)}{\Leftrightarrow} 2h'(x_0)h''(x_0) = 0$,

όμως $h'(x_0) = 1$, οπότε $2h''(x_0) = 0 \Leftrightarrow h''(x_0) = 0$.

Από την (1) έχουμε $h''(x) = \dfrac{g'(x)f(x) - f'(x)g(x)}{f^2(x)}$, οπότε:

$$h''(x_0) = 0 \Leftrightarrow \frac{g'(x_0)f(x_0) - f'(x_0)g(x_0)}{f^2(x_0)} = 0.$$

$g'(x_0)f(x_0) - f'(x_0)g(x_0) = 0$ και αφού $f(x_0) = g(x_0)$, τότε:

$g'(x_0)f(x_0) - f'(x_0)f(x_0) = 0 \Leftrightarrow f(x_0)\left[g'(x_0) - f'(x_0)\right] = 0$

και αφού $f(x_0) \neq 0$, τότε $g'(x_0) = f'(x_0)$.

4.309. $$f'(x) = \frac{1 + \dfrac{\cancel{2}x}{\cancel{2}\sqrt{x^2+1}}}{x + \sqrt{x^2+1}} = \frac{\cancel{x+\sqrt{x^2+1}}}{\cancel{\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)}\sqrt{x^2+1}} = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}} \neq 0,$$

άρα ο άξονας $x'x$ δεν εφάπτεται στη γραφική παράσταση της f.

4.310. Αρχικά, θα βρούμε το κοινό σημείο των C_f, C_g. Είναι: $f(x) = g(x) \Leftrightarrow$

$e^x \cdot \eta\mu x = \eta\mu x \Leftrightarrow \eta\mu x\left(e^x - 1\right) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \eta\mu x = 0 \\ e^x = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0, \ \left(x \in (-\pi, \pi)\right) \\ x = 0 \end{cases}$. Άρα $x = 0$.

Επειδή $f(0) = g(0) = 0$, κοινό σημείο των C_f, C_g είναι το $O(0,0)$.

Είναι: $f'(x) = e^x \cdot \eta\mu x + e^x \cdot \sigma\upsilon\nu x$ και $f'(0) = 1$. Επίσης, $g'(x) = \sigma\upsilon\nu x$ και $g'(0) = 1$.

Άρα η κοινή εφαπτομένη των C_f, C_g στο Ο έχει εξίσωση: $y - 0 = 1 \cdot (x - 0) \Leftrightarrow y = x$.

4.311. $f'(x)=\dfrac{\alpha+\beta}{(x+1)^2}$, $g'(x)=3x^2-2\alpha x-2$

$$\begin{cases} f(1)=g(1) \\ f'(1)=g'(1) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{\alpha-\beta}{2}=-\alpha+\beta-1 \\ \dfrac{\alpha+\beta}{4}=1-2\alpha \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3\alpha-3\beta=-2 \\ 9\alpha+\beta=4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha=\dfrac{1}{3} \\ \beta=1 \end{cases}$$

4.312. $f'(x)=\dfrac{x^2+4x+8}{(x+2)^2}$, $g'(x)=2x-4$.

Η εφαπτομένη της C_f στο σημείο $M(0,f(0))$ είναι η ευθεία $\varepsilon: y-f(0)=f'(0)x \Leftrightarrow y=2x-4$

Πρέπει $g'(x)=f'(0)=2 \Leftrightarrow 2x-4=2 \Leftrightarrow x=3$. Η εφαπτομένη της C_g στο 3, είναι η

$\varepsilon': y-g(3)=g'(3)(x-3) \Leftrightarrow y-\lambda+3=2x-6 \Leftrightarrow y=2x+\lambda-9$.

Για να εφάπτεται η ε της C_g, πρέπει οι ε,ε' να ταυτίζονται. Αυτό ισχύει όταν

$\lambda-9=-4 \Leftrightarrow \lambda=5$.

4.313. Εστω $\varepsilon: y=\lambda x+k$ η ευθεία. Επειδή τα σημεία $(0,f(0))$ και $(1,f(1))$ ανήκουν στην ε, είναι: $f(0)=k \Leftrightarrow k=-2$ και $f(1)=\lambda+k \Leftrightarrow \alpha+\beta-1=\lambda-2 \Leftrightarrow \alpha=\lambda-1-\beta$ (1)

$f'(0)=\lambda \Leftrightarrow \lambda=0$ και $f'(1)=\lambda=0 \Leftrightarrow 4+3\alpha+2\beta=0 \Leftrightarrow 3\alpha+2\beta=-4 \overset{(1)}{\Rightarrow}$

$3(-1-\beta)+2\beta=-4 \Leftrightarrow \beta=1$ και $\alpha=-2$

4.314. $f'(x)=2x-2$, $g'(x)=2x+4$

Η εφαπτομένη της C_f στο $A(x_1,f(x_1))$ είναι η ευθεία

$\varepsilon_1: y-f(x_1)=f'(x_1)(x-x_1) \Leftrightarrow y=(2x_1-2)x-x_1^2+2$

Η εφαπτομένη της C_g στο $B(x_2,f(x_2))$ είναι η ευθεία

$\varepsilon_2: y-g(x_2)=g'(x_2)(x-x_2) \Leftrightarrow y=(2x_2+4)x-x_2^2+6$

Για να δέχονται κοινή εφαπτομένη οι C_f, C_g πρέπει να υπάρχουν $x_1,x_2\in\mathbb{R}$ για τα οποία οι $\varepsilon_1,\varepsilon_2$ να ταυτίζονται. Αυτό συμβαίνει όταν: $\begin{cases} 2x_1-2=2x_2+4 \\ -x_1^2+2=-x_2^2+6 \end{cases} \Leftrightarrow$

$$\begin{cases} x_1=x_2+3 \\ -(x_2+3)^2+x_2^2-4=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1=x_2+3 \\ -\cancel{x_2^2}-6x_2-9+\cancel{x_2^2}-4=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1=-\dfrac{13}{6}+3=\dfrac{5}{6} \\ x_2=-\dfrac{13}{6} \end{cases}$$

Η κοινή εφαπτομένη είναι: $y=\left(2\dfrac{5}{6}-2\right)x-\dfrac{25}{36}+2 \Leftrightarrow 12x+36y+47=0$

4.315. Εστω $A(x_0,f(x_0))$ σημείο της C_f τότε: $f'(x)=2x+1$, $f'(x_0)=2x_0+1$, $f(x_0)=x_0^2+x_0$.

Η εφαπτόμενη της C_f στο σημείο A είναι η ευθεία $\varepsilon_1:\ y-f(x_0)=f'(x_0)(x-x_0) \Leftrightarrow$

$y=f'(x_0)x-x_0f'(x_0)+f(x_0) \Leftrightarrow y=(2x_0+1)x-x_0(2x_0+1)+(x_0^2+x_0) \Leftrightarrow y=(2x_0+1)x-x_0^2$

Εστω $B(x_1,g(x_1))$ σημείο της C_g, τότε: $g'(x)=2x-2$, $g'(x_1)=2x_1-2$, $g(x_1)=x_1^2-2x_1+3$

Η εφαπτόμενη της C_g στο σημείο B είναι η ευθεία $\varepsilon_2: y-g(x_1)=g'(x_1)(x-x_1) \Leftrightarrow$

$y=g'(x_1)x-x_1g'(x_1)+g(x_1) \Leftrightarrow y=(2x_1-2)x-x_1(2x_1-2)+x_1^2-2x_1+3 \Leftrightarrow$

$y=(2x_1-2)x-x_1^2+3$

Για να δέχονται οι C_f, C_g κοινή εφαπτόμενη πρέπει να υπάρχουν τιμές των x_0, x_1 ώστε οι ευθείες $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ να ταυτίζονται, δηλαδή:

$$\begin{cases} 2x_0+1=2x_1-2 \\ -x_0^2=-x_1^2+3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_0=x_1-\dfrac{3}{2} \\ \left(x_1-\dfrac{3}{2}\right)^2=x_1^2-3 \end{cases} \begin{cases} x_0=x_1-\dfrac{3}{2} \\ -3x_1+\dfrac{21}{4}=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_0=\dfrac{1}{4} \\ x_1=\dfrac{7}{4} \end{cases}$$

Οπότε οι C_f, C_g δέχονται κοινή εφαπτόμενη στα σημεία $A\left(\dfrac{1}{4}, f\left(\dfrac{1}{4}\right)\right)$ και $B\left(\dfrac{7}{4}, g\left(\dfrac{7}{4}\right)\right)$ την ευθεία: $y=\dfrac{3}{2}x-\dfrac{1}{16}$.

4.316. $f'(x)=g'(x) \Leftrightarrow -8x+\lambda=2x \Leftrightarrow x=\dfrac{\lambda}{10}$

$f\left(\dfrac{\lambda}{10}\right)=\dfrac{6\lambda^2-200}{100}$, $f'\left(\dfrac{\lambda}{10}\right)=\dfrac{2\lambda}{10}$, άρα η εφαπτομένη της C_f στο $x=\dfrac{\lambda}{10}$ είναι η ευθεία

$\varepsilon_1: y-f\left(\dfrac{\lambda}{10}\right)=f'\left(\dfrac{\lambda}{10}\right)\left(x-\dfrac{\lambda}{10}\right) \Leftrightarrow y=\dfrac{2\lambda}{10}x+\dfrac{4\lambda^2-200}{100}$

$g\left(\dfrac{\lambda}{10}\right)=\dfrac{\lambda^2+100\lambda-700}{100}$, $g'\left(\dfrac{\lambda}{10}\right)=\dfrac{2\lambda}{10}$, άρα η εφαπτομένη της C_g στο $x=\dfrac{\lambda}{10}$ είναι η ευθεία $\varepsilon_2: y-g\left(\dfrac{\lambda}{10}\right)=g'\left(\dfrac{\lambda}{10}\right)\left(x-\dfrac{\lambda}{10}\right) \Leftrightarrow y=\dfrac{2\lambda}{10}x+\dfrac{-\lambda^2+100\lambda-700}{100}$

Για να δέχονται οι C_f, C_g κοινή εφαπτομένη πρέπει να υπάρχουν τιμές του λ για τις οποίες οι $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ να ταυτίζονται. Αυτό συμβαίνει όταν

$$\frac{4\lambda^2-200}{100}=\frac{-\lambda^2+100\lambda-700}{100} \Leftrightarrow \lambda^2-20\lambda+100=0 \Leftrightarrow (\lambda-10)^2=0 \Leftrightarrow \lambda=10$$

Τότε η κοινή εφαπτομένη είναι: $y=\dfrac{20}{10}x+\dfrac{400-200}{100} \Leftrightarrow y=2x+2$

4.317. Εστω $A(x_0,f(x_0))$ σημείο της C_f τότε: $f'(x)=2x-2$, $f'(x_0)=2x_0-2$, $f(x_0)=x_0^2-2x_0$.

Η εφαπτόμενη της C_f στο σημείο A είναι η ευθεία ε_1: $y-f(x_0)=f'(x_0)(x-x_0) \Leftrightarrow$

$y-(x_0^2-2x_0)=(2x_0-2)(x-x_0) \Leftrightarrow y=(2x_0-2)x-x_0^2$.

