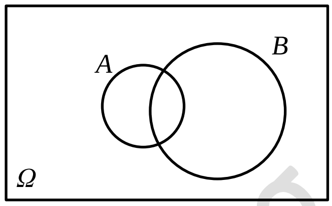
Λύσεις επαναληπτικού διαγωνίσματος στα Μαθηματικά Γενικής Παιδείας

ΘΕΜΑ Α

Α1. Για δυο ενδεχόμενα A και B έχουμε

$N(A\cup B)=N(A)+N(B)-N(A\cap B)$,   (1)

αφού στο άθροισμα $N(A)+N(B)$ το πλήθος των στοιχείων του $A\cap B$ υπολογίζεται δυο φορές.



$A\cup B$

Αν διαιρέσουμε τα μέλη της (1) με $N(\Omega)$ έχουμε:

$$\frac{N(A\cup B)}{N(\Omega)}=\frac{N(A)}{N(\Omega)}+\frac{N(B)}{N(\Omega)}-\frac{N(A\cap B)}{N(\Omega)}$$

και επομένως $P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)$.

Α2. Η μέση τιμή συμβολίζεται με $\bar{x}$ και δίνεται από τη σχέση: $\bar{x}=\dfrac{t_1+t_2+...+t_\nu}{\nu}=\dfrac{1}{\nu}\sum\limits_{i=1}^{\nu}t_i$

Α3. Αν το όριο $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$ υπάρχει και είναι πραγματικός αριθμός, τότε λέμε ότι η f είναι παραγωγίσιμη στο σημείο x_0 του πεδίου ορισμού της. Το όριο αυτό ονομάζεται παράγωγος της f στο x_0, συμβολίζεται με $f'(x_0)$.

Εχουμε λοιπόν: $f'(x_0)=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$.

Α4. **α)** Σ   **β)** Σ   **γ)** Σ   **δ)** Λ   **ε)** Σ

ΘΕΜΑ Β

Β1. $s^2=\dfrac{1}{\nu}\left(\sum\limits_{i=1}^{\nu}x_i^2-\dfrac{\left(\sum\limits_{i=1}^{\nu}x_i\right)^2}{\nu}\right)\Leftrightarrow 4=\dfrac{1}{\nu}\sum\limits_{i=1}^{1000}x_i^2-\bar{x}^2\Leftrightarrow 4=\overline{x^2}-\bar{x}^2\Leftrightarrow \overline{x^2}=4+\bar{x}^2$

Β2. Για τις τιμές του Α δείγματος ισχύει ότι: $y_i=x_i+2$, $i=1,2,...,\nu$, οπότε

$\bar{y}=\bar{x}+2$, $s_y=s=2$ και $CV_y=\dfrac{2}{\bar{x}+2}$.

Για τις τιμές του Β δείγματος ισχύει ότι: $z_i=x_i+\dfrac{10}{100}x_i=1{,}1x_i$, $i=1,2,...,\nu$, οπότε

$\bar{z}=1{,}1\bar{x}$, $s_z=1{,}1s=2{,}2$ και $CV_z=\dfrac{1{,}1s}{1{,}1\bar{x}}=\dfrac{2}{\bar{x}}$.

Είναι $\bar{x}+2>\bar{x}\Leftrightarrow\dfrac{1}{\bar{x}+2}<\dfrac{1}{\bar{x}}\Leftrightarrow\dfrac{2}{\bar{x}+2}<\dfrac{2}{\bar{x}}\Leftrightarrow CV_y<CV_z$, οπότε το Α δείγμα είναι ποιο ομοιογενές.

Β3. $\bar{y}=\bar{z}\Leftrightarrow\bar{x}+2=1{,}1\bar{x}\Leftrightarrow 2=0{,}1\bar{x}\Leftrightarrow\bar{x}=\dfrac{2}{0{,}1}=20$. Τότε $CV=\dfrac{s}{|\bar{x}|}=\dfrac{2}{20}=10\%$.

