3ο Κεφάλαιο: Τρίγωνα

Στοιχεία και είδη τριγώνων

σελίδες 35 - 36

i. Ποια είναι τα κύρια στοιχεία τριγώνου;
ii. Πως διακρίνονται τα τρίγωνα με βάση τις πλευρές τους και τι γνωρίζετε γι΄αυτά;
iii. Πως διακρίνονται τα τρίγωνα με βάση τις γωνίες τους και τι γνωρίζετε σε κάθε περίπτωση;
iv. Ποια είναι τα δευτερύοντα στοιχεία τριγώνου;
v. Να δώσετε τον ορισμό της διαμέσου, της διχοτόμου και του ύψους τριγώνου.
vi. Ποιες πλευρές σε δύο ίσα τρίγωνα λέγονται αντίστοιχες ή ομόλογες;

1ο Κριτήριο ισότητας τριγώνων

σελίδες 36 - 38

i. Να διατυπώσετε το 1ο κριτήριο ισότητας τριγώνων (ΠΓΠ)
ii. Να αποδείξετε ότι σε κάθε ισοσκελές τρίγωνο:
   - Οι προσκείμενες στη βάση γωνίες είναι ίσες.
   - Η διχοτόμος της γωνίας της κορυφής είναι διάμεσος και ύψος.
iii. Να αποδείξετε ότι κάθε σημείο της μεσοκαθέτου ενός ευθύγραμμα τμήματος, ισαπέχει από τα άκρα του.
iv. Να αποδείξετε ότι αν δύο τόξα ενός κύκλου είναι ίσα, τότε και οι χορδές τους είναι ίσες.

Βασικές ασκήσεις

1. Σε ισόπλευρο τρίγωνο ΑΒΓ προεκτείνουμε τις πλευρές ΑΒ,ΒΓ,ΓΑ και στις προεκτάσεις τους θεωρούμε τμήματα $ΒΚ = ΓΛ = ΑΜ$. Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο ΚΛΜ είναι ισόπλευρο.

2. Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ. Στις προεκτάσεις των ίσων πλευρών του ΒΑ,ΓΑ θεωρούμε ίσα τμήματα ΑΔ,ΑΕ αντίστοιχα. Αν Μ το μέσο της βάσης ΒΓ, να αποδείξετε ότι το τρίγωνο ΜΔΕ είναι ισοσκελές.

3. Δίνεται κύκλος κέντρου Ο και χορδή του ΑΒ. Προεκτείνουμε την ΑΒ και προς τα δύο της άκρα, κατά ίσα τμήματα ΑΓ και ΒΔ αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι: $ΟΓΑ = ΟΔΒ$.

2ο – 3ο Κριτήριο ισότητας τριγώνων

σελίδες 39 – 43

i. Να διατυπώσετε το 2ο (ΓΠΓ) και το 3ο (ΠΠΠ) κριτήριο ισότητας τριγώνων.
ii. Να αποδείξετε ότι αν δύο τρίγωνα έχουν μια πλευρά και τις προσκείμενες σε αυτή γωνίες ίσες μία προς μία, τότε τα τρίγωνα είναι ίσα.
iii. Να αποδείξετε ότι η διάμεσος ισοσκελούς τριγώνου που αντιστοιχεί στη βάση του, είναι διχοτόμος και ύψος.
iv. Να αποδείξετε ότι κάθε σημείο που ισαπέχει από τα άκρα ενός τμήματος, ανήκει στη μεσοκάθετό του.
v. Να αποδείξετε ότι αν οι χορδές δύο τόξων ενός κύκλου, μικρότερων του ημικυκλίου, είναι ίσες τότε και τα τόξα είναι ίσα.

Βασικές ασκήσεις

4. Σε τρίγωνο ΑΒΓ προεκτείνουμε τη διάμεσο ΑΜ κατά ίσο τμήμα ΜΔ. Να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα ΑΒΓ και ΒΓΔ είναι ίσα.

5. Να αποδείξετε ότι οι διχοτόμοι των γωνιών της βάσης ισοσκελούς τριγώνου είναι ίσες.

6. Εστω ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ $(AB = A\Gamma)$. Η μεσοκάθετος της πλευράς ΑΓ τέμνει την προέκταση της ΓΒ στο Δ. Προεκτείνουμε τη ΔΑ κατά τμήμα $AE = \Delta B$.Να αποδείξετε ότι:
α) το τρίγωνο ΔΑΓ είναι ισοσκελές,
β) το τρίγωνο ΓΔΕ είναι επίσης ισοσκελές.

Κριτήρια ισότητας ορθογωνίων τριγώνων

σελίδες 44 – 48

i. Ποια είναι τα κριτήρια ισότητας ορθογωνίων τριγώνων;
ii. Να αποδείξετε ότι η κάθετος που φέρεται από το κέντρο ενός κύκλου προς μια χορδή του, διχοτομεί τη χορδή και το αντίστοιχο τόξο της.
iii. Να αποδείξετε ότι δύο χορδές ενός κύκλου είναι ίσες αν και μόνο αν τα αποστήματά τους είναι ίσα.
iv. Να αποδείξετε ότι κάθε σημείο της διχοτόμου μιας γωνίας ισαπέχει από τις πλευρές της και αντίστροφα κάθε εσωτερικό σημείο της γωνίας που ισαπέχει από τις πλευρές, είναι σημείο της διχοτόμου.

Βασικές ασκήσεις

7. Να αποδείξετε ότι τα ύψη ισοσκελούς τριγώνου που αντιστοιχούν στις ίσες πλευρές του, είναι ίσα.

8. Να αποδείξετε ότι τα μέσα των ίσων πλευρών ισοσκελούς τριγώνου ισαπέχουν:
α) από τη βάση του **β)** από τις ίσες πλευρές του.