Εστω $B(x_1,g(x_1))$ σημείο της C_g, τότε: $g'(x)=2x-4$, $g'(x_1)=2x_1-4$, $g(x_1)=x_1^2-4x_1+\lambda$

Η εφαπτόμενη της C_g στο σημείο B είναι η ευθεία $\varepsilon_2: y-g(x_1)=g'(x_1)(x-x_1) \Leftrightarrow$

$y=g'(x_1)x-x_1g'(x_1)+g(x_1) \Leftrightarrow y=(2x_1-4)x-x_1(2x_1-4)+x_1^2-4x_1-\lambda \Leftrightarrow$

$y=(2x_1-4)x-x_1^2-\lambda$.

Επειδή η ε είναι κοινή εφαπτομένη των C_f, C_g, υπάρχουν τιμές των x_0, x_1, k, λ για τις οποίες οι εξισώσεις των $\varepsilon, \varepsilon_1, \varepsilon_2$ ταυτίζονται. Άρα

$$\begin{cases} 2x_0 - 2 = 2x_1 - 4 = k \\ -x_0^2 = -x_1^2 - \lambda = k - 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_0 = \frac{k}{2} + 1 \\ x_1 = \frac{k}{2} + 2 \\ x_0^2 = -k + 1 \\ x_1^2 + \lambda = -k + 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_0 = \frac{k}{2} + 1 \\ x_1 = \frac{k}{2} + 2 \\ \left(\frac{k}{2} + 1\right)^2 = -k + 1 \\ \left(\frac{k}{2} + 2\right)^2 + \lambda = -k + 1 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} x_0 = \frac{k}{2} + 1 \\ x_1 = \frac{k}{2} + 2 \\ k^2 + 8k = 0 \\ \lambda = -\frac{k^2}{4} - 2k \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_0 = \frac{k}{2} + 1 \\ x_1 = \frac{k}{2} + 2 \\ k(k+8) = 0 \\ \lambda = -\frac{k^2}{4} - 2k \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_0 = \frac{k}{2} + 1 \\ x_1 = \frac{k}{2} + 2 \\ k = 0 \text{ ή } k = -8 \\ \lambda = -\frac{k^2}{4} - 2k \end{cases}$$

Αν $k = 0$, τότε $\lambda = 0$, $x_0 = 1$ και $x_1 = 2$, ενώ αν $k = -8$, τότε $\lambda = -32$, $x_0 = -3$ και $x_1 = -2$.

4.318. Αρκεί να υπάρχει $x_0 \neq 0 : f(x_0) = g(x_0)$ και $f'(x_0) = g'(x_0)$.

Είναι $f'(x) = x$ και $g'(x) = \dfrac{x^2 + 1}{2x^2}$.

$f'(x_0) = g'(x_0) \Leftrightarrow x_0 = \dfrac{x_0^2 + 1}{2x_0^2} \Leftrightarrow 2x_0^3 - x_0^2 - 1 = 0 \Leftrightarrow x_0 = 1$ και $f(1) = \dfrac{1}{2} = g(1)$.

Επομένως, οι C_f, C_g, εφάπτονται στο σημείο $\left(1, \dfrac{1}{2}\right)$.

Αρκεί να υπάρχει $x_1 \neq 0 : f'(x_1) g'(x_1) = -1 \Leftrightarrow x_1 \dfrac{x_1^2 + 1}{2x_1^2} = -1 \Leftrightarrow x_1 = -1.$

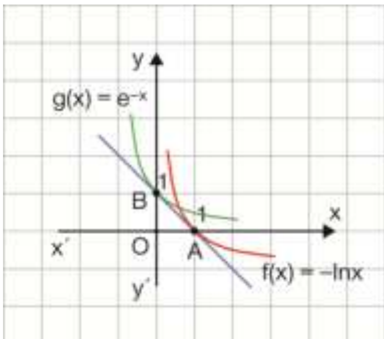
$f(-1) = \dfrac{1}{2} = g(-1)$. Άρα, οι εφαπτομένες των C_f, C_g στο $\left(-1, \dfrac{1}{2}\right)$ είναι κάθετες.

4.319. $f(2) = g(2) = 0$

$$f'(x) = \frac{(g'(x))^2 - g(x) g''(x)}{(g'(x))^2}, \quad f'(2) = \frac{(g'(2))^2 - \cancel{g(2)}^{\,0} g''(2)}{(g'(2))^2} = \frac{(g'(2))^2}{(g'(2))^2} = 1$$

$\varepsilon : y - f(2) = f'(2)(x - 2) \Leftrightarrow y = x - 2$

4.320. Είναι $f(x) = 0 \Leftrightarrow -\ln x = 0 \Leftrightarrow \ln x = 0 \Leftrightarrow x = 1$ οπότε η C_f τέμνει τον $x'x$ στο σημείο $A(1,0)$. Επίσης, $g(0) = e^o = 1$, άρα η C_g τέμνει τον $y'y$ στο σημείο $B(0,1)$. Οπότε $\lambda_{AB} = -1$ και η εξίσωση της ευθείας: $AB : y - 0 = -1(x - 1) \Leftrightarrow AB : y = -x + 1$.



Επίσης, $f'(x)=-\frac{1}{x}$ και $g'(x)=-e^{-x}$. Οπότε, η εφαπτομένη της C_f στο $A(0,1)$ είναι

$y-f(1)=f'(1)(x-1)\Leftrightarrow$

$y-0=-1(x-1)\Leftrightarrow y=-x+1$, που είναι η ευθεία AB.

Και η εφαπτομένη της C_g στο $B(0,1)$ είναι:

$y-g(0)=g'(0)(x-0)\Leftrightarrow y-1=-1(x-0)\Leftrightarrow y=-x+1$.

Άρα η ευθεία $AB: y=-x+1$ είναι κοινή εφαπτομένη των C_f, C_g.

4.321. Είναι $f(0)=-1$, $f'(x)=\frac{x^2+4x+2}{(x+2)^2}$ και $f'(0)=\frac{1}{2}$.

Η εφαπτομένη της C_f στο M έχει εξίσωση: $\varepsilon: y-f(0)=f'(0)(x-0)\Leftrightarrow y=\frac{1}{2}x-1$.

Για να εφάπτεται η ε της C_g, πρέπει να υπάρχει σημείο $A(x_1,g(x_1))$, τέτοιο ώστε

$g'(x_1)=\lambda_\varepsilon=\frac{1}{2}$. Είναι $g'(x)=2x-1$ και $g'(x_1)=\frac{1}{2}\Leftrightarrow 2x_1-1=\frac{1}{2}\Leftrightarrow x_1=\frac{3}{4}$.

Άρα, $A\left(\frac{3}{4},g\left(\frac{3}{4}\right)\right)$. Επειδή το σημείο A ανήκει στην ε, ισχύει $g\left(\frac{3}{4}\right)=\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}-1=-\frac{5}{8}$.

Όμως: $g\left(\frac{3}{4}\right)=\left(\frac{3}{4}\right)^2-\frac{3}{4}+\lambda=\frac{9}{16}-\frac{3}{4}+\lambda=\frac{-3}{16}+\lambda$. Άρα, $-\frac{3}{16}+\lambda=-\frac{5}{8}\Leftrightarrow\lambda=\frac{3}{16}-\frac{5}{8}=-\frac{7}{16}$

4.322. Εστω $M(x_0,f(x_0))$. Η εφαπτομένη της C_f στο M είναι η:

$\varepsilon_1: y-f(x_0)=f'(x_0)(x-x_0)\Leftrightarrow y=f'(x_0)x+f(x_0)-x_0f'(x_0)$, η οποία τέμνει τον $y'y$ στο σημείο $A(0,f(x_0)-x_0f'(x_0))$. Είναι $g(x)=f(x)-x$ και $g'(x)=f'(x)-1$.

Εστω $N(x_0,g(x_0))$. Η εφαπτομένη της C_g στο N, είναι η:

$\varepsilon_2: y-g(x_0)=g'(x_0)(x-x_0)\Leftrightarrow y=g'(x_0)x+g(x_0)-x_0g'(x_0)\Leftrightarrow$

$y=(f'(x_0)-1)x+f(x_0)-x_0-x_0(f'(x_0)-1)\Leftrightarrow y=(f'(x_0)-1)x+f(x_0)-x_0f'(x_0)$.

Η ε_2 διέρχεται από το A.

4.323. **α)** Αρχικά θα προσπαθήσουμε να βρούμε τον τύπο της $f(x)$.

Παραγωγίζουμε τη σχέση $f(x)=x-e^{3x}-2+f'(x)$ (1) και έχουμε:

$f'(x)=1-3e^{3x}+f''(x)\Leftrightarrow f''(x)=f'(x)+3e^{3x}-1$ (2).

Η σχέση $f(x)=x+\frac{1}{3}f''(x)$ με βάση την (2) γίνεται: $f(x)=x+\frac{1}{3}\left[f'(x)+3e^{3x}-1\right]\Leftrightarrow$

$3f(x)=3x+f'(x)+3e^{3x}-1\Leftrightarrow f'(x)=3f(x)-3x-3e^{3x}+1$ (3).

Άρα η (1) με βάση την (3) γίνεται: $f(x)=x-e^{3x}-2+3f(x)-3x-3e^{3x}+1\Leftrightarrow$

$-2f(x)=-2x-4e^{3x}-1\Leftrightarrow f(x)=x+2e^{3x}+\frac{1}{2}$.

Άρα, $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(x+2e^{3x}+\frac{1}{2}\right)=+\infty$, γιατί $\lim\limits_{x\to+\infty}e^{3x}=+\infty$.

β) Είναι $f(0)=0+2e^0+\frac{1}{2}=\frac{5}{2}$ και $f'(x)=1+6\cdot e^{3x}$, άρα $f'(0)=1+6\cdot e^0=7$.

Άρα, η εξίσωση της εφαπτομένης της C_f στο $x_0=0$ είναι:

$$y-f(0)=f'(0)(x-0)\Leftrightarrow y-\frac{5}{2}=7x\Leftrightarrow y=7x+\frac{5}{2}.$$

γ) Επειδή η εξίσωση $f'(x)=0\Leftrightarrow 1+6\cdot e^{3x}=0\Leftrightarrow e^{3x}=-\frac{1}{6}$ είναι αδύνατη, τότε δεν υπάρχει σημείο της C_f που να δέχεται οριζόντια εφαπτομένη.

4.324. **α)** Είναι $f'(x)=\dfrac{\frac{1}{\kappa x}\kappa x-\ln(\kappa x)}{x^2}=\dfrac{1-\ln(\kappa x)}{x^2}$, οπότε η εφαπτομένη στο σημείο $A(\lambda,f(\lambda))$, με $\lambda>0$, αφού πρέπει να ανήκει στο πεδίο ορισμού της f, είναι:

$$y-f(\lambda)=f'(\lambda)(x-\lambda)\Leftrightarrow y-\frac{\ln(\kappa\lambda)}{\lambda}=\frac{1-\ln(\kappa\lambda)}{\lambda^2}(x-\lambda)\Leftrightarrow$$

$$\lambda^2y-(1-\ln\lambda-\ln\kappa)x-\lambda(2\ln\kappa+2\ln\lambda-1)=0\ (1).$$

β) Η εξίσωση (1) γίνεται: $(2\lambda-x)\ln\kappa+(1-\ln\lambda)x-\lambda^2y+\lambda(2\lambda-1)=0$.