Β4. $CV_y\le 10\%\Leftrightarrow\dfrac{2}{\bar{x}+2}\le\dfrac{1}{10}\Leftrightarrow\bar{x}+2\ge 20\Leftrightarrow\bar{x}+2\ge 20\Leftrightarrow\bar{x}\ge 18$, άρα $\bar{x}_{min}=18$

Β5. Είναι $x_1+x_2+...+x_\nu=100 \Leftrightarrow \sum_{i=1}^{\nu} x_i=100$ και

$x_1^2+x_2^2+...+x_\nu^2=1010 \Leftrightarrow \sum_{i=1}^{\nu} x_i^2=1010$.

$$s^2=\frac{1}{\nu}\left(\sum_{i=1}^{\nu} x_i^2-\frac{\left(\sum_{i=1}^{\nu} x_i\right)^2}{\nu}\right) \Leftrightarrow 4=\frac{1}{\nu}1040-\frac{10000}{\nu^2} \Leftrightarrow 4\nu^2-1040\nu+10000=0$$

Η τελευταία είναι εξίσωση 2ου βαθμού με $\Delta=921600$, $\sqrt{\Delta}=960$ και ρίζες $\nu_1=10$ που απορρίπτεται ή $\nu_2=125$ που είναι δεκτό.

ΘΕΜΑ Γ

Γ1. Η f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με $f'(x)=\frac{1}{x^2+1}\left(x^2+1\right)'=\frac{2x}{x^2+1}$.

Είναι $f'(x)\ge 0 \Leftrightarrow \frac{2x}{x^2+1}\ge 0 \Leftrightarrow 2x\ge 0 \Leftrightarrow x\ge 0$.

Για κάθε $x>0$ είναι $f'(x)>0 \Rightarrow f\nearrow[0,+\infty)$ και για κάθε $x<0$ είναι

$f'(x)<0 \Rightarrow f\searrow(-\infty,0]$.

Η f έχει ελάχιστο το $f(0)=\frac{e^{\lambda-1}}{\lambda}+\ln(1)=\frac{e^{\lambda-1}}{\lambda}$.

Γ2. Εστω $g(\lambda)=\frac{e^{\lambda-1}}{\lambda}$, $\lambda>0$. Η g είναι παραγωγίσιμη στο $(0,+\infty)$ με

$g'(\lambda)=\frac{e^{\lambda-1}\lambda-e^{\lambda-1}}{\lambda^2}=\frac{e^{\lambda-1}(\lambda-1)}{\lambda^2}$.

Είναι $g'(\lambda)\ge 0 \Leftrightarrow \frac{e^{\lambda-1}(\lambda-1)}{\lambda^2}\ge 0 \Leftrightarrow \lambda\ge 1$.

Για κάθε $\lambda>1$ είναι $g'(\lambda)>0 \Rightarrow g\nearrow[1,+\infty)$ και για κάθε $\lambda\in(0,1)$ είναι

$g'(\lambda)<0 \Rightarrow g\searrow(0,1]$. Η g, δηλαδή το ελάχιστο της f, γίνεται ελάχιστη για $\lambda=1$.

Γ3. Είναι $0\le P(B)\le 1$ και $f\nearrow[0,+\infty)$, άρα $f(0)\le f(P(B))\le f(1) \Leftrightarrow 1\le P(A)\le 1+\ln 2$. Όμως $0\le P(A)\le 1$, άρα $P(A)=1$, οπότε το Α είναι το βέβαιο ενδεχόμενο. Τότε

$f(P(B))=1 \Leftrightarrow 1+\ln\left(P^2(B)+1\right)=1 \Leftrightarrow \ln\left(P^2(B)+1\right)=0 \Leftrightarrow P^2(B)+1=1 \Leftrightarrow$

$P^2(B)=0 \Leftrightarrow P(B)=0$, οπότε το Β είναι αδύνατο ενδεχόμενο.

Γ4. i. $P(A)=\lim_{x\to 1}\frac{f(0)-f'(x)}{(x-1)^2}=\lim_{x\to 1}\frac{1-\frac{2x}{x^2+1}}{(x-1)^2}=\lim_{x\to 1}\frac{\frac{x^2+1-2x}{x^2+1}}{(x-1)^2}=\lim_{x\to 1}\frac{\frac{(x-1)^2}{x^2+1}}{(x-1)^2} \Leftrightarrow$

$P(A)=\lim_{x\to 1}\frac{\cancel{(x-1)^2}}{\cancel{(x-1)^2}\left(x^2+1\right)}=\frac{1}{2}$.

