Ακρότατα συνάρτησης

5.582. α) $f'(x)=6x^2-6x-12=6(x+1)(x-2)$

Για κάθε $x<-1$ είναι $f'(x)>0 \Rightarrow f\uparrow(-\infty,-1]$

Για κάθε $-1<x<2$ είναι $f'(x)<0 \Rightarrow f\downarrow[-1,2]$ και για κάθε $x>2$ είναι $f'(x)>0 \Rightarrow f\uparrow[2,+\infty)$. Τοπ. μέγιστο το $f(-1)=13$ και τοπ. ελάχιστο το $f(2)=-14$

β) $f'(x)=\dfrac{1-\ln x}{x^2}\geq 0 \Leftrightarrow \ln x\leq 1 \Leftrightarrow x\leq e$

Για κάθε $x\in(0,e)$ είναι $f'(x)>0 \Rightarrow f\uparrow(0,e]$ και για κάθε $x>e$ είναι $f'(x)<0 \Rightarrow f\downarrow[e,+\infty)$. Μέγιστο το $f(e)=\dfrac{1}{e}$.

γ) $f'(x)=\dfrac{x-1}{\sqrt{x^2-2x-3}}\geq 0 \Leftrightarrow x\geq 1$. Για κάθε $x>3$ είναι $f'(x)>0 \Rightarrow f\uparrow[3,+\infty)$

και για κάθε $x<-1$ είναι $f'(x)<0 \Rightarrow f\downarrow(-\infty,-1]$.Τοπικά ελάχιστα τα $f(-1)=0$ και $f(3)=0$.

δ) $f'(x)=2-4\eta\mu 2x\geq 0 \Leftrightarrow \eta\mu 2x\leq \dfrac{1}{2}=\eta\mu\dfrac{\pi}{6} \Leftrightarrow 0\leq 2x\leq \dfrac{\pi}{6} \Leftrightarrow 0\leq x\leq \dfrac{\pi}{12}$ ή $\pi-\dfrac{\pi}{6}\leq 2x\leq 2\pi \Leftrightarrow \dfrac{5\pi}{12}\leq x\leq \pi$. Η f είναι $\uparrow$ στα $\left[0,\dfrac{\pi}{12}\right]$, $\left[\dfrac{5\pi}{12},\pi\right]$ και $\downarrow$ στο $\left[\dfrac{\pi}{12},\dfrac{5\pi}{12}\right]$.

Τοπικά ελάχιστα τα $f(0)=2$, $f\left(\dfrac{5\pi}{12}\right)=\dfrac{5\pi}{6}-\sqrt{3}$ και τοπικά μέγιστα τα $f(\pi)=2\pi+2$, $f\left(\dfrac{\pi}{12}\right)=\dfrac{\pi}{6}+\sqrt{3}$.

ε) $f'(x)=(x-2)\ln x\geq 0 \Leftrightarrow 0<x\leq 1$ ή $x\geq 2$.

Για κάθε $x\in(0,1)$ είναι $f'(x)>0 \Rightarrow f\uparrow(0,1]$. Για κάθε $x\in(1,2)$ είναι $f'(x)<0 \Rightarrow f\downarrow[1,2]$ και για κάθε $x>2$ είναι $f'(x)>0 \Rightarrow f\uparrow[2,+\infty)$.

Τοπ. μέγιστο το $f(1)=\dfrac{7}{4}$ και τοπ. ελάχιστο το $f(2)=3-2\ln 2$.

στ) $f'(x)=\sigma\upsilon\nu x\left(2\eta\mu x-\sqrt{2}\right)\geq 0 \Leftrightarrow \eta\mu x\geq \dfrac{\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow \dfrac{\pi}{4}\leq x<\dfrac{\pi}{2}$

Για κάθε $x\in\left(0,\dfrac{\pi}{4}\right)$ είναι $f'(x)<0 \Rightarrow f\downarrow\left[0,\dfrac{\pi}{4}\right]$ και για κάθε $x\in\left(\dfrac{\pi}{4},\dfrac{\pi}{2}\right)$ είναι $f'(x)>0 \Rightarrow f\uparrow\left[\dfrac{\pi}{4},\dfrac{\pi}{2}\right]$. Ελάχιστο το $f\left(\dfrac{\pi}{4}\right)=2\sqrt{2}-\dfrac{1}{2}$ και τοπ. μέγιστα τα $f(0)=2\sqrt{2}$ και $f\left(\dfrac{\pi}{2}\right)=1+\sqrt{2}$.

ζ) $f'(x)=\dfrac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}}\geq 0 \Leftrightarrow e^x-e^{-x}\geq 0 \Leftrightarrow e^x\geq e^{-x} \Leftrightarrow x\geq -x \Leftrightarrow 2x\geq 0 \Leftrightarrow x\geq 0$

Για κάθε $x<0$ είναι $f'(x)<0 \Rightarrow f\downarrow(-\infty,0]$ και για κάθε $x>0$ είναι

$f'(x)>0 \Rightarrow f \uparrow [0,+\infty)$. Ελάχιστο το $f(0)=\ln 2$.

η) Επειδή $\ln x < x$ για κάθε $x>0$, έχουμε:

$f'(x)=\dfrac{\ln x-1}{(\ln x-x)^2} \geq 0 \Leftrightarrow \ln x \geq 1 \Leftrightarrow x \geq e$. Για κάθε $x \in (0,e)$ είναι

$f'(x)<0 \Rightarrow f \downarrow (0,e]$ και για κάθε $x>e$ είναι $f'(x)>0 \Rightarrow f \uparrow [e,+\infty)$. Ελάχιστο το

$f(e)=\dfrac{1}{1-e}$.

5.583. α) $\lim\limits_{x\to 3^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 3^+} f(x)=f(3)=0$, άρα f συνεχής στο 3.

Για $x>3$ είναι $f'(x)=-2x+4<0 \Rightarrow f \downarrow [3,+\infty)$.

Για $x<3$ είναι $f'(x)=6x^2-30x+24=6(x-1)(x-4)$

Για κάθε $x<1$ είναι $f'(x)>0 \Rightarrow f \uparrow (-\infty,1]$ και για κάθε $x \in (1,3)$ είναι

$f'(x)<0 \Rightarrow f \downarrow [1,3]$. Μέγιστο το $f(1)=20$.

β) $f(x)=\begin{cases} x^2-6x+8, & x \leq 2 \text{ ή } x \geq 4 \\ -x^2+6x-8, & 2<x<4 \end{cases}$. Η f είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$.

$f'(x)=\begin{cases} 2x-6, & x<2 \text{ ή } x>4 \\ -2x+6, & 2<x<4 \end{cases}$. Για κάθε $x<2$ είναι $f'(x)<0 \Rightarrow f \downarrow (-\infty,2]$.

Για κάθε $x>4$ είναι $f'(x)>0 \Rightarrow f \uparrow [4,+\infty)$. Για κάθε $x \in (2,3)$ είναι

$f'(x)>0 \Rightarrow f \uparrow [2,3]$ και για κάθε $x \in (3,4)$ είναι $f'(x)<0 \Rightarrow f \downarrow [3,4]$.

Τοπ. ελάχιστα τα $f(2)=0$, $f(4)=0$ και τοπ. μέγιστο το $f(3)=1$.

γ) Είναι $\lim\limits_{x\to 2^-} f(x)=3$, $\lim\limits_{x\to 2^+} f(x)=-8=f(2)$ άρα η f δεν είναι συνεχής στο 2.

$f'(x)=\begin{cases} 1, & x<2 \\ 2x-6, & x>2 \end{cases}$. Για κάθε $x<2$ είναι $f'(x)>0 \Rightarrow f \uparrow (-\infty,2)$, για κάθε

$x \in (2,3)$ είναι $f'(x)<0 \Rightarrow f \downarrow (2,3]$ και για κάθε $x>3$ είναι

$f'(x)>0 \Rightarrow f \uparrow [3,+\infty)$. Τοπ. ελάχιστο το $f(3)=-9$.

δ) Η f δεν είναι συνεχής στο 0. Είναι $f'(x)=\begin{cases} -1, & x<0 \\ \dfrac{1}{2\sqrt{x}}, & x>0 \end{cases}$.

Για κάθε $x<0$ είναι $f'(x)<0 \Rightarrow f \downarrow (-\infty,0]$ και για κάθε $x>0$ είναι

$f'(x)>0 \Rightarrow f \uparrow (0,+\infty)$. Επειδή $f(0)<\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)$ και $f(0)<\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)$ η f έχει

ελάχιστο στο 0 το $f(0)=-5$.

ε) Η f δεν είναι συνεχής στο 1. Είναι $f'(x)=\begin{cases} 2x+4, & x<1 \\ 2x-6, & x>1 \end{cases}$. Για κάθε $x<-2$ είναι

$f'(x)<0 \Rightarrow f \downarrow (-\infty,-2]$, για κάθε $x \in (-2,1)$ είναι $f'(x)>0 \Rightarrow f \uparrow [-2,1)$. Για κάθε

$x \in (1,3)$ είναι $f'(x) < 0 \Rightarrow f \downarrow (1,3]$ και για κάθε $x > 3$ είναι $f'(x) > 0 \Rightarrow f \uparrow [3,+\infty)$.

Τοπ. ελάχιστα τα $f(-2) = -7$ και $f(3) = -3$. Επειδή $f(1) = \lim_{x\to 1^-} f(x) > \lim_{x\to 1^+} f(x)$, η f έχει τοπικό μέγιστο το $f(1) = 2$.

στ) Η f δεν είναι συνεχής στο 0. Είναι $f'(x) = \begin{cases} 1, & x < 0 \\ -2x, & x > 0 \end{cases}$.

Για κάθε $x < 0$ είναι $f'(x) > 0 \Rightarrow f \uparrow (-\infty,0)$ και για κάθε $x > 0$ είναι

$f'(x) < 0 \Rightarrow f \downarrow (0+\infty)$. Επειδή $f(0) = \lim_{x\to 0^-} f(x) > \lim_{x\to 0^+} f(x)$ η f έχει μέγιστο το $f(0) = 1$.

5.584. $f'(x) = e^{x^2-(\alpha+\beta)x}(2x-\alpha-\beta)$, $g'(x) = 3x^2 - 2\alpha x + \beta$.

Επειδή η f παρουσιάζει ακρότατο στο $x_1 = 6$ και η g παρουσιάζει ακρότατο στο $x_2 = -2$, από το θ.Fermat ισχύει ότι: $\begin{cases} e^{36-6(\alpha+\beta)}(12-\alpha-\beta) = 0 \\ 12+4\alpha+\beta = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 12-\alpha-\beta = 0 \\ 4\alpha+\beta = -12 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha = -8 \\ \beta = 20 \end{cases}$.

Τότε $f(x) = e^{x^2-12x}$ και $g(x) = x^3 + 8x^2 + 20x + 1$

Είναι $f'(x) = e^{x^2-12x}(2x-12) \ge 0 \Leftrightarrow x \ge 6$.

Για κάθε $x < 6$ είναι $f'(x) < 0 \Rightarrow f \downarrow (-\infty,6]$ και για κάθε $x > 6$ είναι $f'(x) > 0 \Rightarrow f \uparrow [6,+\infty)$. Η f έχει ελάχιστο στο 6.

Είναι $g'(x) = 3x^2 + 16x + 20 = 3(x+2)\left(x+\frac{10}{3}\right) \ge 0 \Leftrightarrow x < -\frac{10}{3}$ ή $x > -2$.

Η g είναι $\uparrow \left(-\infty,-\frac{10}{3}\right]$, $\downarrow \left[-\frac{10}{3},-2\right]$ και $\uparrow [-2,+\infty)$. Έχει τοπ. ελάχιστο στο $x_2 = -2$

5.585. Η f παρουσιάζει ακρότατο στα $x_1 = -1$ και $x_2 = 1$, είναι και παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με $f'(x) = 3x^2 - 2\alpha x + \beta$, οπότε από το θ.Fermat, ισχύει ότι:

$\begin{cases} f'(-1) = 0 \\ f'(1) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3+2\alpha+\beta = 0 \\ 3-2\alpha+\beta = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \beta = -3 \\ \alpha = 0 \end{cases}$. Τότε

$f(x) = x^3 - 3x + 2$, $f'(x) = 3x^2 - 3 \ge 0 \Leftrightarrow x \le -1$ ή $x \ge 1$.

Η f είναι $\uparrow (-\infty,-1]$, $\downarrow [-1,1]$ και $\uparrow [1,+\infty)$. Έχει τοπ. μέγιστο στο $x_1 = -1$ και τοπ. ελάχιστο στο $x_2 = 1$.

5.586. Επειδή η f να παρουσιάζει ακρότατο στο σημείο $A(1,-2)$ και είναι παραγωγίσιμη για $x \ne 3$ με $f'(x) = \frac{(2\alpha x+\beta)(x-3) - \alpha x^2 - \beta x - 2}{(x-3)^2}$, από το θ.Fermat, ισχύει ότι:

$f'(1) = 0 \Leftrightarrow 5\alpha + 3\beta = -2$ (1).

Επειδή το A ανήκει στη C_f, ισχύει ότι: $f(1) = -2 \Leftrightarrow \frac{\alpha+\beta+2}{-2} = -2 \Leftrightarrow \alpha + \beta = 2$ (2)

Λύνοντας το σύστημα των (1),(2) προκύπτει ότι $\alpha = -4$ και $\beta = 6$. Τότε

$f(x)=\dfrac{-4x^2+6x+2}{x-3}$, $f'(x)=-\dfrac{4(x-1)(x-5)}{(x-3)^2}\geq 0 \Leftrightarrow x\in[1,3)\cup(3,5]$.

Η f είναι $\searrow(-\infty,1]$, $\nearrow[1,3)$, $\nearrow(3,5]$ και $\searrow[5,+\infty)$ και έχει τοπ. ελάχιστο στο Α.

5.587. α) $f'(x)=\left(2-\dfrac{\alpha}{3}\right)3x^2-4x+(\alpha-2)^2=(6-\alpha)x^2-4x+(\alpha-2)^2$

$f'(1)=6-\alpha-4+(\alpha-2)^2=\alpha^2-5\alpha+6=(\alpha-2)(\alpha-3)$

Από θ. Fermat είναι $f'(1)=0\Leftrightarrow \alpha=2$ ή $\alpha=3$

Για $\alpha=2$ $f'(x)=4x^2-4x=4x(x-1)$ και η f έχει τοπικό ελάχιστο στο 1, ενώ για $\alpha=3$ είναι $f'(x)=3x^2-4x+1$ και η f έχει τοπικό ελάχιστο στο 1

x	$-\infty$ 0	1	$+\infty$
f′	+	−	+
f	↗	↘	↗

β) Για $\alpha=3$ $f(x)=x^3-2x^2+x+10$

$f\left(\dfrac{1}{3}\right)=\dfrac{1}{27}-\dfrac{2}{9}+\dfrac{1}{3}+10=\dfrac{274}{27}$,

$f(1)=1-2+1+10=10>0$

x	$-\infty$ 1/3	1	$+\infty$
f′	+	−	+
f	↗	↘	↗

Στο $\Delta_1=\left(-\infty,\dfrac{1}{3}\right]$ είναι $f(\Delta_1)=\left(-\infty,\dfrac{274}{27}\right]$ και

$0\in f(\Delta_1)\Rightarrow \exists x_1\in\Delta_1: f(x_1)=0$

Στο $\Delta_2=\left[\dfrac{1}{3},1\right]$ είναι $f(\Delta_2)=\left[10,\dfrac{274}{27}\right]$ και $0\notin f(\Delta_2)$

Στο $\Delta_3=[1,+\infty)$ είναι $f(\Delta_3)=[10,+\infty)$ και $0\notin f(\Delta_3)$, άρα η f έχει ακριβώς μία ρίζα. Όμοια για $\alpha=2$ μόνο μια ρίζα στο $(-\infty,0)$.

5.588. $\left(f^3(x)+x^2\right)'=\left(xf(x)\right)'\Leftrightarrow 3f^2(x)f'(x)+2x=f(x)+xf'(x)$ (1)

Επειδή η f έχει ακρότατο στο x_0 από το θ.Fermat είναι $f'(x_0)=0$.

Για $x=x_0$ η (1) γίνεται $3f^2(x_0)\cancel{f'(x_0)}^{0}+2x_0=f(x_0)+x\cancel{f'(x_0)}^{0}\Leftrightarrow f(x_0)=2x_0$.

Η αρχική σχέση για $x=x_0$ γίνεται:

$f^3(x_0)+x_0^2=x_0f(x_0)\Leftrightarrow(2x_0)^3+x_0^2=x_0\cdot 2x_0\Leftrightarrow 8x_0^3-x_0^2=0\Leftrightarrow$

$x_0^2(8x_0-1)=0\Leftrightarrow x_0=0$ απορρίπτεται ή $x_0=\dfrac{1}{8}$.

5.589. $f'(x)=3x^2+2\lambda x+3$, $\Delta=4\lambda^2-36=4(\lambda-3)(\lambda+3)$.

Αν $\lambda\in(-\infty,-3)\cup(3,+)$, τότε $\Delta>0$, η f' έχει δύο ρίζες και αλλάζει πρόσημο εκατέρωθέν τους, οπότε η f στη περίπτωση αυτή έχει ακρότατα.

Αν $\lambda=-3$, τότε $f'(x)=3x^2-6x+3=3(x-1)^2>0$ για κάθε $x\neq 1$, άρα $f\nearrow\mathbb{R}$ και δεν έχει ακρότατα.

Αν $\lambda=3$, τότε $f'(x)=3x^2+6x+3=3(x+1)^2>0$ για κάθε $x\neq -1$, άρα $f\nearrow\mathbb{R}$ και δεν έχει ακρότατα.

Αν $\lambda \in (-3,3)$, τότε $\Delta < 0$ και $f'(x) > 0 \Rightarrow f \uparrow \mathbb{R}$ και δεν έχει ακρότατα. Άρα $\lambda \in [-3,3]$.

5.590. Η f είναι παραγωγίσιμη με $f'(x) = 8x - 4\lambda \geq 0 \Leftrightarrow x \geq \frac{\lambda}{2}$.

Για κάθε $x < \frac{\lambda}{2}$ είναι $f'(x) < 0 \Rightarrow f \downarrow \left(-\infty, \frac{\lambda}{2}\right]$ και για κάθε $x > \frac{\lambda}{2}$ είναι

$f'(x) > 0 \Rightarrow f \uparrow \left[\frac{\lambda}{2}, +\infty\right)$. Η f έχει ελάχιστο το $f\left(\frac{\lambda}{2}\right)$

$f\left(\frac{\lambda}{2}\right) = \lambda^2 - 2\lambda^2 + \lambda^2 + 3\lambda + 5 = 2 \Leftrightarrow \lambda = -1$.

5.591. Εστω ότι η f έχει ακρότατο στο $x_0 \in \mathbb{R}$. Επειδή η f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$, με:

$f'(x) = (2x+\alpha)e^x + (x^2 + \alpha x + \beta)e^x = \left[x^2 + (\alpha+2)x + \alpha + \beta\right]e^x$, λόγω του

θεωρήματος Fermat, ισχύει ότι: $f'(x_0) = 0 \Leftrightarrow$

$\left[x_0^2 + (\alpha+2)x_0 + \alpha + \beta\right]e^{x_0} = 0 \Leftrightarrow x_0^2 + (\alpha+2)x_0 + \alpha + \beta = 0$.

Η τελευταία είναι εξίσωση $2^{ου}$ βαθμού με

$\Delta = (\alpha+2)^2 - 4(\alpha+\beta) = \alpha^2 + 4\alpha + 4 - 4\alpha - 4\beta = \alpha^2 + 4 - 4\beta < 0$, οπότε είναι αδύνατη στο $\mathbb{R}$ και επομένως η f δεν έχει ακρότατα.

5.592. Η f είναι δύο φορές παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με $f'(x) = 4x^3 - 3\alpha x^2 + 2\beta x + \gamma$ και

$f''(x) = 12x^2 - 6\alpha x + 2\beta$.

Η f'' έχει $\Delta = 36\alpha^2 - 96\beta = 36\left(\alpha^2 - \frac{8}{3}\beta\right) < 0$, άρα $f''(x) > 0 \Rightarrow f' \uparrow \mathbb{R}$, οπότε δεν

έχει ακρότατα.

5.593. Εστω $h(x) = f(x) - g(x) = 2(e^x - 1) - 2\ln(x+1)$, $x > -1$.

Είναι $h'(x) = 2e^x - \frac{2}{x+1}$, $h''(x) = 2e^x + \frac{2}{(x+1)^2} > 0 \Rightarrow h' \uparrow (-1, +\infty)$.

Για κάθε $x > 0$ είναι $h'(x) > h'(0) = 0 \Rightarrow h \uparrow [0, +\infty)$ και για κάθε $-1 < x < 0$ είναι

$h'(x) < 0 \Rightarrow h \downarrow (-1, 0]$. Η h έχει ελάχιστο το $h(0) = 0$, οπότε $h(x) > 0$

για κάθε $x \in (-1, 0) \cup (0 + \infty)$, άρα η $x = 0$ είναι η μοναδική ρίζα της εξίσωσης

$h(x) = 0 \Leftrightarrow f(x) = g(x)$.

5.594. Η f είναι παραγωγίσιμη στο $(0 + \infty)$ με $f'(x) = \lambda x^{\lambda-1} e^{-\lambda^2 x}(1 - \lambda x) \geq 0 \Leftrightarrow x \leq \frac{1}{\lambda}$.

Για κάθε $x \in \left(0, \frac{1}{\lambda}\right)$ είναι $f'(x) > 0 \Rightarrow f \uparrow \left(0, \frac{1}{\lambda}\right]$ και για κάθε $x > \frac{1}{\lambda}$ είναι

$f'(x) < 0 \Rightarrow f \downarrow \left[\frac{1}{\lambda}, +\infty\right)$. Η f έχει μέγιστο το $f\left(\frac{1}{\lambda}\right) = \lambda^{-\lambda} e^{-\lambda}$.

Εστω $g(\lambda) = \lambda^{-\lambda} e^{-\lambda} = e^{-\lambda \ln \lambda} e^{-\lambda} = e^{-\lambda \ln \lambda - \lambda}$, $\lambda > 0$.

$g'(\lambda) = e^{-\lambda \ln \lambda - \lambda}(-\ln \lambda - 2) \geq 0 \Leftrightarrow \ln \lambda \leq 2 \Leftrightarrow \lambda \leq e^{-2}$.

Για κάθε $0<x<e^{-2}$ είναι $g'(\lambda)>0 \Rightarrow g\uparrow(0,e^{-2}]$ και για κάθε $x>e^{-2}$ είναι

$g'(\lambda)<0 \Rightarrow g\downarrow[e^{-2},+\infty)$. Η g έχει μέγιστο για $\lambda=e^{-2}=\dfrac{1}{e^2}$.

5.595. Η f είναι παραγωγίσιμη στο $(0+\infty)$ με $f'(x)=x^{\lambda-1}e^{2\lambda x}(\lambda-x)\geq 0 \Leftrightarrow x\leq\lambda$

Για κάθε $0<x<\lambda$ είναι $f'(x)>0 \Rightarrow f\uparrow(0,\lambda]$ και για κάθε $x>\lambda$ είναι

$f'(x)<0 \Rightarrow f\downarrow[\lambda,+\infty)$. Η f έχει μέγιστο το $f(\lambda)=\lambda^{\lambda}e^{\lambda}$.

Εστω $g(\lambda)=\lambda^{\lambda}e^{\lambda}=e^{\lambda\ln\lambda}e^{\lambda}=e^{\lambda\ln\lambda+\lambda}$, $\lambda>0$. Η g είναι παραγωγίσιμη στο $(0+\infty)$ με

$g'(\lambda)=e^{\lambda\ln\lambda+\lambda}(\ln\lambda+2)\geq 0 \Leftrightarrow \ln\lambda\geq -2 \Leftrightarrow \lambda\geq e^{-2}$.

Για κάθε $\lambda\in(0,e^{-2})$ είναι $g'(\lambda)<0 \Rightarrow g\downarrow(0,e^{-2}]$ και για κάθε $x>e^{-2}$ είναι

$g'(\lambda)>0 \Rightarrow g\uparrow[e^{-2},+\infty)$. Η g έχει ελάχιστο για $\lambda=e^{-2}$.

5.596. Η f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με $f'(x)=2\alpha x-2\ln\alpha\geq 0 \Leftrightarrow x\geq\dfrac{\ln\alpha}{\alpha}$.

Για κάθε $x<\dfrac{\ln\alpha}{\alpha}$ είναι $f'(x)<0 \Rightarrow f\downarrow\left(-\infty,\dfrac{\ln\alpha}{\alpha}\right]$ και για κάθε $x>\dfrac{\ln\alpha}{\alpha}$ είναι

$f'(x)>0 \Rightarrow f\uparrow\left[\dfrac{\ln\alpha}{\alpha},+\infty\right)$. Η f έχει ελάχιστο το $f\left(\dfrac{\ln\alpha}{\alpha}\right)=2-\dfrac{\ln^2\alpha}{\alpha}$.

Εστω $g(\alpha)=2-\dfrac{\ln^2\alpha}{\alpha}$, $\alpha\geq 1$. Είναι $g'(\alpha)=\dfrac{\ln\alpha(\ln\alpha-2)}{\alpha^2}\geq 0 \Leftrightarrow \alpha=1$ ή

$\ln\alpha\geq 2 \Leftrightarrow \alpha\geq e^2$. Για κάθε $\alpha<e^2$ είναι $g'(\alpha)<0 \Rightarrow g\downarrow[1,e^2]$ και για κάθε

$\alpha>e^2$ είναι $g'(\alpha)>0 \Rightarrow g\uparrow[e^2,+\infty)$. Η g έχει ελάχιστο για $\alpha=e^2$.

5.597. Η f είναι δύο φορές παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με

$f'(x)=6x^2-12x+18$, $f''(x)=12x-12\geq 0 \Leftrightarrow x\geq 1$.

Για κάθε $x<1$ είναι $f''(x)<0 \Rightarrow f'\downarrow(-\infty,1]$ και για κάθε $x>1$ είναι

$f''(x)>0 \Rightarrow f'\uparrow[1,+\infty)$. Ο ρυθμός μεταβολής της f γίνεται ελάχιστος για $x=1$.

5.598. Η f είναι δύο φορές παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με $f'(x)=3e^{3x-2}-9e^{x+8}$ και

$f''(x)=9e^{3x-2}-9e^{x+8}\geq 0 \Leftrightarrow e^{3x-2}\geq e^{x+8} \Leftrightarrow 3x-2\geq x+8 \Leftrightarrow x\geq 5$.

Για κάθε $x<5$ είναι $f''(x)<0 \Rightarrow f'\downarrow(-\infty,5]$ και για κάθε $x>5$ είναι

$f''(x)>0 \Rightarrow f'\uparrow[5,+\infty)$. Η f' έχει ελάχιστο για $x=5$, τότε το σημείο της C_f είναι το

$(5,-8e^{13})$.

5.599. Η f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με

$f'(x)=2+2(2\lambda-e^x)(2\lambda-e^x)' = 2-2e^x(2\lambda-e^x)=2-4\lambda e^x+2e^{2x}$ και

$f''(x) = -4\lambda e^x + 4e^{2x} = 4e^x\left(e^x - \lambda\right)$.

Είναι $f''(x) \geq 0 \Leftrightarrow 4e^x\left(e^x - \lambda\right) \geq 0 \Leftrightarrow$

$e^x - \lambda \geq 0 \Leftrightarrow e^x \geq \lambda \Leftrightarrow x \geq \ln\lambda$

Για κάθε $x < \ln\lambda$ είναι $f''(x) < 0$, άρα f' γνησίως φθίνουσα στο $\left(-\infty, \ln\lambda\right]$.

Για κάθε $x > \ln\lambda$ είναι $f''(x) > 0$, άρα η f' είναι γνησίως αύξουσα στο $\left[\ln\lambda, +\infty\right)$.

x	$-\infty$	$\ln\lambda$	$+\infty$
f''	$-$		$+$
f'	$\searrow$		$\nearrow$

Ο.Ε.

Η f' έχει ελάχιστο το

$f'(\ln\lambda) = 2 - 4\lambda e^{\ln\lambda} + 2e^{2\ln\lambda} = 2 - 4\lambda\cdot\lambda + 2e^{\ln\lambda^2} = 2 - 4\lambda^2 + 2\lambda^2 = 2 - 2\lambda^2$.

- Αν $2 - 2\lambda^2 > 0 \Leftrightarrow \lambda^2 < 1 \Leftrightarrow |\lambda| < 1 \Leftrightarrow -1 < \lambda < 1$, τότε $f'(x) \geq f'(\ln\lambda) > 0$, οπότε η f είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$.
- Αν $2 - 2\lambda^2 = 0 \Leftrightarrow \lambda^2 = 1 \Leftrightarrow \lambda = \pm 1$, τότε:

Για $\lambda = 1$ είναι $f'(x) = 2 - 4e^x + 2e^{2x} = 2\left[\left(e^x\right)^2 - 2e^x + 1\right] = 2\left(e^x - 1\right)^2 > 0$ για κάθε $x \neq 0$ οπότε η f είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$.

Για $\lambda = -1$ είναι $f'(x) = 2 + 4e^x + 2e^{2x} = 2\left[\left(e^x\right)^2 + 2e^x + 1\right] = 2\left(e^x + 1\right)^2 > 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$, οπότε η f είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$.

- Αν $2 - 2\lambda^2 < 0 \Leftrightarrow \lambda^2 > 1 \Leftrightarrow |\lambda| > 1 \Leftrightarrow \lambda < -1$ ή $\lambda > 1$, τότε επειδή το ελάχιστο της f' είναι αρνητικός αριθμός και $\lim\limits_{x\to+\infty} f'(x) = \lim\limits_{x\to+\infty}\left[2 - 2e^x\left(2\lambda - e^x\right)\right] = +\infty$, αφού $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(-2e^x\right) = -\infty$ και $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(2\lambda - e^x\right) = -\infty$, η f' θα αλλάζει πρόσημο, οπότε η f δεν μπορεί να είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$.

Άρα για να είναι η f γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$, τελικά πρέπει: $\lambda \in [-1, 1]$ και η μεγαλύτερη ακέραια τιμή του λ είναι το 1.

5.600. $e^x \geq \lambda x \Leftrightarrow \dfrac{e^x}{x} \geq \lambda$

Εστω $f(x) = \dfrac{e^x}{x}$, $x > 0$. Είναι $f'(x) = \dfrac{e^x(x-1)}{x^2} \geq 0 \Leftrightarrow x \geq 1$.

Για κάθε $0 < x < 1$ είναι $f(x) < 0 \Rightarrow f \downarrow (0, 1]$ και για κάθε $x > 1$ είναι $f'(x) > 0 \Rightarrow f \uparrow [1, +\infty)$. Η f έχει ελάχιστο το $f(1) = e$, άρα $f(x) \geq f(1) = e$

Αρκεί $f(1) \geq \lambda \Leftrightarrow e \geq \lambda$, άρα $\lambda_{max} = e$.

5.601. Επειδή η f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με $f'(x) = \alpha x^3 + \beta x^2 + \gamma x + 1$, για να έχει τρία ακρότατα, η $f'(x) = 0$ θα έχει τρείς ρίζες ρ_1, ρ_2, ρ_3 με $\rho_1 < \rho_2 < \rho_3$

Από το Θ.Rolle για την f' υπάρχουν $\xi_1 \in \left(\rho_1, \rho_2\right)$ και $\xi_2 \in \left(\rho_2, \rho_3\right)$ τέτοια, ώστε: $f''\left(\xi_1\right) = 0$ και $f''\left(\xi_2\right) = 0$. Όμως η $f''(x) = 3\alpha x^2 + 2\beta x + \gamma$ είναι δευτέρου βαθμού, οπότε έχει ακριβώς δύο ρίζες και αυτό συμβαίνει όταν

$\Delta > 0 \Leftrightarrow 4\beta^2 - 12\alpha\gamma > 0 \Leftrightarrow \beta^2 > 3\alpha\gamma$.

5.602. $f'(x) + (x-1)^3 f^2(x) = 0 \Leftrightarrow f'(x) = -(x-1)^3 f^2(x)$.

Αν $x<1$ τότε $f'(x)>0 \Rightarrow f\uparrow(-\infty,1]$ και αν $x>1$ τότε $f'(x)<0 \Rightarrow f\downarrow[1,+\infty)$.

Η f έχε μέγιστο το $f(1)$.

5.603. **α)** Είναι $f(\alpha)=f(\beta)=f(\gamma)=0$ και η f είναι συνεχής στα $[\alpha,\beta],[\beta,\gamma]$ και παραγωγίσιμη στα (α,β), (β,γ) με

$f'(x)=(x-\beta)(x-\gamma)+(x-\alpha)(x-\gamma)+(x-\alpha)(x-\beta)$, οπότε από το θ.Rolle υπάρχουν $\xi_1\in(\alpha,\beta)$ και $\xi_2\in(\beta,\gamma)$ τέτοια, ώστε $f'(\xi_1)=0$ και $f'(\xi_2)=0$.

Όμως η $f'(x)=3x^2-2(\alpha+\beta+\gamma)x+\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha$ είναι δευτέρου βαθμού, οπότε τα ξ_1,ξ_2 είναι οι μοναδικές της ρίζες και για το πρόσημο της ισχύει:

Για κάθε $x<\xi_1$ είναι $f'(x)>0 \Rightarrow f\uparrow(-\infty,\xi_1]$.

Για κάθε $x\in(\xi_1,\xi_2)$ είναι $f'(x)<0 \Rightarrow f\downarrow[\xi_1,\xi_2]$ και για κάθε $x>\xi_2$ είναι $f'(x)>0 \Rightarrow f\uparrow[\xi_2,+\infty)$. Η f έχει τοπικό μέγιστο στο ξ_1 και τοπικό ελάχιστο στο ξ_2.

β) Αν η f έχει ακρότατο στο $x=\xi$, τότε από το θ.Fermat είναι:

$$f'(\xi)=0 \Leftrightarrow (\xi-\beta)(\xi-\gamma)+(\xi-\alpha)(\xi-\gamma)+(\xi-\alpha)(\xi-\beta)=0 \Leftrightarrow$$

$$\frac{\cancel{(\xi-\beta)}\,\cancel{(\xi-\gamma)}}{(\xi-\alpha)\,\cancel{(\xi-\beta)}\,\cancel{(\xi-\gamma)}}+\frac{\cancel{(\xi-\alpha)}\,\cancel{(\xi-\gamma)}}{\cancel{(\xi-\alpha)}\,(\xi-\beta)\,\cancel{(\xi-\gamma)}}+\frac{\cancel{(\xi-\alpha)(\xi-\beta)}}{\cancel{(\xi-\alpha)(\xi-\beta)}\,(\xi-\gamma)}=0 \Leftrightarrow$$

$$\frac{1}{\xi-\alpha}+\frac{1}{\xi-\beta}+\frac{1}{\xi-\gamma}=0$$

5.604. Είναι $f(\alpha)=f(\beta)=f(\gamma)=0$ και η f είναι συνεχής στα $[\alpha,\beta],[\beta,\gamma]$ και παραγωγίσιμη στα (α,β), (β,γ) με

$f'(x)=(x-\beta)(x-\gamma)+(x-\alpha)(x-\gamma)+(x-\alpha)(x-\beta)$, οπότε από το θ.Rolle υπάρχουν $\xi_1\in(\alpha,\beta)$ και $\xi_2\in(\beta,\gamma)$ τέτοια, ώστε $f'(\xi_1)=0$ και $f'(\xi_2)=0$.

Είναι $f'(x)=2(x-\alpha)(x-\beta)^2(x-\gamma)^2+2(x-\alpha)^2(x-\beta)(x-\gamma)^2+$

$+2(x-\alpha)^2(x-\beta)^2(x-\gamma) \Leftrightarrow$

$f'(x)=2(x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma)\left[3x^2-2(\alpha+\beta+\gamma)x+\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha\right]$

και επειδή $f'(\alpha)=f'(\beta)=f'(\gamma)=0$, τα ξ_1,ξ_2 είναι ρίζες του τριωνύμου $\tau(x)=3x^2-2(\alpha+\beta+\gamma)x+\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha$.

Για το πρόσημο της f' και τη μονοτονία της f ισχύει ο παρακάτω πίνακας:

x	$-\infty$ α	ξ_1	β	ξ_2	γ	$+\infty$
$x-\alpha$	–	+	+	+	+	+
$x-\beta$	–	–	–	+	+	+
$x-\gamma$	–	–	–	–	–	+
$\tau(x)$	+	+	–	–	+	+
f'	–	+	–	+	–	+
f	$\searrow$	$\nearrow$	$\searrow$	$\nearrow$	$\searrow$	$\nearrow$

Η f έχει τοπικά ελάχιστα στα α, β, γ και τοπικά μέγιστα στα ξ_1, ξ_2.

5.605. **α)** Είναι $f'(x) = e^x - \lambda \geq 0 \Leftrightarrow e^x \geq \lambda \Leftrightarrow x \geq \ln\lambda$.

Για κάθε $x < \ln\lambda$ είναι $f'(x) < 0 \Rightarrow f \downarrow (-\infty, \ln\lambda]$ και για κάθε $x > \ln\lambda$ είναι $f'(x) > 0 \Rightarrow f \uparrow [\ln\lambda, +\infty)$. Η f έχει ελάχιστο το $f(\ln\lambda) = \lambda - \lambda\ln\lambda - 1$.

β) Εστω $g(\lambda) = \lambda - \lambda\ln\lambda - 1,\ \lambda \geq 1$. Είναι $g'(\lambda) = -\ln\lambda < 0 \Rightarrow g \downarrow [1, +\infty)$.
Για κάθε $\lambda > 1$ είναι $g(\lambda) < g(1) = 0$. Άρα το ελάχιστο της f είναι αρνητικός αριθμός.

5.606. **α)** Είναι $f'(x) = 4x^3 - 4x = 4x(x^2 - 1) \geq 0 \Leftrightarrow x \in [-1, 0] \cup [1, +\infty)$

Η f είναι $\downarrow (-\infty - 1]$, $\uparrow [-1, 0]$, $\downarrow [0, 1]$ και $\uparrow [1, +\infty)$. Έχει τοπικά ελάχιστα τα $f(-1) = \alpha - 1$ και $f(1) = \alpha - 1$ και τοπικό μέγιστο το $f(0) = \alpha$.

Είναι $A(-1, \alpha - 1), B(0, \alpha)$ και $\Gamma(1, \alpha - 1)$, $\lambda_{AB} = \dfrac{\alpha - \alpha + 1}{1} = 1$ και

$\lambda_{B\Gamma} = \dfrac{\alpha - 1 - \alpha}{1} = -1$. Επειδή $\lambda_{AB} \cdot \lambda_{B\Gamma} = -1$ είναι $AB \perp B\Gamma$.

β) Είναι $f(0) = \alpha > 0$, $f(-1) = \alpha - 1 < 0$ και f συνεχής στο $[-1, 0]$, οπότε σύμφωνα με το Θ.Bolzano, η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει τουλάχιστον μία ρίζα στο $(-1, 0)$.
Επειδή η f είναι γνησίως αύξουσα στο $(-1, 0)$, η προηγούμενη ρίζα είναι μοναδική.

5.607. $g'(x) > 0 \Rightarrow g \uparrow (0, +\infty)$. Επειδή η f είναι παραγωγίσιμη στο $(0, +\infty)$ με

$$f'(x) = \frac{\dfrac{g'(x)}{\cancel{g(x)}}\cancel{g(x)} - g'(x)\ln g(x)}{g^2(x)} = \frac{g'(x)(1 - \ln g(x))}{g^2(x)} = 0 \Leftrightarrow$$

$\ln g(x) = 1 \Leftrightarrow g(x) = e = g(e) \overset{g\uparrow}{\Leftrightarrow} x = e$, μοναδικό της κρίσιμο σημείο είναι το $(e, f(e))$.

5.608. **α)** $3f^2(x)f'(x) - 12f(x)f'(x) + \lambda f'(x) = 3x^2 - 12x \Leftrightarrow$
$f'(x)(3f^2(x) - 12f(x) + \lambda) = 3x(x - 4)$
$f'(x) = 0 \Leftrightarrow 3x(x - 4) = 0 \Leftrightarrow x = 0$ ή $x = 4$. Κρίσιμα σημεία της f τα $(0, f(0))$ και $(4, f(4))$

β) Επειδή $3f^2(x) - 12f(x) + \lambda > 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$, το πρόσημο της f' εξαρτάται από το πρόσημο του $3x(x - 4)$.
Όταν $x < 0$, είναι $3x(x - 4) > 0$ οπότε $f'(x) > 0 \Rightarrow f \uparrow (-\infty, 0]$.

Όταν $x \in (0, 4)$ είναι $3x(x - 4) < 0$ οπότε $f'(x) < 0 \Rightarrow f \downarrow [0, 4]$ και όταν $x > 4$, τότε $f'(x)>0 \Rightarrow f \uparrow [4,+\infty)$. Η f έχει τοπικό μέγιστο το $f(0)$ και τοπικό ελάχιστο το $f(4)$.

5.609. Είναι $f'(x)=\dfrac{2\ln x}{x}-\ln x$.

Παρατηρούμε ότι $f'(1)=f'(2)=0$. Επειδή η f' είναι συνεχής στο $[1,2]$ ως άθροισμα συνεχών συναρτήσεων και παραγωγίσιμη στο $(1,2)$ με

$f''(x)=2\dfrac{1-\ln x}{x^2}-\dfrac{1}{x}$, λόγω του Θ. Rolle υπάρχει $\xi\in(1,2)$ τέτοιο, ώστε:

$f''(\xi)=0 \Leftrightarrow \dfrac{2-2\ln\xi}{\xi^2}-\dfrac{1}{\xi}=0 \Leftrightarrow .\ 2-2\ln\xi-\xi=0$.

Εστω ότι υπάρχει $\rho\in(1,2)$ με $\rho\neq\xi$ και $2-2\ln\rho-\rho=0$, τότε για τη συνάρτηση $h(x)=2-2\ln x-x$, $x>0$ εφαρμόζεται το Θ.Rolle στο $[\rho,\xi]$ ή $[\xi,\rho]\subseteq(1,2)$ και υπάρχει $\xi_1\in(\rho,\xi)$ ή (ξ,ρ) τέτοιο, ώστε

$h'(\xi_1)=0 \Leftrightarrow -\dfrac{2}{\xi_1}-1=0 \Leftrightarrow \xi_1=-2$ που είναι άτοπο. Άρα το ξ είναι η μοναδική ρίζα της $f''(x)=0$ στο $(1,2)$ και η f' έχει ακριβώς ένα κρίσιμο σημείο στο διάστημα $(1,2)$.