9. Εστω ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ $(AB = A\Gamma)$ και Μ το μέσο της βάσης ΒΓ.
Να αποδείξετε ότι:
α) το Μ ισαπέχει από τις ίσες πλευρές του τριγώνου,
β) η ΑΜ είναι διχοτόμος της γωνίας που σχηματίζουν οι αποστάσεις του Μ από τις ίσες πλευρές του.

10. Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ $\left(A = 90^\circ\right)$ και η διχοτόμος του ΒΔ. Από το Δ φέρουμε $\Delta E \perp B\Gamma$, που τέμνει την ΑΒ στο Ζ. Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο ΒΓΖ είναι ισοσκελές.

11. Δίνεται κύκλος (Ο,R), οι ίσες χορδές του ΑΒ,ΓΔ και τα αποστήματά τους ΟΚ και ΟΛ αντίστοιχα. Αν οι προεκτάσεις των ΒΑ και ΔΓ τέμνονται στο Μ, να αποδείξετε ότι:
α) τα τρίγωνα ΜΟΚ και ΜΟΛ είναι ίσα, **β)** $MA = M\Gamma$ και $MB = M\Delta$

Κύκλος – Μεσοκάθετος - διχοτόμος

σελίδα 49

i. Τι είναι ο γεωμετρικός τόπος;
ii. Τι ονομάζεται κύκλος;
iii. Τι ονομάζεται μεσοκάθετος τμήματος;
v. Τι ονομάζεται διχοτόμος γωνίας;

Κεντρική συμμετρία – Αξονική συμμετρία

σελίδες 50 - 52

i. Πότε δύο σχήματα Σ και Σ΄ λέγονται συμμετρικά ως προς ένα σημείο Ο; Πως ονομάζεται το Ο;
ii. Πότε ένα σχήμα παρουσιάζει κεντρική συμμετρία;
iii. Το ευθύγραμμο τμήμα, η ευθεία και ο κύκλος έχουν κέντρο συμμετρίας; Αν ναι τότε ποιο;
iv. Πότε δύο σχήματα Σ και Σ΄ λέγονται συμμετρικά ως προς ευθεία ε; Πως λέγεται η ευθεία ε στη περίπτωση αυτή;
v. Πότε ένα σχήμα παρουσιάζει αξονική συμμετρία;
vi. Ποιος είναι ο άξονας συμμετρίας ενός ευθύγραμμου τμήματος και μιας ευθείας x΄x;
vii. Πόσους άξονες συμμετρίας έχει ένας κύκλους και ποιους;
viii. Ποιοι είναι οι άξονες συμμετρίας σε ένα ισοσκελές και σε ένα ισόπλευρο τρίγωνο;

Σχέση εξωτερικής και απέναντι γωνίας

σελίδα 53

i. Τι σχέση έχει μια εξωτερική γωνία τριγώνου με κάθε μια από τις απέναντι γωνίες του τριγώνου;
ii. Πόσες ορθές ή αμβλείες μπορεί να έχει ένα τρίγωνο;
iii. Τι γνωρίζετε για το άθροισμα δύο γωνιών τριγώνου;

Ανισοτικές σχέσεις πλευρών και γωνιών

σελίδα 54

i. Τι σχέση έχουν δύο γωνίες τριγώνου σε σχέση με τις απέναντι πλευρές τους;
ii. Τι γνωρίζετε για τη πλευρά τριγώνου που βρίσκεται απέναντι από ορθή ή αμβλεία γωνία;
iii. Αν ένα τρίγωνο έχει δύο γωνίες ή και τις τρείς γωνίες ίσες, πώς λέγεται;

Ανισοτικές σχέσεις πλευρών και γωνιών

σελίδες 54 – 55

i. Να διατυπώσετε τη τριγωνική ανισότητα και να συμπληρώσετε τα κενά στη παρακάτω σχέση: $\beta-\gamma......\alpha......\beta+\gamma$, $\beta\geq\gamma$.
ii. Τι σχέση έχει κάθε χορδή κύκλου με τη διάμετρό του;

Βασικές ασκήσεις

12. Υπάρχει τρίγωνο ΑΒΓ με $\alpha=\frac{\gamma}{3}$ και $\beta=\frac{3\gamma}{5}$; Δικαιολογήστε την απάντησή σας.

13. Αν Μ σημείο της βάσης ΒΓ ισοσκελούς τριγώνου ΑΒΓ, να αποδείξετε ότι: $AM<AB$.

14. Σε ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ $\left(A=90^\circ\right)$, η διχοτόμος της γωνίας Γ τέμνει την πλευρά ΑΒ στο Δ. Να αποδείξετε ότι $ΑΔ<ΔΒ$.

15. Θεωρούμε ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ $(ΑΒ=ΑΓ)$ και I το σημείο τομής των διχοτόμων των γωνιών Β,Γ. Να αποδείξετε ότι:

α) το τρίγωνο ΒΙΓ είναι ισοσκελές **β)** η ΑΙ είναι διχοτόμος της $\hat{A}$.

Κάθετες και πλάγιες

σελίδες 58 – 59

- **i.** Να αποδείξετε ότι αν δύο πλάγια τμήματα είναι ίσα, τότε τα ίχνη τους ισαπέχουν από το ίχνος της καθέτου και αντιστρόφως.
- **ii.** Από σημείο εκτός ευθεία φέρουμε το κάθετο και δύο πλάγια τμήματα.
  α) Τι σχέση έχει το κάθετο τμήμα με κάθε πλάγιο;
  β) Αν τα δύο πλάγια τμήματα είναι άνισα, τότε τι σχέση έχουν τα ίχνη τους από το το ίχνος της κάθετης;

