Στέλιος Μιχαήλογλου

4ο Επαναληπτικό Διαγώνισμα 2014

Διάρκεια: 3 ώρες

ΘΕΜΑ Α

Α1. Εστω συνάρτηση f συνεχής σε ένα διάστημα Δ. Να αποδείξετε ότι αν $f'(x)>0$ σε κάθε εσωτερικό σημείο του Δ, τότε η f είναι γνησίως αύξουσα σε όλο το Δ (μ 4) . Το αντίστροφο ισχύει (μ 1); Δώστε παράδειγμα (μ 2).

μ 7

Α2. Εστω μια συνάρτηση f συνεχής σε ένα διάστημα Δ και παραγωγίσιμη στο εσωτερικό του Δ. Πότε λέμε ότι η f στρέφει τα κοίλα προς τα κάτω ή είναι κοίλη στο Δ;

μ 4

Α3. Πότε η ευθεία $y=\ell$ λέγεται οριζόντια ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης της f στο $+\infty$;

μ 4

Α4. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας την ένδειξη **Σωστό** ή **Λάθος** δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση.

α. Αν f συνάρτηση συνεχής στο διάστημα $[\alpha,\beta]$ και για κάθε $x\in[\alpha,\beta]$ ισχύει $f(x)\geq 0$, τότε $\int_\alpha^\beta f(x)dx>0$.

β. Αν η f είναι συνεχής σε διάστημα Δ και $\alpha,\beta,\gamma\in\Delta$, τότε ισχύει:
$\int_\alpha^\beta f(x)dx=\int_\alpha^\gamma f(x)dx+\int_\gamma^\beta f(x)dx$.

γ. Αν $\alpha>1$ τότε $\lim\limits_{x\to-\infty}\alpha^x=+\infty$

δ. Αν υπάρχει το $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)>0$, τότε $f(x)>0$ κοντά στο x_0.

ε. Η εικόνα $f(\Delta)$ ενός διαστήματος Δ μέσω μιας συνεχούς και μη σταθερής συνάρτησης f είναι διάστημα.

μ 5x2

ΘΕΜΑ Β

Εστω ότι οι μη πραγματικοί αριθμοί z_1,z_2 είναι ρίζες της εξίσωσης $z^2-kz+1=0$, $k<0$.

Β1. Να βρείτε τις δυνατές τιμές του k. μ 3

Β2. Να αποδείξετε ότι ο μιγαδικός $w=z_1^{1821}+z_2^{1821}$ είναι πραγματικός. μ 5

Εστω ότι $\dfrac{z_1}{z_2}+\dfrac{z_2}{z_1}+1=0$. Να αποδείξετε ότι:

Β3. $k=-1$ μ 5

Β4. $z_1^3=z_2^3=1$ και $z_1^{300}+z_1^{400}+z_1^{500}=0$ μ 6

Β5. Το τρίγωνο που ορίζουν οι εικόνες των $z_1,-z_2$ και η αρχή των αξόνων είναι ισόπλευρο πλευράς 1.

μ 6

ΘΕΜΑ Γ

Δίνεται συνεχής συνάρτηση $f:[0,8]\to\mathbb{R}$, δύο φορές παραγωγίσιμη στο $(0,8)$ για την οποία ισχύει ότι: $f(4)=4$, $f'(4)=0$ και $\left(f'(x)\right)^2+f(x)f''(x)=-1$ για κάθε $x\in(0,8)$.

Γ1. Να αποδείξετε ότι $f(x)>0$ για κάθε $x\in(0,8)$. μ 6

Γ2. Να αποδείξετε ότι $f(x)=\sqrt{8x-x^2}$. μ 4

Γ3. Αν Α,Β δύο τυχαία σημεία της γραφικής παράστασης της f, να αποδείξετε ότι $(AB)\le 8$. μ 5

Γ4. Να υπολογίσετε το $\int_0^4\sqrt{8x-x^2}dx$ μ 6

Γ5. Να βρείτε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της συνάρτησης $g(x)=(4-x)f(x)$, τους άξονες x΄x και y΄y και την ευθεία $x=4$.
μ 4

ΘΕΜΑ Δ

Δίνεται συνάρτηση f παραγωγίσιμη στο $[0,+\infty)$ για την οποία ισχύει:

$$\int_0^x e^{-f(t)}dt-f(x)=\frac{1}{2}f^2(x) \quad \text{για κάθε } x\ge 0 \text{ και } f(0)=0.$$

Δ1. Να αποδείξετε ότι $f(x)+1>0$ για κάθε $x\ge 0$. μ 6

Δ2. Να αποδείξετε ότι $f(x)=xe^{-f(x)}$ για κάθε $x\ge 0$. μ 6

Δ3. Να αποδείξετε ότι η f είναι αντιστρέψιμη και να βρείτε την αντίστροφή της. μ 4

Δ4. Να υπολογίσετε το εμβαδόν $E(\lambda)$ του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της f, την εφαπτομένη της στο $x_0=0$ και την ευθεία $x=\lambda e^{\lambda}>0$.
μ 5

Δ5. Να υπολογίσετε το όριο $\lim\limits_{\lambda\to+\infty}E(\lambda)$. μ 4

Καλή τύχη στις εξετάσεις!