5.610. $\alpha<\beta<\gamma \Leftrightarrow 3\alpha<2\alpha+\beta<2\alpha+\gamma<3\gamma \Rightarrow \alpha<\dfrac{2\alpha+\beta}{3}<\gamma \Leftrightarrow f(\alpha)<f(\gamma)<f(\beta)$

Επειδή το $f(\gamma)$ είναι ενδιάμεση τιμή της f, δεν θα έχει ελάχιστο ή μέγιστο στο σημείο αυτό. Άρα θα υπάρχει εσωτερικό σημείο x_0 του διαστήματος (α,γ), στο οποίο η f θα έχει ακρότατο. Τότε από το θ.Fermat είναι $f'(x_0)=0$, οπότε η f έχει τουλάχιστον ένα κρίσιμο σημείο με τετμημένη $x_0\in(\alpha,\gamma)$.

5.611. Η f είναι δύο φορές παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με $f'(x)=e^{h(x^2)+2}h'(x^2)2x$ και

$f''(x)=e^{h(x^2)+2}\left(h'(x^2)\right)^2 4x^2+e^{h(x^2)+2}h''(x^2)4x^2+2e^{h(x^2)+2}h'(x^2) \Leftrightarrow$

$f''(x)=2\left[2x^2\left(h'(x^2)\right)^2+h''(x^2)+h'(x^2)\right]$.

Εστω ότι η f έχει δύο κρίσιμα σημεία x_1,x_2 με $x_1<x_2$. Επειδή η f είναι παραγωγίσιμη, τα x_1,x_2 είναι ρίζες της f', δηλαδή $f'(x_1)=f'(x_2)=0$, τότε σύμφωνα με το θ.Rolle, η εξίσωση

$f''(x)=0 \Leftrightarrow 2\left[2x^2\left(\left(h'(x^2)\right)^2+h''(x^2)\right)+h'(x^2)\right]=0 \Leftrightarrow$

$2x^2\left(\left(h'(x^2)\right)^2+h''(x^2)\right)+h'(x^2)=0 \Leftrightarrow 2x^2\left(\left(h'(x^2)\right)^2+h''(x^2)\right)=-h'(x^2)$

έχει τουλάχιστον μία ρίζα, το οποίο είναι άτοπο. Άρα η f έχει το πολύ ένα κρίσιμο σημείο.

5.612. Επειδή $f(0)+f(2)=f(1)$, είναι $f(0)<f(1)$ και $f(2)<f(1)$. Άρα η f δεν παρουσιάζει

μέγιστο στα άκρα 0 και 2 του διαστήματος $[0,2]$. Επειδή η f είναι συνεχής στο $[0,2]$ θα έχει ελάχιστη και μέγιστη τιμή στο διάστημα αυτό, οπότε θα παρουσιάζει μέγιστο σε εσωτερικό σημείο x_1 του $(0,2)$. Τότε από το θ.Fermat είναι $f'(x_1)=0$.

5.613. **α)** Εστω $f(x)=\varepsilon\varphi x-x,\ x\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right)$. Είναι $f'(x)=\frac{1}{\sigma\upsilon\nu^2 x}-1=\frac{\eta\mu^2 x}{\sigma\upsilon\nu^2 x}>0\Rightarrow f\uparrow\left[0,\frac{\pi}{2}\right)$.

Για κάθε $0\le x<\frac{\pi}{2}\overset{f\uparrow}{\Rightarrow} f(0)\le f(x)\Leftrightarrow 0\le \varepsilon\varphi x-x$

β) Εστω $f(x)=2\eta\mu x+\varepsilon\varphi x-3x$, $x\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right)$.

Η f είναι παραγωγίσιμη στο $\left[0,\frac{\pi}{2}\right)$ με

$$f'(x)=2\sigma\upsilon\nu x+\frac{1}{\sigma\upsilon\nu^2 x}-3=\frac{2\sigma\upsilon\nu x+1-3\sigma\upsilon\nu^2 x}{\sigma\upsilon\nu^2 x}\Leftrightarrow$$

$$f'(x)=\frac{-3(\sigma\upsilon\nu x-1)\left(\sigma\upsilon\nu x+\frac{1}{3}\right)}{\sigma\upsilon\nu^2 x}>0 \text{ για κάθε } x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right) \text{,γιατί } \sigma\upsilon\nu x-1<0,$$

$\sigma\upsilon\nu x+\frac{1}{3}>0$ και $\sigma\upsilon\nu^2 x>0$ για κάθε $x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$. Άρα η f είναι γνησίως αύξουσα στο $\left[0,\frac{\pi}{2}\right)$ και παρουσιάζει ελάχιστο στο $x_0=0$ το $f(0)=0$.

Οπότε $f(x)\ge f(0)\Leftrightarrow 2\eta\mu x+\varepsilon\varphi x\ge 3x$ για κάθε $x\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right)$.

γ) Εστω $f(x)=e^x-ex,\ x\in\mathbb{R}$. Είναι $f'(x)=e^x-e\ge 0\Leftrightarrow x\ge 1$.

Για κάθε $x<1$ είναι $f'(x)<0\Rightarrow f\downarrow(-\infty,0]$ και για κάθε $x>1$ είναι $f'(x)>0\Rightarrow f\uparrow[0,+\infty)$. Η f έχει ελάχιστο στο 1, άρα $f(x)\ge f(1)\Leftrightarrow e^x\ge xe$.

δ) Εστω $f(x)=x^2-2\ln x-1,\ x>0$. Είναι

$$f'(x)=2x-\frac{2}{x}=2\frac{x^2-1}{x}\ge 0\Leftrightarrow x^2\ge 1\overset{x>0}{\Leftrightarrow} x\ge 1.$$

Για κάθε $0<x<1$ είναι $f'(x)<0\Rightarrow f\downarrow(0,1]$ και για κάθε $x>1$ είναι $f'(x)>0\Rightarrow f\uparrow[1,+\infty)$. Η f έχει ελάχιστο το $f(1)=0$, άρα $f(x)\ge 0\Leftrightarrow x^2\ge 2\ln x+1$.

ε) $x^x\ge e^{x-1}\Leftrightarrow \ln x^x\ge \ln e^{x-1}\Leftrightarrow x\ln x\ge x-1\Leftrightarrow x\ln x-x+1\ge 0$.

Εστω $f(x)=x\ln x-x+1,\ x>0$. Είναι $f'(x)=\ln x\ge 0\Leftrightarrow x\ge 1$.

Για κάθε $0<x<1$ είναι $f'(x)<0\Rightarrow f\downarrow(0,1]$ και για κάθε $x>1$ είναι $f'(x)>0\Rightarrow f\uparrow[1,+\infty)$. Η f έχει ελάχιστο το $f(1)=0$, άρα $f(x)\ge 0\Leftrightarrow$ $x\ln x-x+1\ge 0$.

στ) Εστω $f(x)=2e^x-\ln(2x+1)-2,\ x>-\frac{1}{2}$. Είναι $f'(x)=2e^x-\frac{2}{2x+1}$ και $f''(x)=2e^x+\frac{4}{(2x+1)^2}>0\Rightarrow f'\uparrow\left(-\frac{1}{2},+\infty\right)$. Παρατηρούμε ότι $f'(0)=0$, οπότε για κάθε $-\frac{1}{2}<x<0 \overset{f'\uparrow}{\Rightarrow} f'(x)<f'(0)=0 \Rightarrow f\downarrow\left(-\frac{1}{2},0\right]$ και για κάθε

$x>0 \overset{f'\uparrow}{\Leftrightarrow} f'(x)>f'(0)=0 \Rightarrow f\uparrow[0,+\infty)$. Η f έχει ελάχιστο το $f(0)=0$, άρα

$f(x)\geq 0 \Leftrightarrow 2e^x \geq \ln(2x+1)+2$.

ζ) Εστω $f(x)=2\eta\mu x+x^2+2e^{-x}-2,\ x\geq 0$. Είναι $f'(x)=2\sigma\upsilon\nu x+2x-e^{-x}$ και

$f''(x)=-2\eta\mu x+2+e^{-x}=2(1-\eta\mu x)+e^{-x}>0 \Rightarrow f'\uparrow[0,+\infty)$.

Για κάθε $x>0 \overset{f'\uparrow}{\Leftrightarrow} f'(x)>f'(0)=0 \Rightarrow f\uparrow[0,+\infty)$. Η f έχει ελάχιστο το το $f(0)=0$,

άρα $f(x)\geq 0 \Leftrightarrow 2\eta\mu x+x^2+2e^{-x}\geq 2$.

η) $x^x(2-x)^{2-x}\geq 1 \Leftrightarrow \ln\left[x^x(2-x)^{2-x}\right]\geq \ln 1 \Leftrightarrow \ln x^x+\ln(2-x)^{2-x}\geq 0 \Leftrightarrow$

$x\ln x+(2-x)\ln(2-x)\geq 0$. Έστω $f(x)=x\ln x+(2-x)\ln(2-x),\ x\in(0,2)$.

Είναι $f'(x)=\ln x+1-\ln(2-x)-1=\ln\frac{x}{2-x}\geq 0 \Leftrightarrow \frac{x}{2-x}\geq 1 \Leftrightarrow$

$x\geq 2-x \Leftrightarrow 2x\geq 2 \Leftrightarrow x\geq 1$.

Για κάθε $x\in(0,1)$ είναι $f'(x)<0 \Rightarrow f\downarrow(0,1]$ και για κάθε $x\in(1,2)$ είναι

$f'(x)>0 \Rightarrow f\uparrow[1,2)$. Η f έχει ελάχιστο το $f(1)=0$, άρα $f(x)\geq 0 \Leftrightarrow$

$x\ln x+(2-x)\ln(2-x)\geq 0$.

θ) Εστω $f(x)=x^3+3x^2+6x+6-6e^x,\ x\in\mathbb{R}$. Είναι $f'(x)=3x^2+6x+6-6e^x$,

$f''(x)=6x+6-6e^x$ και $f^{(3)}(x)=6-6e^x\geq 0 \Leftrightarrow e^x\leq 1 \Leftrightarrow x\leq 0$.

Για κάθε $x<0$ είναι $f^{(3)}(x)>0 \Rightarrow f''\uparrow(-\infty,0]$, άρα $f''(x)<f''(0)=0 \Rightarrow f'\downarrow(-\infty,0]$.

Άρα $f'(x)>f'(0)=0 \Rightarrow f\uparrow(-\infty,0]$.

Για κάθε $x>0$ είναι $f^{(3)}(x)<0 \Rightarrow f''\downarrow[0,+\infty)$, άρα

$f''(x)<f''(0)=0 \Rightarrow f'\downarrow[0,+\infty)$.

Άρα $f'(x)<f'(0)=0 \Rightarrow f\downarrow[0,+\infty)$. Η f έχει μέγιστο το $f(0)=0$, άρα

$f(x)\leq f(0) \Leftrightarrow x^3+3x^2+6x+6\leq 6e^x$.

ι) $\left(\frac{x+1}{2}\right)^{x+1}\leq x^x \Leftrightarrow \ln\left(\frac{x+1}{2}\right)^{x+1}\leq \ln x^x \Leftrightarrow (x+1)\ln\left(\frac{x+1}{2}\right)-x\ln x\leq 0$.

Εστω $f(x)=(x+1)\ln\left(\frac{x+1}{2}\right)-x\ln x,\ x>0$. Είναι

$f'(x)=\ln\left(\frac{x+1}{2}\right)+1-\ln x-1=\ln\frac{x+1}{2x}\geq 0 \Leftrightarrow \frac{x+1}{2x}\geq \frac{1}{e} \Leftrightarrow x+1\geq 2x \Leftrightarrow 1\geq x$

Για κάθε $x\in(0,1)$ είναι $f'(x)>0 \Rightarrow f\uparrow(0,1]$ και για κάθε $x>1$ είναι

$f'(x)<0 \Rightarrow f\downarrow[1,+\infty)$. Η f έχει μέγιστο το $f(1)=0$, άρα $f(x)\leq 0 \Leftrightarrow$

$(x+1)\ln\left(\frac{x+1}{2}\right)-x\ln x\leq 0$.

5.614. α) Για κάθε $x>0$ είναι $f'(x)=\dfrac{\frac{1}{x}x^2-2x\ln x}{x^4}=\dfrac{1-2\ln x}{x^3}$. Είναι

$f'(x)\geq 0 \Leftrightarrow \dfrac{1-2\ln x}{x^3}\geq 0 \Leftrightarrow \ln x\leq \dfrac{1}{2} \Leftrightarrow x\leq e^{\frac{1}{2}}=\sqrt{e}$.

Το πρόσημο της f' και η μονοτονία της f δίνονται στον διπλανό πίνακα.

x	0		$\sqrt{e}$		$+\infty$
f'		$+$		$-$	
f		$\nearrow$		$\searrow$	

Η f έχει ολικό μέγιστο το $f\left(\sqrt{e}\right)=\dfrac{\ln\sqrt{e}}{\left(\sqrt{e}\right)^2}=\dfrac{\ln e^{\frac{1}{2}}}{e}=\dfrac{1}{2e}$.

β) Επειδή η f έχει ολικό μέγιστο το $f\left(\sqrt{e}\right)=\dfrac{1}{2e}$, ισχύει $f(x)\leq\dfrac{1}{2e}$ για κάθε $x>0$.

Άρα, $\dfrac{\ln x}{x^2}\leq\dfrac{1}{2e} \Leftrightarrow 2e\ln x\leq x^2 \Leftrightarrow \ln x^{2e}\leq x^2 \Leftrightarrow x^{2e}\leq e^{x^2}$.

γ) $\alpha^{x^2}\geq x^{2e} \Leftrightarrow x^2\ln\alpha\geq 2e\ln x \Leftrightarrow \dfrac{\ln x}{x^2}\leq\dfrac{\ln\alpha}{2e}$

Επειδή $\dfrac{\ln x}{x^2}\leq\dfrac{1}{2e}$, αρκεί $\dfrac{1}{2e}\leq\dfrac{\ln\alpha}{2e} \Leftrightarrow \ln\alpha\geq 1 \Leftrightarrow \alpha\geq e$

5.615. α) $f'(x)=\dfrac{1-\ln x}{x^2}\geq 0 \Leftrightarrow \ln x\leq 1 \Leftrightarrow x\leq e$. Για κάθε $0<x<e$ είναι

$f'(x)>0 \Rightarrow f\uparrow(0,e]$ και για κάθε $x>e$ είναι $f'(x)<0 \Rightarrow f\downarrow[e,+\infty)$.

Η f έχει μέγιστο το $f(e)=\dfrac{1}{e}$.

β) $e^{\pi}>\pi^{e} \Leftrightarrow \ln e^{\pi}>\ln\pi^{e} \Leftrightarrow \pi>e\ln\pi \Leftrightarrow \dfrac{\ln\pi}{\pi}<\dfrac{1}{e} \Leftrightarrow f(\pi)<f(e)$ που ισχύει.

γ) $e<\lambda<\lambda+1 \overset{f\downarrow}{\Rightarrow} f(\lambda)>f(\lambda+1) \Leftrightarrow \dfrac{\ln\lambda}{\lambda}>\dfrac{\ln(\lambda+1)}{\lambda+1} \Leftrightarrow (\lambda+1)\ln\lambda>\lambda\ln(\lambda+1) \Leftrightarrow$

$\ln\lambda^{\lambda+1}>\ln(\lambda+1)^{\lambda} \Leftrightarrow \lambda^{\lambda+1}>(\lambda+1)^{\lambda}$.

5.616. α) Είναι $f'(x)=e^{x\ln x+(1-x)\ln(1-x)}\left(\ln x+1-\ln(1-x)-1\right)=x^x(1-x)^{1-x}\ln\dfrac{x}{1-x}$

$f'(x)\geq 0 \Leftrightarrow \ln\dfrac{x}{1-x}\geq 0 \Leftrightarrow \dfrac{x}{1-x}\geq 1 \Leftrightarrow x\geq 1-x \Leftrightarrow x\geq\dfrac{1}{2}$

Για κάθε $0<x<\dfrac{1}{2}$ είναι $f'(x)<0 \Rightarrow f\downarrow\left(0,\dfrac{1}{2}\right]$ και

για κάθε $\dfrac{1}{2}<x<1$ είναι $f'(x)>0 \Rightarrow f\uparrow\left[\dfrac{1}{2},1\right)$. Η f έχει ελάχιστο το $f\left(\dfrac{1}{2}\right)=\dfrac{1}{2}$

β) Ελάχιστο το $f\left(\dfrac{1}{2}\right)=\left(\dfrac{1}{2}\right)^{\frac{1}{2}}\left(\dfrac{1}{2}\right)^{\frac{1}{2}}=\dfrac{1}{2}$, άρα $f(x)\geq\dfrac{1}{2} \Leftrightarrow x^x(1-x)^{1-x}\geq\dfrac{1}{2} \Leftrightarrow x^xy^y\geq\dfrac{1}{2}$

5.617. α) $f'(x)=2xe^{\frac{1}{x}}-\cancel{x^2}e^{\frac{1}{x}}\dfrac{1}{\cancel{x^2}}=e^{\frac{1}{x}}(2x-1)\geq 0 \Leftrightarrow x\geq\dfrac{1}{2}$

Για κάθε $x\in(-\infty,0)\cup\left(0,\frac{1}{2}\right)$ είναι $f'(x)<0\Rightarrow f\downarrow(-\infty,0)$ και $\downarrow\left(0,\frac{1}{2}\right]$.

Για κάθε $x>\frac{1}{2}$ είναι $f'(x)>0\Rightarrow f\uparrow\left[\frac{1}{2},+\infty\right)$. Η f έχει τοπικό ελάχιστο το $f\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{e^2}{4}$.

β) $4^x x^{2x}\geq e^{2x-1}\Leftrightarrow \ln\left(4^x x^{2x}\right)\geq \ln e^{2x-1}\Leftrightarrow \ln 4^x+\ln x^{2x}\geq 2x-1\Leftrightarrow$

$x\ln 4+x\ln x^2\geq 2x-1\Leftrightarrow \ln 4+\ln x^2\geq 2-\frac{1}{x}\Leftrightarrow \ln x^2+\ln e^{\frac{1}{x}}\geq \ln e^2-\ln 4\Leftrightarrow$

$\ln\left(x^2e^{\frac{1}{x}}\right)\geq \ln\frac{e^2}{4}\Leftrightarrow f(x)\geq\frac{e^2}{4}$ που ισχύει.

5.618. α) $f(x)=x^{\ln x}=e^{\ln x^{\ln x}}=e^{\ln^2 x}$, $x>0$. Είναι $f'(x)=e^{\ln^2 x}2\frac{\ln x}{x}\geq 0\Leftrightarrow \ln x\geq 0\Leftrightarrow x\geq 1$.

Για κάθε $0<x<1$ είναι $f'(x)<0\Rightarrow f\downarrow(0,1]$ και για κάθε $x>1$ είναι $f'(x)>0\Rightarrow f\uparrow[1,+\infty)$. Η f έχει ελάχιστο το $f(1)=1$.

β) Είναι $f(x)\geq f(1)=1$ για κάθε $x>0$, άρα $f(\alpha)\geq 1\Leftrightarrow \alpha^{\ln\alpha}\geq 1$ και $f(\beta)\geq 1\Leftrightarrow \beta^{\ln\beta}\geq 1$, άρα και $\alpha^{\ln\alpha}+\beta^{\ln\beta}\geq 2$.

5.619. α) Για κάθε $x>0$ είναι: $f(x)=x^{\frac{1}{x^2}}=e^{\ln x^{\frac{1}{x^2}}}=e^{\frac{1}{x^2}\ln x}=e^{\frac{\ln x}{x^2}}$.

Η f είναι παραγωγίσιμη στο $(0,+\infty)$ με $f'(x)=e^{\frac{\ln x}{x^2}}\left(\frac{\ln x}{x^2}\right)'=e^{\frac{\ln x}{x^2}}\frac{1-2\ln x}{x^3}$.

Είναι $f'(x)\geq 0\Leftrightarrow 1-2\ln x\geq 0\Leftrightarrow \ln x\leq\frac{1}{2}\Leftrightarrow x\leq e^{\frac{1}{2}}=\sqrt{e}$.

Για κάθε $x\in\left(0,\sqrt{e}\right)$ είναι $f'(x)>0$ άρα η f είναι γνησίωςαύξουσα στο $\left(0,\sqrt{e}\right]$.

Για κάθε $x\in\left(\sqrt{e},+\infty\right)$ είναι $f'(x)<0$ άρα η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $\left[\sqrt{e},+\infty\right)$. Η f έχει μέγιστο το $f\left(\sqrt{e}\right)=\left(\sqrt{e}\right)^{\frac{1}{e}}=e^{\frac{1}{2e}}$

β) $\sqrt[x^2]{x}\leq\sqrt[2e]{e}\Leftrightarrow x^{\frac{1}{x^2}}\leq e^{\frac{1}{2e}}\Leftrightarrow f(x)\leq f\left(\sqrt{e}\right)$ που ισχύει.

γ) $\sqrt[x^2]{x}\leq\sqrt[2e]{\alpha}\Leftrightarrow x^{\frac{1}{x^2}}\leq\alpha^{\frac{1}{2e}}$. Όμως $x^{\frac{1}{x^2}}\leq e^{\frac{1}{2e}}$, άρα αρκεί $e^{\frac{1}{2e}}\leq\alpha^{\frac{1}{2e}}\Leftrightarrow\frac{1}{2e}\ln e\leq\frac{1}{2e}\ln\alpha\Leftrightarrow\alpha\geq e$

5.620. α) Εστω $f(x)=\pi\cdot\eta\mu x-2x$, $x\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$.

Η f είναι παραγωγίσιμη στο $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ με $f'(x)=\pi\cdot\sigma\upsilon\nu x-2$.

$f'(x)\geq 0\Leftrightarrow\pi\cdot\sigma\upsilon\nu x-2\geq 0\Leftrightarrow\sigma\upsilon\nu x\geq\frac{2}{\pi}$ (1)

Επειδή δεν γνωρίζουμε βασικό τόξο του οποίου το συνημίτονο να ισούται με $\frac{2}{\pi}$ και επειδή $\frac{2}{\pi}\in(0,1)$, υπάρχει μοναδικό $x_0\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ τέτοιο, ώστε $\sigma\upsilon\nu x_0=\frac{2}{\pi}$. Τότε η (1) γίνεται: $\sigma\upsilon\nu x\geq\sigma\upsilon\nu x_0$ και επειδή η συνάρτηση $\sigma\upsilon\nu x$ είναι γνησίως φθίνουσα στο $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ έχουμε: \ $x\leq x_0$.Η f είναι γνησίως αύξουσα στο $[0,x_0]$, οπότε $f(0)\leq f(x)\leq f(x_0)$ ή $0\leq f(x)$.

Η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $\left[x_0,\frac{\pi}{2}\right]$, οπότε $f\left(\frac{\pi}{2}\right)\leq f(x)\leq f(x_0)$ ή $0\leq f(x)$.

Άρα $f(x)\geq 0\Leftrightarrow \pi\cdot\eta\mu x\geq 2x$ για κάθε $x\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$.

β) Εστω $g(x)=\pi\cdot\sigma\upsilon\nu x-\pi+x^2$, $x\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$.

Η g είναι παραγωγίσιμη στο $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ με $g'(x)=-\pi\cdot\eta\mu x+2x=-f(x)<0$ για κάθε $x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$. Άρα η g είναι γνησίως φθίνουσα στο $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$.

Για κάθε $0\leq x\leq\frac{\pi}{2}$, είναι: $g\left(\frac{\pi}{2}\right)\leq g(x)\leq g(0)$, δηλαδή $g(x)\leq g(0)\Leftrightarrow\ \pi\cdot\sigma\upsilon\nu x\leq\pi-x^2$.

5.621. $\left(\sigma\upsilon\nu^2x\right)^{\eta\mu^2x}\left(\eta\mu^2x\right)^{\sigma\upsilon\nu^2x}\geq\frac{1}{2}\Leftrightarrow\left(\sigma\upsilon\nu^2x\right)^{1-\sigma\upsilon\nu^2x}\left(1-\sigma\upsilon\nu^2x\right)^{\sigma\upsilon\nu^2x}\geq\frac{1}{2}$.

Εστω $f(x)=x^{1-x}(1-x)^x$, $x\in(0,1)$.

Είναι $f'(x)=\ln\frac{1-x}{x}+\frac{1-2x}{x(1-x)}$.

Για κάθε $x\in\left(0,\frac{1}{2}\right)$ είναι $\ln\frac{1-x}{x}>0$ και $\frac{1-2x}{x(1-x)}>0$, άρα $f'(x)>0$ και $f\uparrow$ στο $\left(0,\frac{1}{2}\right]$.

Όμοια, για $x\in\left(\frac{1}{2},1\right)$ είναι $f'(x)<0$ και $f\downarrow$ στο $\left[\frac{1}{2},1\right)$.

Η f έχει ολικό μέγιστο το $f\left(\frac{1}{2}\right)=\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{2}}\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{2}}=\frac{1}{2}$, άρα $f(x)\geq f\left(\frac{1}{2}\right)$ για κάθε $x\in(0,1)\Leftrightarrow x^{1-x}(1-x)^x\geq\frac{1}{2}$.

Επειδή $\sigma\upsilon\nu^2\chi\in(0,1)$, ισχύει: $\left(\sigma\upsilon\nu^2\chi\right)^{1-\sigma\upsilon\nu^2\chi}\left(1-\sigma\upsilon\nu^2\chi\right)^{\sigma\upsilon\nu^2\chi}\geq\frac{1}{2}$

5.622. Εστω $f(x)=\left(x^2-x+1\right)e^{-x}$, $x\in[0,1]$. Είναι

$$f'(x)=(2x-1)e^{-x}-\left(x^2-x+1\right)e^{-x}=-e^{-x}\left(x^2+x+2\right)<0\Rightarrow f\downarrow[0,1].$$

Η f έχει μέγιστο το $f(0)=1$ και ελάχιστο το $f(1)=\frac{1}{e}$, άρα $\frac{1}{e}\leq\left(x^2-x+1\right)e^{-x}\leq 1$ για κάθε $x\in[0,1]$.

5.623. $xf(x)+2x\geq 2\ln(x+1)\Leftrightarrow xf(x)+2x-2\ln(x+1)\geq 0$ (1).

Εστω $g(x)=xf(x)+2x-2\ln(x+1),\ x>-1$. Παρατηρούμε ότι $g(0)=0$, οπότε η (1) γίνεται: $g(x)\geq g(0)$. Άρα η g παρουσιάζει ελάχιστο στο εσωτερικό σημείο $x_0=0$ του πεδίου ορισμού της. Επειδή η g είναι παραγωγίσιμη στο $(-1,+\infty)$ με $g'(x)=f(x)+xf'(x)+2-\dfrac{2}{x+1}$, από το θ.Fermat, ισχύει ότι: $g'(0)=0\Leftrightarrow f(0)=0$.

5.624. $xg(x)-e^x\leq \eta\mu 2x-1\Leftrightarrow xg(x)-e^x-\eta\mu 2x+1\leq 0$ (1).

Εστω $f(x)=xg(x)-e^x-\eta\mu 2x+1,\ x\in\mathbb{R}$. Παρατηρούμε ότι $f(0)=0$, οπότε η (1) γίνεται: $f(x)\leq f(0)$. Άρα η f έχει μέγιστο στο εσωτερικό σημείο $x_0=0$ του πεδίου ορισμού της. Επειδή η f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με $f'(x)=g(x)+xg'(x)-e^x-2\sigma\upsilon\nu 2x$, από το θ.Fermat ισχύει ότι: $f'(0)=0\Leftrightarrow g(0)=3$.

5.625. $f(x)\geq \alpha x+\beta\Leftrightarrow f(x)-\alpha x-\beta\geq 0$ (1).

Εστω $g(x)=f(x)-\alpha x-\beta,\ x\in\mathbb{R}$. Παρατηρούμε ότι $g(x)=f(x_0)-\alpha x_0-\beta=0$, οπότε η (1) γίνεται: $g(x)\geq g(x_0)$. Άρα η g παρουσιάζει ελάχιστο στο x_0 που είναι εσωτερικό του πεδίου ορισμού της. Επειδή η g είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με $g'(x)=f'(x)-\alpha$, από το θ.Fermat ισχύει ότι: $g'(x_0)=0\Leftrightarrow f'(x_0)=\alpha=\lambda_\varepsilon$.

5.626. $2\ln x\geq \alpha\dfrac{x-1}{x}\Leftrightarrow 2x\ln x-\alpha(x-1)\geq 0$ (1).

Εστω $f(x)=2x\ln x-\alpha(x-1),\ x>0$. Παρατηρούμε ότι $f(1)=0$,οπότε η (1) γίνεται: $f(x)\geq f(1)$. Άρα η f παρουσιάζει ελάχιστο στο εσωτερικό σημείο $x_0=1$ του πεδίου ορισμού της. Επειδή η f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με $f'(x)=2\ln x+2-\alpha$, από το θ.Fermat ισχύει ότι $f'(1)=0\Leftrightarrow \alpha=2$.

5.627. $e^{x-1}f(x)+x\leq x^2-2\Leftrightarrow e^{x-1}f(x)+x-x^2+2\leq 0$ (1).

Εστω $g(x)=e^{x-1}f(x)+x-x^2+2,\ x\in\mathbb{R}$.Παρατηρούμε ότι $g(1)=0$, οπότε η (1) γίνεται: $g(x)\leq g(1)$. Άρα η g παρουσιάζει μέγιστο στο εσωτερικό σημείο $x_0=1$ του πεδίου ορισμού της. Επειδή η g είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με $g'(x)=e^{x-1}f(x)+e^{x-1}f'(x)+1-2x$, από το θ.Fermat ισχύει:

$g'(1)=0\Leftrightarrow f(1)+f'(1)+1-2=0\Leftrightarrow f'(1)=3$.

Η εφαπτομένη της C_f στο Α έχει εξίσωση:

$y-f(1)=f'(1)(x-1)\Leftrightarrow y+2=3x-3\Leftrightarrow y=3x-5$.

5.628. **α)** Για $x=3$ είναι $2f(3)\geq f(3)+f(4)\Leftrightarrow f(3)\geq f(4)$ (1) και για $x=4$ είναι $2f(4)\geq f(3)+f(4)\Leftrightarrow f(4)\geq f(3)$ (2).

Από τις (1),(2), είναι $f(3)=f(4)$.

β) Είναι $2f(x)\ge f(3)+f(4)\Leftrightarrow 2f(x)\ge 2f(3)\Leftrightarrow f(x)\ge f(3)$ και $f(x)\ge f(4)$.

Δηλαδή η f παρουσιάζει ελάχιστο στα $x_1=3$ και $x_2=4$. Επειδή η f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$, από το θ.Fermat ισχύει ότι $f'(3)=0$ και $f'(4)=0$.

Επειδή $f'(3)=f'(4)$, από το θ.Rolle για την f', υπάρχει $\xi\in(3,4)$ τέτοιο, ώστε $f''(\xi)=0$

5.629. Εστω $g(x)=f(x)-4x+5\le 0$. Είναι $g(x)\le g(2)$ και $g(x)\le g(3)$, οπότε από θεώρημα Fermat $g'(2)=0\Leftrightarrow f'(2)=4$ και $g'(3)=0\Leftrightarrow f'(3)=4$. Από το θ.Rolle για την f' στο $[2,3]$, $\exists\xi\in(2,3):f''(\xi)=0$.

5.630. Εστω $h(x)=yf(x)-xf(y)-xy(x-y)^2$, $x>0$ είναι $h(x)\le 0$ και $h(y)=0$, άρα $h(x)\le h(y)$ από Fermat είναι $h'(y)=0$. Είναι

$h'(x)=yf'(x)-f(y)-y(x-y)^2-2xy(x-y)$, οπότε

$$h'(y)=yf'(y)-f(y)=0\Leftrightarrow \frac{yf'(y)-f(y)}{y^2}=0\Rightarrow\left(\frac{f(y)}{y}\right)'=0\Leftrightarrow\frac{f(y)}{y}=c\Leftrightarrow f(y)=cy$$

Για $y=2$ είναι $f(2)=2c\Rightarrow 2c=4\Rightarrow c=2$. Άρα $f(x)=2x$, $x>0$.

5.631. **α)** Η f είναι παραγωγίσιμη στο $(0,+\infty)$ με $f'(x)=\ln x+1-1=\ln x$.

$f'(x)\ge 0\Leftrightarrow \ln x\ge 0\Leftrightarrow x\le 1$.

Για $0<x<1$ είναι $f'(x)<0$ άρα η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $(0,1]$.

Για κάθε $x>1$ είναι $f'(x)>0$ άρα η f είναι γνησίως αύξουσα στο $[1,+\infty)$. Η f έχει ολικό ελάχιστο το $f(1)=0$.

β) Επειδή η f έχει ολικό ελάχιστο το $f(1)=0$, ισχύει:

$f(x)\ge f(1)\Leftrightarrow x\ln x-x+1\ge 0\Leftrightarrow x\ln x\ge x-1$.

5.632. **α)** $f'(x)=\dfrac{e^x x^\nu-e^x\nu x^{\nu-1}}{x^{2\nu}}=\dfrac{e^x x^{\nu-1}(x-\nu)}{x^{2\nu}}=\dfrac{e^x(x-\nu)}{x^{\nu+1}}\ge 0\Leftrightarrow x\ge\nu$

Για κάθε $x\in(0,\nu)$ είναι $f'(x)<0\Rightarrow f\downarrow(0,\nu]$ και για κάθε $x>\nu$ είναι $f'(x)>0\Rightarrow f\uparrow[\nu,+\infty)$. Ελάχιστο το $f(\nu)=\dfrac{e^\nu}{\nu^\nu}$.

β) $e^x\ge\left(\dfrac{xe}{\nu}\right)^\nu\Leftrightarrow e^x\ge\dfrac{x^\nu e^\nu}{\nu^\nu}\Leftrightarrow\dfrac{e^x}{x^\nu}\ge\dfrac{e^\nu}{\nu^\nu}\Leftrightarrow f(x)\ge\dfrac{e^\nu}{\nu^\nu}$ που ισχύει.

γ) Εστω $g(x)=\theta^x-\left(\dfrac{\theta x}{\nu}\right)^\nu$, $x\in\mathbb{R}$. Είναι $g(x)\ge g(\nu)$.

Η g παρουσιάζει ελάχιστο στο $x=\nu$. Επειδή η g είναι παραγωγίσιμη με $g'(x)=\theta^x\ln\theta-\nu\left(\dfrac{\theta x}{\nu}\right)^{\nu-1}\dfrac{\theta}{\nu}$, από το θ.Fermat είναι $g'(\nu)=0\Leftrightarrow\theta=e$.

5.633. **α)** Είναι $f(x)\geq 0=f(1)$, οπότε η f παρουσιάζει ελάχιστο στο $x=1$. Επειδή η f είναι παραγωγίσιμη στο $(0,+\infty)$ με $f'(x)=\frac{1}{x}+\frac{\alpha}{x^2}$, από το θ.Fermat είναι:
$f'(1)=0\Leftrightarrow 1+\alpha=0\Leftrightarrow \alpha=-1$.

β) $f'(x)=\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}=\frac{x-1}{x^2}\geq 0\Leftrightarrow x\geq 1$.

Για κάθε $x\in(0,1)$ είναι $f'(x)<0\Rightarrow f\downarrow(0,1]$ και για κάθε $x>1$ είναι $f'(x)>0\Rightarrow f\uparrow[1,+\infty)$. Η f έχει ελάχιστο το $f(1)=0$.

γ) Για κάθε $x\in(0,1)\overset{f\downarrow}{\Rightarrow} f(x)>f(1)=0$ και για κάθε $x>1\overset{f\uparrow}{\Rightarrow} f(x)>f(1)=0$.
Επειδή $f(1)=0$, η $x=1$ είναι η μοναδική ρίζα της εξίσωσης $f(x)=0$.

δ) $\ln(2\lambda^2+2)-\frac{1}{\lambda^2+3}>\ln(\lambda^2+3)-\frac{1}{2\lambda^2+2}\Leftrightarrow$

$\ln(2\lambda^2+2)+\frac{1}{2\lambda^2+2}-1>\ln(\lambda^2+3)+\frac{1}{\lambda^2+3}-1\Leftrightarrow f(2\lambda^2+2)>f(\lambda^2+3)$ (1)

Επειδή $2\lambda^2+2>1$, $\lambda^2+3>1$ και $f\uparrow[1,+\infty)$, η (1) γίνεται:
$2\lambda^2+2>\lambda^2+3\Leftrightarrow \lambda^2>1\Leftrightarrow \lambda<-1$ ή $\lambda>1$.

5.634. **α)** Εστω $\varphi(x)=e^x-x$, $\varphi'(x)=e^x-1\geq 0\Leftrightarrow x\geq 0$
Για κάθε $x>0$ είναι $\varphi(x)>\varphi(0)=1>0\Leftrightarrow f(x)>g(x)$.
Εστω $\omega(x)=x-\ln x$, $\omega'(x)=1-\frac{1}{x}=\frac{x-1}{x}\geq 0\Leftrightarrow x\geq 1$
Η ω έχει ελάχιστο για $x=1$ το $\omega(1)=1>0$, άρα $\omega(x)\geq 1>0$ δηλαδή $x>\ln x$.
Άρα $e^x>x>\ln x$.

β) Εστω $A(\alpha,e^{\alpha})$ και $B(\alpha,\ln\alpha)$

$$d(\alpha)=\sqrt{(\alpha-\alpha)^2+(e^{\alpha}-\ln\alpha)^2}=\sqrt{(e^{\alpha}-\ln\alpha)^2}=|e^{\alpha}-\ln\alpha|=e^{\alpha}-\ln\alpha$$

γ) $d'(\alpha)=e^{\alpha}-\frac{1}{\alpha}$, $d''(\alpha)=e^{\alpha}+\frac{1}{\alpha^2}>0\Rightarrow d'\uparrow(0,+\infty)$.

Είναι $d'(1)=e-1>0$ και $\lim\limits_{\alpha\to 0^+}d'(\alpha)=\lim\limits_{\alpha\to 0^+}\left(e^{\alpha}-\frac{1}{\alpha}\right)=-\infty$, οπότε
$\exists\theta\in(0,1):d'(\theta)<0$ Απο το θ.Bolzano στο $(\theta,1)\subseteq(0,1)$, υπάρχει
$\alpha_0\in(\theta,1)\subseteq(0,1):d'(\alpha_0)=0$ και αφού $d'\uparrow$, το α_0 είναι μοναδικό.

Για $x<\alpha_0\overset{d'\uparrow}{\Leftrightarrow} d'(x)<d'(\alpha_0)=0\Rightarrow d\downarrow(0,\alpha_0]$ και
για $x>\alpha_0\overset{d'\uparrow}{\Leftrightarrow} d'(x)>d'(\alpha_0)=0\Rightarrow d\uparrow[\alpha_0,+\infty)$. Η d έχει ελάχιστο στο α_0.

5.635. **α)** $f'(x)=\frac{1}{x}-\alpha=\frac{1-\alpha x}{x}\geq 0\Leftrightarrow x\leq\frac{1}{\alpha}$

Για κάθε $x\in\left(0,\frac{1}{\alpha}\right)$ είναι $f'(x)>0\Rightarrow f\uparrow\left(0,\frac{1}{\alpha}\right]$ και για κάθε $x\in\left(\frac{1}{\alpha},+\infty\right)$ είναι

$f'(x)<0 \Rightarrow f \downarrow \left[\frac{1}{\alpha},+\infty\right)$ Η f έχει μέγιστο το

$f\left(\frac{1}{\alpha}\right)=\ln\frac{1}{\alpha}-\alpha\frac{1}{\alpha}+2=-\ln\alpha-1+2=1-\ln\alpha$

β) $A\left(\frac{1}{\alpha},1-\ln\alpha\right)$, $\begin{cases} x=\frac{1}{\alpha} \\ y=1-\ln\alpha \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha=\frac{1}{x} \\ y=1-\ln\frac{1}{x} \Leftrightarrow y=1+\ln x \end{cases}$

γ) $\frac{\ln x+2}{x}\le\alpha$. Εστω $h(x)=\frac{\ln x+2}{x}$, $x>0$

$$h'(x)=\frac{\frac{1}{x}\cdot x-(\ln x+2)}{x^2}=\frac{1-\ln x-2}{x^2}=\frac{-1-\ln x}{x^2}\ge 0 \Leftrightarrow \ln x\le -1 \Leftrightarrow x\le\frac{1}{e}$$

Για $x\in\left(0,\frac{1}{e}\right)$ είναι $h'(x)>0 \Rightarrow h\uparrow\left(0,\frac{1}{e}\right]$ και για $x\in\left(\frac{1}{e},+\infty\right)$ είναι

$h'(x)<0 \Rightarrow h\downarrow\left[\frac{1}{e},+\infty\right)$. Ολικό μέγιστο το $h\left(\frac{1}{e}\right)=\frac{\ln\frac{1}{e}+2}{\frac{1}{e}}=\frac{1}{\frac{1}{e}}=e$, άρα $\alpha_{min}=e$.

5.636. Επειδή η f δεν είναι 1–1 υπάρχουν $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$ με $\alpha<\beta$ τέτοια, ώστε $f(\alpha)=f(\beta)$.
Από το Θ.Rolle υπάρχει $\xi\in(\alpha,\beta)$ τέτοιο, ώστε $f'(\xi)=0$.

Είναι $f''(x)<0 \Rightarrow f'\downarrow[\alpha,\beta]$. Για κάθε $\alpha<x<\xi \overset{f'\downarrow}{\Rightarrow} f'(x)>f'(\xi)=0 \Rightarrow f\uparrow[\alpha,\xi]$

Για κάθε $\xi<x<\beta \overset{f'\downarrow}{\Rightarrow} f'(x)<f'(\xi)=0 \Rightarrow f\downarrow[\xi,\beta]$. Η f έχει μέγιστο στο $x=\xi$.

5.637. Επειδή το $f(2)$ είναι ενδιάμεση τιμή η f δεν μπορεί να παρουσιάζει μέγιστο στο 2.
Επειδή $f(0)<f(2)<f(1)$, η f δεν παρουσιάζει μέγιστο ούτε στο 0. Επειδή η f είναι συνεχής στο $[0,2]$, υπάρχει $x_0\in(0,2)$ στο οποίο η f να παρουσιάζει μέγιστο. Τότε από Θ. Femat είναι $f'(x_0)=0$.

5.638. **α)** Επειδή τα $f(0)$, $f(8)$ είναι ενδιάμεσες τιμές, η f δεν παρουσιάζει ακρότατα στις θέσεις $x=0$ και $x=8$. Επειδή η f είναι συνεχής στο $[0,8]$, υπάρχουν $x_1,x_2\in(0,8)$ στα οποία η f να παρουσιάζει ελάχιστο και μέγιστο αντίστοιχα. Τότε από το θ.F είναι $f'(x_1)=0$ και $f'(x_2)=0$.