Επειδή αληθεύει για κάθε $\kappa>0$, είναι:

$$\begin{cases}2\lambda-x=0\\(1-\ln\lambda)x-\lambda^2y+\lambda(2\lambda-1)=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=2\lambda\\(1-\ln\lambda)2\lambda-\lambda^2y+\lambda(2\lambda-1)=0\end{cases}\Leftrightarrow$$

$$\left.\begin{matrix}x=2\lambda\\2-2\ln\lambda-1+2\lambda-\lambda y=0\end{matrix}\right\}\Leftrightarrow\overset{\lambda>0}{\Leftrightarrow}\begin{cases}x=2\lambda\\y=\dfrac{2\lambda-2\ln\lambda+1}{\lambda}\end{cases}\cdot$$

Οπότε, η εφαπτομένη διέρχεται από το σταθερό σημείο $M\left(2\lambda,\dfrac{2\lambda-2\ln\lambda+1}{\lambda}\right)$.

4.325. Είναι $f'(x_0)=\varepsilon\varphi 45^\circ=1$, $g'(x_0)=\varepsilon\varphi 18^\circ=\alpha\neq 0$ και

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(x_0)=\varepsilon\varphi 72^\circ=\sigma\varphi\left(90^\circ-18^\circ\right)=\ \sigma\varphi 18^\circ=\frac{1}{\varepsilon\varphi 18^\circ}=\frac{1}{\alpha}.$$

Είναι $\left(\dfrac{f}{g}\right)'(x_0)=\dfrac{f'(x_0)g(x_0)-f(x_0)g'(x_0)}{g^2(x_0)}$ και με βάση τα προηγούμενα:

$$\frac{1}{\alpha}=\frac{1\cdot g(x_0)-f(x_0)\alpha}{g^2(x_0)}\Leftrightarrow g^2(x_0)=\alpha g(x_0)-\alpha^2f(x_0)\Leftrightarrow g^2(x_0)-\alpha g(x_0)+\alpha^2f(x_0)=0.$$

Επειδή $g(x_0)\in\mathbb{R}$ και την τελευταία σχέση αν τη θεωρήσουμε τριώνυμο ως προς $g(x_0)$, πρέπει $\Delta\geq 0$, είναι: $\alpha^2-4\alpha^2f(x_0)\geq 0\Leftrightarrow\alpha^2(1-4f(x_0))\geq 0\Leftrightarrow 1-4f(x_0)\geq 0\Leftrightarrow f(x_0)\leq\frac{1}{4}$.

4.326. Εστω $f(x)=\alpha_\nu x^\nu+\alpha_{\nu-1}x^{\nu-1}+...+\alpha_1x+\alpha_0$.

Αν $\nu\geq 3$, τότε: $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x^2+x+3}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\alpha_\nu x^\nu}{x^2}=\lim\limits_{x\to+\infty}\alpha_\nu x^{\nu-2}$, το οποίο είναι το $+\infty$ ή $-\infty$ (άτοπο).

Αν $\nu<2$, τότε $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x^2+x+3}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\alpha_\nu}{x^2}=0$ ή $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\alpha_\nu}{x}=0$.
Άρα, πρέπει η $f(x)$ να είναι 2ου βαθμού.
Εστω $f(x)=\alpha x^2+\beta x+\gamma$, οπότε $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x^2+x+3}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\alpha x^2}{x^2}=\alpha$. Άρα, $\alpha=4$.
Επίσης, η C_f διέρχεται από το σημείο $M(-1,4)$, οπότε: $f(-1)=4\Leftrightarrow \alpha-\beta+\gamma=4\Leftrightarrow$
$4-\beta+\gamma=4\Leftrightarrow -\beta+\gamma=0$ (1). Επίσης $\lambda_\delta=-\dfrac{1}{2}$ και επειδή η εφαπτομένη είναι κάθετη στην λ_δ, τότε: $\lambda_{\varepsilon\varphi}\cdot\lambda_\delta=-1\Leftrightarrow\lambda_{\varepsilon\varphi}\cdot\left(-\dfrac{1}{2}\right)=-1\Leftrightarrow\lambda_{\varepsilon\varphi}=2$. Άρα, $f'(-1)=2$. Είναι $f'(x)=2\alpha x+\beta$, οπότε $-2\alpha+\beta=2\Leftrightarrow -8+\beta=2\Leftrightarrow\beta=10$ και $(1)\Leftrightarrow\gamma=10$. Άρα $f(x)=4x^2+10x+10$.

4.327. **α)** Για $x=0$ είναι $f(1)=3f(1)-4\Leftrightarrow f(1)=2$

$$\left(f\left(x+e^x\right)\right)'=\left(3f(x+1)+3x-4\right)'\Leftrightarrow f'\left(x+e^x\right)\left(1+e^x\right)=3f'(x+1)+3$$

Για $x=0$ είναι $2f'(1)=3f'(1)+3\Leftrightarrow f'(1)=-3$. $\varepsilon: y-f(1)=f'(1)(x-1)\Leftrightarrow y=-3x+5$

β) $$\lim_{x\to1}\frac{\left(x^{10}+2\right)f(x)-6}{x-1}=\lim_{x\to1}\frac{\left(x^{10}+2\right)f(x)-2\left(x^{10}+2\right)+2\left(x^{10}+2\right)-6}{x-1}=$$

$$\lim_{x\to1}\left[\left(x^{10}+2\right)\frac{f(x)-2}{x-1}+2\frac{x^{10}-1}{x-1}\right]=\lim_{x\to1}\left[\left(x^{10}+2\right)\frac{f(x)-2}{x-1}+2\frac{\cancel{(x-1)}\left(x^9+x^8+\ldots+1\right)}{\cancel{x-1}}\right]=$$

$$2f'(1)+2\cdot10=14$$

4.328. **α)** Η f είναι συνεχής στο $(0,+\infty)$ ως απόλυτη τιμή συνεχούς συνάρτησης.

β) Για κάθε $x\in(0,1)$ είναι $f'(x)=(-\ln x)'=-\dfrac{1}{x}$ και για κάθε $x>1$ είναι $f'(x)=(\ln x)'=\dfrac{1}{x}$.

Στο $x=1$ είναι:

Εστω $g(x)=\ln x$, $x>0$. Είναι $g'(x)=\dfrac{1}{x}$ και $g'(1)=1\Leftrightarrow\lim\limits_{x\to1^-}\dfrac{\ln x}{x-1}=\lim\limits_{x\to1^+}\dfrac{\ln x}{x-1}=1$

$\lim\limits_{x\to1^-}\dfrac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim\limits_{x\to1^-}\dfrac{-\ln x}{x-1}=-1$ και $\lim\limits_{x\to1^+}\dfrac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim\limits_{x\to1^-}\dfrac{\ln x}{x-1}=1$, άρα η f δεν είναι παραγωγίσιμη στο $x=1$.

γ) Εστω $A\left(x_0,f(x_0)\right)$. Αν $x_0>1$, τότε ε: $\varepsilon_1: y-f(x_0)=f'(x_0)(x-x_0)\Leftrightarrow$

$$0=f(x_0)-x_0f'(x_0)\Leftrightarrow \ln x_0-x_0\frac{1}{x_0}=0\Leftrightarrow x_0=e,\ \text{άρα } A(e,1).$$

Όμοια για $x_0\in(0,1)$ προκύπτει $x_0=e$ που είναι αδύνατο.

4.329. **α)** Εστω ότι η $\varphi(x)$ δεν είναι σταθερή συνάρτηση. Τότε, θα υπάρχουν $x_1,x_2\in[2,4]$ με $x_1<x_2$ τέτοιοι ώστε $\varphi(x_1)\neq\varphi(x_2)$. Έστω $\varphi(x_1)<\varphi(x_2)$. Σύμφωνα με το θεώρημα ενδιαμέσων τιμών, αφού η $\varphi(x)$ είναι συνεχής, θα είναι: $\left[\varphi(x_1),\varphi(x_2)\right]\subseteq\varphi([2,4])\subseteq\mathbb{Q}$.

Αυτό όμως είναι άτοπο, γιατί μεταξύ των $\varphi(x_1),\varphi(x_2)$ υπάρχουν άπειροι ρητοί και άρρητοι αριθμοί. Άρα, τελικά η $\varphi(x)$ είναι σταθερή και επειδή $\varphi(3)=1$ θα είναι $\varphi(x)=1$, για κάθε $x\in[2,4]$. Οπότε $g(x)=(x^4+4)f(x)-x \ (1)$.

β) Επειδή η f είναι άρτια για κάθε $x\in\mathbb{R}$ θα ισχύει $f(-x)=f(x)$, παραγωγίζοντας

$f'(-x)(-x)'=f'(x)\Leftrightarrow -f'(-x)=f'(x)$ και $x=0$ έχουμε $-f'(0)=f'(0)\Leftrightarrow f'(0)=0$.

Παραγωγίζοντας τη σχέση (1), έχουμε $g'(x)=4x^3f(x)+(x^4+4)f'(x)-1$.

Για $x=0$ έχουμε $g'(0)=4\cdot 0^3\cdot f(0)+(0^4+4)f'(0)-1=-1$. Άρα, η εφαπτομένη στο 0, έχει συντελεστή διεύθυνσης -1 και είναι κάθετη στη $\delta: x-y+4=0$, που έχει συντελεστή διεύθυνσης 1.

4.330. **α)** $\dfrac{f(x)-\sqrt{x}}{x-1}=g(x)\Leftrightarrow f(x)=g(x)(x-1)+\sqrt{x}$, $x\geq 0$, $x\neq 1$

$f(1)=\lim\limits_{x\to 1}f(x)=\lim\limits_{x\to 1}\left(g(x)(x-1)+\sqrt{x}\right)=1$

$\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{g(x)(x-1)+\sqrt{x}-1}{x-1}=\lim\limits_{x\to 1}\left(g(x)+\dfrac{1}{\sqrt{x}+1}\right)=3$, άρα $f'(1)=3$.

β) $\varepsilon: y-f(1)=f'(1)(x-1)\Leftrightarrow y=3x-2$

γ) Για $x=1$ στη σχέση $f(x)=f(x+3)$ είναι $f(4)=f(1)=1$.

$\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{f(x+3)-1}{x-1}\overset{x+3=u}{\underset{u\to 4}{=}}\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{f(u)-1}{u-4}\Leftrightarrow f'(4)=f'(1)=3$

δ) Εστω $h(x)=f(x+3)+2xf'(1)f(x)-20=f(x)+6xf(x)-20$

$h(1)=f(1)+6f(1)-20=-13<0$, $h(4)=f(4)+24f(4)-20=5>0$, και Θ. Bolzano...

ε) Πρέπει $g'(x)=f'(1)=3\Leftrightarrow 2x-1=3\Leftrightarrow x=2$, $g(2)=2+\lambda$ και η εφαπτομένη της C_g στο $x=2$ είναι: ε_1: $y-g(2)=g'(2)(x-2)\Leftrightarrow y=3x-4+\lambda$. Πρέπει οι ευθείες $\varepsilon,\varepsilon_1$ να ταυτίζονται και αυτό συμβαίνει όταν $-4+\lambda=-2\Leftrightarrow\lambda=2$.

