Λύσεις 2ου Επαναληπτικου διαγωνίσματος στα Μαθηματικά Γενικής Παιδείας

ΘΕΜΑ Α

Α1. Είναι $\frac{(t_1-\bar{x})+(t_2-\bar{x})+...+(t_\nu-\bar{x})}{\nu}=\frac{t_1+t_2+...+t_\nu}{\nu}-\frac{\nu\bar{x}}{\nu}=\bar{x}-\bar{x}=0$

Α2. Μια συνάρτηση f με πεδίο ορισμού το A λέμε ότι παρουσιάζει τοπικό μέγιστο στο $x_1\in A$, όταν $f(x)\le f(x_1)$ για κάθε x σε μια περιοχή του x_1,

Α3. Δύο ενδεχόμενα Α,Β λέγονται ασυμβίβαστα όταν $A\cap B=\varnothing$

Α4. **α)** Σ **β)** Λ **γ)** Λ **δ)** Σ **ε)** Λ

ΘΕΜΑ Β

Β1. Εστω c το πλάτος των κλάσεων. Τότε η πρώτη κλάση θα είναι η $[10,10+c)$, η δεύτερη κλάση η $[10+c,10+2c)$, η τρίτη $[10+2c,10+3c)$, η τέταρτη $[10+3c,10+4c)$ και η πέμπτη $[10+4c,10+5c]$.

Είναι $10+4c=18\Leftrightarrow c=2$

Β2. Εστω $F_2\%=x$, τότε $f_3\%=F_3\%-F_2\%=60-x$ και $f_2\%=F_2\%-f_1\%=x-10$

Για τον μέσο όρο των βαθμών, ισχύει:

$$\bar{x}=\sum_{i=1}^{5}x_i f_i=\sum_{i=1}^{5}\frac{x_i f_i\%}{100}\Leftrightarrow$$

$$\bar{x}=\frac{11\cdot 10+13(x-10)+15(60-x)+17\cdot 20+19\cdot 20}{100}\Leftrightarrow$$

$$\bar{x}=\frac{1600-2x}{100}=15{,}3\Leftrightarrow 1600-2x=1530\Leftrightarrow x=35$$

Άρα $F_2\%=35$, $f_2\%=25$, $f_3\%=25$.

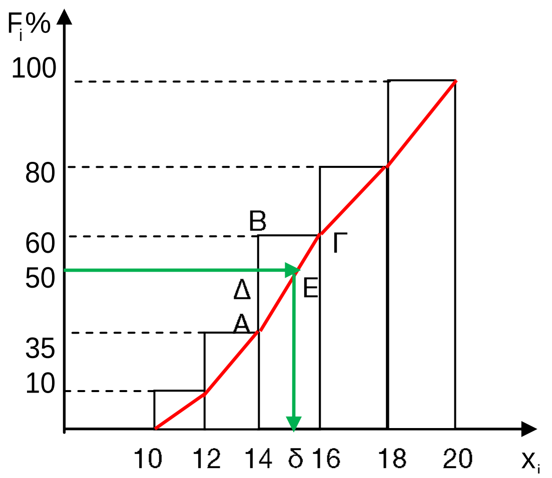
Βαθμοί $[...-...)$	x_i	$F_i\%$	$f_i\%$
10 – 12	11	10	10
12 – 14	13	35	25
14 – 16	15	60	25
16 – 18	17	80	20
18 – 20	19	100	20

Β3. Αρχικά κατασκευάζουμε το πολύγωνο αθροιστικών σχετικών συχνοτήτων. Η οριζόντια γραμμή στο 50% τέμνει το πολύγωνο στο Ε. Η διάμεσος είναι τιμή του διαστήματος 14 -16.