β) Από το ΘΜΤ για την f υπάρχει $\xi_1\in(0,2)$: $f'(\xi_1)=\frac{f(2)-f(0)}{2}>0$, υπάρχει

$\xi_2\in(2,6)$: $f'(\xi_2)=\frac{f(6)-f(2)}{4}<0$ και υπάρχει $\xi_3\in(6,8)$:

$f'(\xi_3)=\frac{f(8)-f(6)}{2}>0$. Είναι $f'(\xi_1)f'(\xi_2)<0$ και $f'(\xi_2)f'(\xi_3)<0$ και η f' είναι συνεχής, οπότε από το Θ.Β υπάρχουν $x_1\in(\xi_1,\xi_2)$ και $x_2\in(\xi_2,\xi_3)$ τέτοια, ώστε

$f'(x_1)=0$ και $f'(x_2)=0$. Δηλαδή η f έχει τουλάχιστον δύο κρίσιμα σημεία.

5.639. Επειδή η f είναι συνεχής στο $[1,4]$ θα έχει ελάχιστη και μέγιστη τιμή στο διάστημα αυτό.
Επειδή $f(2)<f(1)<f(4)<f(3)$ η f δεν έχει ακρότατα στα άκρα 1 και 4 του διαστήματος, άρα θα υπάρχουν $x_1,x_2\in(1,4)$ τέτοια, ώστε $f(x_1)=m$ και $f(x_2)=M$.
Επειδή η f είναι παραγωγίσιμη από το θ.Fermat, ισχύει ότι: $f'(x_1)=0$ και $f'(x_2)=0$.
Εστω $x_1<x_2$. Από το θ.Rolle για την f' η εξίσωση $f''(x)=0$ έχει τουλάχιστον μία ρίζα στο (x_1,x_2), οπότε η f' έχει τουλάχιστον ένα κρίσιμο σημείο.

5.640. Είναι $\left[f(f(f(x)))\right]'=f'(f(f(x)))f'(f(x))f'(x)$
Επειδή η f' είναι γνησίως αύξουσα, είναι: $f'(0)<f'(2)<f'(3)\Leftrightarrow f'(0)<0<f'(3)$
Επειδή η $f\circ f\circ f$ έχει ακρότατο στο $x_0=3$, είναι $(f\circ f\circ f)'(3)=0\Leftrightarrow$
$f'(f(f(3)))f'(f(3))f'(3)=0\Leftrightarrow f'(f(0))f'(0)f'(3)=0\Leftrightarrow f'(f(0))=0$ ή
$f'(0)=0$ που είναι αδύνατο ή $f'(3)=0$ που είναι επίσης άτοπο.
Επειδή η f' είναι $\uparrow$ είναι και 1–1, οπότε: $f'(f(0))=0=f'(2)\overset{f'\,1-1}{\Leftrightarrow} f(0)=2$.

5.641. Εστω ότι η f παρουσιάζει ελάχιστο στο 2 και μέγιστο στο 1. Τότε $f(2)\le f(x)\le f(1)$ για κάθε $x\in[1,2]$.
Είναι $f'(1)=\lim\limits_{x\to1}\dfrac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim\limits_{x\to1^+}\dfrac{f(x)-f(1)}{x-1}>0$.
Επειδή $x>1\Leftrightarrow x-1>0$ και $f(x)\le f(1)\Leftrightarrow f(x)-f(1)\le0$, είναι $\dfrac{f(x)-f(1)}{x-1}\le0$, άρα και $\lim\limits_{x\to1^+}\dfrac{f(x)-f(1)}{x-1}\le0$, το οποίο όμως είναι άτοπο.
$f'(2)=\lim\limits_{x\to2}\dfrac{f(x)-f(2)}{x-2}=\lim\limits_{x\to2^-}\dfrac{f(x)-f(2)}{x-2}>0$.
Είναι $x<2\Leftrightarrow x-2<0$ και $f(x)-f(2)\ge0$, άρα $\dfrac{f(x)-f(2)}{x-2}\le0\Rightarrow$
$\lim\limits_{x\to2^-}\dfrac{f(x)-f(2)}{x-2}\le0$ που είναι άτοπο.

5.642. Αν η f είχε ελάχιστο στο 0, τότε $f(x)\ge f(0)\Leftrightarrow f(x)-f(0)\ge0$ για κάθε $x\in[0,1]$.
Για $x\in(0,1)$ είναι $\dfrac{f(x)-f(0)}{x}\ge0$, άρα και $\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{f(x)-f(0)}{x}\ge0\Leftrightarrow f'(0)\ge0$ που είναι άτοπο.
Όμοια για μέγιστο στο 1.

5.643. Εστω ότι η f παρουσιάζει ακρότατο στο $x_0\in\mathbb{R}$, τότε επειδή είναι παραγωγίσιμη, από το θ.Fermat ισχύει: $f'(x_0)=0$. Είναι:
$\left(f^2(x)+x^2\right)'=\left(1+2xf(x)\right)'\Leftrightarrow 2f(x)f'(x)+2x=2f(x)+2xf'(x)$ και για $x=x_0$

είναι $2f(x_0)\cancel{f'(x_0)}^{0}+2x_0=2f(x_0)+2x\cancel{f'(x_0)}^{0}\Leftrightarrow f(x_0)=x_0$.

Τότε $f^2(x_0)+x_0^2=1+2x_0f(x_0)\Leftrightarrow x_0^2+x_0^2=1+2x_0^2\Leftrightarrow 2x_0^2=1+2x_0^2$ άτοπο.

5.644. **α)** $f''(x)<0\Rightarrow f'\downarrow\mathbb{R}$. Εστω ότι $f'(x)\neq 0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$. Τότε επειδή η f' είναι συνεχής, διατηρεί σταθερό πρόσημο, άρα η f είναι γνησίως μονότονη.

Εστω η f $\uparrow\mathbb{R}$, τότε το σύνολο τιμών της είναι το

$f(A)=\left(\lim\limits_{x\to-\infty}f(x),\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)\right)=(-\infty,-\infty)$ που είναι αδύνατο. Όμοια αν η f είναι $\downarrow$.

Άρα υπάρχει $x_0\in\mathbb{R}$, τέτοιο ώστε $f'(x_0)=0$ και επειδή η f' είναι $\downarrow$ είναι μοναδικό.

β) Για κάθε $x<x_0\overset{f'\downarrow}{\Leftrightarrow}f'(x)>f'(x_0)=0\Rightarrow f\uparrow(-\infty,x_0]$ και για

$x>x_0\overset{f'\downarrow}{\Leftrightarrow}f'(x)<f'(x_0)=0\Rightarrow f\downarrow[x_0,+\infty)$, άρα η f έχει μέγιστο στο x_0.

5.645. Εστω $g(x)=f\left(\dfrac{x}{\nu}\right)-\dfrac{f(x)}{\nu}$, $x\in\mathbb{R}$. Είναι

$g'(x)=\dfrac{1}{\nu}f'\left(\dfrac{x}{\nu}\right)-\dfrac{f'(x)}{\nu}=\dfrac{1}{\nu}\left(f'\left(\dfrac{x}{\nu}\right)-f'(x)\right)\geq 0\Leftrightarrow f'\left(\dfrac{x}{\nu}\right)\geq f'(x)\overset{f'\uparrow}{\Leftrightarrow}\dfrac{x}{\nu}\geq x\Leftrightarrow$

$x-\nu x\geq 0\Leftrightarrow(1-\nu)x\geq 0\Leftrightarrow x\leq 0$.

Για κάθε $x<0$ είναι $g'(x)>0\Rightarrow g\uparrow(-\infty,0]$ και για κάθε $x>0$ είναι $g'(x)<0\Rightarrow g\downarrow[0,+\infty)$

. Η g έχει μέγιστο το $g(0)=f(0)-\dfrac{1}{\nu}f(0)=\dfrac{\nu-1}{\nu}f(0)<0$,

άρα $g(x)\leq g(0)<0\Leftrightarrow f\left(\dfrac{x}{\nu}\right)<\dfrac{f(x)}{\nu}$.

5.646. Επειδή η f είναι συνεχής στο $[\alpha,\beta]$ θα έχει ελάχιστη και μέγιστη τιμή στο διάστημα αυτό. Επειδή δεν έχει ακρότατα στα άκρα α,β του διαστήματος, θα υπάρχουν $x_1,x_2\in(\alpha,\beta)$, τέτοια, ώστε $f(x_1)=m$ και $f(x_2)=M$. Τότε από το θ.Fermat είναι $f'(x_1)=0$ και $f'(x_2)=0$. Έστω $x_1<x_2$. Από το θ.Rolle για την f' υπάρχει $x_0\in(x_1,x_2)$ τέτοιο, ώστε $f''(x_0)=0$.

5.647. **α)** Επειδή η f είναι συνεχής στο $[-\alpha,\alpha]$ θα έχει ελάχιστη και μέγιστη τιμή στο διάστημα αυτό.

Επειδή η f έχει σύνολο τιμών το $[-2\alpha,2\alpha]$ και $f(-\alpha)=\dfrac{\alpha}{2}$, $f(\alpha)=\dfrac{\alpha}{3}$ η f δεν παρουσιάζει ακρότατα στα άκρα $-\alpha$, α του διαστήματος $[-\alpha,\alpha]$, όποτε θα υπάρχουν $\xi_1,\xi_2\in(-\alpha,\alpha)$ τέτοια, ώστε $f(\xi_1)=m$ και $f(\xi_2)=M$. Τότε από το θ.Fermat είναι $f'(\xi_1)=f'(\xi_2)=0$.

β) Από το θ.Rolle για την f' υπάρχει $\xi\in(\xi_1,\xi_2)\subseteq(-\alpha,\alpha)$ τέτοιο, ώστε $f''(\xi)=0$.

5.648. Επειδή η f είναι συνεχής στο $\left[1,2\right]$ θα έχει ελάχιστη και μέγιστη τιμή στο διάστημα αυτό. Επειδή το σύνολο τιμών είναι το $\left[1,5\right]$ και $f(1)=2,\ f(2)=3$, η f δεν έχει ακρότατα στα άκρα 1, 2 του διαστήματος, θα υπάρχουν $x_1,x_2\in(1,2)$, τέτοια, ώστε $f(x_1)=m$ και $f(x_2)=M$. Τότε από το θ.Fermat είναι $f'(x_1)=0$ και $f'(x_2)=0$. Έστω $x_1<x_2$. Από το θ.Rolle για την f' υπάρχει $x_0\in(x_1,x_2)$ τέτοιο, ώστε $f''(x_0)=0$.

5.649. **α)** Αν η f είχε ακρότατο στο $x_1\in(0,1)$, τότε από το θ.Fermat θα ήταν $f'(x_1)=0$ που είναι άτοπο. Άρα η f δεν έχει ακρότατα στο διάστημα $(0,1)$.

β) Από το Θ.ΜΤ για την f, υπάρχουν $\xi_1\in(0,1)$ και $\xi_2\in(1,2)$ τέτοια, ώστε $f'(\xi_1)=f(1)-f(0)=3>0$ και $f'(\xi_2)=f(2)-f(1)=-3<0$.

Επειδή το $x_0=1$ είναι η μοναδική ρίζα της εξίσωσης $f'(x)=0$ είναι $f'(x)\neq 0$ για κάθε $x\in(0,1)\cup(1,2)$, οπότε η f' διατηρεί πρόσημο σε καθένα από τα διαστήματα $(0,1)$ και $(1,2)$. Επειδή $f'(\xi_1)>0$ είναι $f'(x)>0\Rightarrow f\uparrow[0,1]$ και επειδή $f'(\xi_2)<0$ είναι $f'(x)<0\Rightarrow f\downarrow[1,2]$.

Είναι $f([0,1])=[f(0),f(1)]=[1,4]$ και $f([1,2])=[f(2),f(1)]=[1,4]$, άρα $f(A)=[1,4]$

5.650. Είναι $f(-1)=f(1)=0$.

Επειδή η f είναι συνεχής στο $[-1,1]$ θα έχει ελάχιστη και μέγιστη τιμή στο διάστημα αυτό. Αν η f παρουσιάζει ακρότατα στα άκρα -1, 1 του πεδίου ορισμού της, τότε επειδή $f(-1)=f(1)=0$, το μέγιστο και το ελάχιστο της f είναι το μηδέν, οπότε η f είναι η μηδενική συνάρτηση.

Εστω ότι η f παρουσιάζει ακρότατα σε εσωτερικά σημεία του $[-1,1]$. Τότε θα υπάρχουν $x_1,x_2\in(-1,1)$, τέτοια, ώστε $f(x_1)=m$ και $f(x_2)=M$. Τότε από το θ.Fermat είναι $f'(x_1)=0$ και $f'(x_2)=0$. Τότε όμως

$f(x_1)=(x_1^2-1)\cancel{f'(x_1)}^{0}=0$ και $f(x_2)=(x_2^2-1)\cancel{f'(x_2)}^{0}=0$, άρα και πάλι η μέγιστη και η ελάχιστη τιμή της f είναι μηδέν οπότε και πάλι η f είναι η μηδενική συνάρτηση.

5.651. Επειδή η f είναι συνεχής στο $\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$ θα έχει ελάχιστη και μέγιστη τιμή στο διάστημα αυτό.

Αν η f παρουσιάζει ακρότατα στα άκρα $-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}$ του πεδίου ορισμού της, τότε επειδή $f\left(-\frac{\pi}{2}\right)=f\left(\frac{\pi}{2}\right)=0$, το μέγιστο και το ελάχιστο της f είναι το μηδέν, οπότε η f είναι η μηδενική συνάρτηση.

Εστω ότι η f παρουσιάζει ακρότατα σε εσωτερικά σημεία του $\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$. Τότε θα υπάρχουν $x_1,x_2\in\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$, τέτοια, ώστε $f(x_1)=m$ και $f(x_2)=M$. Τότε από το θ.Fermat είναι $f'(x_1)=0$ και $f'(x_2)=0$. Τότε όμως

$f(x_1)=\cancel{f'(x_1)}^{0}\,\text{συν}x_1=0$ και $f(x_2)=\cancel{f'(x_2)}^{0}\,\text{συν}x_2=0$, άρα και πάλι η μέγιστη και η ελάχιστη τιμή της f είναι μηδέν οπότε και πάλι η f είναι η μηδενική συνάρτηση.

5.652. Επειδή f συνεχής στο $[\alpha,\beta]$ θα έχει ελάχιστη και μέγιστη τιμή στο διάστημα αυτό. Άρα υπάρχουν $x_\varepsilon, x_\mu \in[\alpha,\beta]: f(x_\varepsilon)\le f(x)\le f(x_\mu)$.
Αν x_ε είναι άκρο τότε αφού $f(\alpha)=f(\beta)=0$, είναι $f(x_\varepsilon)=0$. Αν x_ε εσωτερικό, από Fermat $f'(x_\varepsilon)=0$. Θα είναι $f^5(x_\varepsilon)=f'(x_\varepsilon)=0\Rightarrow f(x_\varepsilon)=0$. Όμοια και για $f(x_\mu)$, οπότε $0\le f(x)\le 0\Leftrightarrow f(x)=0$

5.653. **α)** Είναι $f(x+2)=f(4-x)$ (1) και παραγωγίζοντας $f'(x+2)=-f'(4-x)$.
Για $x=1$ προκύπτει $f'(3)=0$. Άρα το $x=3$ είναι ρίζα της $f'(x)=0$. Αν υπάρχει και άλλη λύση ρ με $(\rho<3)$ ή $(\rho>3)$, τότε από θεώρημα Rolle για την f' στο $[\rho,3]$ ή $[3,\rho]$ υπάρχει $\xi\in(\rho,3): f''(\xi)=0$ που είναι άτοπο. Άρα $x=3$ μοναδική λύση της $f'(x)=0$.
β) Αφού f'' συνεχής και $f''(x)\neq 0$ τότε η f'' θα διατηρεί πρόσημο στο $[1,4]$. Αν $f''(x)<0$ τότε $f'\downarrow$. Για κάθε $1<x<3\overset{f'\downarrow}{\Rightarrow} f'(x)>f'(3)=0\Rightarrow f\uparrow[1,3]$. Τότε $1<2\Rightarrow f(1)<f(2)$ που είναι άτοπο. Άρα $f''(x)>0\Rightarrow f'\uparrow[1,4]$.
Για κάθε $3<x<4\overset{f'\uparrow}{\Rightarrow} f'(x)>f'(3)=0\Rightarrow f\uparrow[3,4]$ και για κάθε
$1<x<3\overset{f'\uparrow}{\Rightarrow} f'(x)<f'(3)=0\Rightarrow f\downarrow[1,3]$.
Η f έχει ελάχιστο το $f(3)$ και τοπικά μέγιστα τα $f(1)$ και $f(4)$.

5.654. **Ι.** Εστω f η συνάρτηση κέρδους. Τότε
$f(x)=x(5000-2x)-1000x-100=-2x^2+4000x-100,\ x\ge 0$
$f'(x)=-4x+4000\ge 0\Leftrightarrow x\le 1000$.
Για κάθε $x\in(0,1000)$ είναι $f'(x)>0\Rightarrow f\uparrow[0,1000]$ και για κάθε $x>1000$ είναι $f'(x)<0\Rightarrow f\downarrow[000,+\infty)$. Η f έχει μέγιστο για $x=1000$ προϊόντα.
ΙΙ. $f(1000)=-2.000.000+4.000.000-100=1.999.900$ ευρώ.
ΙΙΙ. Είναι $F(x)=-2x^2+4000x-100-400x=-2x^2+3600x-100,\ x>0$
$F'(x)=-4x+3600\ge 0\Leftrightarrow x\le 900$. Είναι $F\uparrow[0,900]$ και $\downarrow[900,+\infty)$, έχει μέγιστο για $x=900$.

5.655. **Ι.** Για να μην ζημιώνεται το εργοστάσιο πρέπει $f(x)\ge 0\Leftrightarrow 2(x-2)e^{-2x}\ge 0\Leftrightarrow x\ge 2$
Ο ελάχιστος αριθμός τεμαχίων είναι 2000.
ΙΙ. $f'(x)=2e^{-2x}-4(x-2)e^{-2x}=2e^{-2x}(1-2x+4)=2e^{-2x}(5-2x)\ge 0\Leftrightarrow$
$5-2x\ge 0\Leftrightarrow x\le\frac{5}{2}$.

Για κάθε $x \in \left(0, \frac{5}{2}\right)$ είναι $f'(x) > 0 \Rightarrow f \uparrow \left[0, \frac{5}{2}\right]$ και για κάθε $x > \frac{5}{2}$ είναι $f'(x) < 0 \Rightarrow f \downarrow \left[\frac{5}{2}, +\infty\right)$. Το κέρδος γίνεται μέγιστο από τη παραγωγή $x = \frac{5}{2}$ χιλιάδες=2500 τεμάχια.

ΙΙΙ. α) $f(1) = 2(0-2)e^{-20} = -\frac{16}{e^{20}}$ χιλιάδες ευρώ. Έχει ζημιά.

β) Ο ρυθμός μεταβολής του κέρδους είναι $f'(x) = 2e^{-2x}(5-2x)$ και για $x = 1$ είναι $f'(1) = 2e^{-2}(5-2) = \frac{6}{e^2}$ χιλιάδες ευρώ, άρα το κέρδος αυξάνεται.

5.656. **α)** Εστω ότι πωλούνται x βιβλία μετά από τα 200 πρώτα. Τότε οι συνολικές πωλήσεις θα είναι $200 + x$ και η τιμή πώλησης κάθε αντιτύπου θα είναι $y = 15 - \frac{x}{20}$ ευρώ και το κέρδος από τη πώληση του θα είναι $y - 3$ ευρώ.

β) Το συνολικό κέρδος του βιβλιοπωλείου από τη πώληση των $200 + x$ αντιτύπων είναι $f(x) = (200 + x)\left(12 - \frac{x}{20}\right) = -\frac{x^2}{20} + 2x + 2400$.

$f'(x) = -\frac{x}{10} + 2 \geq 0 \Leftrightarrow x \leq 20$. Είναι $f \uparrow [0, 20]$ και $\downarrow [20, +\infty)$. Το κέρδος γίνεται μέγιστο για $x = 20$, δηλαδή από τη πώληση 220 αντιτύπων.

5.657. Εστω x, y οι δύο θετικοί αριθμοί. Τότε $xy = 16 \Leftrightarrow y = \frac{16}{x}$.

Εστω $f(x) = x + \frac{16}{x}$, $x > 0$. Είναι $f'(x) = 1 - \frac{16}{x^2} \geq 0 \Leftrightarrow \frac{16}{x^2} \leq 1 \Leftrightarrow x^2 \geq 16 \overset{x>0}{\Leftrightarrow} x \geq 4$.

Είναι $f \downarrow (0, 4]$ και $\uparrow [4, +\infty)$ και η f έχει ελάχιστο για $x = 4$. Οι δύο αριθμοί είναι το 4 και το $y = \frac{16}{4} = 4$.

5.658. Εστω $M(x, y) \equiv (x, e^x + 1)$ σημείο της C_f.

Είναι $(AM) = \sqrt{(x-1)^2 + (e^x + 1 - 1)^2} = \sqrt{x^2 - 2x + 1 + e^{2x}}$.

Εστω $g(x) = \sqrt{x^2 - 2x + 1 + e^{2x}}$, $x \in \mathbb{R}$. Είναι $g'(x) = \frac{x - 1 + e^{2x}}{\sqrt{x^2 - 2x + 1 + e^{2x}}}$.

Για κάθε $x > 0$ είναι $2x > 0 \Leftrightarrow e^{2x} > 1 \Leftrightarrow e^{2x} - 1 > 0$, άρα $x + e^{2x} - 1 > 0 \Rightarrow$

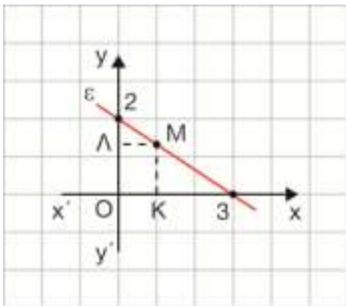
$g'(x) > 0 \Rightarrow g \uparrow [0, +\infty)$ και για κάθε $x < 0$ είναι $x + e^{2x} - 1 < 0 \Rightarrow g'(x) < 0 \Rightarrow g \downarrow (-\infty, 0]$. Η g έχει ελάχιστο για $x = 0$, τότε $M(0, 2)$.

5.659. Η κατακόρυφη απόσταση των C_f, C_g είναι

$h(x) = f(x) - g(x) = x^3 - 2x^2 + x + 5 - (x^3 - 3x^2 + 9x - 15) = x^2 - 8x + 20$, $x \in \mathbb{R}$.

$h'(x)=2x-8\geq 0 \Leftrightarrow x\geq 4$. Η h είναι $\downarrow$ στο $(-\infty,4]$ και $\uparrow$ στο $[4,+\infty)$. Έχει ελάχιστο το $h(4)=16-32+20=4$.

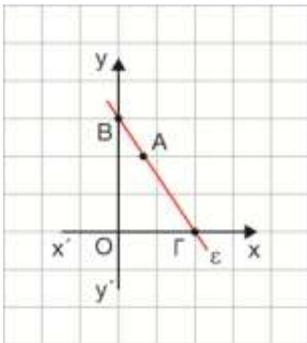
5.660. $E(x)=(OK\Lambda M)=xy=x\dfrac{6-2x}{3}=\dfrac{6x-2x^2}{3},\ x\in(0,3)$.



$E'(x)=\dfrac{6-4x}{3}\geq 0 \Leftrightarrow x\leq \dfrac{3}{2}$. Η Ε είναι

$\uparrow$ στο $\left(0,\dfrac{3}{2}\right]$ και $\downarrow\left[\dfrac{3}{2},3\right)$, έχει μέγιστο για $x=\dfrac{3}{2}$. Τότε

$2\dfrac{3}{2}+3y=6 \Leftrightarrow y=1$ και $M\left(\dfrac{3}{2},1\right)$.



5.661. Εστω λ ο συντελεστής διεύθυνσης της ευθείας.
Επειδή η ε τέμνει τους θετικούς ημιάξονες, θα σχηματίζει αμβλεία γωνία με τον x΄x, άρα $\lambda<0$. Τότε
ε: $y-4=\lambda(x-2) \Leftrightarrow y=\lambda x-2\lambda+4$.

Για $x=0$ είναι $B(0,-2\lambda+4)$ και για $y=0$ είναι $\Gamma\left(\dfrac{2\lambda-4}{\lambda},0\right)$.

$E(\lambda)=\dfrac{1}{2}(OB)(O\Gamma)=-\dfrac{(4-2\lambda)^2}{2\lambda},\ \lambda<0$. Είναι

$E'(\lambda)=-\dfrac{-4(4-2\lambda)2\lambda-2(4-2\lambda)^2}{4\lambda^2}=\dfrac{(4-2\lambda)(4+2\lambda)}{2\lambda^2}\geq 0 \overset{\lambda<0}{\Leftrightarrow} 4+2\lambda\geq 0 \Leftrightarrow \lambda\geq -2$

Για κάθε $\lambda\in(-2,0)$ είναι $E'(\lambda)>0 \Rightarrow E\uparrow[-2,0)$ και για κάθε $\lambda<-2$ είναι

$E'(\lambda)<0 \Rightarrow E\downarrow(-\infty,-2]$. Το εμβαδόν του ΟΒΓ γίνεται ελάχιστο για $\lambda=-2$, τότε ε: $y=-2x+8$.

5.662. Εστω $M(x,y)\equiv(x,x^2-2)$ σημείο της καμπύλης.

Είναι $(AM)=\sqrt{(x-5)^2+(x^2-2+3)^2}=\sqrt{x^4+3x^2-10x+26}$.

Εστω $f(x)=\sqrt{x^4+3x^2-10x+26},\ x\in\mathbb{R}$. Είναι

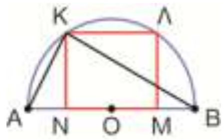
$f'(x)=\dfrac{2x^3+3x-5}{\sqrt{x^4+3x^2-10x+26}}\geq 0 \Leftrightarrow 2x^3+3x-5\geq 0 \Leftrightarrow (x-1)(2x^2+2x+5)\geq 0 \Leftrightarrow x\geq 1$Είναι

$f\downarrow(-\infty,1],\ \uparrow[1,+\infty)$, έχει ελάχιστο για $x=1$. Τότε $M(1,-1)$.

5.663. $x'(t)=\dfrac{3-6t^3}{(1+t^3)^2}\geq 0 \Leftrightarrow t\leq \dfrac{1}{\sqrt[3]{2}}$. Είναι $x\uparrow\left[0,\dfrac{1}{\sqrt[3]{2}}\right]$ και $\downarrow\left[\dfrac{1}{\sqrt[3]{2}},+\infty\right)$. Έχει μέγιστο το

$x\left(\dfrac{1}{\sqrt[3]{2}}\right)=\dfrac{\dfrac{3}{\sqrt[3]{2}}}{1+\dfrac{1}{2}}=\sqrt[3]{4}$, άρα $x(t)\leq\sqrt[3]{4}$ και όμοια $y(t)\leq\sqrt[3]{4}$.

5.664. Εστω ότι $(\mathrm{MN})=(\mathrm{K\Lambda})=2x$, τότε $(\mathrm{ON})=(\mathrm{OM})=x$ και $(\mathrm{AN})=(\mathrm{MB})=\rho-x$. Στο ορθογώνιο τρίγωνο ΑΚΒ ισχύει: $(\mathrm{KN})^2=(\mathrm{AN})(\mathrm{NB})=(\rho-x)(\rho+x)=\rho^2-x^2 \Leftrightarrow$ $(\mathrm{KN})=\sqrt{\rho^2-x^2}$.



Είναι $E(x)=(\mathrm{K\Lambda MN})=2x\sqrt{\rho^2-x^2},\ x\in(0,\rho)$.

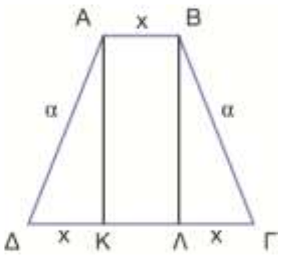
$$E'(x)=\frac{\rho^2-3x^2}{\sqrt{\rho^2-x^2}}\geq 0 \Leftrightarrow x^2\leq\frac{\rho^2}{3}\Leftrightarrow x\leq\frac{\rho\sqrt{3}}{3}.$$

Η Ε είναι $\uparrow$ στο $\left(0,\frac{\rho\sqrt{3}}{3}\right]$ και $\downarrow$ στο $\left[\frac{\rho\sqrt{3}}{3},\rho\right)$. Έχει μέγιστο για $x=\frac{\rho\sqrt{3}}{3}$, τότε

$(\mathrm{KN})=\sqrt{\rho^2-\left(\frac{\rho\sqrt{3}}{3}\right)^2}=\frac{\rho\sqrt{6}}{3}$. Οι διαστάσεις του ορθογωνίου είναι: $\frac{\rho\sqrt{6}}{3}$, $\frac{2\rho\sqrt{3}}{3}$.

5.665. Εστω ΑΚ, ΒΛ ύψη τουτραπεζίου και έστω $\Delta\mathrm{K}=\Gamma\Lambda=x$.

Είναι $\mathrm{AK}^2=\alpha^2-x^2\Leftrightarrow \mathrm{AK}=\sqrt{\alpha^2-x^2}$. Είναι



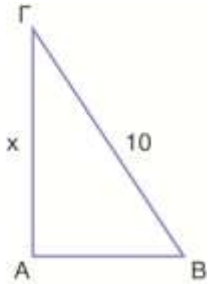
$$(\mathrm{AB\Gamma\Delta})=\mathrm{E}(x)=\frac{(\alpha+\alpha+2x)\sqrt{\alpha^2-x^2}}{2}=(x+\alpha)\sqrt{\alpha^2-x^2},\ x>0$$

$$\mathrm{E}'(x)=\frac{\alpha^2-2x^2-\alpha x}{\sqrt{\alpha^2-x^2}}\geq 0\Leftrightarrow 2x^2+\alpha x-\alpha^2\leq 0\Leftrightarrow$$

$$2(x+\alpha)\left(x-\frac{\alpha}{2}\right)\leq 0\Leftrightarrow x\leq\frac{\alpha}{2}$$

Για κάθε $x\in\left(0,\frac{\alpha}{2}\right)$ είναι $\mathrm{E}'(x)<0\Rightarrow \mathrm{E}\downarrow\left(0,\frac{\alpha}{2}\right]$ και για κάθε $x>\frac{\alpha}{2}$ είναι $\mathrm{E}'(x)>0\Rightarrow \mathrm{E}\uparrow\left[\frac{\alpha}{2},+\infty\right)$. Το εμβαδόν του ΑΒΓΔ γίνεται μέγιστο για $x=\frac{\alpha}{2}$. Τότε $\Gamma\Delta=2\alpha$ και $\mathrm{AK}=\sqrt{\alpha^2-\frac{\alpha^2}{4}}=\frac{\alpha\sqrt{3}}{2}$.

5.666. **α)** Εστω ορθωγόνιο τρίγωνο ΑΒΓ με $\mathrm{B\Gamma}=10,\ \mathrm{A\Gamma}=x$. Τότε



$\mathrm{AB}^2=\mathrm{B\Gamma}^2-\mathrm{A\Gamma}^2=100-x^2\Leftrightarrow \mathrm{AB}=\sqrt{100-x^2}$

$(\mathrm{AB\Gamma})=E(x)=\frac{1}{2}x\sqrt{100-x^2},\ x\in(0,10)$. Είναι

$$E'(x)=\sqrt{100-x^2}-x\frac{2x}{2\sqrt{100-x^2}}=\frac{100-2x^2}{\sqrt{100-x^2}}\geq 0\Leftrightarrow$$

$x^2\leq 50\overset{x>0}{\Leftrightarrow} x\leq 5\sqrt{2}$. Για κάθε $x<5\sqrt{2}$ είναι $E'(x)>0\Rightarrow E\uparrow\left(0,5\sqrt{2}\right]$ και για κάθε

$x\in\left(5\sqrt{2},10\right)$ είναι $E'(x)<0\Rightarrow E\downarrow\left[5\sqrt{2},10\right)$. Το εμβαδό γίνεται μέγιστο όταν

$A\Gamma=5\sqrt{2}$, και $AB=\sqrt{100-50}=5\sqrt{2}$.

β) Εστω $P(x)=x+\sqrt{100-x^2}+10$, $x\in(0,10)$ η περίμετρος του τριγώνου.

Είναι $P'(x)=1-\dfrac{x}{\sqrt{100-x^2}}=\dfrac{\sqrt{100-x^2}-x}{\sqrt{100-x^2}}\geq 0\Leftrightarrow\sqrt{100-x^2}\geq x\Leftrightarrow 100-x^2\geq x^2\Leftrightarrow$

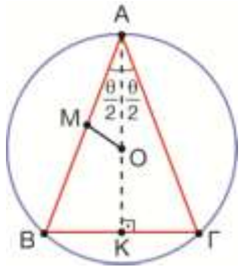
$2x^2\leq 100\Leftrightarrow x^2\leq 50\Leftrightarrow 0<x\leq 5\sqrt{2}$.

Για κάθε $x\in\left(0,5\sqrt{2}\right)$ είναι $P'(x)>0\Rightarrow P\uparrow\left(0,5\sqrt{2}\right]$ και για κάθε $x\in\left(5\sqrt{2},10\right)$

είναι $P'(x)<0\Rightarrow P\downarrow\left[5\sqrt{2},10\right)$. Μέγιστο για $A\Gamma=x=5\sqrt{2}$, τότε

$AB=\sqrt{100-50}=5\sqrt{2}$.

5.667. Εστω ότι $AB=A\Gamma$ και $A=\theta$.



Τότε $\sigma\upsilon\nu\dfrac{\theta}{2}=\dfrac{AM}{AO}=\dfrac{AM}{\rho}\Leftrightarrow AM=\rho\sigma\upsilon\nu\dfrac{\theta}{2}$.

Τότε $AB=A\Gamma=2\rho\sigma\upsilon\nu\dfrac{\theta}{2}$.

Για το εμβαδόν Ε του τριγώνου ΑΒΓ, ισχύει:

$$E=\frac{1}{2}AB\cdot A\Gamma\cdot\eta\mu A=\frac{1}{2}\left(2\rho\sigma\upsilon\nu\frac{\theta}{2}\right)^2\eta\mu\theta\Leftrightarrow$$

$$E=2\rho^2\sigma\upsilon\nu^2\frac{\theta}{2}\eta\mu\theta=2\rho^2\frac{\sigma\upsilon\nu\theta+1}{2}\eta\mu\theta=\rho^2\eta\mu\theta\left(\sigma\upsilon\nu\theta+1\right).$$

Εστω $E(\theta)=\rho^2\eta\mu\theta\left(\sigma\upsilon\nu\theta+1\right)$, $\theta\in(0,\pi)$.

Τότε, $E'(\theta)=\rho^2\left(2\sigma\upsilon\nu^2\theta+\sigma\upsilon\nu\theta-1\right)=0\Leftrightarrow\sigma\upsilon\nu\theta=-1$ ή $\sigma\upsilon\nu\theta=\dfrac{1}{2}$.

Δηλαδή $\theta=\pi$ ή $\theta=\dfrac{\pi}{3}$.

θ	0		$\frac{\pi}{3}$		π
E΄		+	0	−	
E		↗	Ο.Μ	↘	

Το εμβαδόν γίνεται μέγιστο για $\theta=\dfrac{\pi}{3}$,

τότε:

$AB=A\Gamma=2\rho\sigma\upsilon\nu\dfrac{\pi}{6}=2\rho\dfrac{\sqrt{3}}{2}=\rho\sqrt{3}$ και τότε το τρίγωνο είναι ισόπλευρο, οπότε και $B\Gamma=\rho\sqrt{3}$.

5.668. Για το συνολικό κέρδος $P(t)$, ισχύει $P(t)=K(t)+f(t)$. Είναι

$$P'(t)=K'(t)+f'(t)=\frac{A}{4}e^{-\frac{t}{7}}+\left(\frac{7A}{2}e^{-\frac{t+28}{14}}\right)'=\frac{A}{4}e^{-\frac{t}{7}}-\frac{7A}{2}\frac{1}{14}e^{-\frac{t+28}{14}}=\frac{A}{4}\left(e^{-\frac{t}{7}}-e^{-\frac{t+28}{14}}\right).$$

$$P'(t)\geq 0\Leftrightarrow\frac{A}{4}\left(e^{-\frac{t}{7}}-e^{-\frac{t+28}{14}}\right)\geq 0\Leftrightarrow e^{-\frac{t}{7}}\geq e^{-\frac{t+28}{14}}\Leftrightarrow-\frac{t}{7}\geq-\frac{t+28}{14}\Leftrightarrow$$

$2t\leq t+28\Leftrightarrow t\leq 28$.

Για κάθε $t\in(0,28)$ είναι $P'(t)>0\Rightarrow P\uparrow(0,28]$ ενώ για κάθε $t>28$ είναι

$P'(t)<0 \Rightarrow P\downarrow[28,+\infty)$. Το κέρδος γίνεται μέγιστο όταν $t=28$.

5.669. α) Είναι $f(t)=\dfrac{\alpha t}{1+\left(\dfrac{t}{\beta}\right)^2}=\dfrac{\alpha t}{1+\dfrac{t^2}{\beta^2}}=\dfrac{\alpha\beta^2 t}{\beta^2+t^2},\ t\ge 0$

Η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο $[0,+\infty)$ με :

$$f'(t)=\frac{\alpha\beta^2(\beta^2+t^2)-\alpha\beta^2 t\cdot 2t}{(\beta^2+t^2)^2}=\frac{\alpha\beta^2(\beta^2-t^2)}{(\beta^2+t^2)^2}.$$

Επειδή η μέγιστη τιμή της συγκέντρωσης είναι ίση με 15 μονάδες και επιτυγχάνεται 6 ώρες μετά τη χορήγηση του φαρμάκου, η συνάρτηση f παρουσιάζει ακρότατο στο $t=6$ με τιμή $f(6)=15$.

Είναι : $f(6)=\dfrac{\alpha\beta^2\cdot 6}{\beta^2+36}=15 \Leftrightarrow 6\alpha\beta^2=15(\beta^2+36)\Leftrightarrow \alpha\beta^2=\dfrac{5}{2}(\beta^2+36)$ (1).

Λόγω του Θ. Fermat, ισχύει:

$$f'(6)=0\Leftrightarrow \frac{\alpha\beta^2\cdot(\beta^2-36)}{(\beta^2+36)^2}=0\Leftrightarrow \alpha\beta^2(\beta^2-36)=0 \quad (2).$$

Λόγω της σχέσης (1) είναι $\alpha\cdot\beta^2\neq 0$, οπότε η (2) γίνεται :

$\beta^2-36=0\Leftrightarrow\beta^2=36\Leftrightarrow\beta=\pm 6$.

Τότε η (1) γίνεται : $\alpha\cdot 36=\dfrac{5}{2}(36+36)\Leftrightarrow\alpha=5$.

β) Για $\alpha=5$ και $\beta=\pm 6$ η συνάρτηση f γίνεται : $f(t)=\dfrac{180t}{36+t^2}$.

Επειδή η δράση του φαρμάκου είναι αποτελεσματική, όταν η τιμή της συγκέντρωσης είναι τουλάχιστον 12 μονάδες, ισχύει :

$$f(t)\ge 12\Leftrightarrow \frac{180t}{36+t^2}\ge 12\Leftrightarrow 180t\ge 12(36+t^2)\Leftrightarrow t^2-15t+36\le 0\Leftrightarrow 3\le t\le 12.$$

Δηλαδή η δράση του φαρμάκου είναι αποτελεσματική το χρονικό διάστημα από 3 έως 12 ώρες από τη χορήγησή του.

5.670. α) Είναι $f'(t)=\dfrac{8}{t+1}-2\Leftrightarrow f'(t)=\left(8\ln(t+1)-2t\right)'\Leftrightarrow f(t)=8\ln(t+1)-2t+c,\ t\ge 0, c\in\mathbb{R}$

Είναι φανερό ότι τη χρονική στιγμή $t=0$ δεν υπάρχει το φάρμακο στον οργανισμό του ασθενούς (εκείνη τη στιγμή ξεκινά η χορήγησή του), οπότε $f(0)=0$.

Όμως $f(0)=c$, άρα $c=0$ και $f(t)=8\ln(t+1)-2t,\ t\ge 0$.

β) Είναι $f'(t)=\dfrac{8}{t+1}-2=\dfrac{6-2t}{t+1}\ge 0\Leftrightarrow t\le 3$.

Για κάθε $t\in(0,3)$ είναι $f'(t)>0\Rightarrow f\uparrow[0,3]$ και για κάθε $t>3$ είναι

$f'(t)<0\Rightarrow f\downarrow[3,+\infty)$. Η συγκέντρωση του φαρμάκου στο αίμα γίνεται μέγιστη, 3 ώρες μετά τη χορήγησή του στον ασθενή.

γ) Τη χρονική $t=8$ είναι :

$$f(8)=8\ln 9-16=8\ln 3^2-16=16\ln 3-16=16(\ln 3-1)=16(\ln 3-\ln e)=16\ln\frac{3}{e}.$$

Είναι $\frac{3}{e}>1 \Leftrightarrow \ln\frac{3}{e}>0$, άρα $f(8)>0$.

Οπότε τη χρονική στιγμή t=8 υπάρχει ακόμη επίδραση του φαρμάκου στον οργανισμό.

Είναι $f(0)=8\ln 11-20 \simeq 8\cdot 2{,}4-20=-0{,}8$.

Είναι $f(8)\cdot f(1)<0$ και η f είναι συνεχής συνάρτηση στο [8,10], οπότε λόγω του Θ. Bolzano υπάρχει $t_1\in(8,10)$ τέτοιο,ώστε $f(t_1)=0$.

Δηλαδή υπάρχει χρονική στιγμή πριν την $t=10$ που η επίδραση του φαρμάκου μηδενίζεται.

5.671. **α)** Εστω ότι η συνάρτηση f παρουσιάζει ακρότατο στο $x_0\in\mathbb{R}$.

Τότε, επειδή η f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$, λόγω του Θ. Fermat ισχύει : $f'(x_0)=0$.