4.331. **α)** Επειδή $f(x)g(x)=1$, είναι $g(x)\neq 0$, άρα $f(x)=\dfrac{1}{g(x)}$. Επειδή η g είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ και η f είναι παραγωγίσιμη με $f'(x)=-\dfrac{g'(x)}{g^2(x)}$.

β) i. $f'(k)=-\dfrac{g'(k)}{g^2(k)}=-\dfrac{-g(k)}{g^2(k)}=\dfrac{1}{g(k)}$, άρα $f'(k)g'(k)=\dfrac{1}{g(k)}(-g(k))=-1$

ii. Η εφαπτομένη της C_f στο $A(k,f(k))$, είναι $\varepsilon_1: y-f(k)=f'(k)(x-k)$ και για $y=0$ προκύπτει: $x=\dfrac{kf'(k)-f(k)}{f'(k)}$, άρα $M\left(\dfrac{kf'(k)-f(k)}{f'(k)},0\right)$.

Η εφαπτομένη της C_g στο $B(k,g(k))$, είναι $y-g(k)=g'(k)(x-k)$ και για $y=0$

προκύπτει: $x=\dfrac{kg'(k)-g(k)}{g'(k)}$, άρα $N\left(\dfrac{kg'(k)-g(k)}{g'(k)},0\right)$

$$(MN)=\left|\frac{kf'(k)-f(k)}{f'(k)}-\frac{kg'(k)-g(k)}{g'(k)}\right|=\left|k-\frac{f(k)}{f'(k)}-k+\frac{g(k)}{g'(k)}\right|=\left|\frac{\frac{1}{g(k)}}{-\frac{1}{g(k)}}+\frac{g(k)}{-g(k)}\right|=2$$

4.332. α) Για $x\in(-1,3)\cup(3,+\infty)$ είναι

$$g(x)=\frac{(x-3)f(x)+\eta\mu(x^2-9)}{\sqrt{x+1}-2}\Leftrightarrow f(x)=\frac{g(x)\left(\sqrt{x+1}-2\right)-\eta\mu(x^2-9)}{x-3}\text{ και}$$

$$\lim_{x\to3}f(x)=\lim_{x\to3}\left(\frac{g(x)\,\cancel{(x-3)}}{\left(\sqrt{x+1}+2\right)\cancel{(x-3)}}-(x+3)\frac{\eta\mu(x-3)(x+3)}{(x-3)(x+3)}\right)=-1-6=-7.$$

Είναι $\lim\limits_{x\to3}\dfrac{\eta\mu(x-3)(x+3)}{(x-3)(x+3)}=\lim\limits_{u\to0}\dfrac{\eta\mu u}{u}=1$

Επειδή η f είναι συνεχής είναι και $f(3)=-7$.

β) Επειδή η f είναι συνεχής και $f(x)\neq0$, η f διατηρεί σταθερό πρόσημο. Επειδή $f(3)=-7$ είναι $f(x)<0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

Εστω $h(x)=(x-3)f(x)+(x-1)f(x)-2(x-3)(x-1)$, $x\in[1,3]$. Είναι $h(1)=-2f(1)>0$, $h(3)=2f(3)=-14<0$, δηλαδή $h(1)h(3)<0$ και επειδή η h είναι συνεχής στο $[1,3]$, από το θ.Bolzano υπάρχει $\xi\in(1,3)$ τέτοιο, ώστε $h(\xi)=0$.

γ) Είναι $f^2(1)+3f(1)-4=0\Leftrightarrow f(1)=-4$ ή $f(1)=1$ που απορρίπτεται.

δ) $\left(f^2(x)+3f(x^2)\right)'=(4)'\Leftrightarrow 2f(x)f'(x)+6xf'(x^2)=0$ και για $x=1$ είναι $f'(1)=0$ και η εφαπτομένη είναι η $y=-4$.

4.333. α) $y=x^2-2kx+2k+3\Leftrightarrow 2k(1-x)+x^2-y+3=0$

Για να αληθεύει για κάθε τιμή του k, πρέπει: $\begin{cases}1-x=0\\x^2-y+3=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=1\\y=4\end{cases}$.

Άρα σταθερό σημείο το $A(1,4)$.

β) Εστω $M(x_0,f(x_0))$ με $f(x)=x^2-2kx+2k+3$.

Πρέπει $f'(x_0)=0\Leftrightarrow 2x_0-2k=0\Leftrightarrow x_0=k$.

Πρέπει και $f(x_0)=x_0^2-2kx_0+2k+3=0\Leftrightarrow k^2-2k^2+2k+3=0\Leftrightarrow k=3$ ή $k=-1$

4.334. α) $f(x-2)\le x^2-3x+2$. Θέτουμε $x-2=u\Leftrightarrow x=u+2$, οπότε:

$f(u)\le(u+2)^2-3(u+2)+2\Leftrightarrow f(u)\le u^2+u$, άρα και $f(x)\le x^2+x$, $x\in\mathbb{R}$ (1)

$x^2-3x+2\le f(x-3)+2x-4\Leftrightarrow f(x-3)\ge x^2-5x+6$. Θέτουμε $x-3=y\Leftrightarrow x=y+3$,

οπότε: $f(y)\ge(y+3)^2-5(y+3)+6\Leftrightarrow f(y)\ge y^2+y$, άρα και $f(x)\ge x^2+x$, $x\in\mathbb{R}$ (2)

Από $(1),(2) \Rightarrow f(x)=x^2+x,\ x\in\mathbb{R}$

β) $\varepsilon: y+\frac{1}{2}=\lambda x \Leftrightarrow y=\lambda x-\frac{1}{2}$ Για τα κοινά σημεία με τη C_f, έχουμε:

$f(x)=\lambda x-\frac{1}{2} \Leftrightarrow x^2+x=\lambda x-\frac{1}{2} \Leftrightarrow 2x^2+2(1-\lambda)x-\lambda=0\ \ (3)$. Είναι $f'(x)=2x+1$.

$f'(x_A)f'(x_B)=-1 \Leftrightarrow (2x_A+1)(2x_B+1)=-1 \Leftrightarrow 4x_Ax_B+2(x_A+x_B)+2=0$

Όμως από τη (3) έχουμε: $x_A+x_B=\lambda-1$ και $x_Ax_B=-\frac{\lambda}{2}$, άρα

$4x_Ax_B+2(x_A+x_B)+2=4\left(-\frac{\lambda}{2}\right)+2(\lambda-1)+2=0$.

Επειδή οι εφαπτόμενες στα A,B διέρχονται από το $M\left(0,-\frac{1}{2}\right)$, τέμνονται στην $y=-\frac{1}{2}$.

4.335. **α)** Για $x=y=0$ είναι $f(0)=f^2(0) \Leftrightarrow f(0)=0$ που απορρίπτεται ή $f(0)=1$.

β) Για $y=x$ έχουμε: $f(0)=f(x)f(x)+\eta\mu^2x \Leftrightarrow 1-\eta\mu^2x=f^2(x) \Leftrightarrow f^2(x)=\sigma\upsilon\nu^2x$

γ) Για $x=0$ είναι: $f(-y)=f(0)f(y) \Leftrightarrow f(-y)=f(y),\ y\in\mathbb{R}$, άρα η f είναι άρτια.

δ) Για $y=-x$ έχουμε: $f(2x)=f(x)f(-x)+\eta\mu x\eta\mu(-x) \Leftrightarrow f(2x)=f(x)f(x)-\eta\mu^2x \Leftrightarrow$ $f(2x)=f^2(x)-\eta\mu^2x$.

ε) Επειδή $f^2(x)=\sigma\upsilon\nu^2x\neq 0$ για κάθε $x\in\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$ είναι $f(x)\neq 0$ και επειδή η f είναι συνεχής, διατηρεί σταθερό πρόσημο στο $\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$.

Επειδή $f(0)=1$, είναι $f(x)>0$ άρα $f(x)=\sigma\upsilon\nu x,\ x\in\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$

στ) $f'(x)=-\eta\mu x$, άρα $f'\left(\frac{\pi}{6}\right)=-\eta\mu\frac{\pi}{6}=-\frac{1}{2}$

4.336. **α)** Επειδή η $f(x)=\alpha x^2+\beta x+\gamma=0$ έχει δύο ρίζες, ισχύει ότι $x_1+x_2=-\frac{\beta}{\alpha}$ και $x_1x_2=\frac{\gamma}{\alpha}$.

$f'(x_1)=2\alpha x_1+\beta$ και $f'(x_2)=2\alpha x_2+\beta$.

Είναι $f'(x_1)f'(x_2)=-1 \Leftrightarrow (2\alpha x_1+\beta)(2\alpha x_2+\beta)=-1 \Leftrightarrow$

$4\alpha^2x_1x_2+2\alpha\beta x_1+2\alpha\beta x_2+\beta^2=-1 \Leftrightarrow 4\alpha^{\cancel{2}}\frac{\gamma}{\cancel{\alpha}}+2\alpha\beta(x_1+x_2)+\beta^2=-1 \Leftrightarrow$

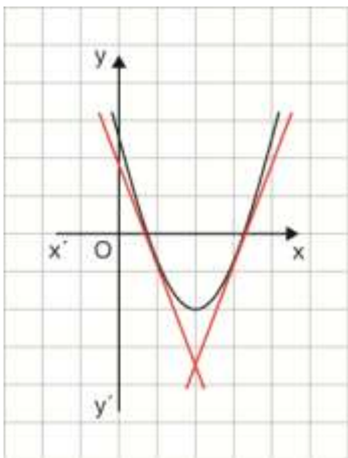
$4\alpha\gamma+2\alpha\beta\left(-\frac{\beta}{\alpha}\right)+\beta^2=-1 \Leftrightarrow 4\alpha\gamma-2\beta^2+\beta^2=-1 \Leftrightarrow$

$\beta^2-4\alpha\gamma=1$

β) $x_2-x_1=\frac{-\beta+\sqrt{\Delta}}{2\alpha}-\frac{-\beta-\sqrt{\Delta}}{2\alpha}=\frac{2\sqrt{\Delta}}{2\alpha}=\frac{\sqrt{\Delta}}{\alpha}=\frac{1}{\alpha}$

γ) $f'(x_2)=2\alpha x_2+\beta=2\alpha\left(x_1+\frac{1}{\alpha}\right)=2\alpha x_1+2=f'(x_1)+2 \Leftrightarrow$

$f'(x_2)-f'(x_1)=2 \Leftrightarrow \varepsilon\varphi\omega_2-\varepsilon\varphi\omega_1=2 \Leftrightarrow \varepsilon\varphi\omega_2-\varepsilon\varphi\omega_1=2\ (1)$



Είναι $f'(x_1)f'(x_2)=-1 \Leftrightarrow εφω_1 \cdot εφω_2=-1 \Leftrightarrow εφω_1=-\dfrac{1}{εφω_2}$

Η (1) γίνεται: $εφω_2-\dfrac{1}{εφω_2}=2 \Leftrightarrow εφ^2ω_2-2εφω_2+1=0 \Leftrightarrow$

$(εφω_2-1)^2=0 \Leftrightarrow εφω_2=1 \Leftrightarrow ω_2=45^\circ$

δ) Από το πυθαγόρειο θεώρημα στο τρίγωνο ΑΒΓ έχουμε ότι

$(ΑΓ)^2+(ΓΒ)^2=(ΑΒ)^2 \Leftrightarrow$

$2(ΑΓ)^2=(x_2-x_1)^2=\dfrac{1}{α^2} \Leftrightarrow (ΑΓ)^2=\dfrac{1}{2α^2}$

$(ΑΒΓ)=\dfrac{1}{2}(ΑΓ)^2=\dfrac{1}{4α^2}$ τ.μ.