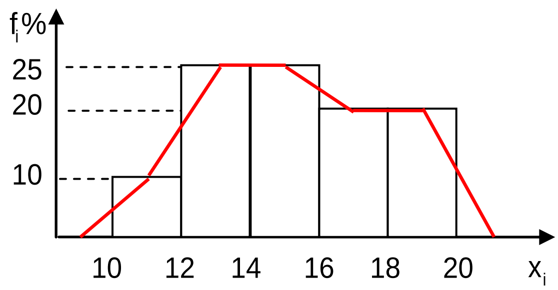
Τα τρίγωνα ΑΔΕ και ΑΒΓ είναι όμοια, οπότε:

$$\frac{A\Delta}{AB}=\frac{\Delta E}{B\Gamma}\Leftrightarrow\frac{50-35}{60-35}=\frac{\delta-14}{16-14}\Leftrightarrow\frac{15}{25}=\frac{\delta-14}{2}\Leftrightarrow$$

$\delta-14=1{,}2\Leftrightarrow\delta=15{,}2$



Β4. Από 13 έως 14 βρίσκεται το $\frac{1}{4}f_2\%=6{,}25\%$ των βαθμών, από 14 έως 16 το 25% των βαθμών και από 16 έως 17 το $\frac{1}{4}f_4\%=5\%$ των βαθμών. Άρα από 13 έως 17 βρίσκεται το 6,25% + 25% + 5% = 36,25% των βαθμών.



Β5. Το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από το πολύγωνο και τον οριζόντιο άξονα είναι ίσο με το άθροισμα των σχετικών συχνοτήτων επι της%, δηλαδή $E=100$.

Β6. Αν όλοι οι βαθμοί της κλάσης $[10,12)$ αυξηθούν κατά 2 μονάδες, τότε η κλάση θα γίνει $[12,14)$ και η κλάση $[10,12)$ θα πάψει να υπάρχει. Όμοια οι βαθμοί της κλάσης $[12,14)$ θα προστεθούν σε αυτούς της κλάσης $[14,16)$, οπότε η κλάση αυτή θα έχει σχετική συχνότητα $25\%+25\%=50\%$
Το νέο δείγμα βαθμών φαίνεται στο διπλανό πίνακα και η μέση τιμή του είναι:
$\bar{x}'=13\cdot 0{,}10+15\cdot 0{,}50+17\cdot 0{,}20+19\cdot 0{,}20=16$

Βαθμοί $[\ldots-\ldots)$	x_i	$F_i\%$	$f_i\%$
$12-14$	13	10	10
$14-16$	15	60	50
$16-18$	17	80	20
$18-20$	19	100	20

Β7. $s^2=(13-16)^2\cdot 0{,}10+(15-16)^2\cdot 0{,}50+(17-16)^2\cdot 0{,}20+(19-16)^2\cdot 0{,}20=3{,}4\Leftrightarrow$
$s\simeq 1{,}84$.
Αν η κατανομή ήταν κανονική τότε στο διάστημα $(\bar{x},\bar{x}+s)$ δηλαδή στο διάστημα $(6,\,17{,}84)$ θα βρίσκονταν το 34% των τιμών. Αυτό όμως δεν συμβαίνει γιατί στο διάστημα $[16,18)$ βρίσκεται μόλις το 20% των τιμών.

ΘΕΜΑ Γ

α) $$\bar{x}=\frac{\frac{1}{4}+P(\varnothing)+P(\Omega)+P(A\cap B)+\frac{1}{2}+P(A\cup B)}{6}\Leftrightarrow$$

$$\bar{x}=\frac{\frac{3}{4}+1+\cancel{P(A\cap B)}+P(A)+P(B)-\cancel{P(A\cap B)}}{6}\Leftrightarrow \bar{x}=\frac{\frac{3}{4}+1+\frac{1}{4}+\frac{1}{2}}{6}=\frac{5}{12}$$

Είναι $\varnothing\subseteq A\cap B\Rightarrow 0=P(\varnothing)\le P(A\cap B)$, $A\cap B\subseteq A\Rightarrow P(A\cap B)\le P(A)$,
$B\subseteq A\cup B\Rightarrow P(B)\le P(A\cup B)$ και $A\cup B\subseteq\Omega\Rightarrow P(A\cup B)\le P(\Omega)=1$.

Οι τιμές τοποθετημένες σε αύξουσα σειρά, είναι: $0,\ P(A\cap B),\ \frac{1}{4},\ \frac{1}{2},\ P(A\cup B),\ 1$

Η διάμεσός τους είναι $\delta=\dfrac{\frac{1}{4}+\frac{1}{2}}{2}=\dfrac{3}{8}$.