Είναι : $f^3(x)+\beta f^2(x)+\gamma f(x)=x^3-2x^2+6x-1$ (1), οπότε

$$\left(f^3(x)+\beta f^2(x)+\gamma f(x)\right)'=\left(x^3-2x^2+6x-1\right)' \Leftrightarrow$$

$$3f^2(x)\cdot f'(x)+2\beta f(x)f'(x)+\gamma f'(x)=3x^2-4x+6 \Leftrightarrow$$

$$f'(x)\left(3f^2(x)+2\beta f(x)+\gamma\right)=3x^2-4x+6 \quad (2).$$

Η σχέση (1) για $x=x_0$ γίνεται :

$f'(x_0)\left(3f^2(x_0)+2\beta f(x_0)+\gamma\right)=3x_0^2-4x_0+6 \Leftrightarrow 0=3x_0^2-4x_0+6$ που είναι αδύνατο αφού $\Delta=-56<0$.Επομένως η f δεν έχει ακρότατα.

β) Επειδή το τριώνυμο $3x^2-4x+6$ έχει $\Delta=-56<0$, ισχύει : $3x^2-4x+6>0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$. Ακόμη το τριώνυμο $3f^2(x)+2\beta f(x)+\gamma$ έχει

$\Delta=4\beta^2-12\gamma=4(\beta^2-3\gamma)<0$ οπότε $3f^2(x)+2\beta f(x)+\gamma>0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

Επομένως από τη σχέση (2) προκύπτει ότι $f'(x)>0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$ και η f είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$.

γ) Για $x=0$ η (1) γίνεται :

$$f^3(0)+\beta f^2(0)+\gamma f(0)=-1 \Leftrightarrow f(0)\left(f^2(0)+\beta f(0)+\gamma\right)=-1 \quad (3).$$

Το τρίγωνο $f^2(0)+\beta f(0)+\gamma$ έχει $\Delta=\beta^2-4\gamma=\beta^2-3\gamma-\gamma$ επειδή

$\beta^2<3\gamma \Leftrightarrow \gamma>\frac{\beta^2}{3}\geq 0$ είναι $-\gamma<0$ και $\beta^2-3\gamma<0$, οπότε $\Delta<0$ και

$f^2(0)+\beta f(0)+\gamma>0$. Άρα από τη σχέση (3) έχουμε ότι : $f(0)<0$.

Για $x=1$ η σχέση (1) γίνεται :

$$f^3(1)+\beta f^2(1)+\gamma f(1)=1-2+6-1 \Leftrightarrow f(1)\left(f^2(1)+\beta f(1)+\gamma\right)=4.$$

Επειδή το τριώνυμο $f^2(1)+\beta f(1)+\gamma$ έχει $\Delta=\beta^2-4\gamma<0$, είναι

$f^2(1)+\beta f(1)+\gamma>0$ οπότε και $f(1)>0$.

Δηλαδή $f(0)f(1)<0$ και επειδή η f είναι συνεχής στο $[0,1]$ λόγω του Θ. Bolzano υπάρχει $x_0\in(0,1)$ τέτοιο, ώστε $f(x_0)=0$.

Όμως η f είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$, οπότε το x_0 είναι η μοναδική ρίζα της εξίσωσης $f(x)=0$ στο $(0,1)$.

5.672. **α)** Η f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με $f'(x)=6x^2-2kx$.

Για να είναι η εφαπτομένη της C_f στο σημείο $A(1,f(1))$ παράλληλη στον άξονα x΄x, πρέπει : $f'(1)=0 \Leftrightarrow 6-2k=0 \Leftrightarrow k=3$.

β) i. Για $k=3$ είναι $f(x)=2x^3-3x^2+10$ και $f'(x)=6x^2-6x$.

$f'(x)=0 \Leftrightarrow 6x^2-6x=0 \Leftrightarrow 6x(x-1)=0 \Leftrightarrow x=0$ ή $x=1$.

Η f είναι γνησίως αύξουσα σε καθένα από τα διαστήματα $(-\infty,0]$και $[1,+\infty)$ και γνησίως φθίνουσα στο $[0,1]$.

Η f έχει τοπικό μέγιστο στο $x_0=0$ το $f(0)=10$ και τοπικό ελάχιστο στο $x_1=1$ το $f(1)=9$.

ii. Είναι : $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}(2x^3-3x^2+10)=\lim\limits_{x\to-\infty}(2x^3)=-\infty$.

Για το διάστημα $\Delta=(-\infty,0]$ ισχύει :

$f(\Delta)=\left(\lim\limits_{x\to-\infty} f(x),f(0)\right]=(-\infty,10]$.

iii. Είναι : $14<\alpha<15 \Leftrightarrow 9<\alpha-5<10$

και $f(1)<f(x)<f(0) \Leftrightarrow 9<f(x)<10$ για κάθε $x\in(0,1)$.

Οπότε λόγω του θεωρήματος ενδιάμεσων τιμών υπάρχει $x_1\in(0,1)$ τέτοιο, ώστε $f(x_1)=\alpha-5$. Επειδή η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $[0,1]$ το x_1 είναι η μοναδική λύση της εξίσωσης $f(x)=\alpha-5$ στο διάστημα $(0,1)$.

5.673. α) $\left(f^3(x)+f(x)\right)'=\left(8x^3-12x^2+8x-2\right)' \Leftrightarrow 3f^2(x)f'(x)+f'(x)=24x^2-24x+8 \Leftrightarrow$

$f'(x)\left(3f^2(x)+1\right)=8\left(3x^2-3x+1\right)$

Επειδή $3x^2-3x+1>0$ $(\Delta<0)$ και $3f^2(x)+1>0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$, είναι και $f'(x)>0 \Rightarrow f\uparrow\mathbb{R} \Rightarrow f$ 1–1.

β) Για $x=0$ είναι $f^3(0)+f(0)=-2 \Leftrightarrow f(0)\left(f^2(0)+1\right)=-2 \Rightarrow f(0)<0$ και

για $x=1$ είναι $f^3(1)+f(1)=2 \Leftrightarrow f(1)\left(f^2(1)+1\right)=2 \Rightarrow f(1)>0$, δηλαδή

$f(0)f(1)<0$ και επειδή η f είναι συνεχής στο $[0,1]$, η εξίσωση $f(x)=0$ έχει τουλάχιστον μία ρίζα στο $(0,1)$. Επειδή η f είναι γνησίως αύξουσα, η προηγούμενη ρίζα είναι μοναδική.

γ) $f(g(x)-3x)=f(x^2+2) \overset{f\ 1-1}{\Leftrightarrow} g(x)-3x=x^2+2 \Leftrightarrow g(x)=x^2+3x+2$, $x\in\mathbb{R}$.

$g'(x)=2x+3\geq 0 \Leftrightarrow x\geq -\frac{3}{2}$. Για κάθε $x<-\frac{3}{2}$ είναι $g'(x)<0 \Rightarrow g\downarrow\left(-\infty,-\frac{3}{2}\right]$

και για κάθε $x>-\frac{3}{2}$ είναι $g'(x)>0 \Rightarrow g\uparrow\left[-\frac{3}{2},+\infty\right)$. Η g παρουσιάζει ελάχιστο στο $x_0=-\frac{3}{2}$.

5.674. α) Είναι $\begin{cases} f(-2)=\frac{5}{12} \\ f'(-2)=\frac{5}{18} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{\alpha}{4}+\frac{1}{2+\beta}=\frac{5}{12} \\ \frac{\alpha}{4}+\frac{1}{(2+\beta)^2}=\frac{5}{18} \end{cases} \Leftrightarrow ... \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha=1 \\ \beta=4 \end{cases}$

β) Είναι $f(x)=\frac{1}{x^2}-\frac{1}{x-4}$, $x\neq 0,4$,

$$f'(x)=-\frac{2}{x^3}+\frac{1}{(x-4)^2}=\frac{x^3-2x^2+16x-32}{x^3(x-4)^2}=\frac{(x-2)(x^2+16)}{x^3(x-4)^2}\geq 0 \Leftrightarrow x\geq 2 \text{ ή } x<0$$

Η f είναι $\uparrow$ σε καθένα από τα διαστήματα $(-\infty,0)$, $[2,4)$ και $(4,+\infty)$ και $\downarrow$ στο $(0,2]$.

Η f έχει τοπικό ελάχιστο το $f(2)=\frac{3}{4}$.

γ) $\kappa x^3+(1-4\kappa)x^2-x+4=0 \Leftrightarrow \kappa x^3+x^2-4\kappa x^2-x+4=0 \Leftrightarrow$

$$\kappa x^2(x-4)=x-4-x^2 \underset{x\neq 4}{\overset{x\neq 0}{\Leftrightarrow}} \kappa=\frac{1}{x^2}-\frac{1}{x-4} \Leftrightarrow f(x)=\kappa$$

$\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=+\infty$, $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=+\infty$, , $\lim\limits_{x\to -\infty} f(x)=0=\lim\limits_{x\to +\infty} f(x)$.

$\lim\limits_{x\to 4^-} f(x)=+\infty$, $\lim\limits_{x\to 4^+} f(x)=-\infty$,

δ) Για το $\Delta_1=(-\infty,0)$ είναι $f(\Delta_1)=(0,+\infty)$, για το $\Delta_2=(0,2]$ είναι $f(\Delta_2)=\left[\frac{3}{4},+\infty\right)$.

Για το $\Delta_3=[2,4)$ είναι $f(\Delta_3)=\left[\frac{3}{4},+\infty\right)$ και για το $\Delta_4=(4,+\infty)$ είναι $f(\Delta_4)=(-\infty,0)$.

Αν $\kappa<0$ η $f(x)=\kappa$ έχει μία λύση στο Δ_4.

Αν $\kappa=0$ τότε η $f(x)=\kappa$ είναι αδύνατη.

Αν $0<\kappa<\frac{3}{4}$ τότε η $f(x)=\kappa$ έχει 1 λύση στο Δ_1.

Αν $\kappa\geq\frac{3}{4}$ τότε η $f(x)=\kappa$ έχει τρείς λύσεις, μία σε κάθε ένα από τα διαστήματα Δ_1, Δ_2, Δ_3.

5.675. **α)** Εστω $g(x)=f(x)-3x^2+2x-4$, $x\in\mathbb{R}$. Είναι $g(1)=0=g(3)$, οπότε:

$f(x)\geq 3x^2-2x+4 \Leftrightarrow f(x)-3x^2+2x-4\geq 0 \Leftrightarrow g(x)\geq g(1)$ και $g(x)\geq g(3)$,

άρα η g παρουσιάζει ελάχιστο στα $x_1=1$ και $x_2=3$ που είναι εσωτερικά του πεδίου ορισμού της. Επειδή η g είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με $g'(x)=f'(x)-6x+2$, από το θ.Fermat ισχύει ότι: $g'(1)=0 \Leftrightarrow f'(1)-4=0 \Leftrightarrow f'(1)=4$ και $g'(3)=0 \Leftrightarrow f'(3)=16$.

β) Από το Θ.Μ.Τ για την f', υπάρχουν $\xi_1\in(1,2)$ και $\xi_2\in(2,3)$ τέτοια, ώστε:

$f''(\xi_1)=f'(2)-f'(1)=f'(2)-4$ και $f''(\xi_2)=f'(3)-f'(2)=16-f'(2)$. Είναι

$f''(\xi_1)+f''(\xi_2)=f'(2)-4+16-f'(2)=12$.

5.676. **α)** Αν η f είχε ακρότατο στο $x_0\in(0,\alpha)$, τότε από το θ.Fermat θα ήταν $f'(x_0)=0$ που είναι άτοπο, αφού το μηδέν είναι η μοναδική ρίζα της $f'(x)=0$.

β) Επειδή η f είναι συνεχής στο $[0,\alpha]$ θα έχει ελάχιστη και μέγιστη τιμή στο διάστημα αυτό. Επειδή επιπλέον η f δεν έχει ακρότατα στο $(0,\alpha)$, θα έχει ακρότατα τα $f(0)=2\alpha$ και $f(\alpha)=\alpha$. Επειδή $\alpha<2\alpha$, είναι $f([0,\alpha])=[\alpha,2\alpha]$.

Όμοια η f δεν έχει ακρότατα στο $(-\alpha,0)$, οπότε τα ακρότατα του είναι το $f(-\alpha)=\alpha$ και $f(0)=2\alpha$,

γ) Από το Θ.Μ.Τ. για την f υπάρχουν $\xi_1\in(-\alpha,0)$ και $\xi_2\in(0,\alpha)$ τέτοια, ώστε:

$$f'(\xi_1)=\frac{f(0)-f(-\alpha)}{0-(-\alpha)}=-1 \text{ και } f'(\xi_2)=\frac{f(\alpha)-f(0)}{\alpha-0}=1, \text{ οπότε } f'(\xi_1)f'(\xi_2)=-1.$$

δ) Επειδή η f έχει σύνολο τιμών το $[\alpha,2\alpha]$, ισχύει ότι $\alpha\le f(x)\le 2\alpha$ για κάθε $x\in[-\alpha,\alpha]$. Άρα $\alpha\le f\left(-\frac{\alpha}{2}\right)\le 2\alpha,\ \alpha\le f\left(\frac{\alpha}{2}\right)\le 2\alpha$, οπότε και

$$2\alpha\le f\left(-\frac{\alpha}{2}\right)+f\left(\frac{\alpha}{2}\right)\le 4\alpha \Leftrightarrow \alpha\le\frac{f\left(-\frac{\alpha}{2}\right)+f\left(\frac{\alpha}{2}\right)}{2}\le 2\alpha.$$

Επειδή ο αριθμός $\dfrac{f\left(-\frac{\alpha}{2}\right)+f\left(\frac{\alpha}{2}\right)}{2}$, ανήκει στο σύνολο τιμών της f, υπάρχει $x_1\in[-\alpha,\alpha]$ τέτοιο, ώστε $f(x_1)=\dfrac{f\left(-\frac{\alpha}{2}\right)+f\left(\frac{\alpha}{2}\right)}{2}\Leftrightarrow 2f(x_1)=f\left(\frac{\alpha}{2}\right)+f\left(-\frac{\alpha}{2}\right)$.

ε) Από το Θ.Μ.Τ για την f υπάρχει $\xi_1\in(-\alpha,0)$ τέτοιο, ώστε $f'(\xi_1)=\dfrac{f(0)-f(-\alpha)}{\alpha}=1>0$ και $\xi_2\in(0,\alpha)$: $f'(\xi_2)=\dfrac{f(\alpha)-f(0)}{\alpha}=-1<0$.

Επειδή η $x_0=0$ είναι η μοναδική ρίζα της $f'(x)=0$, θα είναι $f'(x)\ne 0$ για κάθε $x\in(-\alpha,0)\cup(0,\alpha)$ και επειδή η f' είναι συνεχής, διατηρεί πρόσημο σε καθένα από τα διαστήματα $(-\alpha,0)$ και $(0,\alpha)$. Επειδή $f'(\xi_1)>0$, είναι $f'(x)>0\ \forall x\in(-\alpha,0)\Rightarrow f\uparrow[-\alpha,0]$

και αφού $f'(\xi_2)<0$, είναι $f'(x)<0\ \forall x\in(0,\alpha)\Rightarrow f\downarrow[0,\alpha]$.

Επειδή η f έχει ελάχιστο το α και μέγιστο το 2α, είναι $f([-\alpha,\alpha])=[\alpha,2\alpha]$.

5.677. α) Η f είναι παραγωγίσιμη στο $(0,+\infty)$ με: $f'(x)=2x(\ln x-\lambda)+x$

Επειδή η ευθεία $y=-2x+\frac{1}{2}$ εφάπτεται στη C_f στο Α, ισχύει:

$f'(1)=-2\Leftrightarrow -2\lambda+1=-2\Leftrightarrow\lambda=\frac{3}{2}$.

β) Για $\lambda=\frac{3}{2}$ είναι $f(x)=x^2\left(\ln x-\frac{3}{2}\right)$ και $f'(x)=2x\left(\ln x-\frac{3}{2}\right)+x=2x(\ln x-1)$

$f'(x)=0\Leftrightarrow 2x(\ln x-1)=0\Leftrightarrow x=0$ που απορρίπτεται ή $x=e$.

x	0	e	$+\infty$
f'	$-$	0	$+$
f	$\searrow$	Ο.Ε.	$\nearrow$

Για κάθε $x\in(0,e)$ είναι $f'(x)<0$ άρα η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $(0,e]$.

Για κάθε $x>e$ είναι $f'(x)>0$ άρα η f είναι γνησίως αύξουσα στο $[e,+\infty)$.

Η f έχει ολικό ελάχιστο το $f(e)=-\dfrac{e^2}{2}$.

γ) Επειδή το 1821 ανήκει στο σύνολο τιμών της f, υπάρχει $x_1\in(e,+\infty)$ τέτοιο, ώστε $f(x_1)=1821$. Επειδή η f είναι γνησίως αύξουσα στο $(e,+\infty)$, το x_1 είναι μοναδικό.

5.678. α) Επειδή η f έχει σύνολο τιμών το $[-5,5]$ και $f(0)=1$, $f(2)=4$, η f δεν παρουσιάζει ακρότατα στα άκρα 0 και 2 του διαστήματος $[0,2]$, οπότε θα υπάρχουν $x_1,x_2\in(0,2)$ τέτοια, ώστε $f(x_1)=-5$ και $f(x_2)=5$. Τότε από το θ.Fermat είναι

$f'(x_1)=f'(x_2)=0$.

β) Εστω $g(x)=f'(x)-e^xf(x),\ x\in[x_1,x_2]$. Είναι $g(x_1)=f'(x_1)-e^{x_1}f(x_1)=5e^{x_1}>0$,

$g(x_2)=f'(x_2)-e^{x_2}f(x_2)=-5e^{x_2}<0$, δηλαδή $g(x_1)g(x_2)<0$ και επειδή η g είναι συνεχής, από το θ.Bolzano, υπάρχει $\rho\in(0,2)$ τέτοιο, ώστε $g(\rho)=0\Leftrightarrow$

$f'(\rho)=e^{\rho}f(\rho)$.

γ) Εστω $x_1<x_2$. Από το Θ.Μ.Τ για την f, υπάρχει $\xi_3\in(x_2,2)$ τέτοιο, ώστε:

$$f'(\xi_3)=\frac{f(2)-f(x_2)}{2-x_2}=\frac{4-5}{2-x_2}=\frac{-1}{2-x_2}<0.$$

Από το Θ.Μ.Τ. για την f', υπάρχουν $\xi_1\in(x_1,x_2)$ και $\xi_2\in(x_2,\xi_3)$ τέτοια, ώστε:

$$f''(\xi_1)=\frac{f'(x_2)-f'(x_1)}{x_2-x_1}=\frac{10}{x_2-x_1}>0 \text{ και } f''(\xi_2)=\frac{f'(\xi_3)-f'(x_2)}{\xi_3-x_2}=\frac{f'(\xi_3)-5}{x_2-x_1}<0,$$

άρα $f''(\xi_1)f''(\xi_2)<0$.

5.679. α) $e^x\left(f'(x)+f''(x)-1\right)=f'(x)+xf''(x)\Leftrightarrow e^xf'(x)+e^xf''(x)-e^x=f'(x)+xf''(x)\Leftrightarrow$

$$\left(e^xf'(x)-e^x\right)'=\left(xf'(x)\right)'\Leftrightarrow e^xf'(x)-e^x=xf'(x)+c\Leftrightarrow\left(e^x-x\right)f'(x)=e^x+c$$

Για $x=0$ είναι $0=1+c\Leftrightarrow c=-1$, οπότε $\left(e^x-x\right)f'(x)=e^x-1$ (1)

Εστω $g(x)=e^x-x,\ x\in\mathbb{R}$. Είναι $g'(x)=e^x-1\ge 0\Leftrightarrow x\ge 0$.

Για κάθε $x<0$ είναι $g'(x)<0\Rightarrow g\downarrow(-\infty,0]$ και για κάθε $x>0$ είναι $g'(x)>0\Rightarrow g\uparrow[0,+\infty)$. Η g έχει ελάχιστο το $g(0)=1$, άρα $g(x)\ge 1>0\Rightarrow e^x-x>0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$, οπότε από την (1), έχουμε:

$$f'(x)=\frac{e^x-1}{e^x-x}=\left(\ln\left(e^x-x\right)\right)'\Leftrightarrow f(x)=\ln\left(e^x-x\right)+c_1.$$

Για $x=0$ είναι $f(0)=c_1\Leftrightarrow c_1=0$, οπότε $f(x)=\ln\left(e^x-x\right),\ x\in\mathbb{R}$.

β) $f'(x)=\dfrac{e^x-1}{e^x-x}\ge 0\Leftrightarrow e^x-1\ge 0\Leftrightarrow e^x\ge 1\Leftrightarrow x\ge 0$. Για κάθε $x<0$ είναι

$f'(x)<0\Rightarrow f\downarrow(-\infty,0]$ και για κάθε $x>0$ είναι $f'(x)>0\Rightarrow f\uparrow[0,+\infty)$. Η f έχει ελάχιστο το $f(0)=0$,

γ) Εστω $h(x)=\ln\left(e^x-x\right)-\sigma\upsilon\nu x,\ x\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$.

Είναι $h(0)=-1<0$ και $h\left(\frac{\pi}{2}\right)=\ln\left(e^{\frac{\pi}{2}}-\frac{\pi}{2}\right)$.

Είναι $\frac{\pi}{2}>0\overset{g\uparrow}{\Leftrightarrow} g\left(\frac{\pi}{2}\right)>g(0)\Leftrightarrow e^{\frac{\pi}{2}}-\frac{\pi}{2}>1\Leftrightarrow \ln\left(e^{\frac{\pi}{2}}-\frac{\pi}{2}\right)>0\Leftrightarrow h\left(\frac{\pi}{2}\right)>0$, δηλαδή $h(0)h\left(\frac{\pi}{2}\right)<0$ και επειδή η h είναι συνεχής στο $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$, από το θ.Bolzano, η εξίσωση $h(x)=0$ έχει τουλάχιστον μία ρίζα στο $\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$.

Είναι $h'(x)=\frac{e^x-1}{e^x-x}+\eta\mu x>0\Rightarrow h\uparrow\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$, οπότε η προηγούμενη ρίζα είναι μοναδική.

5.680. α) Από το θεώρημα μέγιστης και ελάχιστης τιμής υπάρχουν $x_1,x_2\in(1,5)$ με $x_1\neq x_2$ και $f(x_1)=-1$ ελάχιστο της f, $f(x_2)=6$ μέγιστη τιμή της f. Από θεώρημα Fermat είναι $f'(x_1)=f'(x_2)=0$

β) Rolle για την f' στο $[x_1,x_2]$

γ) Εστω $h(x)=f(x)f'(x)+f^4(x)-x$, $x\in[x_1,x_2]\subseteq(1,5)$

$h(x_1)=f(x_1)f'(x_1)+f^4(x_1)-x_1=1-x_1<0$ και $h(x_2)=f^4(x_2)-x_2=6^4-x_2>0$

και επειδή η h είναι συνεχής, από το Θ.Β υπάρχει $x_0\in(x_1,x_2)\subseteq(1,5)$: $h(x_0)=0$

δ) Εστω $g(x)=f(x)-(-x+6)=f(x)+x-6$, $x\in[1,5]$. Είναι $g(1)=f(1)+1-6=3+1-6<0$, $g(5)=f(5)+5-6=4+5-6>0$ και επειδή η g είναι συνεχής, από το Θ.Β υπάρχει $\rho\in(1,5):g(\rho)=0\Leftrightarrow\ f(\rho)=6-\rho$.

5.681. α) Στην σχέση $2f\left(x^2\right)\geq f^2(x)+1$ (1) για $x=1,\ x=0$ προκύπτει $\left(f(1)-1\right)^2\leq 0$, $\left(f(0)-1\right)^2\leq 0$ άρα $f(0)=f(1)=1$. Οπότε από θ.Rolle για την f στο $[0,1]$ $\exists x_0\in(0,1):f'(x_0)=0$

β) Εστω $g(x)=2f\left(x^2\right)-f^2(x)-1$ με $g'(x)=4xf'\left(x^2\right)-2f(x)f'(x)$. Είναι $g(x)\geq g(0)$, οπότε από θ.Fermat , έχουμε: $g'(0)=0\Leftrightarrow f'(0)=0$ και $g'(1)=0\Leftrightarrow f'(1)=0$.

Είναι $\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)-1}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x}=f'(0)=0$ και

$\lim\limits_{x\to 1}\frac{f(x)-1}{x-1}=\lim\limits_{x\to 1}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=f'(1)=0$

γ) Από το θ.Rolle για την f' στα $[0,x_0]$ και $[x_0,1]$ $\exists\xi_1\in(0,x_0)$ και $\xi_2\in(x_0,1):f''(\xi_1)=f''(\xi_2)=0$.

5.682. α) i. Είναι $f'(x)\neq 0$ για κάθε $x\in(2,3)$ και επειδή η f' είναι συνεχής, διατηρεί πρόσημο. Άρα η f είναι γνήσια μονότονη και δεν έχει ακρότατα στο $(2,3)$.

ii. Από το ΘΜΤ για την f', υπάρχει $\xi_1 \in (2,3)$ και $\xi_2 \in (3,6)$ τέτοια, ώστε:

$$f''(\xi_1) = \frac{f'(3)-f'(2)}{1} = -f'(2) \text{ και } f''(\xi_2) = \frac{f'(6)-f'(3)}{3} = \frac{f'(6)}{3}$$

$$\xi_1 < \xi_2 \overset{f''\downarrow}{\Leftrightarrow} f''(\xi_1) > f''(\xi_2) \Leftrightarrow -f'(2) > \frac{f'(6)}{3} \Leftrightarrow f'(6)+3f'(2) < 0$$

iii. $3 < \xi_2 < 6 \overset{f''\downarrow}{\Leftrightarrow} f''(3) > f''(\xi_2) > f''(6)$, άρα $f''(3) > \dfrac{f'(6)}{3} \Leftrightarrow 3f''(3) > f'(6)$

β) $f'(\xi)e^{\xi} - f'(\xi+3)\ln\xi = f'(\xi)\ln\xi - f'(\xi+3)e^{\xi} \Leftrightarrow$

$f'(\xi)(e^{\xi}-\ln\xi) + f'(\xi+3)(e^{\xi}-\ln\xi) = 0 \Leftrightarrow (f'(\xi)+f'(\xi+3))(e^{\xi}-\ln\xi) = 0 \Leftrightarrow$

$f'(\xi)+f'(\xi+3) = 0$ γιατί $e^x \neq \ln x$ για κάθε $x > 0$.

Εστω $g(x) = f'(x)+f'(x+3), x \in [0,3]$.

$g(0) = f'(0)$, $g(3) = f'(6) > 0$

Από το ΘΜΤ για την f', υπάρχει $\xi_3 \in (0,3)$ τέτοιο, ώστε

$$f''(\xi_3) = \frac{f'(3)-f'(0)}{3} = -\frac{f'(0)}{3}$$

$$\xi_3 < \xi_2 \overset{f''\downarrow}{\Leftrightarrow} f''(\xi_3) > f''(\xi_2) \Leftrightarrow -\frac{f'(0)}{3} > \frac{f'(6)}{3} \Leftrightarrow -f'(0) > f'(6) > 0 \Leftrightarrow f'(0) < 0$$

άρα από θεώρημα Bolzano $\exists \xi \in (0,3) : g(\xi) = 0$

5.683. **α)** Επειδή $f(x) = \ln(g(x))$, είναι $f'(x) = \dfrac{g'(x)}{g(x)}$, οπότε η σχέση

$g(x) = xf'(x)$ γίνεται $g(x) = x\dfrac{g'(x)}{g(x)} \Leftrightarrow \dfrac{g'(x)}{g^2(x)} = \dfrac{1}{x} \Leftrightarrow \left(-\dfrac{1}{g(x)}\right)' = (\ln x)' \Leftrightarrow$

$$-\frac{1}{g(x)} = \ln x + c \Leftrightarrow g(x) = -\frac{1}{\ln x + c}$$

$f(1) = 0 \Leftrightarrow \ln(g(1)) = 0 \Leftrightarrow g(1) = 1$, άρα $-\dfrac{1}{c} = 1 \Leftrightarrow c = -1$, άρα $g(x) = \dfrac{1}{1-\ln x}$

Τότε $f(x) = \ln\dfrac{1}{1-\ln x} = -\ln(1-\ln x)$, $\quad f'(x) = -\dfrac{1}{x(1-\ln x)}$,

$f''(x) = \dfrac{\ln x}{x^2(1-\ln x)^2} > 0 \Rightarrow f' \uparrow (0,e)$, οπότε η f' δεν έχει ακρότατα.

β) $f(x) = \ln(g(x)) \Leftrightarrow f(x) = \ln(xf'(x)) \Leftrightarrow e^{f(x)} = xf'(x) \Leftrightarrow -f'(x)e^{-f(x)} = -\dfrac{1}{x} \Leftrightarrow$

$\left(e^{-f(x)}\right)' = (-\ln x)' \Leftrightarrow e^{-f(x)} = -\ln x + c$.

Για $x = 1 \Rightarrow c = 1$, άρα $e^{-f(x)} = 1-\ln x$ και για κάθε $x \in (0,e)$ είναι $f(x) = -\ln(1-\ln x)$

$(1-\ln x)e^{\alpha} = 1 \Leftrightarrow 1-\ln x = e^{-\alpha}$ (1).

Αν $x \geq e$, η(1) είναι αδύνατη, οπότε για $x \in (0,e)$ η (1) γίνεται:

$\ln(1-\ln x) = -\alpha \Leftrightarrow f(x) = \alpha$.

Είναι $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^+}\left[-\ln(1-\ln x)\right] \overset{1-\ln x=u}{\underset{u\to+\infty}{=}} = \lim\limits_{u\to+\infty}(-\ln u) = -\infty$ και

$\lim\limits_{x\to e^-} f(x) = \lim\limits_{x\to e^-}\left[-\ln(1-\ln x)\right] \overset{1-\ln x=u}{\underset{u\to 0^+}{=}} = \lim\limits_{u\to 0^+}(-\ln u) = +\infty$, οπότε $f(A) = \mathbb{R}$.

Επειδή $\alpha \in f(A)$ και η f είναι γνησίως αύξουσα στο $A = (0,e)$, η εξίσωση $f(x) = \alpha$ έχει ακριβώς μία λύση.

γ) $h(x) \le k \Leftrightarrow h(x) \le h(1)$, δηλαδή η h παρουσιάζει μέγιστο στο $x = 1$.

Επειδή η h είναι παραγωγίσιμη στο $(0,e)$ με $h'(x) = k - \ln x - 1$, από το θ.Fermat, ισχύει ότι: $h'(1) = 0 \Leftrightarrow k - 1 = 0 \Leftrightarrow k = 1$.

5.684. **α)** Για $x = 2$ είναι $2f(2) - 4 \ge f(2) + f(-2) \Leftrightarrow f(2) - f(-2) \ge 4$ (1)

Για $x = -2$ είναι $2f(-2) + 4 \ge f(2) + f(-2) \Leftrightarrow f(2) - f(-2) \le 4$ (2)

Από τις (1), (2) είναι $f(2) - f(-2) = 4$.

β) Εστω $g(x) = f(x) - f(-2) - 3,\ x \in [-2,2]$.

Επειδή η f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ είναι και συνεχής, οπότε και η g είναι συνεχής στο $[-2,2]$.

Είναι $g(-2) = f(-2) - f(-2) - 3 = -3 < 0$ και

$g(2) = f(2) - f(-2) - 3 = 4 - 3 = 1 > 0$.

Δηλαδή $g(-2)g(2) < 0$, οπότε λόγω του θεωρήματος Bolzano υπάρχει $x_0 \in (-2,2)$ τέτοιο, ώστε: $g(x_0) = 0 \Leftrightarrow f(x_0) = f(-2) + 3$.

γ) Για την f εφαρμόζεται το Θεώρημα Μέσης Τιμής σε καθένα από τα διαστήματα $[-2,0]$ και $[0,2]$, οπότε υπάρχουν $\xi_1 \in (-2,0)$ και $\xi_2 \in (0,2)$ τέτοια, ώστε:

$f'(\xi_1) = \dfrac{f(0) - f(-2)}{2}$ και $f'(\xi_2) = \dfrac{f(2) - f(0)}{2}$.

Είναι $f'(\xi_1) + f'(\xi_2) = \dfrac{f(0) - f(-2)}{2} + \dfrac{f(2) - f(0)}{2} = \dfrac{f(2) - f(-2)}{2} = \dfrac{4}{2} = 2$.

δ) Για την f εφαρμόζεται το Θ.Μ.Τ. στο $[-2,2]$, οπότε υπάρχει $\xi \in (-2,2)$ τέτοιο,

ώστε: $f'(\xi) = \dfrac{f(2) - f(-2)}{4} = \dfrac{4}{4} = 1$

ε) Μια λύση της εξίσωσης $f'(x) = 1$ είναι το ξ του προηγούμενου ερωτήματος.

Είναι $2f(x) - 2x \ge f(2) + f(-2) \Leftrightarrow 2f(x) - 2x - f(2) - f(-2) \ge 0$ (3)

Εστω $h(x) = 2f(x) - 2x - f(2) - f(-2), x \in \mathbb{R}$. Είναι $h(2) = 0$ και $h(-2) = 0$, και η (3) γίνεται $h(x) \ge h(-2)$ και $h(x) \ge h(2)$.

Δηλαδή η h παρουσιάζει ελάχιστο στα $x_1 = -2$ και $x_2 = 2$.

Επειδή η h είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με $h'(x) = 2f'(x) - 2$, λόγω του θεωρήματος Fermat ισχύει: $\begin{cases} h'(-2) = 0 \\ h'(2) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2f'(-2) - 2 = 0 \\ 2f'(2) - 2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow\ge \begin{cases} f'(-2) = 1 \\ f'(2) = 1 \end{cases}$.

Άρα η εξίσωση $f'(x) = 1$ έχει τουλάχιστον 3 ρίζες.

5.685. **α)** Επειδή $f'(0) = f'(10) = 2$, από το θ.Rolle, υπάρχει $\xi \in (0,10) : f''(\xi) = 0$.

β) Για κάθε $0<x<\xi \overset{f''\uparrow}{\Rightarrow} f''(x)<f''(\xi)=0 \Rightarrow f'\downarrow[0,\xi]$ και για κάθε

$\xi<x<10 \overset{f''\uparrow}{\Rightarrow} f''(\xi)<f''(x) \Leftrightarrow f''(x)>0 \Rightarrow f'\uparrow[\xi,10]$.

Για κάθε $0\le x<\xi$ είναι $f'(x)\le f'(0)=2$ και για κάθε $\xi\le x\le 10$, είναι

$f'(x)\le f'(10)=2$, άρα $f'(x)\le 2$ για κάθε $x\in[0,10]$, οπότε η f' παρουσιάζει ολικό μέγιστο στο $[0,10]$ την τιμή 2.

γ) $h'(x)=f'(x)-2<0$ για κάθε $x\in(0,10)$, οπότε $h\downarrow[0,10]$.

Επειδή $h(0)=f(0)=11$ και $h(10)=f(10)-20=-15$, είναι $h([0,10])=[-15,11]$.

5.686. **α)** Εστω $h(x)=\ln x+x-2$, $x>0$ με $h'(x)=\frac{1}{x}+1>0$, άρα $h\uparrow(0,+\infty)$.

$\lim\limits_{x\to+\infty} h(x)=+\infty$, $\lim\limits_{x\to 0^+} h(x)=-\infty$, άρα $h(A)=\mathbb{R}$. Επειδή $0\in h(A)$ και η h είναι γνησίως αύξουσα, υπάρχει μοναδικό $\theta>0$ για το οποίο ισχύει:

$h(\theta)=0 \Leftrightarrow \ln\theta+\theta-2=0$

β) i. $f'(x)=\frac{1}{x^2}(\ln x-1)+\left(1-\frac{1}{x}\right)\frac{1}{x}=\frac{1}{x^2}\left((\ln x-1)+\frac{x-1}{x^2}\right)=\frac{\ln x+x-2}{x^2}=\frac{h(x)}{x^2}$

Για κάθε $x>\theta \overset{h\uparrow}{\Leftrightarrow} h(x)>h(\theta)=0 \Rightarrow f'(x)>0 \Rightarrow f\uparrow[\theta,+\infty)$

Για κάθε $0<x<\theta \overset{h\uparrow}{\Rightarrow} h(x)<h(\theta)=0 \Rightarrow f'(x)<0 \Rightarrow f\downarrow(0,\theta]$.

Ελάχιστο το $f(\theta)=\left(1-\frac{1}{\theta}\right)(\ln\theta-1)=\frac{\theta-1}{\theta}(2-\theta-1)=-\frac{(\theta-1)^2}{\theta}$.

ii. Άρα $\forall x>0$ είναι $f(x)\ge f(\theta) \Leftrightarrow f(x)\ge -\frac{(\theta-1)^2}{\theta} \Leftrightarrow f(x)+\frac{(\theta-1)^2}{\theta}\ge 0$

iii. Εστω $g(x)=f(x)+f'(x)$, $x\in[\theta,e]$.

$g(\theta)=f(\theta)+f'(\theta)=f(\theta)+0=-\frac{(\theta-1)^2}{\theta}<0$,

$g(e)=f(e)+f'(e^2)=\left(1-\frac{1}{e}\right)(\ln e-1)+\frac{\ln e+e-2}{e^2}=\frac{e-1}{e^2}>0$

Οπότε από θεώρημα Bolzano...

5.687. **α)** Εστω $h(x)=e^x-x+2$, $h'(x)=e^x-1\ge 0 \Leftrightarrow x\ge 0$

Για κάθε $x>0$ είναι $h'(x)>0 \Rightarrow h\uparrow[0,+\infty)$ και για κάθε $x<0$ είναι

$h'(x)<0 \Rightarrow h\downarrow(-\infty,0]$. Η h έχει ελάχιστο το $h(0)=3$, άρα $h(x)\ge 3>0 \Leftrightarrow$

$e^x-x+2>0 \Leftrightarrow e^x>x-2$

β) i. $f'(x)e^x-f(x)e^x=xf'(x)-2f'(x)-f(x) \Leftrightarrow$

$f'(x)(e^x-x+2)-f(x)(e^x-1)=0 \Leftrightarrow \frac{f'(x)(e^x-x+2)-f(x)(e^x-1)}{(e^x-x+2)^2}=0 \Rightarrow$

$\left(\dfrac{f(x)}{e^x-x+2}\right)'=0 \Leftrightarrow f(x)=c\left(e^x-x+2\right),\ f(0)=3 \Rightarrow 3=3c \Rightarrow c=1.$

Άρα $f(x)=e^x-x+2$

ii. $0<\alpha<\beta \overset{f\uparrow}{\Rightarrow} f(\alpha)<f(\beta) \Leftrightarrow e^\alpha-\alpha+2<e^\beta-\beta+2 \Leftrightarrow e^\alpha-\alpha<e^\beta-\beta \Leftrightarrow$

$e^{e^\alpha-\alpha}<e^{e^\beta-\beta} \Leftrightarrow \dfrac{e^{e^\alpha}}{e^\alpha}<\dfrac{e^{e^\beta}}{e^\beta} \Leftrightarrow \dfrac{e^{e^\alpha}}{e^{e^\beta}}<\dfrac{e^\alpha}{e^\beta} \Rightarrow e^{e^\alpha-e^\beta}<e^{\alpha-\beta}$

5.688. α) $\ln f'(x)=f(x)-\ln x \Rightarrow f'(x)=e^{f(x)-\ln x} \Rightarrow f'(x)=\dfrac{e^{f(x)}}{x} \Leftrightarrow f'(x)e^{-f(x)}=\dfrac{1}{x} \Rightarrow$

$\left(-e^{-f(x)}\right)'=(\ln x)' \Leftrightarrow -e^{-f(x)}=\ln x+c.$

Είναι $f\left(\dfrac{1}{e}\right)=-\ln 2$, οπότε $-e^{\ln 2}=-1+c \Leftrightarrow c=-1.$

Άρα $-e^{-f(x)}=\ln x-1 \Leftrightarrow -f(x)=\ln(1-\ln x) \Leftrightarrow f(x)=-\ln(1-\ln x)$

β) i. $f'(x)=\dfrac{1}{x(1-\ln x)}$, όταν $0<x<e \Leftrightarrow \ln x<\ln e \Leftrightarrow 1-\ln x>0$.

Άρα $f'(x)>0 \Rightarrow f\uparrow$

$\lim\limits_{x\to 0^+}(1-\ln x)=+\infty$, άρα $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}\left[-\ln(1-\ln x)\right] \overset{1-\ln x=u}{\underset{u\to+\infty}{=}} \lim\limits_{u\to+\infty}(-\ln u)=-\infty$

και $\lim\limits_{x\to e^-}(1-\ln x)=0$, άρα $\lim\limits_{x\to e^-} f(x)=\lim\limits_{x\to e^-}\left[-\ln(1-\ln x)\right] \overset{1-\ln x=u}{\underset{u\to 0^+}{=}} \lim\limits_{u\to 0^+}(-\ln u)=+\infty$

$f(A)=\left(\lim\limits_{x\to 0^+} f(x), \lim\limits_{x\to 0^-} f(x)\right)=(-\infty,+\infty)=\mathbb{R}$.

ii. $f''(x)=\ldots=\dfrac{\ln x}{x^2(1-\ln x)^2}$. Για κάθε $x\in(1,e)$ είναι $f''(x)>0 \Rightarrow f'\uparrow[1,e)$ και για

κάθε $x\in(0,1)$ είναι $f''(x)<0 \Rightarrow f'\downarrow(0,1]$

Άρα ο ρυθμός μεταβολής γίνεται ελάχιστος για $x=1$.

iii. Είναι $1-\ln x=\dfrac{1}{e^\lambda} \Leftrightarrow \ln(1-\ln x)=-\lambda \Leftrightarrow -\ln(1-\ln x)=\lambda \Leftrightarrow f(x)=\lambda$

Άρα η εξίσωση είναι $f(x)=\lambda$, η οποία έχει μοναδική λύση για κάθε $\lambda\in\mathbb{R}$ αφού $f\uparrow$ και το σύνολο τιμών της f είναι το $\mathbb{R}$.

5.689. α) $D_f=(-1,+\infty)$

$f'(x)=e^x-\dfrac{1}{x+1},\ f''(x)=e^x+\dfrac{1}{(x+1)^2}>0$ άρα $f'\uparrow(-1,+\infty)$.

Για κάθε $-1<x<0 \overset{f'\uparrow}{\Rightarrow} f'(x)<f'(0) \Leftrightarrow f'(x)<0 \Rightarrow f\downarrow(-1,0]$ και

για κάθε $x>0 \overset{f'\uparrow}{\Leftrightarrow} f'(x)>f'(0) \Leftrightarrow f'(x)>0 \Rightarrow f\uparrow[0,+\infty)$

β) Αν $\alpha=\beta$ ισχύει η ισότητα.