Ρυθμός μεταβολής

4.344. **α)** $P(0)=1000-\frac{500}{0+1}=500$

β) $P(9)=1000-\frac{500}{10}=950$

γ) $P'(t)=\frac{500}{(t+1)^2}$, $P'(9)=\frac{500}{(9+1)^2}=5$ μικρόβια/ώρα

4.345. Η συνάρτησηg είναι παραγωγίσιμη στο $[0,+\infty]$ με $g'(x)=\left[M_0+M\left(1-e^{-\mu x}\right)\right]'=M\cdot\mu\cdot e^{-\mu x}$.

Είναι $g(x)=M_0+M\left(1-e^{-\mu x}\right)\Leftrightarrow M\left(1-e^{-\mu x}\right)=g(x)-M_0\Leftrightarrow$

$1-e^{-\mu x}=\frac{g(x)-M_0}{M}\Leftrightarrow e^{-\mu x}=1-\frac{g(x)-M_0}{M}=\frac{M-g(x)+M_0}{M}$

Οπότε $g'(x)=M\cdot\mu\cdot\frac{M+M_0-g(x)}{M}=\mu\cdot\left(M+M_0-g(x)\right)$.

Παρατηρούμε ότι $g(0)=M_0$, δηλαδή η σταθερά M_0 εκφράζει τις μονάδες του προϊόντος, που θα παραχθεί χωρίς τη χρήση λιπασμάτων.

4.346. Αν f η συνάρτηση κέρδους, τότε

$f(x)=-x^3+100x^2-2500x-150-\left(-5x^2+500x+100\right)=-x^3+105x^2-3000x-250$

$f'(x)=-3x^2+210x-3000>0\Leftrightarrow x^2-70x+1000<0\Leftrightarrow 20<x<50$

4.347. Αν f η συνάρτηση κέρδους, τότε

$f(x)=x^3-2x^2+3x+4-\left(7x^2+27x+8\right)=x^3-9x^2-24x-4$

$f'(x)=3x^2-18x-24>0\Leftrightarrow x^2-6x-8>0\Leftrightarrow x<3-\sqrt{17}$ ή $x>3+\sqrt{17}$

Επειδή το x είναι ο αριθμός των τεμαχίων, είναι φυσικός αριθμός,

άρα $x>3+\sqrt{17}$ και $x_{min}=8$.

4.348. $f'(x)=3x^2-12x,\ f''(x)=6x-12>0\Leftrightarrow x>2$,

Είναι τα σημεία $\left(x_0,f(x_0)\right)$ με $x_0>2$.

4.349. $y(t)=x(t)\ln x(t)$, $y'(t)=x'(t)\ln x(t)+\cancel{x(t)}\frac{x'(t)}{\cancel{x(t)}}=x'(t)\left(\ln x(t)+1\right)$

$y'(t)=2x'(t)\Leftrightarrow \cancel{x'(t)}\left(\ln x(t)+1\right)=2\cancel{x'(t)}\Leftrightarrow \ln x(t)+1=2\Leftrightarrow \ln x(t)=1\Leftrightarrow x(t)=e$.

Τότε $y(t)=e\ln e=e$, άρα (e,e).

4.350. **α)** Αν $M(x,y)$, τότε $y(t)=25-x^2(t)$, $x(t)\in(0,5]$.

Είναι: $(OM)=\sqrt{x^2(t_0)+y^2(t_0)}=\sqrt{x^2(t_0)+\left(25-x^2(t_0)\right)^2}=\sqrt{97}$.

$x^4(t_0)-49x^2(t_0)+528=0 \Leftrightarrow x^2(t_0)=16$, άρα $x(t_0)=4$ και $y(t_0)=9$.

Είναι $y'(t)=\left(25-x^2(t)\right)'=-2x(t)x'(t)$, άρα,

$y'(t_0)=-2x(t_0)x'(t_0)=-2\cdot 4\cdot 2=-16\mu.\mu/\sec$.

β) $\varepsilon\varphi\theta(t)=\dfrac{y(t)}{x(t)}$, άρα: $\dfrac{1}{\sigma\upsilon\nu^2\theta(t)}\theta'(t)=\dfrac{y'(t)x(t)-y(t)x'(t)}{x^2(t)} \Leftrightarrow$

$\theta'(t)=\sigma\upsilon\nu^2\theta(t)\dfrac{-2x^2(t)x'(t)-\left(25-x^2(t)\right)x'(t)}{x^2(t)}$.

Είναι $\sigma\upsilon\nu\theta(t_0)=\dfrac{x(t_0)}{(OM)}=\dfrac{4}{\sqrt{97}}$, άρα $\theta'(t_0)=\dfrac{16}{97}\dfrac{-2\cdot16\cdot2-(25-16)2}{16}=-\dfrac{82}{97}$ rad/sec.

4.351. $M\left(x(t),y(t)\right)$, $9x^2(t)+16y^2(t)=144$, $x'(t)=4$. Αν $x(t)=y(t)$, τότε:

$9x^2(t)+16x^2(t)=144 \Leftrightarrow 25x^2(t)=144 \Leftrightarrow x^2(t)=\dfrac{144}{25} \Leftrightarrow x(t)=\dfrac{12}{5}$

$\left(9x^2(t)+16y^2(t)\right)'=(144)' \Leftrightarrow 18x(t)x'(t)+32y(t)y'(t)=0 \Leftrightarrow y'(t)=-\dfrac{9}{4}$

4.352. $E(t)=x^2(t)$, $E(t_0)=16 \Leftrightarrow x^2(t_0)=16 \Leftrightarrow x(t_0)=4$ και $E'(t_0)=2x(t_0)x'(t_0)=16\text{cm}^2/\text{s}$

4.353. Αν $x(t),y(t)$ οι πλευρές του, τότε: $x(t)y(t)=50$, $x'(t)=-1$, $x(t_0)=5$, $y(t_0)=\dfrac{50}{5}=10$

$\left(x(t)y(t)\right)'=(50)' \Rightarrow x'(t_0)y(t_0)+x(t_0)y'(t_0)=0 \Leftrightarrow y'(t_0)=2\text{cm/sec}$

$\Pi'(t)=2x'(t)+2y'(t)=-2+4=2$ cm/sec.

4.354. $E(t)=x^2(t)$, $E'(3)=2x(3)x'(3)=2\left(3^2-2\cdot3+3\right)(2\cdot3-2)=48$

$\Pi(t)=4x(t)=4t^2-8t+12$, $\Pi'(t)=8t-8$, $\Pi'(3)=16$.

4.355. $x(t)=y(t) \Leftrightarrow t=2$ ή $t=3$, $x'(t)=2t-2, y'(t)=3$

$E'(t)=x'(t)y(t)+x(t)y'(t)$, $E'(3)=x'(3)y(3)+x(3)y'(3)=70$,

$E'(2)=x'(2)y(2)+x(2)y'(2)=35$

4.356. **α)** $V(0)=12000$

β) $V'(t)=4500\left(2-\dfrac{t^2}{10}\right)^2\left(-\dfrac{t}{5}\right)$, $V'(1)=-3249$ lt/h.

γ) $V(t)=0 \Leftrightarrow t=2\sqrt{5}$ h

4.357. Είναι $E(t)=\pi\rho^2(t)$ και $E'(t)=2\pi\rho(t)\rho'(t) \Leftrightarrow 40=2\pi\cdot10\rho'(t) \Leftrightarrow \rho'(t)=\dfrac{2}{\pi}$ cm/sec

Περίμετρος: $\Pi(t)=2\pi\rho(t)$ και $\Pi'(t)=2\pi\rho'(t)=2\pi\dfrac{2}{\pi}=4$ cm/sec .

4.358. $(OA)=x(t)$, $(OB)=y(t)$

$$(AB)^2=s^2(t)=(OA)^2+(OB)^2-2(OA)(OB)\sigma\upsilon\nu120^\circ \Leftrightarrow s(t)=\sqrt{x^2(t)+y^2(t)+x(t)y(t)}$$

$$s'(t)=\frac{2x(t)x'(t)+2y(t)y'(t)+x'(t)y(t)+x(t)y'(t)}{2\sqrt{x^2(t)+y^2(t)+x(t)y(t)}}$$

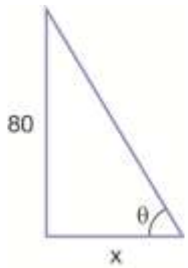
άρα $s'(t)=\dfrac{2\cdot8\cdot20+2\cdot6\cdot30+20\cdot6+8\cdot30}{2\sqrt{8^2+6^2+8\cdot6}}=\dfrac{1040}{\sqrt{148}}=\dfrac{260\sqrt{37}}{37}$ Km/h

4.359. $\theta'(t)=-15$, $\varepsilon\varphi\theta(t)=\dfrac{80}{x(t)}$, άρα: $\dfrac{1}{\sigma\upsilon\nu^2\theta(t)}\theta'(t)=-\dfrac{80x'(t)}{x^2(t)} \Leftrightarrow x'(t)=-\dfrac{\theta'(t)x^2(t)}{80\sigma\upsilon\nu^2\theta(t)}$

Όταν $x(t)=100$, τότε για την υποτείνουσα $y(t)$, έχουμε

$$y(t)=\sqrt{6400+10.000}=\sqrt{16.400}=20\sqrt{41} \text{ και } \sigma\upsilon\nu\theta(t)=\frac{100}{20\sqrt{41}}.$$

Τότε $x'(t)=\dfrac{15\cdot100^2}{80\dfrac{100^2}{400\cdot41}}=3075$ m/h

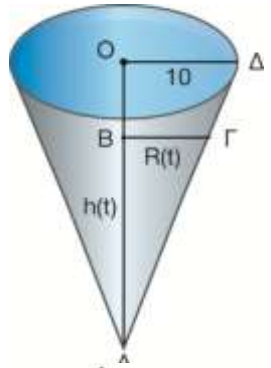


4.360. Εστω $x(t)$ η ακμή του κώνου, τότε $x'(t)=2$, $x(t_0)=10$, $E(t)=6x^2(t)$

και $E'(t_0)=12x(t_0)x'(t_0)=240$ cm²/sec

$$E'(t)=2E'(t_0)=480 \Leftrightarrow 24x(t)=480 \Leftrightarrow x(t)=20\,\text{cm}$$

4.361. $V(t)=\dfrac{1}{3}\pi R^2(t)h(t)$, $V'(t)=5$.