Σχετική θέση ευθείας και κύκλου – Εφαπτόμενα τμήματα

σελίδες 60 – 63

- **i.** Πότε μια ευθεία είναι εξωτερική ενός κύκλου (Ο,R); Ποια συνθήκη συνδέει την απόσταση δ του κέντρου του κύκλου από την ευθεία;
- **ii.** Πότε μια ευθεία είναι εφαπτομένη ενός κύκλου; Ποια συνθήκη συνδέει την απόσταση δ του κέντρου του κύκλου από την ευθεία;
- **iii.** Τι σχέση έχει η ακτίνα που καταλήγει στο σημείο επαφής με την εφαπτομένη;
- **iv.** Πότε μια ευθεία τέμνει έναν κύκλο (Ο,R); Ποια συνθήκη συνδέει την απόσταση δ του κέντρου του κύκλου από την ευθεία;
- **v.** Μια ευθεία και ένας κύκλος πόσα το πολύ κοινά σημεία μπορούν να έχουν;
- **vi.** Να αποδείξετε ότι τα εφαπτόμενα τμήματα κύκλου, που άγονται από σημείο εκτός αυτού είναι ίσα μεταξύ τους.
- **vii.** Τι σχέση έχει η διακεντρική ευθεία που άγεται από σημείο Ρ εκτός κύκλου (Ο,R) με το τμήμα που έχει άκρα τα σημεία επαφής των εφαπτομένων του κύκλου που άγονται από το Ρ; Ποιες γωνίες διχοτομεί η ΟΡ;

Βασικές ασκήσεις

16. Δίνεται κύκλος (Ο,ρ), μια διάμετρός του ΑΒ και οι εφαπτόμενες $\varepsilon_1,\varepsilon_2$ του κύκλου στα Α και Β.Αν μια τρίτη εφαπτομένη ε τέμνει τις $\varepsilon_1,\varepsilon_2$ στα Γ,Δ, να αποδείξετε ότι $\hat{ΓΟΔ}=90^\circ$.

17. Από εξωτερικό σημείο Ρ ενός κύκλου κέντρου Ο, φέρουμε τα εφαπτόμενα τμήματα ΡΑ και ΡΒ. Αν Μ είναι ένα εσωτερικό σημείο του τμήματος ΟΡ, να αποδείξετε ότι: $\hat{ΜΑΡ}=\hat{ΜΒΡ}$.

Σχετικές θέσεις δύο κύκλων

σελίδες 63 – 66

- **i.** Ποιο τμήμα ονομάζεται διάκεντρος δύο κύκλων;
- **ii.** Ποιε συνθήκες πρέπει να ικανοποιούνται ώστε δύο κύκλοι να μην έχουν κανένα κοινό σημείο;

iii. Πότε δύο κύκλοι λέγονται εφαπτόμενοι; Με πόσους τρόπους μπορούν να εφάπτονται δύο κύκλοι; Ποια συνθήκη συνδέει τη διάκεντρο δ με τις ακτίνες των κύκλων σε κάθε περίπτωση;

iv. Πότε δύο κύκλοι τέμνονται; Ποια συνθήκη συνδέει τη διάκεντρο δ με τις ακτίνες των δύο κύκλων; Ποια είναι η κοινή χορδή των δύο κύκλων;

v. Να αποδείξετε ότι η διάκεντρος δύο τεμνόμενων κύκλων είναι μεσοκάθετος της κοινής χορδής τους.

vi. Αν δύο ίσοι κύκλοι τέμνονται τότε τι σχέση έχει η διάκεκτρος με τη κοινή χορδή τους;

Βασικές ασκήσεις

18. Δίνεται κύκλος (Ο,ρ) και μια ακτίνα του ΟΑ. Γράφουμε κύκλο με διάμετρο ΟΑ. Ποια είναι η σχετική θέση των δύο κύκλων;

19. Δίνεται κύκλος (Ο,ρ) και εξωτερικό σημείο του Ρ, ώστε $ΟΡ < 2ρ$. Γράφουμε κύκλο (Ο,2ρ). Να αποδείξετε ότι:
α) ο κύκλος (Ο,2ρ) τέμνει τον κύκλο (Ρ,ΡΟ) σε δύο σημεία Γ και Δ.
β) τα τμήματα ΟΓ και ΟΔ τέμνουν τον κύκλο (Ο,ρ) στα σημεία Α και Β.
γ) τα ΡΑ και ΡΒ εφάπτονται στον (Ο,ρ).

Γενικές ασκήσεις 3ου κεφαλαίου

20. Το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ισοσκελές (ΑΒ=ΑΓ) και $ΒΔ = ΓΕ$. Αν Κ,Λ είναι οι προβολές των Β,Γ στις ΑΔ και ΑΕ αντίστοιχα,να αποδείξετε ότι:
α) το τρίγωνο ΑΔΕ είναι ισοσκελές.
β) τα Β,Γ ισαπέχουν από τις ΑΔ και ΑΕ αντίστοιχα.
γ) $ΑΚ = ΑΛ$.

21. Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ$(ΑΒ = ΑΓ)$ και έστω Δ,Ε σημεία της πλευράς ΒΓ τέτοια, ώστε $ΒΔ = ΔΕ = ΕΓ$. Αν Μ και Ν τα μέσα των ΑΒ και ΑΓ αντίστοιχα και Κ το σημείο τομής των ευθειών ΜΔ και ΝΕ, να αποδείξετε ότι:
α) το τρίγωνο ΑΔΕ είναι ισοσκελές **β)** $ΜΔ = ΝΕ$ **γ)** $\widehat{ΜΔΑ} = \widehat{ΝΕΑ}$
δ) το τρίγωνο ΜΝΚ είναι ισοσκελές **ε)** το τρίγωνο ΒΚΓ είναι ισοσκελές.

22. Εστω ΑΜ η διάμεσος και ΑΔ το ύψος τριγώνου ΑΒΓ. Προεκτείνουμε τις ΑΔ,ΑΜ κατά ίσα τμήματα ΔΕ και ΜΖ αντίστοιχα. Αν Κ είναι το σημείο τομής των ΒΖ, ΓΕ, να αποδείξετε ότι:
α) $\widehat{ΑΓΒ} = \widehat{ΒΓΕ}$ **β)** $ΒΖ = ΓΕ$
γ) $ΒΚ = ΚΓ$ και $ΚΕ = ΚΖ$ **δ)** το τρίγωνο ΜΕΖ είναι ισοσκελές.