Αν $\alpha<\beta$, τότε από το Θ.Μ.Τ. για την f, υάρχουν $\xi_1\in\left(\alpha,\frac{\alpha+\beta}{2}\right)$ και $\xi_2\in\left(\frac{\alpha+\beta}{2},\beta\right)$

τέτοια, ώστε: $f'(\xi_1)=\dfrac{f\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)-f(\alpha)}{\frac{\alpha+\beta}{2}-\alpha}=\dfrac{f\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)-f(\alpha)}{\frac{\beta-\alpha}{2}}$ και

$$f'(\xi_2)=\dfrac{f(\beta)-f\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)}{\beta-\frac{\alpha+\beta}{2}}=\dfrac{f(\beta)-f\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)}{\frac{\beta-\alpha}{2}}.$$

Είναι $\xi_1<\xi_2\overset{f'\uparrow}{\Leftrightarrow} f'(\xi_\cdot)<f'(\xi_2)\Leftrightarrow \dfrac{f\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)-f(\alpha)}{\frac{\beta-\alpha}{2}}<\dfrac{f(\beta)-f\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)}{\frac{\beta-\alpha}{2}}\Leftrightarrow$

$$f\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)-f(\alpha)<f(\beta)-f\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\Leftrightarrow 2f\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)<f(\alpha)+f(\beta)$$

γ) Για κάθε $-1<x<0\overset{f\downarrow}{\Rightarrow} f(x)>f(0)=0$ και για κάθε $x>0\overset{f\uparrow}{\Leftrightarrow} f(x)>f(0)=0$.

Επειδή $f(0)=0$ η $x=0$ είναι η μοναδική ρίζα της εξίσωσης $f(x)=0$.

δ) $e^{3\kappa+2\lambda-13}-\ln(3\kappa+2\lambda-12)-1+e^{2\kappa+\lambda-8}-\ln(2\kappa+\lambda-7)-1\le 0\Leftrightarrow$

$f(3\kappa+2\lambda-13)+f(2\kappa+\lambda+-8)\le 0\quad (1)$

Η f έχει ελάχιστο το $f(0)=0$, άρα $f(x)\ge 0$ για κάθε $x>-1$.

Άρα $f(3\kappa+2\lambda-13)\ge 0$ και $f(2\kappa+\lambda-8)\ge 0$ με $3\kappa+2\lambda-13>-1$ και $2\kappa+\lambda-8>-1$. Άρα

$$\left.\begin{array}{l} f(3\kappa+2\lambda-13)=0\\ f(2\kappa+\lambda-8)=0\end{array}\right|\Rightarrow \left.\begin{array}{l}3\kappa+2\lambda-13=0\\ 2\kappa+\lambda-8=0\end{array}\right|\Rightarrow \begin{array}{l}\kappa=3\\ \lambda=2\end{array}$$ που ικανοποιούν τους περιορισμούς.

5.690. **α)** Είναι $f^2(\alpha)+f(\alpha f(\beta)+2f(\alpha))-f(\alpha)f(\beta)-f^2(\beta)-2f(\beta)=2e^{f(\alpha)}-2e^{f(\beta)}\Leftrightarrow ...\Leftrightarrow$

$f^2(\alpha)+2f(\alpha)-2e^{f(\alpha)}=f^2(\beta)+2f\beta-2e^{f(\beta)}$

Εστω $g(x)=f^2(x)+2f(x)-2e^{f(x)}$, $x\in[\alpha,\beta]$ ή $[\beta,\alpha]$.

Είναι $g'(x)=2f(x)f'(x)+2f'(x)-2e^{f(x)}f'(x)$. Από το Θ.Rolle υπάρχει

$\xi\in(\alpha,\beta)$ ή (β,α): $g'(\xi)=0\Leftrightarrow 2f'(\xi)f(\xi)+2f'(\xi)-2e^{f(\xi)}f'(\xi)=0\overset{2f'(\xi)\neq 0}{\Leftrightarrow}$

$e^{f(\xi)}=f(\xi)+1$.

β) Εστω $h(x)=e^{f(x)}-f(x)-1\ge 0=h(\xi)$

Είναι $h'(x)=e^{f(x)}f'(x)-f'(x)$, Από το Θ.Fermat, είναι

$h'(\xi)=0\Leftrightarrow e^{f(\xi)}=1\Leftrightarrow f(\xi)=0$

Εστω ότι η f έχει κι άλλη ρίζα ρ, τότε από το θ.Rolle στο $[\rho,\xi]$ ή $[\xi,\rho]$ υπάρχει $x_0\in(\rho,\xi)$ ή (ξ,ρ): $f'(x_0)=0$ που είναι άτοπο.

5.691. **α)** $f'(x)=\dfrac{1-\ln x}{x^2}$, $f''(x)=\dfrac{2\ln x-3}{x^2}\ge 0 \Leftrightarrow x\ge e^{\frac{3}{2}}=e\sqrt{e}$

Για κάθε $x\in\left(0,e\sqrt{e}\right)$ είναι $f''(x)<0\Rightarrow f'\downarrow\left(0,e\sqrt{e}\right]$ και για κάθε $x>e\sqrt{e}$ είναι $f''(x)>0\Rightarrow f'\uparrow\left[e\sqrt{e},+\infty\right)$

β) $\lim\limits_{x\to 0^+} f'(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}\left[\dfrac{1}{x^2}(1-\ln x)\right]=+\infty$ και $\lim\limits_{x\to 1} f'(x)=1$. Αφού $f'\downarrow(0,1)$ είναι $f'\left((0,1)\right)=(1,+\infty)$.

$2\in(1,+\infty)$, οπότε η $f'(x)=2$ έχει μοναδική λύση.

γ) Από το ΘΜΤ για την f υπάρχει $\xi\in(\alpha,\beta)$:

$$f'(\xi)=\frac{f(\beta)-f(\alpha)}{\beta-\alpha}=\frac{\dfrac{\ln\beta}{\beta}-\dfrac{\ln\alpha}{\alpha}}{\beta-\alpha}=\frac{\alpha\ln\beta-\beta\ln\alpha}{\alpha\beta(\beta-\alpha)}=\frac{\ln\left(\dfrac{\beta^\alpha}{\alpha^\beta}\right)}{\alpha\beta(\beta-\alpha)}$$

$$\alpha<\xi<\beta \overset{f'\downarrow(0,e)}{\Leftrightarrow} f'(\alpha)>f'(\xi)>f'(\beta)\Leftrightarrow \frac{1-\ln\beta}{\beta^2}<\frac{\ln\left(\dfrac{\beta^\alpha}{\alpha^\beta}\right)}{\alpha\beta(\beta-\alpha)}<\frac{1-\ln\alpha}{\alpha^2}\Leftrightarrow$$

$$\frac{\alpha}{\beta}(\beta-\alpha)(1-\ln\beta)<\ln\left(\frac{\beta^\alpha}{\alpha^\beta}\right)<\frac{\beta}{\alpha}(\beta-\alpha)(1-\ln\alpha)$$

5.692. **α)** $f(x)=\begin{cases}-x^2+7x-10 & ,x\in[-1,5)\\ -x^2+3x+10 & ,x\in[5,6]\end{cases}$. Κρίσιμα σημεία της f είναι οι ρίζες $f'(x)=0$ και τα εσωτερικά σημεία που δεν είναι παραγωγίσιμη.

Για $x\in(-1,5)$: $f'(x)=-2x+7$, $f'(x)=0\Leftrightarrow x=\dfrac{7}{2}$. Άρα το $\dfrac{7}{2}$ είναι κρίσιμο σημείο.

Για $x\in(5,6)$: $f'(x)=-2x+3$, $f'(x)=0\Leftrightarrow x=\dfrac{3}{2}$. Άρα το $\dfrac{3}{2}$ δεν είναι κρίσιμο σημείο.

$$\lim_{x\to 5^-}\frac{f(x)-f(5)}{x-5}=\lim_{x\to 5^-}\frac{-x^2+7x-10}{x-5}=\lim_{x\to 5^-}\frac{-(x-2)\cancel{(x-5)}}{\cancel{x-5}}=-3 \text{ και}$$

$$\lim_{x\to 5^+}\frac{f(x)-f(5)}{x-5}=\lim_{x\to 5^+}\frac{-x^2+3x+10}{x-5}=\lim_{x\to 5^+}\frac{-(x+2)\cancel{(x-5)}}{\cancel{x-5}}=-7$$

Άρα η f δεν είναι παραγωγίσιμη στο 5, οπότε το 5 είναι κρίσιμο σημείο.

Συνεπώς οι θέσεις για κρίσιμων σημείων είναι: $\dfrac{7}{2}$, 5.

β) Η f είναι συνεχής στο πεδίο ορισμού της, ως άθροισμα συνεχών συναρτήσεων.

Για κάθε $x\in\left(-1,\dfrac{7}{2}\right)$ είναι $f'(x)>0\Rightarrow f\uparrow\left[-1,\dfrac{7}{2}\right]$, για κάθε $x\in\left(\dfrac{7}{2},5\right)\cup(5,6)$ είναι $f'(x)<0\Rightarrow f\downarrow\left[\dfrac{7}{2},6\right]$.

Είναι $f(-1)=-18$, $f\left(\dfrac{7}{2}\right)=\dfrac{9}{4}$, $f(5)=0$, $f(6)=-8$, οπότε το $f(\Delta)=\left[-18,\dfrac{9}{4}\right]$.

γ) Επειδή η h είναι γνησίως φθίνουσα και έχει σύνολο τιμών το $[5,6]$, είναι $h(5)=6$ και $h(6)=5$. Εστω $\varphi(x)=f(h(x))-8x\ ,\ x\in[5,6]$.

Είναι $\varphi(5)=f(h(5))-40=f(6)-40=-8-40=-48$ και $\varphi(6)=f(h(6))-48=f(5)-48=-48$, άρα $\varphi(5)=\varphi(6)$ και επειδή η φ είναι συνεχής στο $[5,6]$ και παραγωγίσιμη στο $(5,6)$ με $\varphi'(x)=f'(h(x))h'(x)-8$, από το θ.Rolle υπάρχει $\rho\in(5,6)$ τέτοιο, ώστε: $\varphi'(\rho)=0\Leftrightarrow f'(h(\rho))h'(\rho)-8=0$.

Κυρτότητα

5.710.

x	–3	–2	–1	2	3	5	7
f′	+	+	–	–	+	+	
f′	↗	↘	↘	↗	↗	↘	
f							

Τοπικά ελάχιστα τα $f(-3)$, $f(3)$. Τοπικά μέγιστα τα $f(-1)$, $f(7)$ και σημεία καμπής τα $(-2,f(-2))$, $(2,f(2))$, $(5,f(5))$.

5.711. **α)** $f'(x)=4x^3-12x+7$, $f''(x)=12x^2-12\geq 0 \Leftrightarrow x^2\geq 1 \Leftrightarrow x\leq -1$ ή $x\geq 1$.

Η f είναι κυρτή στα $(-\infty,-1]$ και $[1,+\infty)$, κοίλη στο $[-1,1]$ και έχει σημεία καμπής τα $(-1,f(-1))\equiv(-1,-14)$ και $(1,f(1))\equiv(1,0)$.

β) $f'(x)=4x^3$, $f''(x)=12x^2>0$ για κάθε $x\neq 0$, άρα η f είναι κυρτή στο $\mathbb{R}$ και δεν έχει σημεία καμπής.

γ) $f'(x)=\dfrac{2e^x(e^x-2)-(2e^x+1)e^x}{(e^x-2)^2}=\dfrac{-5e^x}{(e^x-2)^2}$, $f''(x)=\dfrac{10e^x}{(e^x-2)^2}>0$ για κάθε $x\neq \ln 2$, άρα η f είναι κυρτή σε κάθε ένα από τα διαστήματα $(-\infty,\ln 2)$ και $(\ln 2,+\infty)$.

5.712. **α)** $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=0=\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=f(0)$, οπότε η f είναι συνεχής στο $x=0$.

Για $x<0$ είναι $f'(x)=-4x-3x^2=-x(4+3x)\geq 0 \Leftrightarrow -\dfrac{3}{4}\leq x<0$

Η f είναι ↓ στο $\left(-\infty,-\dfrac{3}{4}\right]$ και ↑ στο $\left[-\dfrac{3}{4},0\right]$.

Για $x>0$ είναι $f'(x)=8x-3x^2=x(8-3x)\geq 0 \Leftrightarrow x\leq \dfrac{3}{8}$.

Η f είναι ↑ στο $\left[0,\dfrac{3}{8}\right]$ και ↓ στο $\left[\dfrac{3}{8},+\infty\right)$.

$$\lim_{x\to 0^-}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0^-}\frac{-2x^2-x^3}{x}=\lim_{x\to 0^-}\frac{x^{\cancel{2}}(-2-x)}{\cancel{x}}=0,$$

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0^+}\frac{4x^2-x^3}{x}=\lim_{x\to 0^+}\frac{x^{\cancel{2}}(4-x)}{\cancel{x}}=0,$$ άρα $f'(0)=0$.

Για κάθε $x<0$ είναι $f''(x)=-4-12x\geq 0 \Leftrightarrow x\leq -\dfrac{1}{3}$. Η f είναι κυρτή στο $\left(-\infty,-\dfrac{1}{3}\right]$ και κοίλη στο $\left[-\dfrac{1}{3},0\right]$. Για κάθε $x>0$ είναι $f''(x)=8-6x\geq 0 \Leftrightarrow x\leq \dfrac{4}{3}$.

Η f είναι κυρτή στο $\left[0,\frac{4}{3}\right]$ και κοίλη στο $\left[\frac{4}{3},+\infty\right)$

β) $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=6=\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=f(0)$, οπότε η f είναι συνεχής στο $x=0$.

$\lim\limits_{x\to 0^-}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=-4$, $\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=-4$, άρα $f'(0)=-4$. Είναι

$f'(x)=\begin{cases}2x-4, & x\le 0\\ 3x^2-12x-4, & x>0\end{cases}$. Η f είναι $\downarrow$ στο $\left(-\infty,2+\frac{\sqrt{43}}{3}\right]$ και $\uparrow$ στο

$\left[2+\frac{\sqrt{43}}{3},+\infty\right)$. Είναι $f''(x)=\begin{cases}2, & x<0\\ 6x-12, & x>0\end{cases}$. Η f είναι κυρτή στο $(-\infty,0]$ και στο

$[2,+\infty)$ και κοίλη στο $[0,2]$.

γ) $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=0=\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=f(0)$, οπότε η f είναι συνεχής στο $x=0$.

$\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{\sqrt{x}}{x}=\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{1}{\sqrt{x}}=+\infty$, οπότε η f δεν είναι παραγωγίσιμη στο

$x=0$. Είναι $f'(x)=\begin{cases}\frac{1}{2\sqrt{-x}}, & x<0\\ \frac{1}{2\sqrt{x}}, & x>0\end{cases}$. Η f είναι $\uparrow$ στο $\mathbb{R}$.

Είναι $f'(x)=\begin{cases}-\frac{1}{4x\sqrt{-x}}, & x<0\\ -\frac{1}{4x\sqrt{x}}, & x>0\end{cases}$ και η f είναι κοίλη σε καθένα από τα διαστήματα

$(-\infty,0)$ και $(0,+\infty)$.

5.713. $f'(x)=\ln(x-1)+1-\ln x-1=\ln(x-1)-\ln x$ και $f''(x)=\frac{1}{x-1}-\frac{1}{x}=\frac{x-x+1}{x(x-1)}=\frac{1}{x(x-1)}>0\Rightarrow$ f κυρτή στο $(1,+\infty)$, οπότε δεν έχει Σ.Κ.

5.714. Είναι $D_f=\mathbb{R}$ $f(x)=\frac{4^x}{\ln^2 4}-\frac{4^{-x}}{\ln^2 4}+2\eta\mu x$

$f'(x)=\frac{4^x\ln 4}{\ln^2 4}+\frac{4^{-x}\ln 4}{\ln^2 4}+2\sigma\upsilon\nu x=\frac{4^x}{\ln 4}+\frac{4^{-x}}{\ln 4}+2\sigma\upsilon\nu x=$

$f''(x)=\frac{4^x\ln 4}{\ln^2 4}-\frac{4^{-x}\ln 4}{\ln^2 4}-2\eta\mu x=4^x-4^{-x}-2\eta\mu x$

$f^{(3)}(x)=4^x\ln 4+4^{-x}\ln 4-2\sigma\upsilon\nu x=\ln 4\left(4^x+\frac{1}{4^x}\right)-2\sigma\upsilon\nu x$ όμως $-2\le 2\sigma\upsilon\nu x\le 2$

οπότε $\ln 4\left(4^x+\frac{1}{4^x}\right)-2\le\ln 4\left(4^x+\frac{1}{4^x}\right)-2\sigma\upsilon\nu x\le\ln 4\left(4^x+\frac{1}{4^x}\right)+2$

Δηλαδή $f^{(3)}(x)\ge\ln 4\left(4^x+\frac{1}{4^x}\right)-2>1\left(4^x+\frac{1}{4^x}\right)-2=\left(2^x-\frac{1}{2^x}\right)^2\ge 0\Rightarrow f''\uparrow\mathbb{R}$

Για κάθε $x<0\overset{f''\uparrow}{\Leftrightarrow} f''(x)<f''(0)=0\Rightarrow$ f κοίλη στο $(-\infty,0]$ και

για κάθε $x>0 \overset{f''\uparrow}{\Leftrightarrow} f''(x)>f''(0)=0 \Rightarrow f$ κυρτή στο $[0,+\infty)$.

5.715. Είναι $f'(x)=\dfrac{x^2+2x-1}{\left(x^2+1\right)^2}$ και $f''(x)=\dfrac{-2(x-1)\left(x^2+4x+1\right)}{\left(x^2+1\right)^3}$.

Η f είναι κυρτή στα $\left(-\infty,-2-\sqrt{3}\right]$, $\left[-2+\sqrt{3},1\right]$ και κοίλη στα $\left[-2-\sqrt{3},-2+\sqrt{3}\right]$, $[1,+\infty)$. Έχει σημεία καμπής τα $A(1,0)$, $B\left(-2-\sqrt{3},\dfrac{9+5\sqrt{3}}{8+4\sqrt{3}}\right)$ και $\Gamma\left(-2+\sqrt{3},\dfrac{9-5\sqrt{3}}{8-4\sqrt{3}}\right)$. Είναι $\lambda_{AB}=\lambda_{A\Gamma}=-\dfrac{1}{4}\Rightarrow AB\parallel A\Gamma$, άρα τα Α,Β,Γ είναι συνευθειακά.

5.716. Είναι $f'(x)=2\lambda x+\ln x+1$, $f''(x)=2\lambda+\dfrac{1}{x}>0\Rightarrow f$ κυρτή στο $(0,+\infty)$.

5.717. Είναι $f'(x)=4(\alpha-3)x^3-12x^2-12x$,

$f''(x)=12(\alpha-3)x^2-24x-12=12\left[(\alpha-3)x^2-2x-1\right]$

Το τριώνυμο $(\alpha-3)x^2-2x-1$ έχει $\Delta=4(\alpha-2)$ και

όταν $\alpha>2$ είναι $\Delta>0$, οπότε η f'' έχει 2 ρίζες, αλλάζει πρόσημο εκατέρωθεν τους, οπότε η f δεν είναι κοίλη στο $\mathbb{R}$.

Όταν $\alpha=2$, τότε $f''(x)=-12(x+1)^2<0$ για κάθε $x\neq 1$, άρα η f είναι κοίλη στο $\mathbb{R}$.

Όταν $\alpha<2$ είναι $\Delta<0$ και $f''(x)<0\Rightarrow f$ κοίλη στο $\mathbb{R}$. Άρα $\alpha\leq 2$.

5.718. $f'(x)=2\alpha x-2\ln x-2$, $f''(x)=2\alpha-\dfrac{2}{x}=2\dfrac{\alpha x-1}{x}\geq 0 \overset{x>0}{\Leftrightarrow} \alpha x\geq 1\Leftrightarrow x\geq\dfrac{1}{\alpha}$.

Η f είναι κοίλη στο $\left(0,\dfrac{1}{\alpha}\right]$ και κυρτή στο $\left[\dfrac{1}{\alpha},+\infty\right)$

5.719. **α)** $f''(x)=12\left(x^2+\lambda x+4\right)$, $\Delta=\lambda^2-16=(\lambda-4)(\lambda+4)$

Αν $\lambda<-4$ ή $\lambda>4$ τότε $\Delta>0$ και η f'' έχει δύο ρίζες και αλλάζει πρόσημο εκατέρωθεν τους, οπότε η f δεν είναι κυρτή στο $\mathbb{R}$.

Αν $\lambda=-4$, τότε $f''(x)=12\left(x^2-4x+4\right)=12(x-2)^2>0$ για κάθε $x\neq 2$, άρα η f είναι κυρτή στο $\mathbb{R}$.

Αν $\lambda=4$, τότε $f''(x)=12\left(x^2+4x+4\right)=12(x+2)^2>0$ για κάθε $x\neq -2$, άρα η f είναι κυρτή στο $\mathbb{R}$.

Αν $-4<\lambda<4$ τότε $\Delta<0$, $f''(x)>0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$ και η f είναι κυρτή στο $\mathbb{R}$.

Άρα $-4\leq\lambda\leq 4$

β) Πρέπει $f''(1)=0\Leftrightarrow\lambda=-5$. Τότε

$f''(x)=12\left(x^2-5x+4\right)$ και η f έχει ΣΚ στο

$x=1$

x	$-\infty$ 1	4	$+\infty$
f''	$+$	$-$	$+$
f	$\cup$	$\cap$	$\cup$

5.720. Είναι $g'(x)=\dfrac{f'(x)}{f(x)}$ και $g''(x)=\dfrac{f''(x)f(x)-(f'(x))^2}{f^2(x)}>0\Rightarrow g$ κυρτή στο $[\alpha,\beta]$.

5.721. **α)** Είναι $f'(x)=5(x-\kappa)^4(x-\lambda)^3+3(x-\kappa)^5(x-\lambda)^2$ και

$$\frac{f'(x)}{f(x)}=\frac{5\cancel{(x-\kappa)^4}\cancel{(x-\lambda)^3}}{(x-\kappa)^{\cancel{5}}\cancel{(x-\lambda)^3}}+\frac{3\cancel{(x-\kappa)^5}\cancel{(x-\lambda)^2}}{\cancel{(x-\kappa)^5}(x-\lambda)^{\cancel{3}}}=\frac{5}{x-\kappa}+\frac{3}{x-\lambda}$$

β) Είναι $f(x)>0$ για κάθε $x\in(\kappa,\lambda)$, οπότε

$g(x)=\ln(f(x))$, $g'(x)=\dfrac{f'(x)}{f(x)}=\dfrac{5}{x-\kappa}+\dfrac{3}{x-\lambda}$ και

$g''(x)=-\dfrac{5}{(x-\kappa)^2}-\dfrac{3}{(x-\lambda)^2}<0\Rightarrow g$ κοίλη στο (κ,λ).

5.722. **α)** Για κάθε $x>0$ είναι

$f'(x)=2x\ln x+x^2\dfrac{1}{x}=x(2\ln x+1)\geq 0\Leftrightarrow \ln x\geq -\dfrac{1}{2}\Leftrightarrow x\geq e^{-\frac{1}{2}}=\dfrac{1}{\sqrt{e}}$

Για κάθε $x<\dfrac{1}{\sqrt{e}}$ είναι $f'(x)<0\Rightarrow f\downarrow\left(0,\dfrac{1}{\sqrt{e}}\right]$ και για κάθε $x>\dfrac{1}{\sqrt{e}}$ είναι

$f'(x)>0\Rightarrow f\uparrow\left[\dfrac{1}{\sqrt{e}},+\infty\right)$. Έχει ελάχιστο το $f\left(e^{-\frac{1}{2}}\right)=\left(e^{-\frac{1}{2}}\right)^2\ln e^{-\frac{1}{2}}=-\dfrac{1}{2e}$.

β) $f''(x)=2\ln x+1+x\dfrac{2}{x}=2\ln x+3\geq 0\Leftrightarrow x\geq e^{-\frac{3}{2}}$.

Για κάθε $0<x<e^{-\frac{3}{2}}$ είναι $f''(x)<0\Rightarrow f$ κοίλη στο $\left(0,e^{-\frac{3}{2}}\right]$ και για κάθε $x>e^{-\frac{3}{2}}$

είναι $f''(x)>0\Rightarrow f$ κυρτή στο $\left[e^{-\frac{3}{2}},+\infty\right)$. Έχει σημείο καμπής το

$\left(e^{-\frac{3}{2}},f\left(e^{-\frac{3}{2}}\right)\right)\equiv\left(e^{-\frac{3}{2}},-\dfrac{3}{2e^3}\right)$

5.723. Είναι $f'(x-1)=-f'(3-x)$ και για $x=2$ είναι $f'(1)=-f'(1)\Leftrightarrow 2f'(1)=0\Leftrightarrow f'(1)=0$.

Επειδή η f είναι κοίλη, η f' είναι γνησίως φθίνουσα, οπότε:

Για κάθε $x<1\overset{f'\downarrow}{\Leftrightarrow} f'(x)>f'(1)=0\Rightarrow f\uparrow(-\infty,1]$ και για κάθε

$x>1\overset{f'\downarrow}{\Leftrightarrow} f'(x)<f'(1)=0\Rightarrow f\downarrow[1,+\infty)$. Η f έχει μέγιστο το $f(1)$.

5.724. **α)** $f'(x)=2\lambda x-2\ln x-2$, $f''(x)=2\lambda-\dfrac{2}{x}=\dfrac{2\lambda x-2}{x}\geq 0\overset{x>0}{\Leftrightarrow}2\lambda x-2\geq 0\Leftrightarrow x\geq\dfrac{1}{\lambda}$

Για κάθε $x<\dfrac{1}{\lambda}$ είναι $f''(x)<0\Rightarrow f$ κοίλη στο $\left(-\infty,\dfrac{1}{\lambda}\right]$ και για κάθε $x>\dfrac{1}{\lambda}$ είναι

$f''(x)>0 \Rightarrow f$ κυρτή στο $\left[\frac{1}{\lambda},+\infty\right)$.

β) ε: $y-f(1)=f'(1)(x-1) \Leftrightarrow y-\lambda=(2\lambda-2)(x-1) \Leftrightarrow y=(2\lambda-2)x+2-\lambda$.

Για να διέρχεται από την αρχή των αξόνων, πρέπει $0=(2-\lambda)\cdot 0+2-\lambda \Leftrightarrow \lambda=2$.

5.725. α) $f'(x)=3x^2+2\alpha x+12,\ f''(x)=6x+2\alpha \geq 0 \Leftrightarrow x \geq -\frac{\alpha}{3}$

Για κάθε $x<-\frac{\alpha}{3}$ είναι $f''(x)<0 \Rightarrow f$ κοίλη στο $\left(-\infty,-\frac{\alpha}{3}\right]$ και για κάθε $x>-\frac{\alpha}{3}$

είναι $f''(x)>0 \Rightarrow f$ κυρτή στο $\left[-\frac{\alpha}{3},+\infty\right)$. Σημείο καμπής το $A\left(-\frac{\alpha}{3},f\left(-\frac{\alpha}{3}\right)\right)$.

Για να έχει η C_f οριζόντια εφαπτομένη στο Α, πρέπει:

$$f'\left(-\frac{\alpha}{3}\right)=0 \Leftrightarrow 3\frac{\alpha^2}{9}+2\alpha\left(-\frac{\alpha}{3}\right)+12=0 \Leftrightarrow \alpha^2-2\alpha^2+36=0 \Leftrightarrow \alpha^2=36 \Leftrightarrow \alpha=\pm 6.$$

Για $\alpha=\pm 6$ είναι $f'(x)=3x^2\pm 12x+12=3(x\pm 2)^2>0$ για κάθε $x\neq 2$ ή -2, οπότε η f είναι ↑ στο $\mathbb{R}$ και δεν έχει ακρότατα.

β) Για να βρίσκεται το Α στον y΄y, πρέπει: $-\frac{\alpha}{3}=0 \Leftrightarrow \alpha=0$.

5.726. $f'(x)=\frac{x^2e^x+f(x)}{x} \Leftrightarrow xf'(x)-f(x)=x^2e^x \Leftrightarrow \frac{xf'(x)-f(x)}{x^2}=e^x \Leftrightarrow \left(\frac{f(x)}{x}\right)'=\left(e^x\right)' \Leftrightarrow$

$\frac{f(x)}{x}=e^x+c \Leftrightarrow f(x)=x\left(e^x+c\right)$. Είναι

$f'(x)=e^x+c+xe^x,\ f''(x)=e^x+e^x+xe^x=e^x(x+2)>0 \Rightarrow f$ κυρτή στο $(0,+\infty)$.

5.727. α) $f(x)=\ln\left(\frac{2^x+3^x}{2}\right)=\ln\left(2^x+3^x\right)-\ln 2$,

Είναι $f'(x)=\frac{2^x\ln 2+3^x\ln 3}{2^x+3^x}$ και

$$f''(x)=\frac{\left(2^x\ln^2 2+3^x\ln^2 3\right)\left(2^x+3^x\right)-\left(2^x\ln 2+3^x\ln 3\right)^2}{\left(2^x+3^x\right)^2} \Leftrightarrow$$

$$f''(x)=\frac{2^x3^x\left(\ln^2 2+\ln^2 3-\ln 2\cdot\ln 3\right)}{\left(2^x+3^x\right)^2}=\frac{2^x3^x\left[(\ln 2-\ln 3)^2+\ln 2\cdot\ln 3\right]}{\left(2^x+3^x\right)^2}>0 \Rightarrow f \text{ κυρτή.}$$

β) Εστω $g(x)=f(x)-\lambda x,\ x\in\mathbb{R}$. Είναι $f(x)\geq \lambda x \Leftrightarrow f(x)-\lambda x\geq 0 \Leftrightarrow g(x)\geq g(0)$, άρα η g έχει ελάχιστο στο $x=0$. Επειδή η g είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με

$g'(x)=f'(x)-\lambda=\frac{2^x\ln 2+3^x\ln 3}{2^x+3^x}-\lambda$, από το θ.Fermat ισχύει ότι: $g'(0)=0 \Leftrightarrow$

$\frac{\ln 2+\ln 3}{2}-\lambda=0 \Leftrightarrow \lambda=\frac{\ln 6}{2}$.

5.728. Η f είναι δύο φορές παραγωγίσιμη στο $(0,+\infty)$ με

$f'(x)=\frac{\alpha}{x}-\frac{1}{x^2}$ και $f'(x)=-\frac{\alpha}{x^2}+\frac{2}{x^3}=\frac{2-\alpha x}{x^3}$.

$f''(x)\geq 0 \Leftrightarrow \frac{2-\alpha x}{x^3}\geq 0 \Leftrightarrow 2-\alpha x\geq 0 \Leftrightarrow x\leq \frac{2}{\alpha}$

$f''(x)>0$ για κάθε $x\in\left(0,\frac{2}{\alpha}\right)$ άρα η f είναι κοίλη στο $\left(0,\frac{2}{\alpha}\right]$.

$f''(x)<0$ για κάθε $x\in\left(\frac{2}{\alpha},+\infty\right)$ άρα η f είναι κοίλη στο $\left[\frac{2}{\alpha},+\infty\right)$.

Η f έχει σημείο καμπής το $A\left(\frac{2}{\alpha},f\left(\frac{2}{\alpha}\right)\right)$ ή $A\left(\frac{2}{\alpha},\alpha\ln\frac{2}{\alpha}+\frac{\alpha}{2}\right)$.

Η εφαπτομένη της C_f στο Α είναι η ευθεία ε: $y-f\left(\frac{2}{\alpha}\right)=f'\left(\frac{2}{\alpha}\right)\left(x-\frac{2}{\alpha}\right)\Leftrightarrow$

$y-\left(\alpha\ln\frac{2}{\alpha}+\frac{\alpha}{2}\right)=\frac{\alpha^2}{4}\left(x-\frac{2}{\alpha}\right)\Leftrightarrow y=\frac{\alpha^2}{4}x+\alpha\ln\frac{2}{\alpha}$.

Για να διέρχεται η ε από το σημείο Μ πρέπει:

$0=\frac{\alpha^2}{4}\cdot\frac{4}{\alpha}+\alpha\ln\frac{2}{\alpha}\Leftrightarrow 0=\alpha+\alpha\ln\frac{2}{\alpha}\Leftrightarrow \alpha\left(\ln\frac{2}{\alpha}+1\right)=0\Leftrightarrow \alpha=0$ που είναι αδύνατο ή

$\ln\frac{2}{\alpha}+1=0\Leftrightarrow \ln\frac{2}{\alpha}=-1\Leftrightarrow \frac{2}{\alpha}=e^{-1}=\frac{1}{e}\Leftrightarrow \alpha=2e$

5.729. Πρέπει $f(1)=2\Leftrightarrow 1+\alpha+\beta-1+2=2\Leftrightarrow \alpha+\beta=0$ (1)

Είναι $f'(x)=4x^3+3\alpha x^2+2\beta x-1$, $f''(x)=12x^2+6\alpha x+2\beta$.

Πρέπει $f''(1)=0\Leftrightarrow 12+6\alpha+2\beta=0\Leftrightarrow 3\alpha+\beta=-6$ (2).

Από τις (1),(2) προκύπτει ότι: $\alpha=-3$ και $\beta=3$.

Τότε $f(x)=x^4-3x^3+3x^2-x+2$, $f'(x)=4x^3-9x^2+6x-1$,

$f''(x)=12x^2-18x+6=12(x-1)\left(x-\frac{1}{2}\right)\geq 0\Leftrightarrow x\leq\frac{1}{2}$ ή $x\geq 1$.

Η f είναι κυρτή σε κάθε ένα από τα διαστήματα $\left(-\infty,\frac{1}{2}\right]$, $[1,+\infty)$, είναι κοίλη στο $\left[\frac{1}{2},1\right]$,

έχει σημεία καμπής στα $x=0$ και $x=1$.

5.730. Είναι $f'(x)=3\left(\lambda-\frac{2}{3}\right)x^2-2\left(\lambda+\frac{1}{2}\right)x+2$, $f''(x)=6\left(\lambda-\frac{2}{3}\right)x-2\left(\lambda+\frac{1}{2}\right)$.

$f''\left(\frac{3}{2}\right)=0\Leftrightarrow 6\left(\lambda-\frac{2}{3}\right)\frac{3}{2}-2\left(\lambda+\frac{1}{2}\right)=0\Leftrightarrow ...\Leftrightarrow \lambda=1$. Τότε

$f(x)=\frac{1}{3}x^3-\frac{3}{2}x^2+2x-5$, $f'(x)=x^2-3x+2$, $f''(x)=2x-3\geq 0\Leftrightarrow x\geq\frac{3}{2}$.

Η f είναι κοίλη στο $\left(-\infty,\frac{3}{2}\right]$, κυρτή στο $\left[\frac{3}{2},+\infty\right)$ και έχει σημείο καμπής στο $x_0=\frac{3}{2}$

5.731. Επειδή $M\in C_f\Rightarrow f\left(\sqrt{3}\right)=\frac{\sqrt{3}}{2}\Leftrightarrow \frac{\alpha\cancel{\sqrt{3}}}{3+\beta}=\frac{\cancel{\sqrt{3}}}{2}\Leftrightarrow 2\alpha=3+\beta\Leftrightarrow \beta=2\alpha-3$ (1)

Είναι $f'(x)=\alpha\frac{\beta-x^2}{\left(x^2+\beta\right)^2}$ και $f''(x)=\frac{2\alpha x\left(x^2-3\beta\right)}{\left(x^2+\beta\right)^3}$. Πρέπει

$f''\left(\sqrt{3}\right)=0\Leftrightarrow\frac{2\alpha\sqrt{3}(3-3\beta)}{(3+\beta)^3}=0\Leftrightarrow\alpha=0$ ή $\beta=1$.

Αν $\alpha=0$ τότε $f(x)=0$ και η C_f δεν έχει σημεία καμπής, οπότε απορρίπτεται.

Αν $\beta=2$, τότε $(1)\Rightarrow\alpha=2$.

Με αντικατάσταση των α,β, επαληθεύουμε ότι η C_f έχει σημείο καμπής το Μ.

5.732. **α)** $f'(x)=3x^2+2\alpha x+12,\ f''(x)=6x+2\alpha\geq0\Leftrightarrow x\geq-\frac{\alpha}{3}$.

Η f είναι κοίλη στο $\left(-\infty,-\frac{\alpha}{3}\right]$, κυρτή στο $\left[-\frac{\alpha}{3},+\infty\right)$ και έχει σημείο καμπής το

$A\left(-\frac{\alpha}{3},f\left(-\frac{\alpha}{3}\right)\right)$. Για να δέχεται οριζόντια εφαπτομένη στο Α, πρέπει:

$f'\left(-\frac{\alpha}{3}\right)=0\Leftrightarrow3\frac{\alpha^2}{9}+2\alpha\left(-\frac{\alpha}{3}\right)+12=0\Leftrightarrow\alpha=\pm6$.

β) Η εφαπτομένη στο Α έχει εξίσωση $y=f\left(-\frac{\alpha}{3}\right)$, οπότε πρέπει $f\left(-\frac{\alpha}{3}\right)=1$.

Για $\alpha=6$ είναι $f\left(-\frac{\alpha}{3}\right)=1\Leftrightarrow f(-2)=1\Leftrightarrow-8+6\cdot4+12(-2)+\beta=1\Leftrightarrow\beta=9$ και για

$\alpha=-6$ είναι $f\left(-\frac{\alpha}{3}\right)=1\Leftrightarrow f(2)=1\Leftrightarrow8-6\cdot4+12\cdot2+\beta=1\Leftrightarrow\beta=-7$

5.733. $f'(x)=3x^2-4\alpha x,\ f''(x)=6x-4\alpha\geq0\Leftrightarrow x\geq\frac{2\alpha}{3}$.

Για κάθε $x<\frac{2\alpha}{3}$ είναι $f''(x)<0\Rightarrow f$ κοίλη στο $\left(-\infty,\frac{2\alpha}{3}\right]$ και για κάθε $x>\frac{2\alpha}{3}$ είναι

$f''(x)>0\Rightarrow f$ κοίλη στο $\left[\frac{2\alpha}{3},+\infty\right)$. Σημείο καμπής το $\left(\frac{2\alpha}{3},f\left(\frac{2\alpha}{3}\right)\right)$

Επειδή το $A(x_0,y_0)$ είναι σημείο καμπής της C_f, ισχύει ότι $x_0=\frac{2\alpha}{3}$.

Είναι $g'(x)=2x-(\alpha+1)\geq0\Leftrightarrow x\geq\frac{\alpha+1}{2}$.

Για κάθε $x<\frac{\alpha+1}{2}$ είναι $g'(x)<0\Rightarrow g\downarrow\left(-\infty,\frac{\alpha+1}{2}\right]$ και για κάθε $x>\frac{\alpha+1}{2}$ είναι

$g'(x)>0\Rightarrow g\uparrow\left[\frac{\alpha+1}{2},+\infty\right)$. Ελάχιστο για $x=\frac{\alpha+1}{2}$.

Πρέπει $\frac{\alpha+1}{2}=\frac{2\alpha}{3}\Leftrightarrow3\alpha+3=4\alpha\Leftrightarrow\alpha=3$ και $g(2)=-13\Leftrightarrow...\Leftrightarrow\beta=2$.

5.734. $f'(x)=\frac{4}{3}x^3+2ax^2+2\left(a^2-2a+\frac{5}{2}\right)x+a^3+7,\ f''(x)=4x^2+4ax+2a^2-4a+5$

Είναι $\Delta = 16\alpha^2 - 16\left(2\alpha^2 - 4\alpha + 5\right) = -16\left(\alpha^2 - 4\alpha + 5\right) < 0 \Rightarrow$
$f''(x) > 0 \Rightarrow f$ κυρτή στο $\mathbb{R}$.

5.735. $f'(x) = 3x^2 + 6x\text{συν}2\alpha + 2\text{συν}^2 2\alpha,\ f''(x) = 6x + 6\text{συν}2\alpha \geq 0 \Leftrightarrow x \geq -\text{συν}2\alpha$.
Για κάθε $x < \text{συν}2\alpha$ είναι $f''(x) < 0 \Rightarrow f$ κοίλη στο $\left(-\infty, -\text{συν}2\alpha\right]$ και για κάθε $x > \text{συν}2\alpha$ είναι $f''(x) > 0 \Rightarrow f$ κυρτή στο $\left[-\text{συν}2\alpha, +\infty\right)$.
Σημείο καμπής το $A\left(-\text{συν}2\alpha, f\left(-\text{συν}2\alpha\right)\right) \equiv \left(-\text{συν}2\alpha, 1 - 7\text{συν}^2 2\alpha\right)$.
Επειδή $y_A = 1 - 7x_A^2$, το A ανήκει στη παραβολή $y = 1 - 7x^2$.

5.736. $f'(x) = 6x - 6e^{x-\alpha},\ f''(x) = 6 - 6e^{x-\alpha} \geq 0 \Leftrightarrow e^{x-\alpha} \leq 1 \Leftrightarrow x - \alpha \leq 0 \Leftrightarrow x \leq \alpha$.
Για κάθε $x < \alpha$ είναι $f''(x) > 0 \Rightarrow f$ κυρτή στο $\left(-\infty, \alpha\right]$ και για κάθε $x > \alpha$ είναι $f''(x) < 0 \Rightarrow f$ κοίλη στο $\left[\alpha, +\infty\right)$. Σημείο καμπής το $M\left(\alpha, f(\alpha)\right) \equiv \left(\alpha, 3\alpha^2 - 6\right)$.
Είναι $x_M = \alpha$, $y_M = 3\alpha^2 - 6 = 3x_M^2 - 6$, άρα ο γεωμετρικός τόπος του M είναι η παραβολή $y = 3x^2 - 6$.

5.737. $f'(x) = 2\lambda e^x - 2x,\ f''(x) = 2\lambda e^x - 2 \geq 0 \Leftrightarrow e^x \geq \dfrac{1}{\lambda} \Leftrightarrow x \geq -\ln\lambda$.
Για κάθε $x < -\ln\lambda$ είναι $f''(x) < 0 \Rightarrow f$ κοίλη στο $\left(-\infty, -\ln\lambda\right]$ και για κάθε $x > -\ln\lambda$ είναι $f''(x) > 0 \Rightarrow f$ κυρτή στο $\left[-\ln\lambda, +\infty\right)$.
Σημείο καμπής το $M\left(-\ln\lambda, f\left(-\ln\lambda\right)\right) \equiv \left(-\ln\lambda, 2 - \ln^2\lambda\right)$.
Είναι $x_M = -\ln\lambda \Leftrightarrow \ln\lambda = -x_M$ και $y_M = 2 - \ln^2\lambda = 2 - x_M^2$, άρα ο γ. τόπος του M είναι η παραβολή $y = 2 - x^2$.