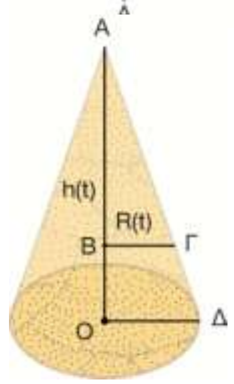


Τα τρίγωνα ΑΟΔ και ΑΒΓ είναι όμοια, οπότε:

$$\frac{AB}{AO}=\frac{B\Gamma}{O\Delta} \Leftrightarrow \frac{h(t)}{20}=\frac{R(t)}{10} \Leftrightarrow R(t)=\frac{1}{2}h(t), \text{ άρα } V(t)=\frac{\pi}{12}h^3(t)$$

$$V'(t)=\frac{\pi}{4}h^2(t)h'(t) \Leftrightarrow 5=\frac{\pi}{4}\cdot25h'(t) \Leftrightarrow h'(t)=\frac{4}{5\pi}\text{ m/sec}$$

4.362. Αν $h(t)$ το ύψος της σωρού με άμμο, τότε



$$V(t)=\frac{1}{3}\pi R^2(t)h(t),\ R(t)=\frac{1}{2}h(t),\ R'(t)=\frac{1}{2}h'(t)$$

$$V'(t)=\frac{2\pi}{3}R(t)R'(t)h(t)+\frac{\pi}{3}R^2(t)h'(t)=10 \Leftrightarrow h'(t)=\frac{8}{5\pi}$$

$$E_\pi=\pi R(t)\sqrt{h^2(t)+R^2(t)}=\pi R(t)\sqrt{5R^2(t)}=\pi\sqrt{5}R^2(t),$$

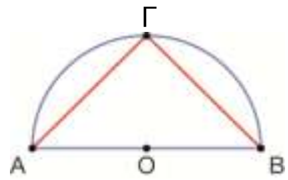
$$E'_\pi=2\pi\sqrt{5}R(t)R'(t)=4\sqrt{5}\text{ m}^2/\text{min}$$

Για τη βάση έχουμε $E_\beta=\pi R^2(t)$ και $E'_\beta=2\pi R(t)R'(t)=4\text{m}^2/\text{min}$

4.363. Αν $h(t)$ το ύψος της δεξαμενής,

τότε $V(t)=3\cdot 15h(t)=45h(t)$ και $V'(t)=45h'(t)\Leftrightarrow h'(t)=\frac{2}{45}$ m/min

4.364. Εστω $A\Gamma = x$.Από το πυθαγόρειο έχουμε:



$B\Gamma^2=4\rho^2-x^2 \Leftrightarrow B\Gamma=\sqrt{4\rho^2-x^2}$

Όταν το τρίγωνο είναι ισοσκελές τότε $x=\rho\sqrt{2}$.

Τότε $E=(AB\Gamma)=\frac{1}{2}(A\Gamma)(B\Gamma)=\frac{x\sqrt{4\rho^2-x^2}}{2}$ και

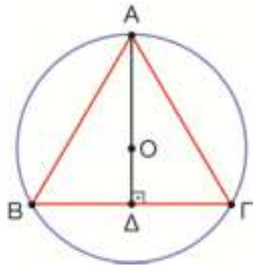
$$E'(x)=\frac{\sqrt{4\rho^2-x^2}}{2}+\frac{x}{2}\frac{-\cancel{2}x}{\cancel{2}\sqrt{4\rho^2-x^2}}=\frac{4\rho^2-2x^2}{2\sqrt{4\rho^2-x^2}}=\frac{2\rho^2-x^2}{\sqrt{4\rho^2-x^2}}$$

Τη χρονική στιγμή που το Γ είναι στο μέσο του ημικυκλίου, το ύψος του τριγώνου ΑΒΓ είναι ίσο με την ακτίνα ρ του ημικυκλίου. Από το πυθαγόρειο θεώρημα, έχουμε:

$x^2+x^2=4\rho^2 \Leftrightarrow 2x^2=4\rho^2 \Leftrightarrow x^2=2\rho^2 \Leftrightarrow x=\sqrt{2}\rho$

Τότε $E'\left(\rho\sqrt{2}\right)=\frac{2\rho^2-2\rho^2}{\sqrt{4\rho^2-2\rho^2}}=0$

4.365. **α)** Είναι $AB=\lambda_3=\rho\sqrt{3}$, $O\Delta=\alpha_3=\frac{\alpha}{2}$, άρα



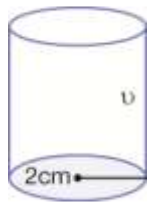
$A\Delta=\frac{3\rho}{2}$, άρα $E=\frac{1}{2}\rho\sqrt{3}\cdot\frac{3\rho}{2}=\frac{3\rho^2\sqrt{3}}{4}$

β) $E=\pi\rho^2=4\pi \Leftrightarrow \rho=2$ cm

γ) Είναι $E(t)=\frac{3\rho^2(t)\sqrt{3}}{4}$ και $E'(t)=\frac{6\rho(t)\rho'(t)\sqrt{3}}{4}$.

Για $t=t_0$ είναι $\rho(t_0)=2$ και $E'(t_0)=\frac{6\cdot 2\sqrt{3}\cdot\sqrt{3}}{4}=9$ cm^2 / sec

4.366. Εστω $V(t)$ ο όγκος του νερού στο ποτήρι και $\upsilon(t)$ η στάθμη του νερού στο ποτήρι, τη χρονική στιγμή t. Είναι $V'(t)=100$ cm^3/sec.



$V(t)=\pi\cdot 2^2\cdot\upsilon(t)=4\pi\upsilon(t)$.

$V'(t)=4\pi\cdot\upsilon'(t)\Leftrightarrow \upsilon'(t)=\frac{V'(t)}{4\pi}=\frac{100}{4\pi}\Leftrightarrow \upsilon'(t)=\frac{25}{\pi}$ cm/sec.

Επομένως, η στάθμη του νερού στο ποτήρι, αυξάνεται με ρυθμό $\frac{25}{\pi}$ εκατοστών ανά δευτερόλεπτο.

4.367. $E(t)=4\pi r^2(t)=4\pi\left(3t^2+t\right)^2$, $E'(t)=8\pi\left(3t^2+t\right)(6t+1)$, $E'(2)=1456\pi$

$V(t)=\frac{4}{3}\pi r^3(t)=\frac{4}{3}\pi\left(3t^2+t\right)^3$, $V'(t)=4\pi\left(3t^2+t\right)^2(6t+1)$,

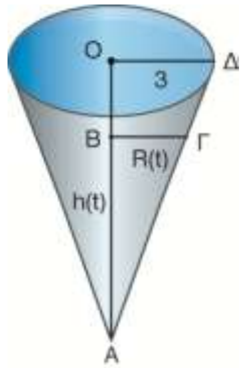
$V'(2)=4\pi\left(3t^2+t\right)^2(6t+1)=10192\pi$

4.368. $E(t)=4\pi R^2(t)$, $E'(t)=8\pi R(t)R'(t)$ και τη χρονική στιγμή t_0 είναι

$$64=8\pi\cdot 4\cdot R'(t_0)\Leftrightarrow R'(t_0)=\frac{2}{\pi}\ \text{cm/sec}$$

$$V(t)=\frac{4}{3}\pi R^3(t)\ \text{και}\ V'(t)=4\pi R^2(t)R'(t)\Rightarrow V'(t_0)=4\pi\cdot 16\frac{2}{\pi}=128\ \text{cm}^3/\text{s}$$

4.369. $V(t)=\frac{1}{3}\pi R^2(t)h(t)$, $V'(t)=\frac{2\pi}{3}R(t)R'(t)h(t)+\frac{\pi}{3}R^2(t)h'(t)$



Τα τρίγωνα ΑΟΔ και ΑΒΓ είναι όμοια, οπότε:

$$\frac{AB}{AO}=\frac{B\Gamma}{O\Delta}\Leftrightarrow\frac{h(t)}{5}=\frac{R(t)}{3}\Leftrightarrow R(t)=\frac{3}{5}h(t)\ \text{και}\ R'(t)=\frac{3}{5}h'(t)$$

Τη χρονική στιγμή t_0 που $h(t_0)=2$ είναι $R(t_0)=\frac{3}{5}h(t_0)=\frac{6}{5}$

$$V'(t_0)=\frac{2\pi}{3}R(t_0)R'(t_0)h(t_0)+\frac{\pi}{3}R^2(t_0)h'(t_0)\Leftrightarrow$$

$$-0,6=\frac{2\pi}{3}\frac{6}{5}\cdot\frac{3}{5}h'(t_0)\cdot 2+\frac{\pi}{3}\frac{36}{25}h'(t_0)\Leftrightarrow h'(t_0)=-\frac{5}{12\pi}\ \text{m/h}$$

4.370. Τη χρονική στιγμή $t=0$, είναι: $\beta(0)=4\text{cm}$, $\gamma(0)=2\text{cm}$. Τη χρονική στιγμή t, η πλευρά β έχει αυξήσει το μήκος της κατά 2 cm και η πλευρά γ, κατά 2 cm.

Άρα $\beta(t)=4+2t$ και $\gamma(t)=2+2t$.

Το Εμβαδόν $E(t)$ του τριγώνου είναι:

$$E(t)=\frac{1}{2}\beta(t)\gamma(t)\eta\mu A=\frac{1}{2}\beta(t)\gamma(t)\eta\mu 150^o=\frac{1}{4}\beta(t)\gamma(t).$$

Είναι $\beta(3)=4+2\cdot 3=10$, $\gamma(3)=2+2\cdot 3=8$ $\beta'(3)=2$ και $\gamma'(3)=2$.

$$E'(t)=\frac{1}{4}\left(\beta'(t)\gamma(t)+\beta(t)\gamma'(t)\right)\ \text{και}\ E'(3)=\frac{1}{4}\left(\beta'(3)\gamma(3)+\beta(3)\gamma'(3)\right)=9\text{cm}^2/\text{s}.$$

4.371. Είναι $\varepsilon\varphi\frac{\theta(t)}{2}=\frac{4}{u(t)}$, άρα $\frac{1}{\sigma\upsilon\nu^2\frac{\theta(t)}{2}}\frac{\theta'(t)}{2}=\frac{-4u'(t)}{u^2(t)}\Leftrightarrow\theta'(t)=-\frac{8u'(t)\sigma\upsilon\nu^2\frac{\theta(t)}{2}}{u^2(t)}$.

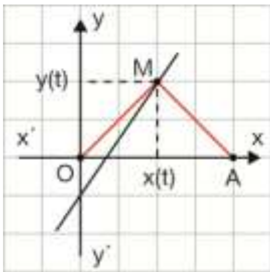
Τη χρονική στιγμή t_0 που είναι $u(t_0)=3$, ισχύει: $(AB)^2=3^2+4^2=25\Leftrightarrow(AB)=5$.

Τότε $\sigma\upsilon\nu\frac{\theta(t_0)}{2}=\frac{3}{5}$ και $\theta'(t_0)=\frac{-8\cdot 0,5\left(\frac{3}{5}\right)^2}{3^2}=-0,16\ \text{rad/sec}$.