23. Στις προεκτάσεις των πλευρών ΒΑ,ΓΑ σκαληνού τριγώνου ΑΒΓ, θεωρούμε τα σημεία Δ και Ε αντίστοιχα τέτοια, ώστε $ΑΔ = ΓΑ$ και $ΑΕ = ΒΑ$. Αν οι ΒΓ,ΔΕ τέμνονται στο Μ, να αποδείξετε ότι:
α) $\widehat{ΑΕΔ} = \widehat{ΑΒΓ}$
β) το τρίγωνο ΜΕΒ είναι ισοσκελές
γ) $\widehat{ΑΜΕ} = \widehat{ΑΜΒ}$
δ) η ευθεία ΜΑ είναι μεσοκάθετος των τμημάτων ΒΕ και ΓΔ.

4ο Κεφάλαιο: Παράλληλες ευθείες

Εισαγωγή – Τέμνουσες δύο ευθειών

σελίδες 75 – 79

i. Ποιε είναι οι σχετικές θέσεις δύο ευθειών;
ii. Πότε δύο ευθείες λέγονται παράλληλες;
iii. Να αποδείξετε ότι αν δύο ευθείες τεμνόμενες από τρίτη σχηματίζουν δύο εντός εναλλάξ γωνίες ίσες, τότε είναι παράλληλες.
iv. Να αποδείξετε ότι δύο ευθείες κάθετες στην ίδια ευθεία, σε διαφορετικά σημεία της, είναι μεταξύ τους παράλληλες.
v. Ποιο είναι το αίτημα παραλληλίας;
vi. Εστω ότι δύο παράλληλες ευθείες τέμνονται από τρίτη ευθεία. Να συμπληρώσετε τα κενά στις παρακάτω προτάσεις:
α) οι εντός εναλλάξ γωνίες είναι ....

β) οι εντός εκτός και επι τα αυτά μέρη γωνίες είναι..........................

γ) οι εντός και επι τα αυτά μέρη γωνίες είναι ....

vii. Να αποδείξετε ότι αν δύο διαφορετικές ευθείες ε_1 και ε_2 είναι παράλληλες προς μια τρίτη ευθεία ε, τότε είναι και μεταξύ τους παράλληλες.
viii. Να αποδείξετε ότι αν μια ευθεία τέμνει μία από δύο παράλληλες ευθείες τότε θα τέμνει και την άλλη.
ix. Αν δύο ευθείες τεμνόμενες από τρίτη σχηματίζουν τις εντός και επι τα αυτά μέρη γωνίες με άθροισμα μικρότερο από 2 ορθές, τότε που τέμνονται οι ευθείες αυτές;
x. Ποια σχέση έχει το μέτρο δύο γωνιών με πλευρές παράλληλες;
xi. Ποια σχέση έχουν οι διχοτόμοι δύο εντός εναλλάξ γωνιών; Ποια σχέση έχουν οι διχοτόμοι δύο εντός και επι τα αυτά μέρη γωνιών;

Αξιοσημείωτοι κύκλοι τριγώνου

σελίδες 80 – 83

i. Ποιος κύκλος λέγεται περιγεγραμμένος σε ένα τρίγωνο; Πως ονομάζεται το κέντρο του;
ii. Να αποδείξετε ότι οι τρεις μεσοκάθετοι ενός τριγώνου διέρχονται από το ίδιο σημείο το οποίο είναι κέντρο κύκλου που διέρχεται από τις κορυφές του τριγώνου.
iii. Ποιος κύκλος λέγεται εγγεγραμμένος σ ένα τρίγωνο; Πως ονομάζεται το κέντρο του;
iv. Να αποδείξετε ότι οι διχοτόμοι των γωνιών ενός τριγώνου διέρχονται από το ίδιο σημείο, το οποίο είναι κέντρο κύκλου που εφάπτεται και στις τρείς πλευρές του τριγώνου.
v. Ποιος κύκλος λέγεται παρεγγεγραμμένος κύκλος τριγώνου; Πως ονομάζεται το κέντρο του και πως βρίσκεται;

Βασικές ασκήσεις

24. Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ και ευθεία ε παράλληλη προς τη βάση ΒΓ, που τέμνει τις ΑΒ και ΑΓ στα Δ και Ε αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο ΑΔΕ είναι ισοσκελές.

25. Δίνεται γωνία $x\hat{O}y$ και σημείο Α της διχοτόμου της. Αν η παράλληλη από το Α προς την Οx τέμνει την Οy στο Β, να αποδείξετε ότι το τρίγωνο ΟΑΒ είναι ισοσκελές.

26. Στις προεκτάσεις των πλευρών ΒΑ,ΓΑ τριγώνου ΑΒΓ παίρνουμε αντίστοιχα τμήματα $A\Delta = AB$ και $AE = A\Gamma$. Να αποδείξετε ότι: $\Delta E \parallel B\Gamma$.

27. Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ και η διχοτόμος του ΑΔ. Από τη κορυφή Β φέρουμε $ΒΕ \parallel ΑΔ$ που τέμνει την προέκταση της ΓΑ στο Ε. Να αποδείξετε ότι $ΕΓ = ΑΒ + ΑΓ$.

28. Από το έγκεντρο Ι, τριγώνου ΑΒΓ φέρουμε ευθεία παράλληλη της ΒΓ που τέμνει τις ΑΒ και ΑΓ στα σημεία Δ και Ε αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι: $ΔΕ = ΒΔ + ΓΕ$.