5.738. $f'(x) = 4\alpha x^3 + 3\beta x^2 + 2\gamma x + \delta,\ f''(x) = 12\alpha x^2 + 6\beta x + 2\gamma$.
Η f'' είναι τριώνυμο και έχει διακρίνουσα $\Delta = 36\beta^2 - 96\alpha\gamma = 12\left(3\beta^2 - 8\alpha\gamma\right)$.
Επειδή η C_f έχει δύο σημεία καμπής, η f'' έχει 2 ρίζες, άρα
$\Delta > 0 \Leftrightarrow 12\left(3\beta^2 - 8\alpha\gamma\right) > 0 \Leftrightarrow 3\beta^2 - 8\alpha\gamma > 0 \Leftrightarrow \beta^2 > \dfrac{8}{3}\alpha\gamma$.

5.739. Εστω ότι η g έχει σημείο καμπής στο $x = x_0$, τότε επειδή η g είναι δύο φορές παραγωγίσιμη, ισχύει ότι $g''(x_0) = 0$. Είναι
$\left(g(x)g'(x)\right)' = (c)' \Leftrightarrow \left(g'(x)\right)^2 + g(x)g''(x) = 0$ και για $x = x_0$ είναι
$\left(g'(x_0)\right)^2 + g(x_0)g''(x_0) = 0 \Leftrightarrow g'(x_0) = 0$ και αντικαθιστώντας $x = x_0$ στην αρχική
έχουμε: $g(x_0)\,\cancel{g'(x_0)}^{\,0} = c \Leftrightarrow 0 = c$ που είναι άτοπο.

5.740. Εστω ότι η g έχει σημείο καμπής στο $x = x_0$, τότε επειδή η g είναι δύο φορές παραγωγίσιμη, ισχύει ότι $g''(x_0) = 0$. Είναι
$2g(x)g'(x) + g(x) + (x-4)g'(x) + 2x = 0$ και

$2\left(g'(x)\right)^2+2g(x)g''(x)+2g'(x)+(x-4)g''(x)+2=0$. Για $x=x_0$ έχουμε

$2\left(g'(x_0)\right)^2+2g(x_0)g''(x_0)+2g'(x_0)+(x_0-4)g''(x_0)+2=0 \Leftrightarrow$

$\left(g'(x_0)\right)^2+g'(x_0)+1=0$ που είναι αδύνατη ($\Delta<0$).

5.741. $f'(x)=90x^4+150x^2-60x^3-180x$,

$f''(x)=360x^3+300x-180x^2-180=60\left(6x^3-3x^2+5x-3\right)$

Για να έχει η C_f ακριβώς ένα σημείο καμπής στο $(0,1)$, αρκεί η $f''(x)=0$ να έχει μοναδική ρίζα στο διάστημα αυτό και να αλλάζει πρόσημο εκατέρωθέν της.

Είναι $f''(0)=-180<0,\ f''(1)=300>0$ και επειδή η f'' είναι συνεχής, από το Θ.Bolzano υπάρχει $\rho\in(0,1)$ τέτοιο, ώστε $f''(\rho)=0$.

Είναι $f^{(3)}(x)=60\left(18x^2-6x+5\right)>0\ (\Delta<0)\Rightarrow f''\uparrow\mathbb{R}$.

Για κάθε $x<\rho$ είναι $f''(x)<f''(\rho)=0\Rightarrow f$ κοίλη στο $[0,\rho]$ και για κάθε $x>\rho$ είναι $f''(x)>f''(\rho)=0\Rightarrow f$ κυρτή στο $[\rho,1]$. Άρα η C_f έχει μοναδικό σημείο καμπής στο $(0,1)$, το $(\rho,f(\rho))$.

5.742. Επειδή η f' είναι κυρτή, η f'' είναι $\uparrow$ στο $\mathbb{R}$.

Για κάθε $x<1$ είναι $f''(x)<f''(1)=0\Rightarrow f$ κοίλη στο $(-\infty,1]$ και για κάθε $x>1$ είναι $f''(x)>f''(1)=0\Rightarrow f$ κυρτή στο $[1,+\infty)$. Σημείο καμπής το $(1,f(1))$.

5.743. α) $f'(x)=-4xe^{-x^2}$

x	$-\infty$		0		$+\infty$
f'		$+$		$-$	
f		↗		↘	

Η f έχει μέγιστο το $f(0)=2$

β) $f''(x)=4xe^{-x^2}\left(2x^2-1\right)$

x	$-\infty$		$-\frac{\sqrt{2}}{2}$		$\frac{\sqrt{2}}{2}$		$+\infty$
f''		$+$		$-$		$+$	
f							

Η f έχει ΣΚ τα $\left(-\frac{\sqrt{2}}{2},f\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\right)$ και $\left(\frac{\sqrt{2}}{2},f\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\right)$

γ) Για να είναι ορθογώνιο πρέπει οι άλλες δύο κορυφές να έχουν της ίδια τεταγμένη. Επειδή $f(-x)=f(x)$ (f άρτια) οι άλλες δύο κορυφές έχουν αντίθετες τετμημένες. Εστω $A(x,f(x))$, $x>0$ και $A'(-x,f(x))$. Τότε

$E=(AA')\cdot(AB)=2x\cdot 2e^{-x^2}=4xe^{-x^2}$

$E(x)=4xe^{-x^2}$, $x>0$

$E'(x)=4\left(1-2x^2\right)e^{-x^2}$

$-\infty$		$\frac{\sqrt{2}}{2}$		$+\infty$
	$+$		$-$	
	↗		↘	

Μέγιστο για $x=\frac{\sqrt{2}}{2}$, τότε τα A και A΄ είναι τα σημεία καμπής.

5.744. α) Επειδή $3f^2(x)-6f(x)+5>0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$ αφού $\Delta=-24<0$ είναι $f'(x)>0$.

Από το Θ.Μ.Τ. για την f στο $[\alpha,\beta]$ υπάρχει

$$\xi\in(\alpha,\beta):\ f'(\xi)=\frac{f(\beta)-f(\alpha)}{\beta-\alpha}=\frac{2f(\alpha)-f(\alpha)}{\beta-\alpha}=\frac{f(\alpha)}{\beta-\alpha}$$

και αφού $f'(\xi)>0$ τότε $\frac{f(\alpha)}{\beta-\alpha}>0$ άρα $f(\alpha)>0$

β) i. Αφού η f παραγωγίσιμη τότε $3f^2(x)-6f(x)+5$ παραγωγίσιμη άρα και f' παραγωγίσιμη με $f''(x)=6f(x)f'(x)-6f'(x)=6f'(x)(f(x)-1)$

Αφού $f'(x)>0$ τότε $f\uparrow$ για $x\geq\alpha$, $f(x)\geq f(\alpha)>1$ άρα $f(x)-1>0$ οπότε $f''(x)>0$ άρα f κυρτή.

ii. Εστω ότι υπάρχει $A(x_1,f(x_1))$, $B(x_2,f(x_2))$, $\Gamma(x_3,f(x_3))$ συνευθειακά τότε:

$$\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}=\frac{f(x_3)-f(x_2)}{x_3-x_2}$$

Από Θ.Μ.Τ. στα $[x_1,x_2],[x_2,x_3]$ προκύπτει $f'(\xi_1)=f'(\xi_2)$ και από το θ.Rolle για f' στο $[\xi_1,\xi_2]$ προκύπτει $f''(\xi)=0$ που είναι άτοπο.

5.745. α) $f'(x)=e^x+4(x-1)^3$, $f''(x)=e^x+12(x-1)^2>0\Rightarrow f$ κυρτή στο $\mathbb{R}$.

β) είναι $f(0)=2$, $f'(0)=-3$ και η εφαπτομένη είναι η ευθεία

ε: $y-f(0)=f'(0)(x-0)\Leftrightarrow y=-3x+2$.

γ) Επειδή η f είναι κυρτή βρίσκεται πάνω από κάθε εφαπτομένη της, εκτός βέβαια από το σημείο επαφής, άρα

$f(x)\geq-3x+2\Leftrightarrow e^x+(x-1)^4\geq-3x+2$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

5.746. α) $f'(x)=\frac{1}{x}+e^{-x+1}$, $f''(x)=-\frac{1}{x^2}-e^{-x+1}<0\Rightarrow f$ κοίλη στο $(0+\infty)$.

β) Παρατηρούμε ότι $f'(1)=2$ και η εφαπτομένη της C_f στο $x=1$ είναι η ευθεία

ε: $y-f(1)=f'(1)(x-1)\Leftrightarrow y=2x-1$.

Επειδή η f είναι κοίλη στο $(0+\infty)$ βρίσκεται κάτω από κάθε εφαπτομένη της στο διάστημα αυτό, άρα $f(x)\leq 2x-1$ για κάθε $x>0$.

5.747. α) Εστω $g(x)=\frac{f(x)-3x}{x-1}$, $x\neq1\Leftrightarrow f(x)=(x-1)g(x)+3x$ (1)

f παραγωγίσιμη $\Rightarrow$ f συνεχής άρα $f(1)=\lim\limits_{x\to2}f(x)=0+3=3$

$$f'(1)=\lim_{x\to2}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}\overset{(1)}{=}\lim_{x\to2}\frac{(x-1)g(x)+3x-3}{x-1}=\lim_{x\to2}\left[g(x)+3\right]=4+3=7$$

οπότε η εφαπτομένη $\varepsilon: y-f(1)=f'(1)(x-1)\Leftrightarrow y-3=7(x-1)\Leftrightarrow y=7x-4$

β) Αφού η f είναι κοίλη βρίσκεται κάτω από κάθε εφαπτομένη της, εκτός από το σημείο επαφής, άρα $f(x)\leq 7x-4\Leftrightarrow f(x)-7x+4\leq0$.

5.748. α) Εστω $g(x)=\frac{f(x)-x^2}{x-1}$, $x\neq1$ και $\lim\limits_{x\to1}g(x)=2$. Τότε $f(x)=g(x)(x-1)+x^2$ και

$\lim_{x\to1} f(x)=\lim_{x\to1}\left[g(x)(x-1)+x^2\right]=1$. Επειδή η f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ είναι και συνεχής στο $x_0=1$, οπότε: $f(1)=\lim_{x\to1} f(x)=1$.

$$f'(1)=\lim_{x\to1}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim_{x\to1}\frac{g(x)(x-1)+x^2-1}{x-1}=\lim_{x\to1}\frac{g(x)(x-1)+(x-1)(x+1)}{x-1}=$$

$$=\lim_{x\to1}\frac{(x-1)(g(x)+x+1)}{x-1}=\lim_{x\to1}(g(x)+x+1)=4.$$

Η εφαπτομένη της C_f στο $x_0=1$ είναι η ευθεία ε:

$y-f(1)=f'(1)(x-1)\Leftrightarrow y-1=4(x-1)\Leftrightarrow y=4x-3$

β) Επειδή η f είναι κυρτή η γραφική της παράσταση βρίσκεται πάνω από κάθε εφαπτομένη της, δηλαδή η C_f βρίσκεται πάνω από την ε, οπότε

$f(x)\geq 4x-3\Leftrightarrow f(x)-4x+3\geq0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

γ) Για $x=2$ είναι $f(2)-4\cdot2+3\geq0\Leftrightarrow f(2)\geq5$.

Η f είναι συνεχής στο $[1,2]$ και παραγωγίσιμη στο $(1,2)$, άρα λόγω του θεωρήματος Μέσης Τιμής υπάρχει $\xi_1\in(1,2)$ τέτοιο, ώστε

$$f'(\xi_1)=\frac{f(2)-f(1)}{2-1}=f(2)-f(1)\geq5-1=4.$$

Η f' είναι συνεχής στο $[1,\xi_1]$ και παραγωγίσιμη στο $(1,\xi_1)$, άρα λόγω του Θ.Μ.Τ. υπάρχει $\xi\in(1,2)$ τέτοιο, ώστε: $f''(\xi)=\dfrac{f'(\xi_1)-f'(1)}{\xi_1-1}=\dfrac{f'(\xi_1)-4}{\xi_1-1}\geq0$.

5.749. **α)** Εστω $g(x)=\dfrac{f(x)-3x}{x-2}$, $x\neq2\Leftrightarrow f(x)=(x-2)g(x)+3x$ (1)

f παραγωγίσιμη $\Rightarrow$ f συνεχής άρα $f(2)=\lim_{x\to2} f(x)=0+6=6$

β) $f'(2)=\lim_{x\to2}\dfrac{f(x)-f(2)}{x-2}\overset{(1)}{=}\lim_{x\to2}\dfrac{(x-2)g(x)+3x-6}{x-2}=\lim_{x\to2}\left[g(x)+3\right]=1+3=4$

οπότε η εφαπτομένη $\varepsilon: y-f(2)=f'(2)(x-2)\Leftrightarrow y-6=4(x-2)\Leftrightarrow y=4x-2$

γ) Εστω $h(x)=f(x)-(x+3)$, $x\in[2,4]$. $h(2)=f(2)-5=1>0$, $h(4)=f(4)-7=-1<0$ και h συνεχής, άρα από θ.Β υπάρχει $x_0\in(2,4): h(x_0)=0\Leftrightarrow f(x_0)=x_0+3$

δ) Επειδή $f(2)=f(4)=6$ από το Θ.Rolle για την f στο $[2,4]$ υπάρχει $\xi\in(2,4)$ τέτοιο ώστε $f'(\xi)=0$. Αφού f κοίλη είναι $f'\downarrow$ στο $[2,4]$ οπότε ξ μοναδικό.

Για $2<x<\xi$ είναι $f'(x)>f'(\xi)=0\Leftrightarrow f'(x)>0\Rightarrow f\uparrow[2,\xi]$

Για $\xi<x<4$ είναι $f'(x)<f'(\xi)=0\Rightarrow f\downarrow[\xi,4]$.

Άρα η f έχει τοπικό μέγιστο στο $x_0=\xi$.

5.750. **α)** $g'(x)=-2e^{-2x}f(x)+e^{-2x}f'(x)=e^{-2x}\left(-2f(x)+f'(x)\right)$,

$g''(x)=-2e^{-2x}\left(-2f(x)+f'(x)\right)+e^{-2x}\left(-2f'(x)+f''(x)\right)\Leftrightarrow$

$g''(x)=e^{-2x}\left(f''(x)-4\left(f'(x)-f(x)\right)\right)>0$ άρα η g είναι κυρτή στο $\mathbb{R}$.

β) Επειδή η f παρουσιάζει ακρότατο στο $x_0\in\mathbb{R}$ με τιμή μηδέν, είναι $f(x_0)=0$ και

$f'(x_0)=0$. Τότε $g(x_0)=e^{-2x_0}f(x_0)=0$.

γ) Είναι $g'(x_0)=e^{-2x_0}\left(-2f(x_0)+f'(x_0)\right)=0$.

Επειδή η g είναι κυρτή, η g' είναι $\uparrow$ στο $\mathbb{R}$, οπότε για $x<x_0$ είναι

$g'(x)<g'(x_0)=0 \Rightarrow g\downarrow(-\infty,x_0]$ και για κάθε $x>x_0$ είναι

$g'(x)>g'(x_0)=0 \Rightarrow g\uparrow[x_0,+\infty)$. Η g έχει ελάχιστο το $g(x_0)=0$.

δ) Είναι $g(x)\geq g(x_0)=0 \Leftrightarrow e^{-2x}f(x)\geq 0 \Leftrightarrow f(x)\geq 0$.

5.751. Επειδή η C_f διέρχεται από το σημείο $(0,0)$, είναι $f(0)=0$. Θεωρούμε τη συνάρτηση $h(x)=9f\left(\frac{2}{3}x\right)-8f\left(\frac{3}{4}x\right)$ στο διάστημα $(-\infty,0]$. Η h είναι συνεχής στο $(-\infty,0]$ και παραγωγίσιμη στο $(-\infty,0)$, με

$$h'(x)=9f'\left(\frac{2}{3}x\right)\frac{2}{3}-8f'\left(\frac{3}{4}x\right)\frac{3}{4}=6\left[f'\left(\frac{2}{3}x\right)-f'\left(\frac{3}{4}x\right)\right].$$

Επειδή η f είναι κυρτή στο $(-\infty,0]$, τότε η f' θα είναι γνησίως αύξουσα στο $(-\infty,0]$. Για κάθε $x<0$ είναι $\frac{2}{3}x>\frac{3}{4}x \Leftrightarrow f'\left(\frac{2}{3}x\right)>f'\left(\frac{3}{4}x\right) \Leftrightarrow f'\left(\frac{2}{3}x\right)-f'\left(\frac{3}{4}x\right)>0 \Leftrightarrow h'(x)>0$, άρα η h είναι γνησίως αύξουσα στο $(-\infty,0]$.Οπότε, για

$$x<0 \Leftrightarrow h(x)<h(0) \Leftrightarrow 9f\left(\frac{2}{3}x\right)-8f\left(\frac{3}{4}x\right)<f(0) \Leftrightarrow 9f\left(\frac{2}{3}x\right)-8f\left(\frac{3}{4}x\right)<0 \Leftrightarrow$$

$$9f\left(\frac{2}{3}x\right)<8f\left(\frac{3}{4}x\right).$$

5.752. Εστω $g(x)=3f(x)-4f\left(\frac{3x}{4}\right), x\in\mathbb{R}$. Είναι

$$g'(x)=3f'(x)-3f'\left(\frac{3x}{4}\right)=3\left(f'(x)-f'\left(\frac{3x}{4}\right)\right)$$

Για κάθε $x<0$ είναι $x<\frac{3x}{4} \overset{f'\downarrow}{\Leftrightarrow} f'(x)>f'\left(\frac{3x}{4}\right) \Leftrightarrow g'(x)>0$ και $g\uparrow$ $(-\infty,0]$.

Για κάθε $x<0$ είναι $g(x)<g(0) \Leftrightarrow 3f(x)<4f\left(\frac{3x}{4}\right)$.

Για κάθε $x>0$ είναι $x>\frac{3x}{4} \overset{f'\downarrow}{\Leftrightarrow} f'(x)<f'\left(\frac{3x}{4}\right) \Leftrightarrow g'(x)<0$ και $g\downarrow$ $[0,+\infty)$.

Για κάθε $x>0$ είναι $g(x)<g(0) \Leftrightarrow 3f(x)<4f\left(\frac{3x}{4}\right)$.

5.753. **α)** $f'(x)=4xe^x+2x^2e^x$, $f''(x)=2\left(x^2+4x+2\right)e^x$

x	$-\infty$	$-2-\sqrt{2}$	$-2+\sqrt{2}$	$+\infty$
f''	+		−	+
f	$\cup$		$\cap$	$\cup$

β) Για $x>0$ είναι
$f''(x)>0 \Rightarrow f'\uparrow(0,+\infty)$
Από το Θ.Μ.Τ. για την f στο

$[x,x+1]$ υπάρχει $\xi\in(x,x+1)$:

$f'(\xi)=f(x+1)-f(x)$

$x<\xi<x+1 \overset{f'\uparrow}{\Rightarrow} f'(\xi)<f'(x+1)$, άρα $f(x+1)-f(x)<f'(x+1)$.

5.754. α) Είναι $f'(x)=\ln x+1$ και $f''(x)=\frac{1}{x}>0$ άρα η f είναι κυρτή στο $(0,+\infty)$.

β) Η f είναι συνεχής στα διαστήματα $\left[\alpha,\frac{\alpha+\beta}{2}\right]$, $\left[\frac{\alpha+\beta}{2},\beta\right]$ και παραγωγίσιμη στα $\left(\alpha,\frac{\alpha+\beta}{2}\right)$ και $\left(\frac{\alpha+\beta}{2},\beta\right)$. Λόγω του θεωρήματος Μέσης Τιμής, υπάρχουν $\xi_1\in\left(\alpha,\frac{\alpha+\beta}{2}\right)$ και $\xi_2\in\left(\frac{\alpha+\beta}{2},\beta\right)$ τέτοια, ώστε

$$f'(\xi_1)=\frac{f\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)-f(\alpha)}{\frac{\alpha+\beta}{2}-\alpha}=\frac{\frac{\alpha+\beta}{2}\ln\frac{\alpha+\beta}{2}-\alpha\ln\alpha}{\frac{\beta-\alpha}{2}} \text{ και}$$

$$f'(\xi_2)=\frac{f(\beta)-f\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)}{\beta-\frac{\alpha+\beta}{2}}=\frac{\beta\ln\beta-\frac{\alpha+\beta}{2}\ln\frac{\alpha+\beta}{2}}{\frac{\beta-\alpha}{2}}.$$

Είναι $\xi_1<\xi_2$ και η f' είναι γνησίως αύξουσα (f κυρτή) άρα $f'(\xi_1)<f'(\xi_2)\Leftrightarrow$

$$\frac{\frac{\alpha+\beta}{2}\ln\frac{\alpha+\beta}{2}-\alpha\ln\alpha}{\frac{\beta-\alpha}{2}}<\frac{\beta\ln\beta-\frac{\alpha+\beta}{2}\ln\frac{\alpha+\beta}{2}}{\frac{\beta-\alpha}{2}}\Leftrightarrow$$

$$\frac{\alpha+\beta}{2}\ln\frac{\alpha+\beta}{2}-\alpha\ln\alpha<\beta\ln\beta-\frac{\alpha+\beta}{2}\ln\frac{\alpha+\beta}{2}\Leftrightarrow 2\frac{\alpha+\beta}{2}\ln\frac{\alpha+\beta}{2}<\beta\ln\beta+\alpha\ln\alpha\Leftrightarrow$$

$$(\alpha+\beta)\ln\frac{\alpha+\beta}{2}<\ln\beta^\beta+\ln\alpha^\alpha\Leftrightarrow \ln\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)^{\alpha+\beta}<\ln\beta^\beta\alpha^\alpha\Leftrightarrow\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)^{\alpha+\beta}<\beta^\beta\alpha^\alpha$$

5.755. α) Για να ορίζεται η f πρέπει $\ln x>0\Leftrightarrow x>1$, άρα $A_f=(1,+\infty)$.

Είναι $f'(x)=\frac{1}{\ln x}(\ln x)'=\frac{1}{x\ln x}>0$ για κάθε $x>1$,

άρα η f είναι γνησίως αύξουσα στο $(1,+\infty)$.

Είναι $f''(x)=-\frac{1}{(x\ln x)^2}(x\ln x)'=-\frac{\ln x+1}{(x\ln x)^2}<0$ για κάθε $x>1$,

άρα η f είναι κοίλη στο $(1,+\infty)$.

β) Αν $\alpha<\beta$, τότε επειδή η f είναι συνεχής στα διαστήματα $\left[\alpha,\frac{\alpha+\beta}{2}\right]$, $\left[\frac{\alpha+\beta}{2},\beta\right]$

και παραγωγίσιμη στα $\left(\alpha,\frac{\alpha+\beta}{2}\right)$ και $\left(\frac{\alpha+\beta}{2},\beta\right)$, λόγω του θεωρήματος Μέσης Τιμής, υπάρχουν $\xi_1\in\left(\alpha,\frac{\alpha+\beta}{2}\right)$ και $\xi_2\in\left(\frac{\alpha+\beta}{2},\beta\right)$ τέτοια, ώστε:

$$f'(\xi_1)=\frac{f\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)-f(\alpha)}{\frac{\alpha+\beta}{2}-\alpha}=\frac{\ln\left(\ln\frac{\alpha+\beta}{2}\right)-\ln(\ln\alpha)}{\frac{\beta-\alpha}{2}} \text{ και}$$

$$f'(\xi_2)=\frac{f(\beta)-f\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)}{\beta-\frac{\alpha+\beta}{2}}=\frac{\ln(\ln\beta)-\ln\left(\ln\frac{\alpha+\beta}{2}\right)}{\frac{\beta-\alpha}{2}}.$$

Είναι $1<\alpha<\xi_1<\frac{\alpha+\beta}{2}<\xi_2<\beta$ και η f' είναι γνησίως φθίνουσα, άρα:

$$f'(\xi_1)>f'(\xi_2)\Leftrightarrow\frac{\ln\left(\ln\frac{\alpha+\beta}{2}\right)-\ln(\ln\alpha)}{\frac{\beta-\alpha}{2}}>\frac{\ln(\ln\beta)-\ln\left(\ln\frac{\alpha+\beta}{2}\right)}{\frac{\beta-\alpha}{2}}\Leftrightarrow$$

$$\ln\left(\ln\frac{\alpha+\beta}{2}\right)-\ln(\ln\alpha)>\ln(\ln\beta)-\ln\left(\ln\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\Leftrightarrow$$

$$2\ln\left(\ln\frac{\alpha+\beta}{2}\right)>\ln(\ln\alpha)+\ln(\ln\beta)\Leftrightarrow\ln\left(\ln\frac{\alpha+\beta}{2}\right)^2>\ln(\ln\alpha\ln\beta)\Leftrightarrow$$

$$\left(\ln\frac{\alpha+\beta}{2}\right)^2>\ln\alpha\ln\beta\Leftrightarrow.\ln\frac{\alpha+\beta}{2}>\sqrt{\ln\alpha\ln\beta}$$

Όμοια αν $\alpha>\beta$, προκύπτει ότι $\ln\frac{\alpha+\beta}{2}>\sqrt{\ln\alpha\ln\beta}$.

Τέλος αν $\alpha=\beta$, τότε $\ln\frac{2\alpha}{2}\geq\sqrt{\ln\alpha\cdot\ln\alpha}\Leftrightarrow\ln\alpha\geq\sqrt{\ln^2\alpha}$ που ισχύει

5.756. α) $f'(x)=1-\frac{e^x}{e^x+1}=\frac{1}{e^x+1}>0\Rightarrow f\uparrow\mathbb{R}$.

β) $f''(x)=-\frac{e^x}{\left(e^x+1\right)^2}<0\Rightarrow f$ κοίλη στο $\mathbb{R}$.

γ) Εστω $g(x)=xf'(x)-f(x)-\ln 2,\ x\geq 0$.

$g'(x)=f'(x)+xf''(x)-f'(x)=xf''(x)<0\Rightarrow g\downarrow[0,+\infty)$.

Για κάθε $x>0$ είναι $g(x)<g(0)=0\Leftrightarrow xf'(x)-f(x)-\ln 2<0$

δ) Από το Θ.Μ.Τ. για την f, υπάρχει $\xi\in(x,x+1)$ τέτοιο, ώστε $f'(\xi)=f(x+1)-f(x)$.

$$x<\xi<x+1\overset{f'\downarrow}{\Leftrightarrow}f'(x)>f'(\xi)>f'(x+1)\Leftrightarrow\frac{1}{e^{x+1}+1}<f(x+1)-f(x)<\frac{1}{e^x+1}$$

5.757. α) Η f είναι παραγωγίσιμη στο $(0,+\infty)$ με

$f'(x)=\frac{2\ln x}{x}$.

Είναι $f'(x)=0 \Leftrightarrow \ln x=0 \Leftrightarrow x=1$.

Όταν $x\in(0,1)$ είναι $f'(x)<0$, άρα η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $(0,1]$. Όταν $x\in(1,+\infty)$ είναι $f'(x)>0$, άρα η f είναι γνησίως αύξουσα στο $[1,+\infty)$.

Η f' είναι παραγωγίσιμη στο $(0,+\infty)$ με $f''(x)=2\frac{1-\ln x}{x^2}$.

$f''(x)\geq 0 \Leftrightarrow 1-\ln x\geq 0 \Leftrightarrow \ln x\leq 1 \Leftrightarrow x\leq e$.

Όταν $x\in(0,e)$ είναι $f''(x)>0$, άρα η f είναι κυρτή στο $(0,e]$.

Όταν $x\in(e,+\infty)$ είναι $f''(x)<0$, άρα η f είναι κοίλη στο $[e,+\infty)$.

β) $x\left(\ln^2 x-1\right)-2(x-e)\ln x>0 \Leftrightarrow \frac{\ln^2 x-1}{x-e}>\frac{2\ln x}{x}$.

Η f είναι συνεχής στο $[e,x]$, $x>e$ και παραγωγίσιμη στο (e,x) με $f'(x)=\frac{2\ln x}{x}$.

Λόγω του θεωρήματος μέσης τιμής υπάρχει $x_0\in(e,x)$ τέτοιο, ώστε

$f'(x_0)=\frac{f(x)-f(e)}{x-e}=\frac{\ln x-1}{x-e}$.

Είναι $e<x_0<x$ και η f' είναι γνησίως φθίνουσα στο $[e,+\infty)$, άρα

$f'(x_0)>f'(x) \Leftrightarrow \frac{\ln^2 x-1}{x-e}>\frac{2\ln x}{x}$.

5.758. **α)** $f'(x)=2x-\frac{32}{x}=\frac{2x^2-32}{x}\geq 0 \overset{x>0}{\Leftrightarrow} 2x^2-32\geq 0 \Leftrightarrow x^2\geq 16 \Leftrightarrow x\geq 4$.

Η f είναι $\downarrow$ στο $(0,4]$ και $\uparrow[4,+\infty)$.

β) $f''(x)=2+\frac{32}{x^2}>0 \Rightarrow f'\uparrow(0+\infty)$.

Από το Θ.Μ.Τ για την f, υπάρχουν $\xi_1\in(4,5)$ και $\xi_2\in(5,6)$ τέτοια, ώστε:

$f'(\xi_1)=f(5)-f(4)$ και $f'(\xi_2)=f(6)-f(5)$.

Είναι $\xi_1<\xi_2 \overset{f'\uparrow}{\Leftrightarrow} f'(\xi_1)<f'(\xi_2) \Leftrightarrow f(5)-f(4)<f(6)-f(5) \Leftrightarrow 2f(5)<f(4)+f(6)$

5.759. Επειδή η f στρέφει κοίλα άνω στο $[\alpha,\beta]$, η f' είναι $\uparrow$ στο διάστημα αυτό.

Από το Θ.Μ.Τ. για την f, υπάρχουν $\xi_1\in(\alpha,\gamma)$ και $\xi_2\in(\gamma,\beta)$ τέτοια, ώστε

$f'(\xi_1)=\frac{f(\gamma)-f(\alpha)}{\gamma-\alpha}=-\frac{f(\alpha)}{\gamma-\alpha}$ και $f'(\xi_2)=\frac{f(\beta)-f(\gamma)}{\beta-\gamma}=\frac{f(\beta)}{\beta-\gamma}$

$\xi_1<\xi_2 \overset{f'\uparrow}{\Leftrightarrow} f'(\xi_1)<f'(\xi_2) \Leftrightarrow -\frac{f(\alpha)}{\gamma-\alpha}<\frac{f(\beta)}{\beta-\gamma} \Leftrightarrow -f(\alpha)(\beta-\gamma)<f(\beta)(\gamma-\alpha) \Leftrightarrow$

$f(\beta)(\gamma-\alpha)+f(\alpha)(\beta-\gamma)>0$.

5.760. Επειδή η f είναι παραγωγίσιμη και κοίλη στο $[0,5]$, η f' είναι $\downarrow$ στο διάστημα αυτό.

Από το Θ.Μ.Τ για την f, υπάρχουν $\xi_1 \in (0,2)$ και $\xi_2 \in (2,5)$ τέτοια, ώστε

$$f'(\xi_1) = \frac{f(2)-f(0)}{2} = -\frac{f(0)}{2} \text{ και } f'(\xi_2) = \frac{f(5)-f(2)}{3} = \frac{f(5)}{3}.$$

$$\xi_1 < \xi_2 \overset{f'\downarrow}{\Leftrightarrow} f'(\xi_1) > f'(\xi_2) \Leftrightarrow -\frac{f(0)}{2} > \frac{f(5)}{3} \Leftrightarrow -3f(0) > 2f(5) \Leftrightarrow 2f(5)+3f(0) < 0$$

5.761. Επειδή η f είναι παραγωγίσιμη και κοίλη στο $[3,6]$, η f' είναι $\downarrow$ στο διάστημα αυτό.

Από το Θ.Μ.Τ για την f, υπάρχουν $\xi_1 \in (3,4)$ και $\xi_2 \in (5,6)$ τέτοια, ώστε

$f'(\xi_1) = f(4)-f(3)$ και $f'(\xi_2) = f(6)-f(5)$.

$$\xi_1 < \xi_2 \overset{f'\downarrow}{\Leftrightarrow} f'(\xi_1) > f'(\xi_2) \Leftrightarrow f(4)-f(3) > f(6)-f(5) \Leftrightarrow f(4)+f(5) > f(6)+f(3)$$

5.762. Είναι $f'\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right) = 0$ και επειδή f' κυρτή, η f'' είναι $\uparrow$ στο $[\alpha,\beta]$. Λόγω Θ.Μ.Τ., για

την f' υπάρχει $\xi_1 \in \left(\alpha, \frac{\alpha+\beta}{2}\right) : f''(\xi_1) = \dfrac{f'\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right) - f'(\alpha)}{\frac{\beta-\alpha}{2}} = -\dfrac{2f'(\alpha)}{\beta-\alpha}$ και όμοια

υπάρχει $\xi_2 \in \left(\frac{\alpha+\beta}{2}, \beta\right) : f''(\xi_2) = \dfrac{2f'(\beta)}{\beta-\alpha}$.

Είναι $\xi_1 < \xi_2$ και $f''\uparrow$, άρα $f''(\xi_1) < f''(\xi_2) \Leftrightarrow -\dfrac{2f'(\alpha)}{\beta-\alpha} < \dfrac{2f'(\beta)}{\beta-\alpha} \Leftrightarrow f'(\alpha)+f'(\beta) > 0$

5.763. Επειδή η f είναι κυρτή, η f' είναι $\uparrow$ στο $\mathbb{R}$.

Από το Θ.Μ.Τ. για την f, υπάρχει $\xi \in (x, x+1)$ τέτοιο, ώστε: $f'(\xi) = f(x+1)-f(x)$.

Είναι $x < \xi < x+1 \overset{f'\uparrow}{\Leftrightarrow} f'(x) < f'(\xi) < f'(x+1) \Leftrightarrow f'(x) < f(x+1)-f(x) < f'(x+1)$.

5.764. Εστω ότι υπάρχει $x_0 \in (-\alpha, \alpha)$ τέτοιο, ώστε $f(x_0) \geq x_0$.

Από το Θ.Μ.Τ., υπάρχει $\xi_1 \in (-\alpha, x_0)$ και $\xi_2 \in (x_0, \alpha)$ τέτοια, ώστε

$$f'(\xi_1) = \frac{f(x_0)-f(-\alpha)}{x_0+\alpha} = \frac{f(x_0)+\alpha}{x_0+\alpha} \text{ και } f'(\xi_2) = \frac{f(\alpha)-f(x_0)}{\alpha-x_0} = \frac{\alpha-f(x_0)}{\alpha-x_0}.$$

Επειδή η f είναι κυρτή, η f' είναι $\uparrow$ στο $[-\alpha,\alpha]$, οπότε:

$$\xi_1 < \xi_2 \overset{f'\downarrow}{\Leftrightarrow} f'(\xi_1) < f'(\xi_2) \Leftrightarrow \frac{f(x_0)+\alpha}{x_0+\alpha} < \frac{\alpha-f(x_0)}{\alpha-x_0} \Leftrightarrow$$

$$(\alpha-x_0)f(x_0) + \cancel{\alpha^2} - \alpha x_0 < \cancel{\alpha^2} + \alpha x_0 - (x_0+\alpha)f(x_0) \Leftrightarrow$$

$$(\alpha-x_0)f(x_0) + (x_0+\alpha)f(x_0) < 2\alpha x_0 \Leftrightarrow (\alpha - \cancel{x_0} + \cancel{x_0} + \alpha)f(x_0) < 2\alpha x_0 \Leftrightarrow$$

$$2\alpha f(x_0) < 2\alpha x_0 \overset{\alpha>0}{\Leftrightarrow} f(x_0) < x_0 \text{ που είναι άτοπο.}$$

5.765. **α)** Από το Θ.Bolzano στα $[0,1]$, $[1,2]$ άρα η f έχει τουλάχιστον δύο ρίζες. Έστω ότι έχει τρεις ρίζες $\rho_1 < \rho_2 < \rho_3$ τότε από το θ. Rolle υπάρχουν $\xi_1 \in (\rho_1, \rho_2)$ και $\xi_2 \in (\rho_2, \rho_3)$ τέτοια, ώστε $f'(\xi_1) = 0 = f'(\xi_2)$. Από το Θ. Rolle για την f' υπάρχει $\xi \in (\xi_1, \xi_2): f''(\xi) = 0$ που είναι άτοπο.

β) Θ.Μ.Τ. για f στο $[0,1]$: $\exists x_1 \in (0,1): f'(x_1) = f(1) - f(0) < 0$

Θ.Μ.Τ. για f στο $[1,2]$: $\exists x_2 \in (1,2): f'(x_2) = f(2) - f(1) > 0$

Θ.Μ.Τ. για f' στο $[x_1, x_2]$: $\exists \theta \in (x_1, x_2): f''(\theta) = \dfrac{f'(x_2) - f'(x_1)}{x_2 - x_1} > 0$

Επειδή f'' συνεχής ως πολυωνυμική και δεν μηδενίζεται τότε διατηρεί πρόσημο. Αφού $f''(\theta) > 0$ τότε και $f''(x) > 0$ άρα f κυρτή.

γ) Εφαπτομένη στο $(0, f(0))$: $y = f'(0)x + f(0)$, αφού f κυρτή τότε $f(x) \geq y$ δηλαδή $f(x) \geq f'(0)x + f(0)$.

5.766. **α)** $\left[f(g(x))\right]' = (x)' \Leftrightarrow f'(g(x))g'(x) = 1 \Leftrightarrow xg'(x) = 1 \Leftrightarrow g'(x) = \dfrac{1}{x} \Leftrightarrow g(x) = \ln x + c$

$g(e^2) = 1 \Leftrightarrow 2 + c = 1 \Leftrightarrow c = -1$ και $g(x) = \ln x - 1$, $x > 0$.

Θέτουμε $g(x) = \ln x - 1 = u \Leftrightarrow x = e^{u+1}$. Τότε η σχέση $f(g(x)) = x$, γίνεται: $f(u) = e^{u+1}$, άρα και $f(x) = e^{x+1}$, $x > 0$.

β) Είναι $f''(x) = e^{x+1} > 0 \Rightarrow f$ κυρτή στο $(0, +\infty)$.

$g''(x) = -\dfrac{1}{x^2} < 0 \Rightarrow g$ κοίλη στο $(0, +\infty)$

5.767. Επειδή οι f,g είναι κυρτές, οι f', g' είναι $\uparrow$ στο $\mathbb{R}$. Δηλαδή για κάθε $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ με $x_1 < x_2$ είναι $f'(x_1) < f'(x_2)$ και $g'(x_1) < g'(x_2)$. Τότε όμως είναι και $f'(x_1) + g'(x_1) < f'(x_2) + g'(x_2) \Leftrightarrow (f' + g')(x_1) < (f' + g')(x_2)$, άρα η $f' + g'$ είναι $\uparrow$ στο $\mathbb{R}$, οπότε η $f + g$ είναι κυρτή.

5.768. Εστω ότι η f έχει ακρότατα στα $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Επειδή η f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$, τα α, β θα είναι ρίζες της f'. Δηλαδή $f'(\alpha) = f'(\beta)$. Από το θ.Rolle για την f', υπάρχει $\xi \in (\alpha, \beta)$ τέτοιο, ώστε $f''(\xi) = 0$, άρα η f έχει τουλάχιστον ένα πιθανό σημείο καμπής.

5.769. Επειδή η f είναι παραγωγίσιμη και κυρτή, η f' είναι $\uparrow$ στο $\mathbb{R}$.

Επειδή η f παρουσιάζει μέγιστο στο x_0, είναι $f'(x_0) = 0$ και $f(x) \leq f(x_0)$ $\forall x \in \mathbb{R}$.

Για κάθε $x < x_0 \overset{f'\uparrow}{\Leftrightarrow} f'(x) < f'(x_0) = 0 \Rightarrow f \downarrow (-\infty, x_0]$ και για κάθε $x > x_0 \overset{f'\uparrow}{\Leftrightarrow} f'(x) > f'(x_0) = 0 \Rightarrow f \uparrow [x_0, +\infty)$. Άρα η f έχει ελάχιστο στο x_0.

Επειδή το μέγιστο και το ελάχιστο της f ταυτίζονται, είναι σταθερή συνάρτηση.

5.770. Επειδή η f είναι παραγωγίσιμη και κοίλη, η f' είναι $\downarrow$ στο $\mathbb{R}$.

Επειδή η f παρουσιάζει ελάχιστο στο x_0, είναι $f'(x_0)=0$ και $f(x)\geq f(x_0)$ $\forall x\in\mathbb{R}$.

Αν $x<x_0 \overset{f'\downarrow}{\Leftrightarrow} f'(x)>f'(x_0)=0 \Rightarrow f\uparrow(-\infty,x_0]$ και αν

$x>x_0 \overset{f'\downarrow}{\Leftrightarrow} f'(x)<f'(x_0)=0 \Rightarrow f\downarrow[x_0,+\infty)$, άρα η f έχει μέγιστο στο x_0 .

Επειδή το μέγιστο και το ελάχιστο της f ταυτίζονται, είναι σταθερή συνάρτηση.

5.771. $f^{(3)}(x)>0 \Rightarrow f''\uparrow\mathbb{R}$. Για κάθε $x>0$ είναι $f''(x)>f''(0)=0 \Rightarrow f$ κυρτή στο $[0,+\infty)$ και για κάθε $x<0$ είναι $f''(x)<f''(0)=0 \Rightarrow f$ κοίλη στο $(-\infty,0]$.

5.772. Εστω ότι υπάρχει τέτοια συνάρτηση.
Αν $f'(0)>0$, τότε από το ΘΜΤ για την f υπάρχει $\xi\in(0,x)$:

$f'(\xi)=\dfrac{f(x)-f(0)}{x} \Leftrightarrow f(x)=xf'(\xi)+f(0)>xf'(0)+f(0)$.

Επειδή $\lim\limits_{x\to+\infty}(xf'(0)+f(0))=\lim\limits_{x\to+\infty}(xf'(0))=+\infty$ είναι και $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$ που είναι άτοπο. Όμοια αν $f'(0)<0$.Αν $f'(0)=0$ τότε από το ΘΜΤ υπάρχει

$\xi\in(1,x)$: $f'(\xi)=\dfrac{f(x)-f(1)}{x-1} \Leftrightarrow f(x)=(x-1)f'(\xi)+f(1)$

Είναι $0<1<\xi<x \overset{f'\uparrow}{\Leftrightarrow} 0=f'(0)<f'(1)<f'(\xi)<f'(x)$, άρα

$f(x)=(x-1)f'(\xi)+f(1)>(x-1)f'(1)+f(1)$.

Επειδή $\lim\limits_{x\to+\infty}((x-1)f'(1)+f(1))=\lim\limits_{x\to+\infty}(xf'(1))=+\infty$ είναι και $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$ που είναι άτοπο.