4.372. Η θέση του πλοίου που κινείται ανατολικά δίνεται από τη σχέση $x(t)=40t$ και αυτού που κινείται βόρια $y(t)=30t$, t Ο χρόνος σε ώρες. Αν s είναι η μεταξύ τους απόσταση, τότε $s^2(t)=x^2(t)+y^2(t)=2500t^2\Leftrightarrow s(t)=50t$. Είναι $s'(t)=50$ μίλια/h

4.373. $s^2(t)=x^2(t)+y^2(t)=\left(t^2-t\right)^2+\left(4-t^2\right)^2=2t^4-2t^3-7t^2+16$, άρα $s(t)=\sqrt{2t^4-2t^3-7t^2+16}$, $s'(t)=\dfrac{8t^3-6t^2-14t}{2\sqrt{2t^4-2t^3-7t^2+16}}$, $s'(1)=-2$

4.374. $M(x(t),y(t))$, $y(t)=2x(t)-4$



$x(t_0)=e^4 \Leftrightarrow e^{t_0^2}=e^4 \Leftrightarrow t_0=2$

$E(t)=\frac{1}{2}\cdot 8\cdot y(t)=4y(t)$, $E'(t)=4y'(t)=4\cdot 2x'(t)=8\cdot 2te^{t^2}$, άρα

$E'(2)=32e^4$

4.375. **α)** $u(t)=x'(t)=t^2-6t+5$, $\alpha(t)=u'(t)=2t-6$

β) $u(t)=0 \Leftrightarrow t=1$ ή 5

$$s_{ολ}=|x(1)-x(0)|+|x(5)-x(1)|+|x(6)-x(5)|=\frac{46}{3}$$

γ) $\bar{u}=\dfrac{s_{ολ}}{\Delta t}=\dfrac{23}{9}$

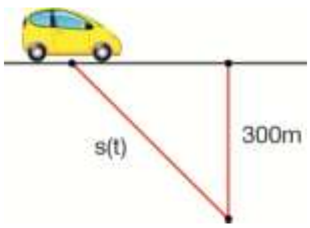
δ) θετική φορά όταν $t\in(0,1)\cup(5,6)$

4.376. $s^2(t)=h^2(t)+900$, $s^2(2)=h^2(2)+900=40^2+900=2500 \Leftrightarrow s(2)=50\,m$

$\left(s^2(t)\right)'=\left(h^2(t)+900\right)' \Leftrightarrow \cancel{2}s(t)s'(t)=\cancel{2}h(t)h'(t)$

$s(2)s'(2)=h(2)h'(2) \Leftrightarrow 50s'(2)=40\cdot 20 \Leftrightarrow s'(2)=16$ m/min

4.377. Εστω $x(t)$ η οριζόντια απόσταση του αυτοκινήτου από τον παρατηρητή και $s(t)$ η μεταξύ τους απόσταση. Είναι



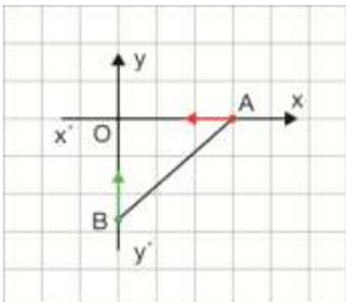
$s^2(t)=x^2(t)+90000$

Όταν $s(t_0)=500$, τότε $500^2=x^2(t_0)+90000 \Leftrightarrow x(t_0)=400$

$\left(s^2(t)\right)'=\left(x^2(t)+90000\right)' \Leftrightarrow \cancel{2}s(t)s'(t)=\cancel{2}x(t)x'(t)$

$s(t_0)s'(t_0)=x(t_0)x'(t_0) \Leftrightarrow \frac{1}{2}s'(t_0)=0{,}4\cdot 80 \Leftrightarrow$

$s'(t_0)=64Km/h$



4.378. Εστω $OA=x(t)$, $OB=y(t)$.

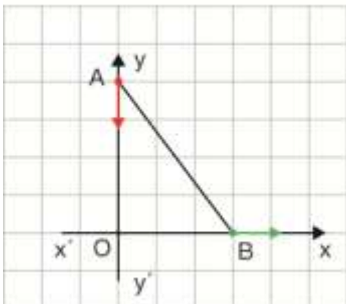
Είναι $x'(t)=-8$, $y'(t)=9$, $x(t_0)=4$, $y(t_0)=3$

Είναι $s^2(t)=x^2(t)+y^2(t)$ και τη χρονική στιγμή t_0 είναι

$s^2(t_0)=4^2+3^2=25 \Leftrightarrow s(t_0)=5$

Είναι $\cancel{2}s(t_0)s'(t_0)=\cancel{2}x(t_0)x'(t_0)+\cancel{2}y(t_0)y'(t_0) \Leftrightarrow$

$5s'(t_0)=4\cdot(-8)+3\cdot 9 \Leftrightarrow s'(t_0)=-1$,



άρα η μεταξύ τους απόσταση μικραίνει.

4.379. Για το σημείο Β ισχύει: $\upsilon = 2\text{m/s}$ και $s(t) = \upsilon t$ άρα $s(t) = 2t$. Αν η συνάρτηση θέσης του σημείου Α είναι $y(t)$, τότε $y^2(t) + (2t)^2 = 10^2 \Leftrightarrow y(t) = \sqrt{100-4t^2}$.

α) Για το εμβαδόν $E(t)$ του τριγώνου ΟΑΒ, ισχύει:

$$E(t) = \frac{1}{2}s(t)\cdot y(t) = \frac{1}{2}\cdot 2t\cdot\sqrt{100-4t^2} = t\cdot\sqrt{100-4t^2}.$$

β) $(OA) = 6m \Leftrightarrow y(t) = 6m \Leftrightarrow \sqrt{100-4t^2} = 6 \Leftrightarrow 100-4t^2 = 36 \Leftrightarrow 4t^2 = 64 \Leftrightarrow t^2 = 16$

άρα $t = 4$ sec.

Είναι: $E'(t) = \sqrt{100-4t^2} + t\cdot\dfrac{1}{2\sqrt{100-4t^2}}\cdot\left(100-4t^2\right)' = \sqrt{100-4t^2} - \dfrac{4t^2}{\sqrt{100-4t^2}}$.

Άρα $E'(4) = \sqrt{100-4\cdot 4^2} - \dfrac{4\cdot 4^2}{\sqrt{100-4\cdot 4^2}} = 6 - \dfrac{64}{6} = -\dfrac{14}{3}\ m^2/\text{sec}$.

4.380. **α)** $f'(x) = -\dfrac{1}{x\ln^2 x}$, $x > 1$.

$\varepsilon:\ y - f(k) = f'(k)(x-k) \Leftrightarrow y = -\dfrac{1}{k\ln^2 k}x + \dfrac{\ln k + 1}{\ln^2 k}$

Για $y = 0$ είναι $x = k\ln k + k$, άρα $A(k\ln k + k, 0)$.

β) $k'(t) = 2k\ \text{cm/s}$

i. $k(t_0) = e$, $k'(t) = 2k(t_0) = 2e$ cm/s, $x_A(t) = k(t)\ln k(t) + k(t)$ και

$$x'_A(t) = k'(t)\ln k(t) + \cancel{k(t)}\frac{k'(t)}{\cancel{k(t)}} + k'(t) = k'(t)\ln k(t) + 2k'(t) = 6e$$

ii. Είναι $\varepsilon\varphi\theta(t) = \lambda_\varepsilon = -\dfrac{1}{k(t)\ln^2 k(t)}$ και $\left(\varepsilon\varphi\theta(t)\right)' = \left(-\dfrac{1}{k(t)\ln^2 k(t)}\right)' \Leftrightarrow$

$$\frac{1}{\sigma\upsilon\nu^2\theta(t)}\theta'(t) = \frac{1}{k^2(t)\ln^4 k(t)}\left(k'(t)\ln^2 k(t) + \cancel{k(t)}\frac{2\ln k(t)}{\cancel{k(t)}}k'(t)\right) \Rightarrow$$

$$\theta'(t_0) = \frac{6}{e}\sigma\upsilon\nu^2\theta(t_0).$$

4.381. Α) $M(x(t), y(t))$, $y(t) = 2x^2(t)$ $x'(t) = 3\text{cm/s}$,

$(OM)(t_0) = \sqrt{x^2(t) + y^2(t)} \Leftrightarrow \sqrt{x^2(t_0) + 4x^4(t_0)} = \sqrt{68} \Leftrightarrow 4x^4(t_0) + x^2(t_0) - 68 = 0$

Θέτουμε $x^2(t_0) = \omega > 0$, τότε $4\omega^2 + \omega - 68 = 0 \Leftrightarrow \omega = 4$ ή $\omega = -\dfrac{17}{4}$ που απορρίπτεται.

Άρα $x^2(t_0) = 4$ και $x(t_0) = 2$. Τότε $y(t_0) = 8$.

α) $y'(t) = \left(2x^2(t)\right)' = 4x(t)x'(t)$ και για $t = t_0$ έχουμε

$y'(t_0) = 4x(t_0)x'(t_0) = 24$

β) $E(t) = x(t)y(t) = 2x^3(t)$, $E'(t_0) = 6x^2(t)x'(t_0) = 72$

γ) Είναι $\varepsilon\varphi\theta(t)=\dfrac{y(t)}{x(t)}$ και $\left(\varepsilon\varphi\theta(t)\right)'=\left(\dfrac{y(t)}{x(t)}\right)'\Leftrightarrow \dfrac{1}{\sigma\upsilon\nu^2\theta(t)}\theta'(t)=\dfrac{y'(t)x(t)-y(t)x'(t)}{x^2(t)}\Leftrightarrow$

Για $t=t_0$ έχουμε $\varepsilon\varphi\theta(t_0)=\dfrac{y(t_0)}{x(t_0)}=4$ και

$$\left(1+\varepsilon\varphi^2\theta(t_0)\right)\theta'(t_0)=\frac{y'(t_0)x(t_0)-y(t_0)x'(t_0)}{x^2(t_0)}\Leftrightarrow$$

$$(1+16)\theta'(t_0)=\frac{24\cdot 2-8\cdot 3}{4}\Leftrightarrow 17\theta'(t_0)=6\Leftrightarrow \theta'(t_0)=\frac{6}{17}$$

Β) $y'(t_0)=x'(t_0)$

$4x(t_0)\,\cancel{x'(t_0)}=\cancel{x'(t_0)}\Leftrightarrow x(t_0)=\dfrac{1}{4}$. Τότε $y(t_0)=\dfrac{1}{8}$ και $M\left(\dfrac{1}{4},\dfrac{1}{8}\right)$.

4.382. $M\left(x_0(t),y_0(t)\right)$ με $y_0(t)=1-x_0^2(t)$.