Αθροισμα γωνιών τριγώνου

σελίδες 83 – 84

- **i.** Να αποδείξετε ότι το άθροισμα γωνιών κάθε τριγώνου είναι 2 ορθές.
- **ii.** Να αποδείξετε ότι κάθε εξωτερική γωνία τριγώνου είναι ίση με το άθροισμα των δύο απέναντι εσωτερικών γωνιών του τριγώνου.
- **iii.** Αν δύο τρίγωνα έχουν δύο γωνίες ίσες μία προς μία, τότε τι σχέση έχουν οι τρίτες γωνίες τους;
- **iv.** Να αποδείξετε ότι δύο οξείες γωνίες που έχουν τις πλευρές τους κάθετες είναι ίσες.
- **v.** Αν δύο αμβλείες γωνίες έχουν τις πλευρές τους κάθετες, τότε τι ισχύει για το μέτρο τους; Αν η μία οξεία γωνί και μία αμβλεία έχουν πλευρές κάθετες τότε τι ισχύει για το μέτρο τους;
- **vi.** Να αποδείξετε ότι το άθροισμα των γωνιών κυρτού ν-γώνου είναι $2ν - 4$ ορθές.
- **vii.** Να αποδείξετε ότι το άθροισμα των εξωτερικών γωνιών κυρτού ν-γώνου είναι 4 ορθές.

Βασικές ασκήσεις

29. Σε ισοσκελές τρίγωνο $ΑΒΓ\left(ΑΒ = ΑΓ\right)$ είναι $Α = \frac{Β}{2}$. Αν Ι είναι το έγκεντρο του τριγώνου, να υπολογίσετε τη γωνία $Β\hat{Ι}Γ$.

30. Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ και το ύψος του ΑΔ. Να αποδείξετε ότι $Β = ΔΑΓ$ και $Γ = ΔΑΒ$.

31. Σε τρίγωνο ΑΒΓ είναι $Β_{εξ} = 90^\circ + \frac{Α}{2}$. Να αποδείξετε ότι $ΑΒ = ΑΓ$.

32. Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ με $Β > Γ$ και η διχοτόμος του ΑΔ. Να αποδείξετε ότι

α) $ΑΔΓ - ΑΔΒ = Β - Γ$ **β)** $ΑΔΒ = 90^\circ - \frac{Β - Γ}{2}$ και $ΑΔΓ = 90^\circ + \frac{Β - Γ}{2}$

33. Σε τρίγωνο ΑΒΓ με $Β > Γ$ φέρουμε το ύψος του ΑΔ και τη διχοτόμο του ΑΕ. Να αποδείξετε ότι: $ΔΑΕ = \frac{Β - Γ}{2}$.

34. Από τυχαίο σημείο Δ της βάσης ΒΓ ισοσκελούς τριγώνου ΑΒΓ φέρουμε τη $ΔΕ \perp ΑΓ$. Να αποδείξετε ότι $Α = 2ΕΔΓ$.

35. Σε ορθογώνιο τρίγωνο $ΑΒΓ\left(Α = 90^\circ\right)$ το ύψος του ΑΔ και η διχοτόμος του ΒΖ τέμνονται σε σημείο Ε. Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο ΑΕΖ είναι ισοσκελές.

5ο Κεφάλαιο: Παραλληλόγραμμα - Τραπέζια

Παραλληλόγραμμα

σελίδες 97 - 100

i. Ποιο τετράπλευρο λέγεται παραλληλόγραμμο;
ii. Να αποδείξετε ότι σε κάθε παραλληλόγραμμο οι απέναντι πλευρές του και οι απέναντι γωνίες του είναι ίσες.
iii. Να αποδείξετε ότι σε κάθε παραλληλόγραμμο οι διαγώνιοί του διχοτομούνται.
iv. Τι ονομάζεται ύψος του παραλληλογράμμου;
v. Να αποδείξετε ότι αν σε ένα τετράπλευρο οι απέναντι πλευρές του είναι ανα δύο ίσες, τότε είναι παραλληλόγραμμο.
vi. Να αποδείξετε ότι αν σε ένα τετράπλευρο δύο απέναντι πλευρές του είναι ίσες και παράλληλες, τότε είναι παραλληλόγραμμο.
vii. Να αποδείξετε ότι αν σε ένα τετράπλευρο οι απέναντι γωνίες του είναι ανα δύο ίσες, τότε είναι παραλληλόγραμμο.
viii. Να αποδείξετε ότι αν σε ένα τετράπλευρο οι διαγώνιοί του διχοτομούνται, τότε είναι παραλληλόγραμμο.

Βασικές ασκήσεις

36. Δίνεται παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ. Η διχοτόμος της $\hat{A}$ τέμνει τη ΔΓ στο Ε. Να αποδείξετε ότι $ΔΕ = ΒΓ$.

37. Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ και η διχοτόμος του ΑΔ. Η παράλληλη απο το Δ προς την ΑΒ τέμνει την ΑΓ στο Ε. Αν η παράλληλη από το Ε προς τη ΒΓ τέμνει την ΑΒ στο Ζ, να αποδείξετε ότι $ΑΕ = ΒΖ$.

38. Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ $(ΑΒ = ΑΓ)$ και σημείο Μ της βάσης ΒΓ. Φέρουμε $ΜΕ \parallel ΑΒ$ (Ε σημείο του ΑΓ) και $ΜΔ \parallel ΑΓ$ (Δ σημείοτου ΑΒ). Να αποδείξετε ότι: $ΜΔ + ΜΕ = ΑΒ$.

39. Δίνεται παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ. Προεκτείνουμε τη ΔΓ κατά τμήμα $ΓΕ = ΔΓ$ και τη ΔΑ κατά τμήμα $ΑΖ = ΔΑ$. Να αποδείξετε ότι τα σημεία Ζ,Β και Ε είναι συνευθειακά.

40. Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ. Στις προεκτάσεις των διαμέσων ΒΔ και ΓΕ παίρνουμε τα σημεία Η και Ζ αντίστοιχα τέτοια, ώστε $ΔΗ = ΒΔ$ και $ΖΕ = ΕΓ$.Να αποδείξετε ότι
α) $ΑΗ = ΑΖ$ β) τα σημεία Ζ,Α και Η είναι συνευθειακά.