5.773. **α)** Επειδή η f είναι παραγωγίσιμη και κοίλη στο $\mathbb{R}$ η f' είναι γνησίως φθίνουσα.
Ακόμη επειδή η f παρουσιάζει ακρότατο στο σημείο O(0,0) ισχύει ότι $f(0)=0$ και $f'(0)=0$.

Για την f εφαρμόζεται το θεώρημα Μέσης Τιμής στο διάστημα $[1,x]$,$x>1$ οπότε

υπάρχει $\xi_1\in(1,x)$ τέτοιο, ώστε $f'(\xi_1)=\dfrac{f(x)-f(1)}{x-1} \Leftrightarrow f(x)=(x-1)f'(\xi_1)+f(1)$.

Είναι $0<1<\xi_1<x \overset{f'\downarrow}{\Leftrightarrow} f'(0)>f'(1)>f'(\xi_1)>f'(x) \Leftrightarrow f'(x)<f'(\xi)<f'(1)<0$

$f(x)=(x-1)f'(\xi_1)+f(1)<(x-1)f'(1)+f(1)$

Επειδή $\lim\limits_{x\to+\infty}[(x-1)f'(1)+f(1)]=\lim\limits_{x\to+\infty}(xf'(1))=-\infty$, είναι και $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=-\infty$.

Όμοια για την f εφαρμόζεται το θεώρημα Μέσης Τιμής στο διάστημα $[x,-1]$, $x<-1$ και υπάρχει $\xi_2\in(x,-1)$ τέτοιο, ώστε

$f'(\xi_2)=\dfrac{f(-1)-f(x)}{-1-x} \Leftrightarrow f(x)=(x+1)f'(\xi_2)-f(-1)$.

$x<\xi_2<-1<0 \overset{f'\downarrow}{\Leftrightarrow} f'(x)>f'(\xi_2)>f'(-1)>f'(0)=0$, άρα

$f(x)=(x+1)f'(\xi_2)-f(-1)<(x+1)f'(\xi_2)-f(-1)$

Επειδή $\lim\limits_{x\to-\infty}\left[(x+1)f'(-1)+f(1)\right]=\lim\limits_{x\to-\infty}\left(xf'(-1)\right)=-\infty$, είναι και $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=-\infty$.

β) Για κάθε $x>0$ είναι $f'(x)<0$ και για κάθε $x<0$ είναι $f'(x)>0$, άρα η f είναι γνησίως αύξουσα στο $(-\infty,0]$ και γνησίως φθίνουσα στο $[0,+\infty)$. Παρουσιάζει μέγιστο στο $x=0$ το $f(0)=0$ άρα $f(x)\le f(0)\Leftrightarrow f(x)\le 0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

5.774. Από το ΘΜΤ για την f, υπάρχει $\xi\in(1,x)$ τέτοιο, ώστε

$$f'(\xi)=\frac{f(x)-f(1)}{x-1}\Leftrightarrow f(x)=f'(\xi)x-f'(\xi)+f(1)$$

$1<\xi<x\overset{f'\uparrow}{\Rightarrow}f'(\xi)>f'(1)>0$, οπότε

$$f(x)=f'(\xi)(x-1)+f(1)>f'(1)(x-1)+f(1)=f'(1)x-f'(1)+f(1)$$

Επειδή $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(f'(1)x-f'(1)+f(1)\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(f'(1)x\right)=+\infty$ είναι και $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$

5.775. Επειδή η f είναι παραγωγίσιμη και κυρτή, η f' είναι $\uparrow$ στο $\mathbb{R}$.

Για κάθε $\alpha<x<\beta\overset{f'\uparrow}{\Rightarrow}f'(x)>f'(\alpha)>0\Rightarrow f\uparrow[\alpha,\beta]$.

Για κάθε $\alpha<x<\beta\overset{f\uparrow}{\Rightarrow}f(x)>f(\alpha)>0$.

5.776. **α)** $f^{(3)}(x)<0\Rightarrow f''\downarrow\mathbb{R}$. Για κάθε $x<0\overset{f''\downarrow}{\Leftrightarrow}f''(x)>f''(0)=0\Rightarrow f'\uparrow(-\infty,0]$ και για

$x<0\overset{f'\uparrow}{\Leftrightarrow}f'(x)<f'(0)=0\Rightarrow f\downarrow(-\infty,0]$.

Για κάθε $x>0\overset{f''\downarrow}{\Leftrightarrow}f''(x)<f''(0)=0\Rightarrow f'\downarrow[0,+\infty)$ και για

$x>0\overset{f'\downarrow}{\Leftrightarrow}f'(x)<f'(0)=0\Rightarrow f\downarrow[0,+\infty)$. Επειδή η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $\mathbb{R}$.

β) Επειδή $f'\uparrow$ στο $(-\infty,0]$ και $\downarrow$ στο $[0,+\infty)$ τότε f κυρτή στο $(-\infty,0]$ και κοίλη στο $[0,+\infty)$ οπότε το σημείο $(0,f(0))$ είναι σημείο καμπής.

5.777. **α)** Εστω $f'(3)=0$ τότε αφού f κυρτή θα είναι $f'\uparrow$ στο $\mathbb{R}$ άρα και 1–1. Οπότε θα είναι $f'(2)=f'(3)=0$ άρα $2=3$ (άτοπο) αφού f' είναι 1–1

β) Επειδή η f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ θα είναι η $f\circ f$ παραγωγίσιμη με $(f\circ f)'(x)=f'(f(x))f'(x)$. Αφού η $f\circ f$ έχει τοπ. μέγιστο στο $x_0=3$ τότε $(f\circ f)'(3)=0$ δηλαδή: $f'(f(3))f'(3)=0$ οπότε $f'(f(3))=0\Leftrightarrow$

$f'(f(3))=f'(2)\overset{f'1-1}{\Leftrightarrow}f(3)=2$.

5.778. Εστω ότι τα σημεία $A(x_1,f(x_1))$, $B(x_2,f(x_2))$ και $\Gamma(x_3,f(x_3))$ της C_f με $x_1<x_2<x_3$ είναι συνευθειακά. Τότε:

$AB \parallel B\Gamma \Leftrightarrow \lambda_{AB} = \lambda_{B\Gamma} \Leftrightarrow \dfrac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1} = \dfrac{f(x_3)-f(x_2)}{x_3-x_2}$ (1).

Η f είναι συνεχής στα διαστήματα $[x_1,x_2]$ και $[x_2,x_3]$ και παραγωγίσιμη στα (x_1,x_2) και (x_2,x_3), οπότε λόγω του θεωρήματος μέσης τιμής υπάρχουν $\xi_1 \in (x_1,x_2)$ και $\xi_2 \in (x_2,x_3)$ τέτοια, ώστε: $f'(\xi_1) = \dfrac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}$ και $f'(\xi_2) = \dfrac{f(x_3)-f(x_2)}{x_3-x_2}$. Απο τη σχέση (1) είναι $f'(\xi_1) = f'(\xi_2)$.

Επειδή η f είναι παραγωγίσιμη και κυρτή στο $[\alpha,\beta]$, η f' είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα αυτό, οπότε είναι και 1-1. Είναι: $f'(\xi_1) = f'(\xi_2) \overset{1-1}{\Leftrightarrow} \xi_1 = \xi_2$ που είναι άτοπο.

Οπότε δεν υπάρχουν τρία διαφορετικά σημεία της C_f που να είναι συνευθειακά.

5.779. **α)** Εστω $g(x) = f(x) - \lambda x - \beta$, $x \in \mathbb{R}$. Είναι $g'(x) = f'(x) - \lambda$ και $g'(\rho) = f'(\rho) - \lambda = 0$.

Επειδή η f είναι κυρτή, η f' είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$ άρα και η g' είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$.

Για $x < \rho$ είναι $g'(x) < g'(\rho) = 0$ (1), οπότε η g είναι γνησίως φθίνουσα στο $(-\infty, \rho]$. Για $x > \rho$ είναι $g'(x) > g'(\rho) = 0$ (2), οπότε η g είναι γνησίως αύξουσα στο $[\rho, +\infty)$. Άρα η g παρουσιάζει ολικό ελάχιστο στο $x = \rho$, δηλαδή $g(x) \ge g(\rho)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Επειδή $g(\rho) = f(\rho) - \lambda\rho - \beta > 0$ είναι $g(x) \ge g(\rho) > 0$ άρα $f(x) - \lambda x - \beta > 0 \Leftrightarrow$ $f(x) > \lambda x + \beta$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ η C_f και η ευθεία $y = \lambda x + \beta$ δεν έχουν κοινά σημεία.

β) Αν $f(\rho) < \lambda\rho + \beta$ τότε $g(\rho) = f(\rho) - \lambda\rho - \beta < 0$.

Λόγω του θεωρήματος μέσης τιμής υπάρχει $\xi_1 \in (x, \rho)$ τέτοιο, ώστε:

$$g'(\xi_1) = \frac{g(\rho)-g(x)}{\rho - x} \Leftrightarrow g(x) = -g'(\xi_1)(\rho - x) + g(\rho).$$

Είναι $g'(\xi_1) < g'(\rho) = 0$, οπότε υπάρχει $k < 0$ για το οποίο να ισχύει $g'(\xi_1) < k$.

Τότε $-g'(\xi_1)(\rho - x) + g(\rho) > -k(\rho - x) + g(\rho)$ και επειδή

$\lim\limits_{x\to-\infty}\left(-k(\rho - x) + g(\rho)\right) = +\infty$, είναι και $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x) = \lim\limits_{x\to-\infty}\left[-g'(\xi_1)(\rho - x) + g(\rho)\right] = +\infty$

Οπότε υπάρχει $\gamma \in (-\infty, \rho)$ τέτοιο, ώστε $g(\gamma) > 0$. Επειδή η g ικανοποιεί τις προϋποθέσεις του θεωρήματος Bolzano στο $[\gamma, \rho]$ υπάρχει $x_1 \in (\gamma, \rho)$ τέτοιο, ώστε $g(x_1) = 0$.

Όμοια εφαρμόζουμε το Θ.Μ.Τ στο $[\rho, x]$ και υπάρχει $\xi_2 \in (\rho, x)$ τέτοιο, ώστε

$$g'(\xi_2) = \frac{g(x)-g(\rho)}{x - \rho} \Leftrightarrow g(x) = g'(\xi_2)(x - \rho) + g(\rho)$$

Είναι $\xi_2 > \rho \overset{g' \uparrow}{\Leftrightarrow} g'(\xi_2) > g'(\rho) = 0$, οπότε υπάρχει $m > 0$ τέτοιο, ώστε $g'(\xi_2) > m$. Τότε $g'(\xi_2)(x - \rho) + g(\rho) > m(x - \rho) + g(\rho)$

Επειδή $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[m(x - \rho) + g(\rho)\right] = \lim\limits_{x\to+\infty}(mx) = +\infty$ είναι και

$\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = \lim\limits_{x\to+\infty}\left[g'(\xi_2)(x - \rho) + g(\rho)\right] = +\infty$

Οπότε υπάρχει $\delta \in (\rho, \delta)$ τέτοιο, ώστε $g(\delta) > 0$. Επειδή η g ικανοποιεί τις προϋποθέσεις του θεωρήματος Bolzano στο $[\rho, \delta]$ υπάρχει $x_2 \in (\rho, \delta)$ τέτοιο, ώστε $g(x_2) = 0$. Άρα η εξίσωση $g(x) = 0 \Leftrightarrow f(x) = \lambda x + \beta$ έχει τουλάχιστον δύο ρίζες στο $\mathbb{R}$.

5.780. **α)** Αρκεί να αποδείξουμε ότι η εξίσωση $f(x) = g(x)$ έχει το πολύ δύο ρίζες.

Εστω $h(x) = f(x) - g(x)$ και έστω ότι η h έχει τρείς ρίζες τις ρ_1, ρ_2, ρ_3 με $\rho_1 < \rho_2 < \rho_3$.

Τότε επειδή η h είναι συνεχής και παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$, λόγω του θεωρήματος Rolle, υπάρχουν $\xi_1 \in (\rho_1, \rho_2)$ και $\xi_2 \in (\rho_2, \rho_3)$ τέτοια, ώστε: $h'(\xi_1) = 0$ και $h'(\xi_2) = 0$. Δηλαδή η h' έχει τουλάχιστον δύο ρίζες (1). Όμως $h'(x) = f'(x) - g'(x)$. Επειδή η f είναι
παραγωγίσιμη και κυρτή στο $\mathbb{R}$ η f' είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$, ενώ επειδή η g είναι κοίλη στο $\mathbb{R}$ η g' είναι γνησίως φθίνουσα στο $\mathbb{R}$. Οπότε για κάθε $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ με $x_1 < x_2$ είναι

$$\begin{cases} f'(x_1) < f'(x_2) \\ g'(x_1) > g'(x_2) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} f'(x_1) < f'(x_2) \\ -g'(x_1) < -g'(x_2) \end{cases}$$ άρα και $f'(x_1) - g'(x_1) < f'(x_2) - g'(x_2) \Leftrightarrow$

$h'(x_1) < h'(x_2)$, άρα η h' είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$, οπότε η εξίσωση $h'(x) = 0$ έχει το πολύ μια ρίζα στο $\mathbb{R}$ και η σχέση (1) είναι άτοπη. Άρα η h έχει το πολύ δύο ρίζες στο $\mathbb{R}$.

β) Εστω ότι οι C_f, C_g έχουν κοινό σημείο το $M(x_0, y_0)$ τότε: $f(x_0) = g(x_0) = y_0$.

Επειδή οι C_f, C_g έχουν κοινή εφαπτομένη στο Μ, ισχύει ότι: $f'(x_0) = g'(x_0)$.

Τότε: $h'(x_0) = f'(x_0) - g'(x_0) = 0$ και επειδή η h' είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$, το x_0 είναι μοναδικό.

5.781. Επειδή η f είναι παραγωγίσιμη και κοίλη στο $[\alpha, \beta]$ η f' είναι γνησίως φθίνουσα.

Από το Θ.Μ.Τ. για την f, υπάρχει $\xi \in \left(\frac{\alpha+\beta}{2}, \beta\right)$ τέτοιο, ώστε

$$f'(\xi) = \frac{f(\beta) - f\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)}{\beta - \frac{\alpha+\beta}{2}} = \frac{f(\beta)}{\frac{\beta-\alpha}{2}} = \frac{2f(\beta)}{\beta-\alpha}.$$

Είναι $\alpha < \frac{\alpha+\beta}{2} < \xi < \beta \overset{f' \downarrow}{\Rightarrow} f'(\alpha) > f'(\xi) > f'(\beta) \Leftrightarrow f'(\beta) < \frac{2f(\beta)}{\beta-\alpha} < f'(\alpha) \Leftrightarrow$

$f(\beta)(\beta-\alpha) < 2f(\beta) < f'(\alpha)(\beta-\alpha)$.

5.782. **α)** Θεωρούμε τη συνάρτηση $h(x) = \begin{cases} f(x) - \frac{\ell_2 - \ell_1}{\beta - \alpha}(x - \alpha) & ,\alpha < x < \beta \\ \ell_1 & ,\alpha\nu\ x = \alpha \text{ ή } x = \beta \end{cases}$

Επειδή $\lim_{x\to\alpha} h(x) = \lim_{x\to\beta} h(x) = h(\alpha) = h(\beta) = \ell_1$ η h είναι συνεχής στα α,β.

Επειδή η h επιπλέον είναι συνεχής στο (α,β) ως πράξεις συνεχών συναρτήσεων, είναι συνεχής και στο [α,β]. Η h είναι παραγωγίσιμη στο (α,β) με

$h'(x) = f'(x) - \frac{\ell_2 - \ell_1}{\beta - \alpha}$ και $h(\alpha) = h(\beta) = \ell_1$, οπότε λόγω του θεωρήματος

Rolle υπάρχει $\rho \in (\alpha,\beta)$ τέτοιο, ώστε $h'(\rho)=0 \Leftrightarrow f'(\rho)=\dfrac{\ell_2-\ell_1}{\beta-\alpha}$

β) Αν $\ell_1=\ell_2$ τότε $f'(\rho)=0$. Επειδή η f είναι κυρτή η f' είναι γνησίως αύξουσα στο (α,β), οπότε για κάθε $\alpha<x<\rho$ είναι $f'(x)<f'(\rho)=0$ άρα η f είναι γνησίως φθίνουσα στο (α,ρ) και για κάθε $\rho<x<\beta$ είναι $f'(x)>f'(\rho)=0$ άρα η f είναι γνησίως αύξουσα στο (ρ,β). Επομένως η f παρουσιάζει ολικό ελάχιστο στο ρ.

5.783. α) Επειδή $f(\alpha)=f(\beta)=0$ και η f είναι συνεχής στο $[\alpha,\beta]$ και παραγωγίσιμη στο (α,β) λόγω του θ. Rolle υπάρχει $\xi\in(\alpha,\beta)$ τέτοιο, ώστε $f'(\xi)=0$.

Επειδή η f είναι κυρτή, η f' είναι γνησίως αύξουσα, οπότε:

$\alpha<\xi<\beta \Leftrightarrow f'(\alpha)<f'(\xi)<f'(\beta)\Leftrightarrow f'(\alpha)<0<f'(\beta)$, άρα $f'(\alpha)f'(\beta)<0$.

β) Για κάθε $\alpha<x<\xi$, επειδή η f' είναι γνησίως αύξουσα, είναι:

$f'(\alpha)<f'(x)<f'(\xi)\Leftrightarrow f'(\alpha)<f'(x)<0$, άρα η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $[\alpha,\xi]$.

Για κάθε $\alpha<x\le\xi$,είναι $f(\alpha)>f(x)\ge f(\xi)$, δηλαδή $f(\chi)<f(\alpha)=0$.

Για κάθε $\xi<\chi<\beta$, επειδή η f' είναι γνησίως αύξουσα, είναι:

$f'(\xi)<f'(x)<f'(\beta)\Leftrightarrow 0<f'(x)<f'(\beta)$, άρα η f είναι γνησίως αύξουσα στο $[\xi,\beta]$.

Για κάθε $\xi<x<\beta$ είναι $f(\xi)<f(x)<f(\beta)=0$.

Άρα $f(x)<0$ για κάθε $x\in(\alpha,\beta)$.

γ) Εστω ότι $f(x)<f'(x)$ για κάθε $x\in(\alpha,\beta)$. Τότε

$f'(x)-f(x)>0\Leftrightarrow e^{-x}f'(x)-e^{-x}f(x)>0$, άρα $\left[e^{-x}f(x)\right]'>0$.

Εστω $g(x)=e^{-x}f(x),\ x\in[\alpha,\beta]$. Είναι $g'(x)=\left[e^{-x}f(x)\right]'>0$, άρα η g είναι γνησίως αύξουσα στο $[\alpha,\beta]$.

Επειδή $\alpha<\beta$, είναι $g(\alpha)<g(\beta)\Leftrightarrow e^{-\alpha}f(\alpha)<e^{-\beta}f(\beta)\Leftrightarrow 0<0$ που είναι αδύνατο.

Άρα υπάρχει $x_0\in(\alpha,\beta)$ τέτοιο, ώστε $f(x_0)\ge f'(x_0)$.

5.784. α) Για $x=1$ είναι $f(1)\ge\dfrac{3f(1)+f(3)}{4}\Leftrightarrow f(1)\ge f(3)$ (1) και

για $x=3$ είναι $f(3)\ge\dfrac{3f(1)+f(3)}{4}\Leftrightarrow f(3)\ge f(1)$ (2). Από τις (1),(2), είναι $f(1)=f(3)$.

β) $f(x)\ge\dfrac{3f(1)+f(3)}{4}\Leftrightarrow f(x)\ge\dfrac{3f(3)+f(3)}{4}\Leftrightarrow f(x)\ge f(3)$. Άρα η f έχει στο 3, ελάχιστο. Από το Θ.Fermat είναι $f'(3)=0$.

γ) Από το Θ.Rolle υπάρχει $x_1\in(1,3): f'(x_1)=0$. Άρα η f' έχει ρίζες τα x_1 και 3.

Από το Θ.Rolle υπάρχει $x_2\in(x_1,3): f''(x_2)=0$.

δ) Από το ΘΜΤ υπάρχει $\xi\in(3,4)$: $f''(\xi)=\dfrac{f'(4)-f'(3)}{4-3}=f'(4)$.

$|f''(\xi)|\le 2\Leftrightarrow |f'(4)|\le 2$

5.785. **α)** Η συνάρτηση g είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με

$g'(x)=f'(x)-3=\dfrac{3\cdot 2^x+1}{2^x+1}-4=\dfrac{-2^x-3}{2^x+1}<0$, άρα η g είναι γνησίως φθίνουσα στο $\mathbb{R}$.

β) Επειδή η g είναι γνησίως φθίνουσα στο $\mathbb{R}$, η εξίσωση $g(x)=0 \Leftrightarrow f(x)-3x=0 \Leftrightarrow f(x)=3x$ έχει το πολύ μία ρίζα.

γ) Είναι $f''(x)=\left(\dfrac{3\cdot 2^x+1}{2^x+1}\right)'=\dfrac{2\cdot 2^x \ln 2}{\left(2^x+1\right)^2}>0$, $x\in\mathbb{R}$, άρα η f είναι κυρτή στο $\mathbb{R}$.

δ) Για την f εφαρμόζεται το θεώρημα μέσης τιμής στο διάστημα $[x,x+1]$, $x\in\mathbb{R}$, οπότε υπάρχει $\xi\in(x,x+1)$ τέτοιο, ώστε: $f'(\xi)=\dfrac{f(x+1)-f(x)}{x+1-x}=f(x+1)-f(x)$.

Είναι $x<\xi<x+1$ και επειδή η f είναι κυρτή, η f' είναι γνησίως αύξουσα, οπότε:

$f'(x)<f'(\xi)<f'(x+1) \Leftrightarrow \dfrac{3\cdot 2^x+1}{2^x+1}<f(x+1)-f(x)<\dfrac{3\cdot 2^{x+1}+1}{2^{x+1}+1}$. Είναι

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{3\cdot 2^x+1}{2^x+1}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\cancel{2^x}\left(3+\frac{1}{2^x}\right)}{\cancel{2^x}\left(1+\frac{1}{2^x}\right)}=3 \text{ και } \lim_{x\to+\infty}\frac{3\cdot 2^{x+1}+1}{2^{x+1}+1}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\cancel{2^{x+1}}\left(3+\frac{1}{2^{x+1}}\right)}{\cancel{2^{x+1}}\left(1+\frac{1}{2^{x+1}}\right)}=3,$$

οπότε λόγω του κριτηρίου παρεμβολής είναι και $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[f(x+1)-f(x)\right]=3$

5.786. **α)** Είναι $f'(x)=g(x)>0$ άρα η f είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$ και δεν έχει ακρότατα. Επειδή $f(-x)f(x)\le 0$ για κάθε $x\ne 0$ και η f είναι συνεχής και παραγωγίσιμη στο 0, ισχύει:

$\lim\limits_{x\to 0}f(-x)f(x)\le 0 \Leftrightarrow f(0)f(0)\le 0 \Leftrightarrow f^2(0)\le 0 \Leftrightarrow f(0)=0$. Είναι

$g'(0)=f(0)=0$ οπότε για $x<0$ είναι $f(x)<f(0)\Leftrightarrow g'(x)<0$ και g γνησίως φθίνουσα στο $(-\infty,0]$, ενώ για $x>0$ είναι $f(x)>f(0)\Leftrightarrow g'(x)>0$ και g γνησίως αύξουσα στο $[0,+\infty)$. Άρα η g παρουσιάζει ολικό ελάχιστο το 0.

β) Είναι $g''(x)=f'(x)=g(x)>0$, άρα η g είναι κυρτή στο $\mathbb{R}$. Επίσης $f''(x)=g'(x)$ και αν είναι $x<0$ ισχύει $f''(x)=g'(x)<0$, οπότε f κοίλη στο $(-\infty,0]$, ενώ για $x>0$ ισχύει $f''(x)=g'(x)>0$, οπότε f κυρτή στο $[0,+\infty)$.Η f έχει σημείο καμπής το O(0,0).

γ) Εστω $h(x)=f(x)-xg(0)$, $x\in[0,+\infty)$.

Είναι $h'(x)=f'(x)-g(0)=g(x)-g(0)>0$ για $x>0$, οπότε η h είναι γνησίως αύξουσα στο $[0,+\infty)$. Για κάθε $x>0$ είναι

$h(x)>h(0)\Leftrightarrow f(x)-xg(0)>0\Leftrightarrow f(x)>xg(0)$.

5.787. Για $x=0$ είναι $4g(0)-g^2(0)\ge 4\Leftrightarrow g^2(0)-4g(0)+4\le 0\Leftrightarrow \left(g(0)-2\right)^2\le 0\Leftrightarrow$ $g(0)-2=0\Leftrightarrow g(0)=2$.

Για $x=1$ είναι $4g(1)-g^2(1)\ge 4\Leftrightarrow g^2(1)-4g(1)+4\le 0\Leftrightarrow \left(g(1)-2\right)^2\le 0\Leftrightarrow$

$g(1)-2=0 \Leftrightarrow g(1)=2$ και για $x=-1$ είναι

$$4g(-1)-g^2(-1)\ge 4 \Leftrightarrow g^2(-1)-4g(-1)+4\le 0 \Leftrightarrow (g(-1)-2)^2\le 0 \Leftrightarrow g(-1)=2$$

Επειδή $g(-1)=g(0)=g(1)=2$ και η g είναι συνεχής στα διαστήματα $[-1,0]$ και $[0,1]$ και παραγωγίσιμη στα $(-1,0)$ και $(0,1)$, λόγω του θεωρήματος Rolle, υπάρχουν $x_1\in(-1,0)$ και $x_2\in(0,1)$ τέτοια, ώστε: $g'(x_1)=0$ και $g'(x_2)=0$.

Είναι $4g(x^5)-g^2(x)\ge 4 \Leftrightarrow 4g(x^5)-g^2(x)-4\ge 0$ (1).

Εστω $f(x)=4g(x^5)-g^2(x)-4$, $x\in\mathbb{R}$. Είναι $f(-1)=0$, $f(0)=0$ και $f(1)=0$.

Η σχέση (1) γράφεται: $f(x)\ge f(-1)$ και $f(x)\ge f(0)$ και $f(x)\ge f(1)$, δηλαδή η f παρουσιάζει ελάχιστο στα -1, 0 ,1.

Επειδή η f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με $f'(x)=20x^4g'(x^5)-2g(x)g'(x)$, λόγω του θεωρήματος Fermat ισχύει: $\begin{cases} f'(-1)=0\\ f'(0)=0\\ f'(1)=0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 20g'(-1)-2g(-1)g'(-1)=0\\ -2g(0)g'(0)=0\\ 20g'(1)-2g(1)g'(1)=0\end{cases} \Leftrightarrow$

$$\begin{cases} 20g'(-1)-4g'(-1)=0\\ -4g'(0)=0\\ 20g'(1)-4g'(1)=0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} g'(-1)=0\\ g'(0)=0\\ g'(1)=0\end{cases}.$$

Είναι $g'(-1)=g'(x_1)=g'(0)=g'(x_2)=g'(1)=0$ και η g' είναι συνεχής σε καθένα από τα διαστήματα $[-1,x_1],[x_1,0],[0,x_2],[x_2,1]$ και παραγωγίσιμη στα $(-1,x_1),(x_1,0),(0,x_2),(x_2,1)$,

οπότε λόγω του θεωρήματος Rolle η εξίσωση $g''(x)=0$ έχει τουλάχιστον μθια ρίζα σε καθένα από τα διαστήματα $(-1,x_1),(x_1,0),(0,x_2),(x_2,1)$. Δηλαδή η g'' έχει τουλάχιστον 4 ρίζες, οπότε η g έχει τουλάχιστον 4 πιθανά σημεία καμπής.

5.788. **α)** Επειδή η f είναι κυρτή η f' είναι $\uparrow\mathbb{R}$. Επειδή f έχει ακρότατο στο $x_0=0$ με τιμή 0 είναι $f(0)=f'(0)=0$.

Από το Θ.Μ.Τ. υπάρχει $x_1\in(-2,0)$ και $x_2\in(0,2)$ τέτοια, ώστε:

$$f'(x_1)=\frac{f(0)-f(-2)}{2}=-\frac{f(-2)}{2} \text{ και } f'(x_2)=\frac{f(2)-f(0)}{2}=\frac{f(2)}{2}.$$

$$x_1<x_2 \overset{f'\uparrow}{\Leftrightarrow} f'(x_1)<f'(x_2) \Leftrightarrow -\frac{f(-2)}{2}<\frac{f(2)}{2} \Leftrightarrow f(-2)+f(2)>0.$$

β) Από το Θ.Μ.Τ. για την f' υπάρχουν $x_3\in(-2,0)$ και $x_4\in(0,2)$ τέτοια, ώστε:

$$f''(x_3)=\frac{f'(0)-f'(-2)}{2}=-\frac{f'(-2)}{2} \text{ και } f''(x_4)=\frac{f'(2)-f'(0)}{2}=\frac{f'(0)}{2}.$$

Επειδή η f' είναι κυρτή, η f'' είναι $\uparrow\mathbb{R}$.

Είναι $x_3<x_4 \overset{f''\uparrow}{\Leftrightarrow} f''(x_3)<f''(x_4) \Leftrightarrow -\dfrac{f'(-2)}{2}<\dfrac{f'(2)}{2} \Leftrightarrow f'(-2)+f'(2)>0$

γ) Από το Θ.Μ.Τ. υπάρχει $x_5\in(0,1)$: $f''(x_5)=f'(1)-f'(0)=f'(1)$

$$0<x_5<1 \overset{f''\uparrow}{\Rightarrow} f''(0)<f''(x_5)=f'(1)$$

δ) Εστω $g(x)=f'(x)-x^2+4,\ x\in[-2,2]$. Είναι $g(-2)=f'(-2)$ και $g(2)=f(2)$

$$-2<0<2 \overset{f'\uparrow}{\Leftrightarrow} f'(-2)<f'(0)<f'(2)\Leftrightarrow f'(-2)<0<f'(2)\Leftrightarrow g(-2)<0<g(2)$$

και επειδή η g είναι συνεχής, από το Θ.Β υπάρχει $x_0\in(-2,2)$ τέτοιο, ώστε

$g(x_0)=0\Leftrightarrow f'(x_0)=x_0^2-4$

ε) Από το ΘΜΤ για την f' υπάρχουν $\xi_1\in(-2,-1)$, $\xi_2\in(-1,0)$, $\xi_3\in(0,1)$ και $\xi_4\in(1,2)$ τέτοια, ώστε $f''(\xi_1)=f'(-1)-f'(-2)$, $f''(\xi_2)=f'(0)-f'(-1)$, $f''(\xi_3)=f'(1)-f'(0)$ και $f''(\xi_4)=f'(2)-f'(1)$. Με πρόσθεση κατά μέλη, έχουμε:

$f''(\xi_1)+f''(\xi_2)+f''(\xi_3)+f''(\xi_4)=f'(2)-f'(-2)>0$

5.789. **α)** Αν $\gamma=\delta$ τότε από τη σχέση $f(\gamma)f(\delta)<0$ έχουμε $f^2(\gamma)<0$ που είναι αδύνατο.

Άρα $\gamma\neq\delta$. Έστω $\gamma<\delta$.

Η συνάρτηση f είναι στο $[\gamma,\delta]$ και $f(\gamma)f(\delta)<0$ άρα λόγω του Θ. Bolzano υπάρχει $x_0\in(\gamma,\delta)\subseteq(\alpha,\beta)$ τέτοιο, ώστε : $f(x_0)=0$.

β) Η συνάρτηση f ικανοποιεί τις προϋποθέσεις του Θ. Rolle σε καθένα από τα διαστήματα $[\alpha,x_0]$ και $[x_0,\beta]$, οπότε υπάρχουν $x_1\in(\alpha,x_0)$ και $x_2\in(x_0,\beta)$ τέτοια, ώστε $f'(x_1)=0=f'(x_2)$ (1).

Λόγω Θ.Μ.Τ για την f στο $[\alpha,\gamma]$ υπάρχει $x_3\in(\alpha,\gamma)$ τέτοιο, ώστε :

$$f'(x_3)=\frac{f(\gamma)-f(\alpha)}{\gamma-\alpha}=\frac{f(\gamma)}{\gamma-\alpha}.$$

Επειδή $f(\gamma)f(\delta)<0$ οι τιμές $f(\gamma)$, $f(\delta)$ είναι ετερόσημες.

Εστω $f(\gamma)<0$ και $f(\delta)>0$ τότε $f'(x_3)<0$.

Λόγω Θ.Μ.Τ για την f στο $[\gamma,x_0]$ υπάρχει $x_4\in(\gamma,x_0)$ τέτοιο, ώστε :

$$f'(x_4)=\frac{f(x_0)-f(\gamma)}{x_0-\gamma}=\frac{-f(\gamma)}{x_0-\gamma}>0.$$

Λόγω Θ.Μ.Τ για την f στο $[x_0,\delta]$ υπάρχει $x_5\in(x_0,\delta)$ τέτοιο, ώστε :

$$f'(x_5)=\frac{f(\delta)-f(x_0)}{\delta-x_0}=\frac{f(\delta)}{\delta-x_0}>0.$$

Λόγω Θ.Μ.Τ για την f στο $[\delta,\beta]$ υπάρχει $x_6\in(\delta,\beta)$ τέτοιο, ώστε :

$$f'(x_6)=\frac{f(\beta)-f(\delta)}{\beta-\delta}=\frac{-f(\delta)}{\beta-\delta}<0.$$

Λόγω Θ.Μ.Τ για την f' στο $[x_3,x_4]$ υπάρχει $\xi_2\in(x_3,x_4)$ τέτοιο, ώστε :

$$f''(\xi_2)=\frac{f'(x_4)-f'(x_3)}{x_4-x_3}>0.$$

Λόγω Θ.Μ.Τ για την f' στο $[x_5,x_6]$ υπάρχει $\xi_1\in(x_5,x_6)$ τέτοιο, ώστε :

$$f''(\xi_1)=\frac{f'(x_6)-f'(x_5)}{x_6-x_5}<0.$$

γ) Επειδή $f''(\xi_1)\cdot f''(\xi_2)<0$ και η f'' είναι συνεχής στο $[\xi_1,\xi_2]$, λόγω του Θ. Bolzano υπάρχει $\xi\in(\xi_1,\xi_2)\subseteq(\alpha,\beta)$ τέτοιο, ώστε: $f''(\xi)=0$. Επομένως η f έχει τουλάχιστον ένα πιθανό σημείο καμπής.

5.790. α) $\begin{cases} f\left(\dfrac{1}{e}\right)=0 \\ f\left(e^2\right)=\dfrac{3}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -\kappa-\mu=0 \\ 2\kappa+\dfrac{\mu}{2}=\dfrac{3}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \kappa=-\mu \\ -\dfrac{3\mu}{2}=\dfrac{3}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \kappa=1 \\ \mu=-1 \end{cases}$

β) $f'(x)=\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{x\ln^2 x}$, $f''(x)=-\dfrac{1}{x^2}-\dfrac{\left(x\ln^2 x\right)'}{\left(x\ln^2 x\right)^2}=-\dfrac{(\ln x+1)\left(\ln^2 x-\ln x+2\right)}{x^2\ln^3 x}$

Η f είναι κοίλη στα $\left(0,\dfrac{1}{e}\right]$ και $(1,+\infty)$ και κυρτή στο $\left[\dfrac{1}{e},1\right)$.

γ) $f'(x)=\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{x\ln^2 x}>0 \Rightarrow f\uparrow$ σε καθένα από τα $(0,1)$ και $(1,+\infty)$.

Είναι $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=-\infty$, $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x)=+\infty$, $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x)=-\infty$, $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x)=+\infty$,

Είναι $f\left((0,1)\right)=\mathbb{R}$ και $\lambda\in\mathbb{R}$, άρα η $f(x)=\lambda$ έχει μοναδική ρίζα $\rho_1\in(0,1)$.

Είναι $f\left((1,+\infty)\right)=\mathbb{R}$ και $\lambda\in\mathbb{R}$, άρα η $f(x)=\lambda$ έχει μοναδική ρίζα $\rho_2\in(1,+\infty)$.

$f(\rho_1)=\lambda \Leftrightarrow \ln\rho_1-\dfrac{1}{\ln\rho_1}=\lambda \Leftrightarrow \ln^2\rho_1-\lambda\ln\rho_1-1=0$ και

$f(\rho_2)=\lambda \Leftrightarrow \ln\rho_2-\dfrac{1}{\ln\rho_2}=\lambda \Leftrightarrow \ln^2\rho_2-\lambda\ln\rho_2-1=0$.

Τα $\ln\rho_1,\ln\rho_2$ είναι ρίζες της εξίσωσης $x^2-\lambda x-1=0$, άρα

$\ln\rho_1+\ln\rho_2=\dfrac{\lambda}{1} \Leftrightarrow \ln(\rho_1\rho_2)=\lambda \Leftrightarrow \rho_1\rho_2=e^{\lambda}$

δ) $f(x)=0 \Leftrightarrow x=e$ ή $x=\dfrac{1}{e}$

$y-f(e)=f'(e)(x-e) \Leftrightarrow y=\dfrac{2}{e}x-2$ και $y-f\left(\dfrac{1}{e}\right)=f'\left(\dfrac{1}{e}\right)\left(x-\dfrac{1}{e}\right) \Leftrightarrow y=-\dfrac{2}{e}x-2$

$\dfrac{2}{e}x-2=-\dfrac{2}{e}x-2 \Leftrightarrow x=0$, δηλαδή οι εφαπτόμενες τέμνονται στον y΄y.

5.791. α) $f(x)\geq 1 \Leftrightarrow f(x)\geq f(0)$. Η f έχει ελάχιστο στο 0. Επειδή η f είναι παραγωγίσιμη στο $(-1,+\infty)$ με $f'(x)=\alpha^x\ln\alpha-\dfrac{1}{x+1}$, από το Θ.Fermat είναι:

$f'(0)=0 \Leftrightarrow \ln\alpha=1 \Leftrightarrow \alpha=e$

β) i. $f'(x)=e^x-\dfrac{1}{x+1}$, $f''(x)=e^x+\dfrac{1}{(x+1)^2}>0 \Rightarrow f$ κυρτή.

ii. $f''(x)>0 \Rightarrow f'\uparrow(-1,+\infty)$. Για κάθε $x\in(-1,0)$ είναι $f'(x)<f'(0)=0 \Rightarrow f\downarrow(-1,0]$

και για $x>0$ είναι $f'(x)>f'(0)=0 \Rightarrow f\uparrow[0,+\infty)$.

iii. Εστω $g(x)=(x-2)\left(f(\beta)-1\right)+(x-1)\left(f(\gamma)-1\right)$, $x\in[1,2]$.

Αν $-1<\beta<0 \overset{f\downarrow}{\Rightarrow} f(\beta)>f(0)=1$ και όμοια $f(\gamma)>1$

Αν $\beta > 0 \overset{f\uparrow}{\Leftrightarrow} f(\beta) > f(0) = 1$ και όμοια $f(\gamma) > 1$

$g(1) = -(f(\beta)-1) < 0$, $g(2) = (f(\gamma)-1) > 0$ και επειδή η g είναι συνεχής στο $[1,2]$

από το Θ.Β η εξίσωση $g(x) = 0 \Leftrightarrow \dfrac{f(\beta)-1}{x-1} + \dfrac{f(\gamma)-1}{x-2} = 0$ έχει τουλάχιστον μία ρίζα

στο $(1,2)$.

5.792. α) $\varphi'(x) = f''(x) - f'(x) < 0$ άρα $\varphi\downarrow[0,+\infty)$

Για $x > 0 \Rightarrow \varphi(x) < \varphi(0) \Rightarrow f'(x) - f(x) < 0 \Rightarrow f'(x) < f(x)$ (1)

$$g'(x) = \frac{f'(x)e^x - f(x)e^x}{(e^x)^2} = \frac{f'(x)-f(x)}{e^x} < 0 \Rightarrow g\downarrow[0,+\infty)$$

β) i) Εστω $h(x) = f^2(x)$, $h'(x) = 2f(x)f'(x)$, $h''(x) = 2(f'(x))^2 + 2f(x)f''(x)$

Για $x > 0 \overset{g\downarrow}{\Leftrightarrow} g(x) < g(0) \Leftrightarrow \dfrac{f(x)}{e^x} < 0 \Rightarrow f(x) < 0$ (2)

Από (1),(2) $f'(x) < f(x) < 0$ και αφού $f''(x) < f'(x)$ τότε $f''(x) < 0$

Άρα $f(x)f''(x) > 0$ και $h''(x) > 0 \Rightarrow h$ κυρτή.

ii) Θ.Μ.Τ. για την h στα $[0,1]$ και $[1,3]$, υπάρχουν $\xi_1 \in (0,1)$ και $\xi_2 \in (1,3)$:

$$h'(\xi_1) = \frac{f^2(1)-f^2(0)}{1-0},\ h'(\xi_2) = \frac{f^2(3)-f^2(1)}{3-1}$$

$$\xi_1 < \xi_2 \overset{h'\uparrow}{\Leftrightarrow} h'(\xi_1) < h'(\xi_2) \Leftrightarrow f^2(1) < \frac{f^2(3)-f^2(1)}{2} \Leftrightarrow 3f^2(1) < f^2(3)$$

5.793. α) (1) $f^3(x) + 4f(x) = x \Leftrightarrow f(x)\left[f^2(x)+4\right] = x \Leftrightarrow f(x) = \dfrac{x}{f^2(x)+4}$

Αν $x < 0$ τότε $f(x) < 0$ και αν $x > 0$ τότε $f(x) > 0$.