β) Από τον προσθετικό νόμο, έχουμε $P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)=\frac{3}{4}-P(A\cap B)$

Είναι $\sum_{i=1}^{6}x_i=0+\cancel{P(A\cap B)}+\frac{1}{4}+\frac{1}{2}+\frac{3}{4}-\cancel{P(A\cap B)}+1=\frac{5}{2}$ και

$$\sum_{i=1}^{6}x_i^2=0^2+P^2(A\cap B)+\frac{1}{16}+\frac{1}{4}+\left(\frac{3}{4}-P(A\cap B)\right)^2+1\Leftrightarrow$$

$$\sum_{i=1}^{6}x_i^2=P^2(A\cap B)+\frac{5}{16}+\frac{9}{16}-\frac{3}{2}P(A\cap B)+P^2(A\cap B)+1=2P^2(A\cap B)-\frac{3}{2}P(A\cap B)+\frac{15}{8}$$

$$s^2=\frac{1}{5}\left(\sum_{i=1}^{5}x_i^2-\frac{\left(\sum_{i=1}^{5}x_i\right)^2}{5}\right)=\frac{1}{6}\left(2P^2(A\cap B)-\frac{3}{2}P(A\cap B)+\frac{15}{8}-\frac{\left(\frac{5}{2}\right)^2}{6}\right)\Leftrightarrow$$

$$s^2=\frac{1}{3}P^2(A\cap B)-\frac{1}{4}P(A\cap B)+\frac{5}{36}$$

γ) Εστω $P(A\cap B)=x$ και $s^2=f(x)$, τότε $f(x)=\frac{1}{3}x^2-\frac{1}{4}x+\frac{5}{36}$

Επειδή $0\le P(A\cap B)\le P(A)=\frac{1}{4}$, η f έχει πεδίο ορισμού το $A_f=\left[0,\frac{1}{4}\right]$

Η f είναι παραγωγίσιμη στο $\left[0,\frac{1}{4}\right]$ με $f'(x)=\frac{2}{3}x-\frac{1}{4}=\frac{8x-3}{12}$

Είναι

$$0\le x\le\frac{1}{4}\Leftrightarrow 0\le 8x\le 2\Leftrightarrow -3\le 8x-3\le -1\Leftrightarrow\frac{-3}{12}\le\frac{8x-3}{12}\le-\frac{1}{12}\Rightarrow f'(x)<0\Rightarrow f\downarrow\left[0,\frac{1}{4}\right].$$

Η f έχει ελάχιστο για $x=\frac{1}{4}$, άρα η διασπορά γίνεται ελάχιστη όταν $P(A\cap B)=\frac{1}{4}$, τότε

$$P(A\cup B)=\frac{3}{4}-\frac{1}{4}=\frac{1}{2}$$

δ) i. $P(A\cap B')=P(A-B)=P(A)-P(A\cap B)=\frac{1}{4}-\frac{1}{4}=0$

ii. Επειδή τα ενδεχόμενα $A\cap B'$ και $B\cap A'$ είναι ασυμβίβαστα, είναι

$$P\left[(A\cap B')\cup(B\cap A')\right]=P(A\cap B')+P(B\cap A')=0+P(B)-P(A\cap B)=\frac{1}{4}$$

iii. Είναι $A'\cap B'=(A\cup B)'$, άρα $P(A'\cap B')=P\left((A\cup B)'\right)=1-P(A\cup B)=1-\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$

ΘΕΜΑ Δ

α) Επειδή το σημείο Κ ανήκει στη C_f είναι $f(1)=-5\Leftrightarrow$

$$\frac{1}{2}N(A\cup B)-(N(A)+N(B))-\frac{1}{2}N(B)=-20\Leftrightarrow\frac{1}{2}N(A\cup B)-N(A)-\frac{3}{2}N(B)=-20\quad(1)$$

Είναι $f(x)=N(A\cup B)x-(N(A)+N(B))\ge 0\Leftrightarrow x\ge\frac{N(A)+N(B)}{N(A\cup B)}$