41. Προεκτείνουμε την πλευρά ΑΒ παραλληλογράμμου ΑΒΓΔ κατά τμήμα $ΒΕ = ΒΓ$ και επι της ημιευθείας ΔΑ θεωρούμε σημείο Ζ, ώστε $ΔΖ = ΔΓ$.Να αποδείξετε ότι $\hat{ΖΓΕ} = 90^\circ$.

42. Προεκτείνουμε την πλευρά ΑΒ παραλληλογράμμου ΑΒΓΔ κατά τμήμα $ΒΕ = ΒΓ$ και την ΑΔ κατά τμήμα $ΔΖ = ΔΓ$. Να αποδείξετε ότι τα σημεία Ζ,Γ,Ε είναι συνευθειακά.

Ορθογώνιο – Ρόμβος - Τετράγωνο

σελίδες 100 - 104

i. Ποιο τετράπλευρο λέγεται ορθογώνιο;
ii. Να αποδείξετε ότι οι διαγώνιες του ορθογωνίου είναι ίσες.

iii. Ποια είναι τα κριτήρια ώστε ένα τετράπλευρο να είναι ορθογώνιο;
iv. Να αποδείξετε ότι κάθε παραλληλόγραμμο του οποίου οι διαγώνιες είναι ίσες, είναι ορθογώνιο.
v. Ποιο τετράπλευρο λέγεται ρόμβος;
vi. Να αποδείξετε ότι σε κάθε ρόμβο οι διαγώνιες του τέμνονται κάθετα και διχοτομούν τις γωνίες του.
vii. Ποια είναι τα κριτήρια για να είναι ένα τετράπλευρο ρόμβος;
viii. Να αποδείξετε ότι κάθε παραλληλόγραμμο του οποίου οι διαγώνιες τέμνονται κάθετα είναι ρόμβος.
ix. Να αποδείξετε ότι κάθε παραλληλόγραμμο του οποίου μια διαγώνιος διχοτομεί μια γωνία του, είναι ρόμβος.
x. Ποιο τετράπλευρο λέγεται τετράγωνο;
xi. Ποιες είναι οι ιδιότητες του τετραγώνου;
xii. Ποια είναι τα κριτήρια για να είναι ένα τετράπλευρο τετράγωνο;

Βασικές ασκήσεις

43. Σε παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ φέρουμε $ΑΕ \perp ΔΓ$ και $ΓΖ \perp ΑΒ$. Να αποδείξετε ότι το ΑΖΓΕ είναι ορθογώνιο.

44. Δίνεται παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ με κέντρο Ο και $ΒΔ = 2ΑΓ$. Αν Ε,Ζ είναι τα μέσα των ΟΒ και ΟΔ αντίστοιχα, να αποδείξετε ότι το ΑΕΓΖ είναι ορθογώνιο.

45. Να αποδείξετε ότι αν οι διχοτόμοι των γωνιών παραλληλογράμμου δεν συντρέχουν, τότε σχηματίζουν ορθογώνιο.

46. Δίνεται τετράγωνο ΑΒΓΔ. Στις πλευρές ΑΒ,ΒΓ,ΓΔ και ΔΑ παίρνουμε σημεία Κ,Λ,Μ και Ν αντίστοιχα τέτοια, ώστε $ΑΚ = ΒΛ = ΓΜ = ΔΝ$. Να αποδείξετε ότι το ΚΛΜΝ είναι τετράγωνο.

47. Στις πλευρές ΑΒ και ΒΓ τετραγώνου ΑΒΓΔ παίρνουμε σημεία Ε και Ζ αντίστοιχα, ώστε $ΑΕ = ΒΖ$. Να αποδείξετε ότι: **α)** $ΑΖ = ΔΕ$ **β)** $ΑΖ \perp ΔΕ$

Εφαρμογές των παραλληλογράμμων

σελίδες 104- 106

i. Να αποδείξετε ότι το ευθύγραμμο τμήμα που ενώνει τα μέσα των δύο πλευρών τριγώνου, είναι παράλληλο προς την τρίτη πλευρά και ίσο με το μισό της.
ii. Να αποδείξετε ότι αν από τομέσο μιας πλευράς ενός τριγώνου φέρουμε ευθεία παράλληλη προς μια άλλη πλευρά του, τότε η ευθεία αυτή διέρχεται από το μέσο της τρίτης πλευράς του.
iii. Να αποδείξετε ότι αν τρείς (τουλάχιστον) παράλληλες ευθείες ορίζουν σε μία ευθεία ίσα τμήματα, θα ορίζουν ίσα τμήματα και σε κάθε άλλη ευθεία που τις τέμνει.
iv. Τι ονιμάζεται μεσοπαράλληλος δύο ευθειών ε_1 και ε_2;
v. Ποιο σημείο ονομάζεται βαρύκεντρο τριγώνου και ποια είναι η χαρακτηριστική του ιδιότητα;
vi. Να αποδείξετε ότι οι παράλληλες που άγονται από τις κορυφές ενός τριγώνου προς τις απέναντι πλευρές του, σχηματίζουν τρίγωνο, το οποίο έχει ως μέσα των πλευρών του τις κορυφές του αρχικού τριγώνου.
vii. Να αποδείξετε ότι οι φορείς των υψών ενός τριγώνου διέρχονται από το ίδιο σημείο.
viii. Ποιο σημείο ονομάζεται ορθόκεντρο τριγώνου;

ix. Να αποδείξετε ότι η διάμεσος ορθογωνίου τριγώνου που φέρουμε από την κορυφή της ορθής γωνίας, είναι ίση με το μισό της υποτείνουσας.
x. Να αποδείξετε ότι αν η διάμεσος ενός τριγώνου ισούται με το μισό της πλευράς στην οποία αντιστοιχεί, τότε το τρίγωνο είναι ορθογώνιο με υποτείνουσα την πλευρά αυτή.
xi. Να αποδείξετε ότι αν σε ορθογώνιο τρίγωνο μια γωνία του ισούται με 30°, τότε η απέναντι κάθετη πλευρά του είναι το μισό της υποτείνουσας και αντιστρόφως.