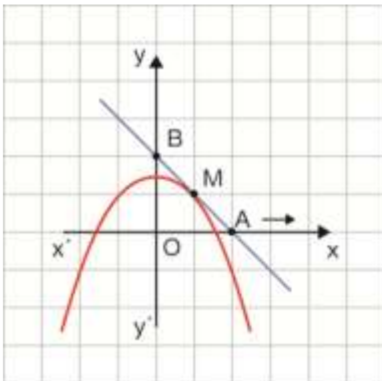
Η AB έχει εξίσωση $y-f(x_0)=f'(x_0)(x-x_0)\Leftrightarrow y=-2x_0x+x_0^2+1$

Για $y=0$ είναι $x_A(t)=\dfrac{1+x_0^2(t)}{2x_0(t)}=\dfrac{1}{2x_0(t)}+\dfrac{x_0(t)}{2}$,

Είναι $x'_A(t)=3$ m/s, οπότε $\left(\dfrac{1}{2x_0(t)}+\dfrac{x_0(t)}{2}\right)'=3\Leftrightarrow -\dfrac{x'_0(t)}{2x_0^2(t)}+\dfrac{x'_0(t)}{2}=3$ (1)

Όταν $x_0(t_0)=\dfrac{1}{2}$, είναι$(1)\Rightarrow -2x'_0(t_0)+\dfrac{x'_0(t_0)}{2}=3\Leftrightarrow x'_0(t_0)=-2$

α) $y'_B(t_0)=2x_0(t_0)x'_0(t_0)=2\dfrac{1}{2}(-2)=-2m/s$



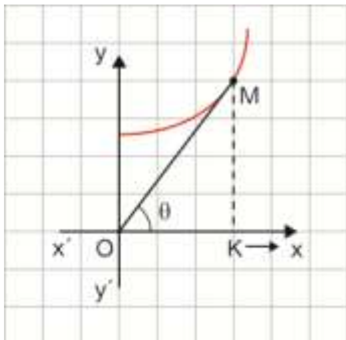
β) $(OAB)=\dfrac{1}{2}(OA)(OB)\Leftrightarrow$

$$E(t)=\frac{1}{2}x_A(t)y_B(t)=\frac{1}{2}\frac{1+x_0^2(t)}{2x_0(t)}\left(1+x_0^2(t)\right)=\frac{\left(1+x_0^2(t)\right)^2}{4x_0(t)}\Leftrightarrow$$

$$E(t)=\frac{x_0^4(t)+2x_0^2(t)+1}{4x_0(t)}=\frac{1}{4}x_0^3(t)+\frac{1}{2}x_0(t)+\frac{1}{4x_0(t)}\text{ και}$$

$$E'(t)=\frac{3}{4}x_0^2(t)x'_0(t)+\frac{1}{2}x'_0(t)-\frac{x'_0(t)}{4x_0^2(t)}\text{ και}$$

$$E'(t_0)=\frac{3}{4}x_0^2(t_0)x'_0(t_0)+\frac{1}{2}x'_0(t_0)-\frac{x'_0(t_0)}{4x_0^2(t_0)}=\frac{5}{8}m^2/s$$

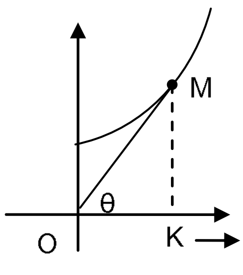


γ) $x'_0(t_1)=2\left|y'_0(t_1)\right|=4\left|x'_0(t_1)x_0(t_1)\right|\underset{x'_0(t_1)>0}{\overset{x_0(t_1)>0}{\Leftrightarrow}}x_0(t_1)=\dfrac{1}{4}$

$$E(t_1)=\frac{1}{4}x_0^3(t_1)+\frac{1}{2}x_0(t_1)+\frac{1}{4x_0(t_1)}=\frac{289}{256}$$

4.383. Εστω $M\left(x(t),y(t)\right)$, τότε $K\left(x(t),0\right)$ με $x'(t)=3$cm/s

$x(t_0)=2$ και $y(t_0)=x^2(t_0)+1=5$.



α) $(KM)=y(t)$ και $y'(t)=2x(t)x'(t)$ και $y'(t_0)=2x(t)x'(t)=12\text{cm/s}$

β) $(OM)(t)=\sqrt{x^2(t)+y^2(t)}$ και

$$(OM)'(t_0)=\frac{x(t_0)x'(t_0)+y(t_0)y'(t_0)}{\sqrt{x^2(t_0)+y^2(t_0)}}=\frac{66\sqrt{29}}{29}$$

γ) Είναι $\varepsilon\varphi\theta(t)=\frac{y(t)}{x(t)}$ και $\frac{\theta'(t_0)}{\sigma\upsilon\nu^2\theta(t_0)}=\frac{y'(t_0)x(t_0)-x'(t_0)y(t_0)}{x^2(t_0)}\Leftrightarrow\theta'(t_0)=\frac{9}{29}\text{ rad/s}$

δ) Εστω $M(x_0,f(x_0))$. Η εφαπτομένη στο Μ είναι η ε:

$$y-f(x_0)=f'(x_0)(x-x_0)\Leftrightarrow y-(x_o^2+1)=2x_0(x-x_0)\Leftrightarrow y=2x_0x-x_0^2+1$$

Για $y=0$ είναι $x=\frac{x_0^2-1}{2x_0}$, άρα $E\left(\frac{x_0^2-1}{2x_0},0\right)$.

Είναι $x_E(t)=\frac{x_0^2(t)-1}{2x_0(t)}$ και $x_E'(t_0)=\frac{4x_0^2(t_0)x'(t_0)-2x'(t_0)\left(x_0^2(t_0)-1\right)}{4x_0^2(t_0)}=\frac{15}{8}\text{cm/s}$

4.384. α) i. Εστω $\varphi(x)=\frac{f(3x-5)-1}{x-2}\Leftrightarrow f(3x-5)=\varphi(x)(x-2)+1,\ x\neq 2$

$$\lim_{x\to2}f(3x-5)=\lim\left[\varphi(x)(x-2)+1\right]=1\ \overset{3x-5=u}{\underset{u\to1}{\Rightarrow}}\ \lim_{u\to1}f(u)=1$$

Είναι $f(1)=\lim_{x\to1}f(x)=1$

ii. $\lim_{x\to2}\frac{f(3x-5)-1}{x-2}=\lim_{u\to1}\frac{f(u)-f(1)}{\frac{u+5}{3}-2}=3\lim_{x\to1}\frac{f(u)-f(1)}{u-1}\Leftrightarrow 3f'(1)=12\Leftrightarrow f'(1)=4$

β) $\varepsilon: y-f(1)=f'(1)(x-1)\Leftrightarrow y-1=4(x-1)\Leftrightarrow y=4x-3$

$\Sigma(x(t),y(t)),\ x(t)>1,\ x'(t)=\frac{3}{4}$ και $y(t)=4x(t)-3$

i. $y'(t)=4x'(t)=4\frac{3}{4}=3\text{ cm/sec}$.

ii. Είναι $\det\left(\overrightarrow{OA},\overrightarrow{O\Sigma}\right)=\begin{vmatrix}1 & 1\\ x(t) & y(t)\end{vmatrix}=y(t)-x(t)=4x(t)-3-x(t)=3x(t)-3>0$

και $E(t)=(OA\Sigma)=\frac{1}{2}|3x(t)-3|=\frac{3}{2}(x(t)-1)$

$E'(t)=\frac{3}{2}x'(t)=\frac{3}{2}\cdot\frac{3}{4}=\frac{9}{8}\text{ cm}^2/\text{sec}$.

4.385. α) $\lim_{x\to1^-}\frac{h(x)-h(1)}{x-1}=\lim_{x\to1^-}\frac{f(3-x^3)-f(2)}{x-1}\ \overset{3-x^3=u}{\underset{u\to2^+}{=}}\ \lim_{u\to2^+}\frac{f(u)-f(2)}{\sqrt[3]{3-u}-1}=$

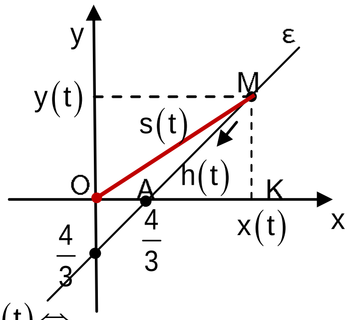
$$=\lim_{u\to2^+}\left\{\frac{f(u)-f(2)}{-(u-2)}\left[\left(\sqrt[3]{3-u}\right)^2+\sqrt[3]{3-u}+1\right]\right\}=-3f'(2)$$

$\lim_{x\to1^+}\frac{h(x)-h(1)}{x-1}=\lim_{x\to1^+}\frac{f(5-3x)-f(2)}{x-1}\ \overset{5-3x=u}{\underset{u\to2^+}{=}}\ \lim_{x\to2^+}\frac{f(u)-f(2)}{\frac{5-u}{3}-1}=$

$$\lim_{u\to 2^+}\left(-3\frac{f(u)-f(2)}{u-2}\right)=-3f'(2)\text{, άρα } h'(1)=-3f'(2)$$

β) $h(1)=f(2)=-\frac{1}{3}$ και $h'(1)=-3f'(2)=1$, άρα (ε) $y+\frac{1}{3}=x-1 \Leftrightarrow y=x-\frac{4}{3}$

γ) Η ε τέμνει τους άξονες στα $A\left(\frac{4}{3},0\right)$ και $\left(0,\frac{4}{3}\right)$.



Αν $(AM)=h(t)$, τότε $h'(t)=-2\,cm/sec$.

Από το πυθαγόρειο θεώρημα στο τρίγωνο ΜΑΚ, έχουμε:

$$(AK)^2+(MK)^2=(AM)^2 \Leftrightarrow \left(x(t)-\frac{4}{3}\right)^2+y^2(t)=h^2(t)\Leftrightarrow$$

$$\left(x(t)-\frac{4}{3}\right)^2+\left(x(t)-\frac{4}{3}\right)^2=h^2(t)\Leftrightarrow 2\left(x^2(t)-\frac{8}{3}x(t)+\frac{16}{9}\right)=h^2(t)\Leftrightarrow$$

$$2x^2(t)-\frac{16}{3}x(t)+\frac{32}{9}=h^2(t) \quad (1)$$

Παραγωγίζοντας την (1), έχουμε:

$$4x(t)x'(t)-\frac{16}{3}x'(t)=2h(t)h'(t)\Leftrightarrow 2x(t)x'(t)-\frac{8}{3}x'(t)=h(t)h'(t) \quad (2)$$

Τη χρονική στιγμή t_0 που είναι $y(t_0)=1$, είναι $y(t_0)=x(t_0)-\frac{4}{3}\Leftrightarrow x(t_0)=\frac{7}{3}$ και

από τη σχέση (1) $\Rightarrow 2x^2(t_0)-\frac{16}{3}x(t_0)+\frac{32}{9}=h^2(t_0)\Leftrightarrow h(t_0)=\sqrt{2}$

Η σχέση (2) για $t=t_0$ γίνεται: $2x(t_0)x'(t_0)-\frac{8}{3}x'(t_0)=h(t_0)h'(t_0)\Leftrightarrow$

$$2\frac{7}{3}x'(t_0)-\frac{8}{3}x'(t_0)=-2\sqrt{2}\Leftrightarrow x'(t_0)=-\sqrt{2}\ cm/sec$$

Είναι $(OM)=s(t)=\sqrt{x^2(t)+y^2(t)}=\sqrt{x^2(t)+\left(x(t)-\frac{4}{3}\right)^2}=\sqrt{2x^2(t)-\frac{8}{3}x(t)+\frac{16}{9}}$ και

$$s'(t)=\frac{2x(t)x'(t)-\frac{4}{3}x'(t)}{\sqrt{2x^2(t)-\frac{8}{3}x(t)+\frac{16}{9}}}$$

. Τη χρονική στιγμή $t=t_0$, είναι

$$s'(t_0)=\frac{2x(t_0)x'(t_0)-\frac{4}{3}x'(t_0)}{\sqrt{2x^2(t_0)-\frac{8}{3}x(t_0)+\frac{16}{9}}}=\frac{\left(2\frac{7}{3}-\frac{4}{3}\right)\left(-\sqrt{2}\right)}{\sqrt{2\frac{49}{9}-\frac{8}{3}\cdot\frac{7}{3}+\frac{16}{9}}}=-\frac{10\sqrt{29}}{29}\ cm/sec$$