$P(B)=f'(3)=\frac{2\cdot 3}{3^2+1}=\frac{6}{10}$

Είναι $P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)\Leftrightarrow P(A\cap B)=P(A)+P(B)-P(A\cup B)\Leftrightarrow$

$P(A\cap B)=\frac{1}{2}+\frac{6}{10}-\frac{4}{5}=\frac{3}{10}$

Αν τα Α,Β , τότε $A\cap B=\varnothing$ και $P(A\cap B)=0$ που είναι άτοπο.

ii. Είναι $K=(A\cup B)'$ και $P(K)=P\left[(A\cup B)'\right]=1-P(A\cup B)=1-\frac{4}{5}=\frac{1}{5}$.

Είναι $\Lambda=(A-B)\cup(B-A)$ και $P(\Lambda)=P\left[(A-B)\cup(B-A)\right]$ (1)

Είναι $P(A-B)=P(A)-P(A\cap B)=\frac{1}{2}-\frac{3}{10}=\frac{2}{10}$ και

$P(B-A)=P(B)-P(A\cap B)=\frac{6}{10}-\frac{3}{10}=\frac{3}{10}$.

Επειδή τα ενδεχόμενα $A-B$ και $B-A$ είναι ασυμβίβαστα, η (1) γίνεται:

$P(\Lambda)=\frac{2}{10}+\frac{3}{10}=\frac{1}{2}$.

ΘΕΜΑ Δ

Δ1. Η f είναι παραγωγίσιμη με $f'(x)=3(x-1)^2$.

Οι συντελεστές διεύθυνσης των εφαπτόμενων της C_f στα σημεία $A_1, A_2,\dots,A_{20}$ είναι

$\lambda_i=f'(x_i)=3(x_i-1)^2$

$s^2=1\Leftrightarrow \frac{1}{20}\sum_{i=1}^{20}(x_i-1)^2=1\Leftrightarrow \sum_{i=1}^{20}(x_i-1)^2=20$.

Είναι $\bar{\lambda}=\frac{\sum_{i=1}^{20}\lambda_i}{20}=\frac{\sum_{i=1}^{20}3(x_i-1)^2}{20}=\frac{3\sum_{i=1}^{20}(x_i-1)^2}{20}=3$

Δ2. $f''(x)=6(x-1)=6x-6$

$$\sum_{i=1}^{20}f''(x_i)=\sum_{i=1}^{20}(6x_i-6)=\sum_{i=1}^{20}6x_i-20\cdot 6=6\sum_{i=1}^{20}x_i-120=6\cdot 20-120=0$$

Δ3. $s^2=\frac{1}{20}\left(\sum_{i=1}^{20}x_i^2-\frac{\left(\sum_{i=1}^{20}x_i\right)^2}{20}\right)=\frac{\sum_{i=1}^{20}x_i^2}{20}-\left(\frac{\sum_{i=1}^{20}x_i}{20}\right)^2\Leftrightarrow 1=\overline{x^2}-\bar{x}^2\Leftrightarrow \overline{x^2}=1+1=2$

Δ4. Επειδή τα σημεία που βρίσκονται στο 2ο ή 4ο τεταρτημόριο έχουν $x<0$, αρκεί να δείξουμε ότι $x_i\geq 0,\ i=1,2,\dots,20$.

Είναι $(x_i-\bar{x})^2=(x_i-1)^2\leq\sum_{i=1}^{20}(x_i-1)^2=20s^2=20\Leftrightarrow |x_i-1|\leq\sqrt{20}\Leftrightarrow$

$-\sqrt{20}\leq x_i-1\leq\sqrt{20}\Leftrightarrow 1-\sqrt{20}\leq x_i\leq 1+\sqrt{20}\Leftrightarrow -4<1-2\sqrt{5}\leq x_i\leq 1+2\sqrt{5}<6$

Δ5. Εστω $M(x(t),y(t))$ το υλικό σημείο με $y(t)=f(x(t))=(x(t)-1)^3+1$

Είναι $y'(t)=3(x(t)-1)^2x'(t)$ και

$y'(t)=3x'(t)\Leftrightarrow 3(x(t)-1)^2x'(t)=3x'(t)\Leftrightarrow (x(t)-1)^2=1\Leftrightarrow x(t)-1=\pm 1$, άρα $x(t)=0$ ή $x(t)=2$

Άρα η θέση του Μ είναι στο σημείο $(0,0)$ ή στο $(2,2)$.