Βασικές ασκήσεις

48. Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ και η διάμεσός του ΑΔ. Αν Ε,Ζ και Η είναι τα μέσα των ΒΔ, ΑΔ και ΑΓ αντίστοιχα, να αποδείξετε ότι το ΔΕΖΗ είναι παραλληλόγραμμο.

49. Σε τρίγωνο ΑΒΓ φέρουμε τα ύψη του ΒΔ και ΓΕ. Αν Μ είναι το μέσο της ΒΓ, να αποδείξετε ότι $\text{ΜΔ} = \text{ΜΕ}$.

50. Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ $\left(\text{Α} = 90^\circ\right)$ με $\text{Β} = 30^\circ$. Αν Ε,Ζ είναι τα μέσα των ΑΒ και ΑΓ, να αποδείξετε ότι $\text{ΕΖ} = \text{ΑΓ}$.

51. Αν σε τρίγωνο ΑΒΓ είναι $\mu_\beta = \mu_\gamma$, να αποδείξετε ότι $\beta = \gamma$.

52. Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ $\left(\text{Α} = 90^\circ\right)$ και το ύψος του ΑΔ.

α) Αν Ε,Ζ είναι τα μέσα των ΑΒ και ΑΓ, να αποδείξετε ότι $\text{ΕΔΖ} = \text{Α} = 90^\circ$.

β) Αν Μ είναι το μέσο της ΕΖ, να αποδείξετε ότι $\text{ΔΜ} = \dfrac{\text{ΒΓ}}{4}$.

53. Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ και έστω Δ το μέσο της διαμέσου ΑΜ. Αν η ΒΔ τέμνει την πλευρά ΑΓ στο Ε, να αποδείξετε ότι $\text{ΑΕ} = \dfrac{\text{ΕΓ}}{2}$.

54. Δίνεται ορθογώνιο ΑΒΓΔ και έστω Ε,Ζ τα μέσα των ΑΒ και ΒΓ αντίστοιχα. Αν Η,Κ είναι οι προβολές των κορυφών Α και Γ στη διαγώνιο ΒΔ αντίστοιχα, να αποδείξετε ότι $\text{ΕΗ} \perp \text{ΚΖ}$.

55. Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ με $\text{ΑΒ} < \text{ΑΓ}$, η διχοτόμος του ΑΔ και Μ το μέσο της ΒΓ.Αν Ε είναι η προβολή του Β στη διχοτόμο ΑΔ, να αποδείξετε ότι:

α) $\text{ΕΜ} \parallel \text{ΑΓ}$ **β)** $\text{ΕΜ} = \dfrac{\text{ΑΓ} - \text{ΑΒ}}{2}$ **γ)** $\text{ΔΕΜ} = \dfrac{\text{Α}}{2}$

56. Αν Κ και Λ είναι οι προβολές της κορυφής Α τριγώνου ΑΒΓ στην εσωτερική και εξωτερική διχοτόμο της Β αντίστοιχα, να αποδείξετε ότι:
α) Το ΑΚΒΛ είναι ορθογώνιο
β) Η ευθεία ΚΛ διέρχεται από το μέσο της ΑΓ.

Τραπέζιο

σελίδες 112- 115
i. Τι ονομάζεται διάμεσος τραπεζίου;
ii. Να αποδείξετε ότι η διάμεσος του τραπεζίου είναι παράλληλη προς τις βάσεις του και ίση με το ημιάθροισμά τους.

iii. Να αποδείξετε ότι η διάμεσος ΕΖ τραπεζίου ΑΒΓΔ διέρχεται από τα μέσα Κ και Λ των διαγωνίων του και το τμήμα ΚΛ είναι παράλληλο με τις βάσεις του και ίσο με την ημιδιαφορά τους.
iv. Ποιο τραπέζιο λέγεται ισοσκελές;
v. Ποιες είναι οι ιδιότητες του ισοσκελούς τραπεζίου;
vi. Να αποδείξετε ότι αν ένα τραπέζιο είναι ισοσκελές, τότε:
α) οι γωνίες που πρόσκεινται σε μια βάση είναι ίσες.
β) οι διαγώνιοι του είναι ίσες.
vii. Ποια είναι τα κριτήρια για να είναι ένα τραπέζιο ισοσκελές;

Βασικές ασκήσεις

57. Δίνεται παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ και το ύψος του ΑΕ. Αν Κ,Λ είναι τα μέσα των ΑΔ,ΒΓ αντίστοιχα, να αποδείξετε ότι το ΚΛΓΕ είναι ισοσκελές τραπέζιο.

58. Σε τραπέζιο ΑΒΓΔ $\left(AB \parallel \Gamma\Delta\right)$ η διχοτόμος της γωνίας Β τέμνει τη διάμεσο ΕΖ στο Η. Να αποδείξετε ότι $BH\Gamma = 90^\circ$.

59. Σε τραπέζιο ΑΒΓΔ η μία από τις μη παράλληλες πλευρές του ΑΔ είναι ίση με το άθροισμα των βάσεων. Αν Μ είναι το μέσο της ΒΓ, να αποδείξετε ότι $AM\Delta = 90^\circ$.

60. Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ και το ύψος του ΑΗ. Αν Δ,Ε, Ζ είναι τα μέσα των ΑΒ, ΑΓ και ΒΓ αντίστοιχα, να αποδείξετε ότι το ΔΕΖΗ είναι ισοσκελές τραπέζιο.

61. Αν σε τραπέζιο η μια βάση είναι διπλάσια της άλλης, να αποδείξετε ότι οι διαγώνιοι χωρίζουν τη διάμεσο σε τρία ίσα τμήματα.

Γενικες ασκήσεις 5ου Κεφαλαίου

62. Εστω Δ,Ε,Ζ τα μέσα των πλευρών ΒΓ, ΑΒ, ΑΓ αντίστοιχα ορθογωνίου τριγώνου ΑΒΓ $\left(A = 90^\circ\right)$.
Προεκτείνουμε την ΕΖ κατά τμήμα $ZH = EZ$.Να αποδείξετε ότι:
α) το τετράπλευρο ΒΕΗΓ είναι παραλληλόγραμμο.
β) το τετράπλευρο ΑΕΔΖ είναι ορθογώνιο.
γ) $A\Delta = HZ$.

63. Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ$\left(A = 90^\circ\right)$ με $B\Gamma = 2AB$ και έστω Μ το μέσο της ΒΓ. Αν Βx εξωτερική διχοτόμος της γωνίας Β και η κάθετηαπό το Α προς την Βx τέμνει την ΒΓ στο Δ, τότε:
α) να υπολογίσετε τις γωνίες του τριγώνου ΑΒΓ.
β) να αποδείξετε ότι το τρίγωνο ΜΑΒ είναι ισόπλευρο.
γ) να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα ΑΒΔ και ΑΓΔ είναι ισοσκελή.
δ) να αποδείξετε ότι $AM \parallel Bx$.

64. Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ ($A = 90^\circ$) με $\Gamma = 30^\circ$ και η διάμεσος ΑΜ. Η μεσοκάθετος της ΒΓ τέμνει την ΑΓ στο Δ. Προεκτείνουμε την ΓΑ κατά $AE = A\Delta$ και έστω Ζ το κοινό σημείο των ΒΕ,ΑΜ. Να αποδείξετε ότι:
α) Η ΒΔ είναι διχοτόμος της $AB\Gamma$ **β)** Το τρίγωνο ΒΔΕ είναι ισόπλευρο.
γ) ΕΒ=2ΜΔ **δ)** ΕΖ=ΑΕ **ε)** ΒΖ=ΑΓ.

6ο Κεφάλαιο: Εγγεγραμμένα σχήματα

Εγγεγραμμένη γωνία – Γωνία χορδής και εφαπτομένης

σελίδες 123 - 130

- **i.** Ποια γωνία λέγεται εγγεγραμμένη;
- **ii.** Ποια γωνία λέγεται γωνία χορδής και εφαπτομένης;
- **iii.** Να αποδείξετε ότι κάθε εγγεγραμμένη γωνία ισούται με το μισό της επίκεντρης που βαίνει στο ίδιο τόξο.
- **iv.** Αν μια εγγεγραμμένη γωνία βαίνει σε ημικύκλιο, τότε τι είδους γωνία είναι;
- **v.** Να αποδείξετε ότι η γωνία που σχηματίζεται από μια χορδή κύκλου και την εφαπτομένη στο άκρο της χορδής, ισούται με την εγγεγραμμένη που βαίνει στο τόξο της χορδής.
- **vi.** Αν η κορυφή μιας γωνίας είναι εσωτερικό σημείο ενός κύκλου και οι πλευρές της τέμνουν τον κύκλο, τότε η γωνία τη σχέση έχει με τα τόξα που περιέχει αυτή και η κατακορυφήν της;
- **vii.** Αν η κορυφή μιας γωνίας είναι εξωτερικό σημείο ενός κύκλου και οι πλευρές της τέμνουν τον κύκλο, τότε η γωνία τη σχέση έχει με τα τόξα που περιέχει;

Βασικές ασκήσεις

65. Να αποδείξετε ότι η εφαπτομένη στο μέσο ενός από τα τόξα με χορδή ΑΒ κύκλου (Κ) είναι παράλληλη στη χορδή ΑΒ και αντίστροφα.΄

66. Δύο κάθετες χορδές ΑΒ, ΓΔ κύκλου (Κ) τέμνονται σημείο Ρ. Να αποδείξετε ότι η διάμεσος ΡΜ του τριγώνου ΡΒΓ είναι κάθετη στην ΑΔ.

67. Δύο κύκλοι εφάπτονται εξωτερικά (ή εσωτερικά) στο σημείο Α και δύο ευθείες ε, ε' που διέρχονται από το Α τέμνουν τον ένα κύκλο στα σημεία Β, Β΄ και τον άλλο στα Γ και Γ΄ αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι $BB' \parallel \Gamma\Gamma'$.

Εγγεγραμμένα και εγγράψιμα τετράπλευρα

σελίδες 130 – 134

- **i.** Πότε ένα τετράπλευρο λέγεται εγγεγραμμένο σε κύκλο;
- **ii.** Ποιος κύκλος λέγεται περιγεγραμμένος κύκλος τετραπλεύρου;
- **iii.** Να αποδείξετε ότι ένα τετράπλευρο που είναι εγγεγραμμένο σε κύκλο έχει τις εξής ιδιότητες:
  α) Οι απέναντι γωνίες του είναι παραπληρωματικές.
  β) Κάθε πλευρά του φαίνεται από τις απέναντι κορυφές υπό ίσες γωνίες.
- **iv.** Σε ποιες περιπτώσεις ένα τετράπλευρο είναι εγγράψιμο σε κύκλο;
- **v.** Ποιες είναι οι ιδιότητες ενός τετράπλευρου περιγράψιμου σε κύκλο;
- **vi.** Πότε ένα τετράπλευρο είναι περιγράψιμο σε κύκλο;

Βασικές ασκήσεις

68. Να αποδείξετε ότι κάθε εγγεγραμμένο παραλληλόγραμμο είναι ορθογώνιο.

69. Δύο κύκλοι τέμνονται στα σημεία Α και Β. Από τα Α και Β φέρουμε ευθείες που τέμνουν τον ένα κύκλο στα Γ και Γ΄και τον άλλο στα Δ και Δ΄ αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι: $\Gamma\Gamma' \parallel \Delta\Delta'$.

70. Να αποδείξετε ότι τα ύψη ΑΔ, ΒΕ, ΓΖ ενός τριγώνου ΑΒΓ διχοτομούν τις γωνίες του τριγώνου ΔΕΖ.

71. Να αποδείξετε ότι οι εφαπτόμενες στα άκρα δύο κάθετων χορδών κύκλου σχηματίζουν εγγράψιμο τετράπλευρο.