Για κάθε $x<\frac{N(A)+N(B)}{N(A\cup B)}$ είναι $f'(x)<0\Rightarrow f\downarrow\left(-\infty,\frac{N(A)+N(B)}{N(A\cup B)}\right]$ και για κάθε $x>\frac{N(A)+N(B)}{N(A\cup B)}$ είναι $f'(x)>0\Rightarrow f\uparrow\left[\frac{N(A)+N(B)}{N(A\cup B)},+\infty\right)$. Η f έχει ελάχιστο στο $x=\frac{N(A)+N(B)}{N(A\cup B)}$, άρα $\frac{N(A)+N(B)}{N(A\cup B)}=1\Leftrightarrow N(A\cup B)=N(A)+N(B)\Leftrightarrow$

$\frac{N(A\cup B)}{N(\Omega)}=\frac{N(A)}{N(\Omega)}+\frac{N(B)}{N(\Omega)}\Leftrightarrow P(A\cup B)=P(A)+P(B)$, άρα τα A,B είναι ασυμβίβαστα.

β) Είναι $N(A)+N(B)=30\Leftrightarrow N(B)=30-N(A)$ (2), οπότε η (1) γίνεται:

$$\frac{1}{2}(N(A)+N(B))-N(A)-\frac{3}{2}N(B)=-20\Leftrightarrow\frac{1}{2}N(A)+N(B)=20\overset{(2)}{\Rightarrow}$$

$$\frac{1}{2}N(A)+30-N(A)=20\Leftrightarrow N(A)=20$$

γ) Επειδή τα A,B είναι ασυμβίβαστα ισχύει ότι

$$B\subseteq A'\Rightarrow P(B)\le P(A')\Leftrightarrow \frac{1}{P(B)}\ge\frac{1}{P(A')}\Leftrightarrow\frac{1}{P(B)}\ge\frac{1}{1-P(A)}\Leftrightarrow$$

$$\frac{1}{P(B)}+\frac{4}{P(A)}\ge\frac{1}{1-P(A)}+\frac{4}{P(A)}\Leftrightarrow 9\ge\frac{1}{1-P(A)}+\frac{4}{P(A)}\Leftrightarrow$$

$$9(1-P(A))P(A)\ge P(A)+4-4P(A)\Leftrightarrow 9P(A)-9^2P(A)\ge 4-3P(A)\Leftrightarrow$$

$$9P^2(A)-12P(A)+4\le 0\Leftrightarrow(3P(A)-2)^2\le 0\Leftrightarrow 3P(A)-1=0\Leftrightarrow P(A)=\frac{2}{3}\Leftrightarrow$$

$$\frac{N(A)}{N(\Omega)}=\frac{2}{3}\Leftrightarrow N(\Omega)=\frac{3}{2}N(A)=30.$$

δ) Από τη σχέση (2) έχουμε $N(B)=30-N(A)=10$ και επειδή $A\cap B=\varnothing$, είναι $N(A\cup B)=N(A)+N(B)=30$, οπότε $f(x)=15x^2-30x-5$

Για να δέχεται η C_f εφαπτομένη παράλληλη στην ε, πρέπει να υπάρχει $x\in\mathbb{R}$ για το οποίο να ισχύει: $f'(x)=30\Leftrightarrow 30x-30=30\Leftrightarrow 30x=60\Leftrightarrow x=2$. Είναι $f(2)=-5$ και η εφαπτομένη έχει εξίσωση $y-f(2)=f'(2)(x-2)\Leftrightarrow y+5=30(x-2)\Leftrightarrow y=30x-65$.

Για $x=0$ είναι $y=-65$ και για $y=0$ είναι $x=\frac{13}{6}$. Η εφαπτομένη τέμνει τους άξονες στα σημεία $A(0,-65)$ και $B\left(\frac{13}{6},0\right)$. Το εμβαδόν του τριγώνου ΟΑΒ είναι:

$$(OAB)=\frac{1}{2}(OA)(OB)=\frac{1}{2}\cdot 65\cdot\frac{13}{6}=\frac{845}{12}$$