β) Είναι $3f^2(x)f'(x) + 4f'(x) = 1 \Leftrightarrow f'(x) = \dfrac{1}{3f^2(x)+4} > 0 \Rightarrow f\uparrow \mathbb{R}$

γ) Αφού $f\uparrow$ είναι και 1–1 οπότε η f αντιστρέφεται. $f(x) = y \Leftrightarrow ...$ $f^{-1}(x) = x^3 + 4x$

δ) $f''(x) = -\dfrac{6f(x)f'(x)}{\left(3f^2(x)+4\right)^2}$

x	$-\infty$	0	$+\infty$
f''	+		−
f	$\smile$		$\frown$

Σ.Κ. $(0,f(0)) \equiv (0,0)$

ε) Από το Θ.Μ.Τ. για την f στο $[0,\alpha]$, $\exists \xi_1 \in (0,\alpha): f'(\xi_1) = \dfrac{f(\alpha)-f(0)}{\alpha} = \dfrac{f(\alpha)}{\alpha}$

Από το Θ.Μ.Τ. για την f στο $[\alpha,\beta]$ $\exists \xi_2 \in (\alpha,\beta): f'(\xi_2) = \dfrac{f(\beta)-f(\alpha)}{\beta-\alpha}$

Για $x > 0$ είναι $f''(x) < 0 \Rightarrow f'\downarrow$ άρα: $\xi_1 < \xi_2 \Leftrightarrow f'(\xi_1) > f'(\xi_2)$ άρα

$$\frac{f(\alpha)}{\alpha} > \frac{f(\beta)-f(\alpha)}{\beta-\alpha} \Leftrightarrow f(\alpha)(\beta-\alpha) > \alpha\left[f(\beta)-f(\alpha)\right]$$

στ) i) $h'(x)=f'(x)-3=\dfrac{1}{3f^2(x)+4}-3=\dfrac{1-9f^2(x)-12}{3f^2(x)+4}=\dfrac{-9f^2(x)-11}{3f^2(x)+4}<0$ αρά $h\downarrow\mathbb{R}$

ii) $f\left(e^x-1\right)-3e^x+3>0 \Rightarrow h\left(e^x-1\right)>h(0) \Leftrightarrow e^x-1<0 \Leftrightarrow e^x<1 \Leftrightarrow x<0$

5.794. α) Είναι $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(x_0+2h)-f(x_0-h)}{h}=\lim\limits_{h\to 0}\left[2\dfrac{f(x_0+2h)-f(x_0)}{2h}+\dfrac{f(x_0-h)-f(x_0)}{-h}\right]=$

$$=2f'(x_0)+f'(x_0)=3f'(x_0)$$

οπότε $3f'(x_0)=-6x_0e^{f(x_0)}$

$\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(x_0+kh)-f(x_0)}{kh}\overset{kh=u}{\underset{u\to 0}{=}}\lim\limits_{u\to 0}\dfrac{f(x_0+u)-f(x_0)}{u}=f'(x_0)$

Άρα για κάθε $x\in\mathbb{R}$ είναι $f'(x)=-2xe^{f(x)} \Leftrightarrow -f'(x)e^{-f(x)}=2x$,

άρα$\left(e^{-f(x)}\right)'=\left(x^2\right)' \Leftrightarrow e^{-f(x)}=x^2+c$

Για $x=0$ είναι $c=1$άρα $e^{-f(x)}=x^2+1 \Leftrightarrow f(x)=-\ln\left(x^2+1\right)$, $x\in\mathbb{R}$

β) $f'(x)=\dfrac{-2x}{x^2+1}\geq 0 \Leftrightarrow x\leq 0$. Για κάθε $x<0$ είναι $f'(x)>0 \Rightarrow f\uparrow(-\infty,0]$ και

για κάθε $x>0$ είναι $f'(x)<0 \Rightarrow f\downarrow[0,+\infty)$. Η f έχει μέγιστο το $f(0)=0$

γ) $f''(x)=\dfrac{2\left(x^2-1\right)}{\left(x^2+1\right)^2}$

x	$-\infty$ -1	1	$+\infty$
f''	$+$	$-$	$+$
f	$\cup$	$\cap$	$\cup$

Σ.Κ. τα $A(-1,-\ln 2)$ και $B(1,-\ln 2)$

δ) Εστω ότι τα Α,Β,Γ είναι συνευθειακά, τότε

$AB \parallel B\Gamma \Leftrightarrow \lambda_{AB}=\lambda_{B\Gamma} \Leftrightarrow \dfrac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}=\dfrac{f(x_3)-f(x_2)}{x_3-x_2}$ (1)

Από το ΘΜΤ για την f υπάρχει $\xi_1\in(x_1,x_2)$ και $\xi_2\in(x_2,x_3)$ τέτοια, ώστε:

$f'(\xi_1)=\dfrac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}$ και $f'(\xi_2)=\dfrac{f(x_3)-f(x_2)}{x_3-x_2}$. Επειδή $f''(x)>0$ για κάθε $x>1$, η f' είναι $\uparrow$, άρα και 1−1. Από την (1), είναι: $f'(\xi_1)=f'(\xi_2) \Leftrightarrow \xi_1=\xi_2$ που είναι άτοπο.

5.795. α) $\left(f(x)e^{f(x)}\right)'=(x)' \Rightarrow f'(x)e^{f(x)}+f(x)f'(x)e^{f(x)}=1 \Leftrightarrow f'(x)e^{f(x)}\left(1+f(x)\right)=1$ (1)

Για κάθε $x>0$ είναι $f(x)e^{f(x)}=x>0 \Leftrightarrow f(x)>0$, άρα από την (1) προκύπτει ότι $f'(x)>0 \Rightarrow f\uparrow[0,+\infty)$.

β) Αφού η f παραγωγίσιμη τότε και η $\dfrac{1}{e^{f(x)}+x}$ είναι παραγωγίσιμη άρα η f είναι δύο φορές παραγωγίσιμη με $f''(x)=-\dfrac{1}{\left(e^{f(x)}+x\right)^2}\left(f'(x)e^{f(x)}+1\right)<0$ άρα f κοίλη.

γ) Είναι $(1)\overset{x=0}{\Rightarrow} f'(0)=1$. Η εφαπτόμενη της C_f στο $x_0=0$ είναι η

$y-f(0)=f'(0)(x-0) \Leftrightarrow y=x$

Επειδή f είναι κοίλη βρίσκεται κάτω από την εφαπτομένη της, εκτός βέβαια από το σημείο επαφής, άρα: $f(x)\le x$ για κάθε $x\ge 0$.

δ) Εστω $g(x)=f(x)-xf'(x),\ x\ge 0$. Είναι $g'(x)=-xf''(x)>0 \Rightarrow g\uparrow[0,+\infty)$.

Για κάθε $x>0 \overset{g\uparrow}{\Leftrightarrow} g(x)>g(0)=0 \Leftrightarrow f(x)>xf'(x)$

5.796. **α) i.** $h'(x)=f'(x)+xf''(x)-f'(x)-\dfrac{1}{x^2}e^{\frac{1}{x}}=\dfrac{1}{x^2}e^{\frac{1}{x}}-\dfrac{1}{x^2}e^{\frac{1}{x}}=0$ άρα $h(x)=c$

ii) Για $x=2$ $h(2)=2f'(2)-f(2)+e^{\frac{1}{2}}=2\dfrac{\sqrt{e}}{2}-2\sqrt{e}+\sqrt{e}=0$

Άρα $xf'(x)-f(x)+e^{\frac{1}{x}}=0 \Leftrightarrow \dfrac{xf'(x)-f(x)}{x^2}=-\dfrac{1}{x^2}e^{\frac{1}{x}} \Leftrightarrow$

$$\left(\frac{f(x)}{x}\right)'=\left(e^{\frac{1}{x}}\right)' \Leftrightarrow \frac{f(x)}{x}=e^{\frac{1}{x}}+c_1 \overset{x=2}{\Rightarrow} c_1=0 \text{ άρα } f(x)=xe^{\frac{1}{x}},\ x>0.$$

β) $f'(x)=\dfrac{(x-1)e^{\frac{1}{x}}}{x}$

Για κάθε $x\in(0,1)$ είναι $f'(x)<0 \Rightarrow f\downarrow(0,1]$

Για κάθε $x>1$ είναι $f'(x)>0 \Rightarrow f\uparrow[1,+\infty)$

x	0		1		$+\infty$
f'		$-$		$+$	
f		↘		↗	

$f''(x)=\dfrac{1}{x^3}e^{\frac{1}{x}}>0$ άρα f κυρτή στο $(0,+\infty)$.

γ) Εφαπτόμενη στο $x_0=2: y-f(2)=f'(2)(x-2) \Rightarrow y=\dfrac{\sqrt{e}}{2}x+\sqrt{e}$

Επειδή η f είναι κυρτή ισχύει: $f(x)\ge y$, για κάθε $x>0$, άρα

$$xe^{\frac{1}{x}}\ge\frac{\sqrt{e}}{2}x+\sqrt{e} \Rightarrow 2xe^{\frac{1}{x}}\ge\sqrt{e}(x+2)$$

5.797. **α) i.** Αφού η f έχει σύνολο τιμών το $(0,+\infty)$ είναι $f(x)>0\ \forall x\in\mathbb{R}$ άρα και $f(-x)>0$ οπότε από τη σχέση $f'(x)f(-x)=4$ (1) θα είναι $f'(x)>0$ άρα $f\uparrow$

ii) Εστω $x_1,x_2\in\mathbb{R}$ με $x_1<x_2 \Leftrightarrow -x_1>-x_2 \overset{f\uparrow}{\Leftrightarrow} f(-x_1)>f(-x_2)$ $(2) \Leftrightarrow$

$$\frac{1}{f(-x_1)}<\frac{1}{f(-x_2)} \Leftrightarrow \frac{4}{f(-x_1)}<\frac{4}{f(-x_2)} \overset{(1)}{\Rightarrow} f'(x_1)<f'(x_2) \text{ οπότε η } f'\uparrow \text{ άρα η } f \text{ κυρτή}$$

β) Από τη (2) είναι για $x_1<x_2 \Rightarrow f(-x_1)>f(-x_2)$ άρα $f(-x)$ είναι $\downarrow$ στο $\mathbb{R}$.

γ) Στην (1) όπου x το $-x$ έχουμε:

$f'(-x)f(x)=4 \Leftrightarrow -f'(-x)f(x)=-4 \Rightarrow [f(-x)]'f(x)=-4$ (3)

Προσθέτουμε $(1),(3)$ οπότε

$$f'(x)f(-x)+[f'(-x)]'f(x)=0 \Rightarrow [f(-x)f(x)]'=0 \Leftrightarrow f(-x)f(x)=c \text{ για } x=0$$

$f(0)\cdot f(0)=c\Rightarrow 2\cdot 2=4\Rightarrow c=4$ άρα $f(-x)f(x)=4$ (4)

Από (1),(4) $f'(x)f(-x)=f(-x)f(x)\overset{f(-x)>0}{\Rightarrow} f'(x)=f(x)\Leftrightarrow f(x)=ce^x$ και για $x=0$ είναι $c=2$. Άρα $f(x)=2e^x$.

5.798. α) Εστω $g(x)=e^x-x-1$, $g'(x)=e^x-1\geq 0\Leftrightarrow x\geq 0$.

Για κάθε $x<0$ είναι $g'(x)<0\Rightarrow g\downarrow(-\infty,0]$ και για κάθε $x>0$ είναι $g'(x)>0\Rightarrow g\uparrow[0,+\infty)$. Η g έχει ελάχιστο το $g(0)=0$ άρα $g(x)\geq g(0)\Leftrightarrow e^x-x\geq 1$ (1)

β) Αντικαθιστούμε στην (1) όπου x το x^2 και έχουμε $e^{x^2}-x^2\geq 1>0$ άρα $f'(x)>0$ οπότε $f\uparrow\mathbb{R}$ άρα και 1–1.

γ) $f''(x)=2xe^{x^2}-2x=2x\left(e^{x^2}-1\right)>0$ για κάθε $x>0$. Η εφαπτομένη στο $x_0=1$ είναι $y-f(1)=f'(1)(x-1)\Leftrightarrow y-(e-1)=(e-1)(x-1)\Leftrightarrow y=(e-1)x$ και αφού η f κυρτή ισχύει ότι: $f(x)\geq(e-1)x$ $\forall x\in\mathbb{R}$.

δ) Η ε γίνεται $y=\frac{3}{2}x-\frac{1821}{2}$ είναι $f'(1)=e-1$ και $f'(0)=1$. Επειδή $1<\frac{3}{2}<e-1$.

Από Θ.Ε.Τ. υπάρχει $x_0\in(0,1)$ τέτοιο ώστε $f'(x_0)=\frac{3}{2}$. Άρα υπάρχει εφαπτομένη σε σημείο $M(x_0,f(x_0))$ που είναι παράλληλη στην (ε).

5.799. α) Παραγωγίζοντας την $f^2(x)+g^2(x)=4$ (1) έχουμε:

$2f(x)f'(x)+2g(x)g'(x)=0$ επειδή $g'(x)=f^2(x)$ είναι

$2f(x)f'(x)+2g(x)f^2(x)=0\Leftrightarrow 2f(x)f'(x)=-2g(x)f^2(x)\Leftrightarrow$:

$$f'(x)=-\frac{\cancel{2}g(x)f^{\cancel{2}}(x)}{\cancel{2f(x)}}\Leftrightarrow f'(x)=-g(x)f(x)\ (2)$$

β) Στην (1) για $x=0$ $f^2(0)+g^2(0)=4\Rightarrow g(0)=0$

Επίσης $g'(x)=f^2(x)>0$ οπότε $g\uparrow$

Για $x<0\overset{g\uparrow}{\Leftrightarrow} g(x)<g(0)\Rightarrow g(x)<0$ (3) και για $x>0\overset{g\uparrow}{\Leftrightarrow} g(x)>g(0)=0$

Επίσης $f^2(x)\neq 0$ άρα $f(x)\neq 0$ και αφού f συνεχής και $f(0)=2>0$ τότε $f(x)>0$ άρα από (2) και (3) είναι:

Για κάθε $x<0$: $f'(x)>0\Rightarrow f\uparrow(-\infty,0]$ και για $x>0$: $f'(x)<0\Rightarrow f\downarrow[0,+\infty)$ άρα η f έχει Ο.Μ. το $f(0)=2$.

γ) Επειδή f παραγωγίσιμη τότε και $f^2(x)$ παραγωγίσιμη οπότε και $g'(x)$ παραγωγίσιμη αφού $g'(x)=f^2(x)$ οπότε:

$g''(x)=2f(x)f'(x)$ και αφού $f(x)>0$ τότε η g'' έχει το πρόσημο του f' δηλαδή:

Για κάθε $x<0$: $f'(x)>0\Rightarrow g''(x)>0\Rightarrow$ g κυρτή

και για $x>0$: $f'(x)<0\Rightarrow g''(x)<0\Rightarrow$ g κοίλη. Σημείο καμπής το $(0,g(0))$.

De L Hospital

5.812. α) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^8-2x+1}{x^4-1}\underset{DLH}{\overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=}}\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{8x^7-2}{4x^3}=\dfrac{6}{4}=\dfrac{3}{2}$

β) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x}{e^x}\underset{DLH}{\overset{\left(\frac{\infty}{\infty}\right)}{=}}\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{e^x}=0$

γ) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln x}{x}\underset{DLH}{\overset{\left(\frac{\infty}{\infty}\right)}{=}}\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\frac{1}{x}}{1}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{x}=0$

δ) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2+1-\sigma\upsilon\nu x}{6e^x-6x-4x^2-x^3-6}\underset{DLH}{\overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=}}\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2x+\eta\mu x}{6e^x-6-8x-3x^2}\underset{DLH}{\overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=}}\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2+\sigma\upsilon\nu x}{6e^x-8-6x}=\dfrac{3}{-2}=-\dfrac{3}{2}$

ε) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\eta\mu x-x^3}{x^2+x}\underset{DLH}{\overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=}}\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sigma\upsilon\nu x-3x^2}{2x+1}=1$

στ) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-e^{-x}-2x}{x-\eta\mu x}\underset{DLH}{\overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=}}\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x+e^{-x}-2}{1-\sigma\upsilon\nu x}\underset{DLH}{\overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=}}\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-e^{-x}}{\eta\mu x}\underset{DLH}{\overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=}}\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x+e^{-x}}{\sigma\upsilon\nu x}=\dfrac{2}{1}=2$ γιατί

ζ) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{x^2}-x^2-1}{\eta\mu^2 x}\underset{DLH}{\overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=}}\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2xe^{x^2}-2x}{2\eta\mu x\sigma\upsilon\nu x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cancel{2}x\left(e^{x^2}-1\right)}{\cancel{2}\eta\mu x\sigma\upsilon\nu x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{x^2}-1}{\frac{\eta\mu x}{x}\sigma\upsilon\nu x}=0$

η) $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{e^{2x}+e^{-2x}-2}{\eta\mu 2x-2x}\underset{DLH}{\overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=}}\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{2e^{2x}-2e^{-2x}}{2\sigma\upsilon\nu 2x-2}\underset{DLH}{\overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=}}\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{4e^{2x}+4e^{-2x}}{-4\eta\mu 2x}=$

$$\lim_{x\to 0^+}\left[\left(-4e^{2x}-4e^{-2x}\right)\frac{1}{\eta\mu 2x}\right]=-\infty \text{ γιατί}$$

$\lim\limits_{x\to 0^+}\left(-4e^{2x}-4e^{-2x}\right)=-8$, $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{1}{\eta\mu 2x}=+\infty$, αφού $\lim\limits_{x\to 0^+}\eta\mu 2x=0$ και $\eta\mu 2x>0$ για κάθε $x\in\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$.

θ) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-e^{-x}-2x}{1-\sigma\upsilon\nu x}\underset{DLH}{\overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=}}\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x+e^{-x}-2}{1+\eta\mu x}=0$

ι) $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{e^x-1}{\eta\mu^2 x}\underset{DLH}{\overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=}}\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{e^x}{2\eta\mu x\sigma\upsilon\nu x}=\lim\limits_{x\to 0^+}\left(\dfrac{e^x}{2\sigma\upsilon\nu x}\dfrac{1}{\eta\mu x}\right)=+\infty$ γιατί $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{e^x}{2\sigma\upsilon\nu x}=\dfrac{1}{2}$ και $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{1}{\eta\mu x}=+\infty$, αφού $\lim\limits_{x\to 0^+}\eta\mu x=0$ και $\eta\mu x>0$ για κάθε $x\in\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$.

κ) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-e^{\eta\mu x}}{x-\eta\mu x}\underset{DLH}{\overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=}}\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-\sigma\upsilon\nu x\cdot e^{\eta\mu x}}{1-\sigma\upsilon\nu x}\underset{DLH}{\overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=}}\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x+\eta\mu x e^{\eta\mu x}-\sigma\upsilon\nu^2 x e^{\eta\mu x}}{\eta\mu x}\underset{DLH}{\overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=}}$

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^x+\sigma\upsilon\nu x e^{\eta\mu x}+\eta\mu x\sigma\upsilon\nu x e^{\eta\mu x}+2\sigma\upsilon\nu x\eta\mu x e^{\eta\mu x}-\sigma\upsilon\nu^3 x e^{\eta\mu x}}{\sigma\upsilon\nu x}=1$$

λ) $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{x\eta\mu x}{x-\eta\mu x}\overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{\underset{DLH}{=}}\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{\eta\mu x+x\sigma\upsilon\nu x}{1-\sigma\upsilon\nu x}\overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{\underset{DLH}{=}}\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{2\sigma\upsilon\nu x-x\eta\mu x}{\eta\mu x}=$

$\lim\limits_{x\to 0^+}\left[\left(2\sigma\upsilon\nu x-x\eta\mu x\right)\dfrac{1}{\eta\mu x}\right]=+\infty$, γιατί $\lim\limits_{x\to 0^+}\left(2\sigma\upsilon\nu x-x\eta\mu x\right)=2$

και $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{1}{\eta\mu x}=+\infty$, αφού $\lim\limits_{x\to 0^+}\eta\mu x=0$ και $\eta\mu x>0$ για κάθε $x\in\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$.

5.813. α) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x-e^x}{x^2+e^x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{x}{x^2+e^x}-\dfrac{e^x}{x^2+e^x}\right)=-1$ γιατί

$\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x}{x^2+e^x}\overset{\left(\frac{\infty}{\infty}\right)}{\underset{DLH}{=}}\dfrac{1}{2x+e^x}=0$ και

$\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{e^x}{x^2+e^x}\overset{\left(\frac{\infty}{\infty}\right)}{\underset{DLH}{=}}\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{e^x}{2x+e^x}\overset{\left(\frac{\infty}{\infty}\right)}{\underset{DLH}{=}}\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{e^x}{2+e^x}\overset{\left(\frac{\infty}{\infty}\right)}{\underset{DLH}{=}}\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\cancel{e^x}}{\cancel{e^x}}=1$

β) $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{\ln(\eta\mu x)}{\ln x}\overset{\left(\frac{\infty}{\infty}\right)}{\underset{DLH}{=}}\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{\frac{\sigma\upsilon\nu x}{\eta\mu x}}{\frac{1}{x}}=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{x\sigma\upsilon\nu x}{\eta\mu x}=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{\sigma\upsilon\nu x}{\frac{\eta\mu x}{x}}=1$

γ) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln^2 x}{x}\overset{\left(\frac{\infty}{\infty}\right)}{\underset{DLH}{=}}\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\frac{2\ln x}{x}}{1}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2\ln x}{x}\overset{\left(\frac{\infty}{\infty}\right)}{\underset{DLH}{=}}\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\frac{2}{x}}{1}=0$

δ) $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{\ln(\varepsilon\varphi x)}{\ln(\eta\mu x)}\overset{\left(\frac{\infty}{\infty}\right)}{\underset{DLH}{=}}\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{\frac{1}{\varepsilon\varphi x}\cdot\frac{1}{\sigma\upsilon\nu^2 x}}{\frac{1}{\eta\mu x}\sigma\upsilon\nu x}=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{\frac{1}{\eta\mu x\sigma\upsilon\nu x}}{\frac{\sigma\upsilon\nu x}{\eta\mu x}}=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{1}{\sigma\upsilon\nu^2 x}=1$

ε) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sqrt{x^2+1}}{\ln x}\overset{\left(\frac{\infty}{\infty}\right)}{\underset{DLH}{=}}\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}}{\frac{1}{x}}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^2}{\sqrt{x^2+1}}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^{\cancel{2}}}{\cancel{x}\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}}=+\infty$

στ) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln\left(e^x+1\right)}{x}\overset{\left(\frac{\infty}{\infty}\right)}{\underset{DLH}{=}}\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\frac{e^x}{e^x+1}}{1}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{e^x}{e^x+1}\overset{\left(\frac{\infty}{\infty}\right)}{\underset{DLH}{=}}\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\cancel{e^x}}{\cancel{e^x}}=1$

5.814. α) Επειδή $\lim\limits_{x\to1}\left(\ln x-x+1\right)=0$, από το Κ.Π. είναι και $\lim\limits_{x\to1}f(x)=0$.

Για $x=1$ είναι $0\le f(1)\le 0\Leftrightarrow f(1)=0$, οπότε η f είναι συνεχής στο 1.

β) Για $x>1$ είναι: $0\le f(x)\le \ln x-x+1\Leftrightarrow 0\le\dfrac{f(x)}{x-1}\le\dfrac{\ln x-x+1}{x-1}$.

Επειδή $\lim\limits_{x\to1^+}\dfrac{\ln x-x+1}{x-1}\overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{\underset{DLH}{=}}\lim\limits_{x\to1^+}\dfrac{\frac{1}{x}-1}{1}=0$, από το Κ.Π. είναι και $\lim\limits_{x\to1^+}\dfrac{f(x)}{x-1}=0$ (1).

Για $0<x<1$ είναι $0\le f(x)\le\ln x-x+1\Leftrightarrow 0\ge\dfrac{f(x)}{x-1}\ge\dfrac{\ln x-x+1}{x-1}$ και επειδή

$\lim\limits_{x\to1^-}\dfrac{\ln x-x+1}{x-1}\underset{DLH}{\overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=}}\lim\limits_{x\to1^-}\dfrac{\frac{1}{x}-1}{1}=0$, από το Κ.Π. είναι και $\lim\limits_{x\to1^-}\dfrac{f(x)}{x-1}=0$ (2).

Από τις $(1),(2)\Rightarrow\lim\limits_{x\to1}\dfrac{f(x)}{x-1}=\lim\limits_{x\to1^+}\dfrac{f(x)}{x-1}=0$, άρα $f'(1)=0$

5.815. α) $\lim\limits_{x\to1}f(x)=\lim\limits_{x\to1}\dfrac{3^x-3}{x-1}\underset{DLH}{\overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=}}\lim\limits_{x\to1}\dfrac{3^x\ln3}{1}=3\ln3=f(1)\Rightarrow f$ συνεχής στο $x=1$.

β) $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim\limits_{x\to1}\dfrac{\frac{3^x-3}{x-1}-3\ln3}{x-1}=\lim\limits_{x\to1}\dfrac{3^x-3-3\ln3\cdot x-3\ln3}{(x-1)^2}\underset{DLH}{\overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=}}$

$\lim\limits_{x\to1}\dfrac{3^x\ln3-3\ln3}{2(x-1)}\underset{DLH}{\overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=}}\lim\limits_{x\to1}\dfrac{3^x\ln^2 3}{2}=\dfrac{3\ln^2 3}{2}$, άρα $f'(1)=\dfrac{3\ln^2 3}{2}$.

Η f είναι παραγωγίσιμη για $x\neq1$ με $f'(x)=\dfrac{3^x\ln3(x-1)-3^x+3}{(x-1)^2}$

γ) Παρατηρούμε ότι το πρόσημο της f' εξαρτάται από το πρόσημο της παράστασης $3^x\ln3(x-1)-3^x+3$.

Εστω $g(x)=3^x\ln3(x-1)-3^x+3,\ x>0$.

Είναι $g'(x)=3^x\ln^2 3(x-1)+\cancel{3^x\ln3}-\cancel{3^x\ln3}=3^x\ln^2 3(x-1)$.

Για κάθε $x>1$ είναι $g'(x)>0\Rightarrow g\uparrow[1,+\infty)$, οπότε

$g(x)>g(1)=0\Rightarrow f'(x)>0\Rightarrow f\uparrow(1,+\infty)$.

Για κάθε $x<1$ είναι $g'(x)<0\Rightarrow g\downarrow(-\infty,1)$, οπότε

$g(x)>g(1)=0\Rightarrow f'(x)>0\Rightarrow f\uparrow(-\infty,1)$.

5.816. Για κάθε $x\neq0$ είναι $f(x)=\dfrac{\varepsilon\varphi x-x}{x-\eta\mu x}$ και

$\lim\limits_{x\to0}f(x)=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\varepsilon\varphi x-x}{x-\eta\mu x}\underset{DLH}{\overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=}}\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\frac{1}{\sigma\upsilon\nu^2x}-1}{1-\sigma\upsilon\nu x}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\frac{1-\sigma\upsilon\nu^2x}{\sigma\upsilon\nu^2x}}{1-\sigma\upsilon\nu x}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\cancel{(1-\sigma\upsilon\nu x)}(1+\sigma\upsilon\nu x)}{\sigma\upsilon\nu^2x\cancel{(1-\sigma\upsilon\nu x)}}=2$

και επειδή η f είναι συνεχής, ισχύει: $f(0)=\lim\limits_{x\to0}f(x)=2$.

5.817. Επειδή η f είναι παραγωγίσιμη στο $x_0=0$ είναι και συνεχής σε αυτό, δηλαδή:

$\lim\limits_{x\to0^-}f(x)=\lim\limits_{x\to0^+}f(x)=f(0)\Leftrightarrow\lim\limits_{x\to0^-}(\alpha e^x+x-1)=\lim\limits_{x\to0^+}(4\eta\mu x+\beta x-2)=\alpha-1\Leftrightarrow$

$\alpha-1=-2\Leftrightarrow\alpha=-1$. Για τη παράγωγο της f στο $x_0=0$ έχουμε:

$\lim\limits_{x\to0^-}\dfrac{f(x)-f(0)}{x}=\lim\limits_{x\to0^-}\dfrac{-e^x+x+1}{x}\underset{DLH}{\overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=}}\lim\limits_{x\to0^-}\dfrac{-e^x+1}{1}=0$ και

$\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{f(x)-f(0)}{x}=\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{4\eta\mu x+\beta x-2+2}{x}=\lim\limits_{x\to0^+}\left(4\dfrac{\eta\mu x}{x}+\beta\right)=4+\beta$.

Είναι $4+\beta=0 \Leftrightarrow \beta=-4$

5.818. **α)** $f'(x)=\dfrac{(\ln x+1)(1-x)+x\ln x}{(1-x)^2}=\dfrac{\ln x-x+1}{(1-x)^2}$

Εστω $g(x)=\ln x-x+1,\ x\in(0,1]$.

Είναι $g'(x)=\dfrac{1}{x}-1=\dfrac{1-x}{x}>0 \Rightarrow g\uparrow(0,1]$, οπότε

$g(x)<g(1)=0 \Rightarrow f'(x)<0 \Rightarrow f\downarrow(0,1)$

β) $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim\limits_{x\to1}\dfrac{\dfrac{x\ln x}{1-x}+1}{x-1}=\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x\ln x+1-x}{-(x-1)^2}\underset{DLH}{\overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=}}\lim\limits_{x\to1}\dfrac{\ln x+\cancel{1}-\cancel{1}}{-2(x-1)}\underset{DLH}{\overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=}}\lim\limits_{x\to1}\dfrac{\frac{1}{x}}{-2}=-\dfrac{1}{2}$

5.819. $\lim\limits_{x\to0^+}f(x)\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{\ln(e^x-1)}{\ln x}\underset{DLH}{\overset{\left(\frac{\infty}{\infty}\right)}{=}}\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{\dfrac{e^x}{e^x-1}}{\dfrac{1}{x}}=\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{xe^x}{e^x-1}\underset{DLH}{\overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=}}\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{(x+1)\cancel{e^x}}{\cancel{e^x}}=1$

$\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{f(x)-f(0)}{x}=\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{\dfrac{\ln(e^x-1)}{\ln x}-1}{x}=\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{\ln(e^x-1)-\ln x}{x\ln x}\underset{DLH}{\overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=}}\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{\dfrac{\ln(e^x-1)}{\ln x}}{x}=+\infty$

Η f δεν είναι παραγωγίσιμη στο $x_0=0$.

Για τα συνέχεια της f στο $x_0=0$ έχουμε:

$\lim\limits_{x\to0^+}f(x)=\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{\ln(e^x-1)}{\ln x}\underset{DLH}{\overset{\left(\frac{-\infty}{-\infty}\right)}{=}}\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{\dfrac{e^x}{e^x-1}}{\dfrac{1}{x}}=\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{xe^x}{e^x-1}\underset{DLH}{\overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=}}$

$\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{e^x+xe^x}{e^x}=\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{\cancel{e^x}(x+1)}{\cancel{e^x}}=1$ και

$\lim\limits_{x\to0^-}f(x)=\lim\limits_{x\to0^-}e^x=1=f(0)$, άρα η f είναι συνεχής στο $x_0=0$.

5.820. **α)** Για να είναι η f παραγωγίσιμη στο $x_0=1$ θα είναι και συνεχής σε αυτό, άρα:

$\lim\limits_{x\to1^-}f(x)=\lim\limits_{x\to1^+}f(x)=f(1)\Leftrightarrow\lim\limits_{x\to1^-}(\alpha x+\beta)=\lim\limits_{x\to1^+}(\ln x+1)=1\Leftrightarrow\alpha+\beta=1\Leftrightarrow\beta=1-\alpha$

$\lim\limits_{x\to1^-}\dfrac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim\limits_{x\to1^-}\dfrac{\alpha x+\beta-1}{x-1}=\lim\limits_{x\to1^-}\dfrac{\alpha x-\alpha}{x-1}=\alpha$,

$\lim\limits_{x\to1^+}\dfrac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim\limits_{x\to1^+}\dfrac{\ln x+\cancel{1}-\cancel{1}}{x-1}\underset{DLH}{\overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=}}\lim\limits_{x\to1^+}\dfrac{\frac{1}{x}}{1}=1$, άρα $\alpha=1$ και $\beta=1-1=0$.

β) Για να είναι η f παραγωγίσιμη στο $x_0=0$ θα είναι και συνεχής σε αυτό, άρα:

$\lim\limits_{x\to0^-}f(x)=\lim\limits_{x\to0^+}f(x)=f(0)\Leftrightarrow\lim\limits_{x\to0^-}(\alpha e^x+1)=\lim\limits_{x\to0^+}(e^x-\beta x)=\alpha+1\Leftrightarrow\alpha+1=1\Leftrightarrow\alpha=0$

$\lim\limits_{x\to0^-}\dfrac{f(x)-f(0)}{x}=\lim\limits_{x\to0^-}\dfrac{\cancel{1}-\cancel{1}}{x}=0$ και

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x}=\lim_{x\to 0^+}\frac{e^x-\beta x-1}{x}\underset{DLH}{\overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=}}\lim_{x\to 0^+}\frac{e^x-\beta}{1}=1-\beta$$, άρα $1-\beta=0\Leftrightarrow\beta=1$.

γ) Για να είναι η f παραγωγίσιμη στο $x_0=0$ θα είναι και συνεχής σε αυτό, άρα:

$$\lim_{x\to 0^-}f(x)=\lim_{x\to 0^+}f(x)=f(0)\Leftrightarrow\lim_{x\to 0^-}\left(\alpha e^x+\beta-1\right)=\lim_{x\to 0^+}\left(\eta\mu x+\beta\sigma\upsilon\nu x\right)=\alpha+\beta-1\Leftrightarrow$$
$$\alpha+\beta-1=\beta\Leftrightarrow\alpha=1$$

$$\lim_{x\to 0^-}\frac{f(x)-f(0)}{x}=\lim_{x\to 0^-}\frac{e^x+\cancel{\beta}-1-\cancel{\beta}}{x}\underset{DLH}{\overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=}}\lim_{x\to 0^-}\frac{e^x}{1}=1$$ και

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x}=\lim_{x\to 0^+}\frac{\eta\mu x+\beta\sigma\upsilon\nu x-\beta}{x}\underset{DLH}{\overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=}}\lim_{x\to 0^+}\frac{\sigma\upsilon\nu x-\beta\eta\mu x}{1}=1$$, άρα $f'(0)=1$ για κάθε $\beta\in\mathbb{R}$.

δ) Για να είναι η f παραγωγίσιμη στο $x_0=0$ θα είναι και συνεχής σε αυτό, άρα:

$$\lim_{x\to 0^-}f(x)=\lim_{x\to 0^+}f(x)=f(0)\Leftrightarrow\lim_{x\to 0^-}\left(e^{2x}-\alpha x+\alpha\right)=\lim_{x\to 0^+}\left(e^x-\beta x+3\right)=1+\alpha\Leftrightarrow$$
$$1+\alpha=1+3\Leftrightarrow\alpha=3$$

$$\lim_{x\to 0^-}\frac{f(x)-f(0)}{x}=\lim_{x\to 0^-}\frac{e^{2x}-3x-1}{x}\underset{DLH}{\overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=}}\lim_{x\to 0^-}\frac{2e^{2x}-3}{1}=-1$$ και

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x}=\lim_{x\to 0^+}\frac{e^x-\beta x+3-4}{x}\underset{DLH}{\overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=}}\lim_{x\to 0^+}\frac{e^x-\beta}{1}=1-\beta$$, άρα $1-\beta=-1\Leftrightarrow\beta=2$.

5.821. **α)** Η f είναι συνεχής σε καθένα από τα διαστήματα $(-\infty,0)$, $(0,1)$ και $(1,+\infty)$.

Για να είναι συνεχής στο πεδίο ορισμού της, πρέπει να είναι συνεχής και στα $x_0=0$, $x_1=1$.

$$\lim_{x\to 0^-}f(x)=\lim_{x\to 0^+}f(x)=f(0)\Leftrightarrow\lim_{x\to 0^-}\left(-x^2\right)=\lim_{x\to 0^+}\left(\alpha x+\beta\right)=0\Leftrightarrow\beta=0$$ και

$$\lim_{x\to 1^-}f(x)=\lim_{x\to 1^+}f(x)=f(1)\Leftrightarrow\lim_{x\to 1^-}(\alpha x)=\lim_{x\to 1^+}(1+x\ln x)=1\Leftrightarrow\alpha=1$$

β) i. $$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x^2}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1+x\ln x}{x^2}\underset{DLH}{\overset{\left(\frac{\infty}{\infty}\right)}{=}}\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln x+1}{2x}\underset{DLH}{\overset{\left(\frac{\infty}{\infty}\right)}{=}}\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{1}{x}}{2}=0$$

ii. $$\lim_{x\to 1^-}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim_{x\to 1^-}\frac{x-1}{x-1}=1,$$

$$\lim_{x\to 1^+}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim_{x\to 1^+}\frac{\cancel{1}+x\ln x-\cancel{1}}{x-1}\underset{DLH}{\overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=}}\lim_{x\to 1^+}\frac{\ln x+1}{1}=1$$

5.822. Εστω $f(x)=\dfrac{e^x+\alpha x\eta\mu 2x-\beta\sigma\upsilon\nu 2x-x}{x^2}$, $x\neq 0$. Τότε

$f(x)x^2=e^x+\alpha x\eta\mu 2x-\beta\sigma\upsilon\nu 2x-x$ και

$\lim\limits_{x\to 0}\left(f(x)x^2\right)=\lim\limits_{x\to 0}\left(e^x+\alpha x\eta\mu 2x-\beta\sigma\upsilon\nu 2x-x\right)\Leftrightarrow 0=1-\beta\Leftrightarrow\beta=1$. Είναι

$$\lim_{x\to 0}f(x)=\lim_{x\to 0}\frac{e^x+\alpha x\eta\mu 2x-\sigma\upsilon\nu 2x-x}{x^2}\underset{DLH}{\overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=}}\lim_{x\to 0}\frac{e^x+\alpha\eta\mu 2x+2\alpha x\sigma\upsilon\nu 2x-2\eta\mu 2x-1}{2x}\underset{DLH}{\overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=}}$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^x+2\alpha\sigma\upsilon\nu 2x+2\alpha\sigma\upsilon\nu 2x-4\alpha x\eta\mu 2x-4\sigma\upsilon\nu 2x}{2}=\frac{4\alpha-3}{2}.$$

Πρέπει $\frac{4\alpha-3}{2}=\frac{9}{2}\Leftrightarrow \alpha=3$

5.823. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^{\alpha x}-e^{\beta x}-\eta\mu x}{x^2}\underset{DLH}{\overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=}}\lim\limits_{x\to 0}\frac{\alpha e^{\alpha x}-\beta e^{\beta x}-\sigma\upsilon\nu x}{2x}$

Εστω $f(x)=\frac{\alpha e^{\alpha x}-\beta e^{\beta x}-\sigma\upsilon\nu x}{2x}$, $x\neq 0$, τότε $2xf(x)=\alpha e^{\alpha x}-\beta e^{\beta x}-\sigma\upsilon\nu x$ και

$\lim\limits_{x\to 0}(2xf(x))=\lim\limits_{x\to 0}\left(\alpha e^{\alpha x}-\beta e^{\beta x}-\sigma\upsilon\nu x\right)\Leftrightarrow 0=\alpha-\beta-1\Leftrightarrow \beta=\alpha-1$. Τότε

$$\lim_{x\to 0}\frac{\alpha e^{\alpha x}-(\alpha-1)e^{(\alpha-1)x}-\sigma\upsilon\nu x}{2x}\underset{DLH}{\overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=}}\lim_{x\to 0}\frac{\alpha^2e^{\alpha x}-(\alpha-1)^2e^{(\alpha-1)x}+\eta\mu x}{2}=$$

$$\frac{\alpha^2-(\alpha-1)^2}{2}=\frac{2\alpha-1}{2}$$

Είναι $\frac{2\alpha-1}{2}=\frac{3}{2}\Leftrightarrow \alpha=2$ και $\beta=2-1=1$

5.824. Για κάθε $x\neq 0$ είναι $f'(x)=\frac{xg'(x)-g(x)}{x^2}$. Στο $x_0=0$ έχουμε:

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{g(x)}{x^2}\underset{DLH}{\overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=}}\lim_{x\to 0}\frac{g'(x)}{2x}=\frac{1}{2}\lim_{x\to 0}\frac{g'(x)-g'(0)}{x}=\frac{1}{2}g''(0)=8$$

5.825. **α)** Είναι $f'(x)=\frac{e^x}{e^x-1}-\frac{1}{x}=\frac{xe^x-e^x+1}{x\left(e^x-1\right)}$. Για κάθε $x>0$ είναι $e^x-1>0$, οπότε

για να βρούμε το πρόσημο της f', αρκεί να βρούμε το πρόσημο της παράστασης xe^x-e^x+1. Εστω $g(x)=xe^x-e^x+1$, $x\in[0,+\infty)$.

Είναι $g'(x)=e^x+xe^x>0$ για κάθε $x>0$, άρα η g είναι γνησίως αύξουσα στο $[0,+\infty)$.

Για κάθε $x>0$ είναι $g(x)>g(0)=0$ άρα και $f'(x)>0$ οπότε f γνησίως αύξουσα στο $(0,+\infty)$.

β) $\lim\limits_{x\to 0^+}f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}\left(\ln\left(e^x-1\right)-\ln x\right)=\lim\limits_{x\to 0^+}\ln\frac{e^x-1}{x}$

Όμως $\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{e^x-1}{x}\underset{DLH}{\overset{\frac{0}{0}}{=}}\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{e^x}{1}=1$ και $\lim\limits_{x\to 0^+}f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}\ln\frac{e^x-1}{x}=0$

Είναι $\lim\limits_{x\to +\infty}\frac{e^x-1}{x}\underset{DLH}{\overset{\frac{\infty}{\infty}}{=}}\lim\limits_{x\to +\infty}\frac{e^x}{1}=+\infty$ και $\lim\limits_{x\to +\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to +\infty}\ln\frac{e^x-1}{x}=+\infty$. Άρα

$f((0,+\infty))=\left(\lim\limits_{x\to 0^+}f(x),\lim\limits_{x\to +\infty}f(x)\right)=(0,+\infty)$.

5.826. **α)** $f'(x)=\ln x+1-1=\ln x\geq 0\Leftrightarrow x\geq 1$.

Για κάθε $x\in(0,1)$ είναι $f'(x)<0\Rightarrow f\downarrow(0,1]$ και για κάθε $x>1$ είναι $f'(x)>0\Rightarrow f\uparrow[1,+\infty)$. Η f έχει ελάχιστο το $f(1)=0$.

β) Είναι $f(x)\ge f(1)\Leftrightarrow x\ln x-x+1\ge 0\Leftrightarrow x\ln x\ge x-1$

γ) $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}(x\ln x-x+1)=1$, γιατί

$$\lim_{x\to 0^+} x\ln x=\lim_{x\to 0^+}\frac{\ln x}{\frac{1}{x}}\underset{DLH}{\overset{\left(\frac{-\infty}{+\infty}\right)}{=}}\lim_{x\to 0^+}\frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}}=\lim_{x\to 0^+}(-x)=0 \text{ και}$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty}(x\ln x-x+1)=\lim_{x\to+\infty}\left[x(\ln x-1)+1\right]=+\infty .$$

$f((0,1])=\left[f(1),\lim\limits_{x\to 0^+}f(x)\right)=[0,1)$ και $f([1,+\infty))=\left[f(1),\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)\right)=[0,+\infty)$, άρα

$f(A)=[0,1)\cup[0,+\infty)=[0,+\infty)$.

5.827. **α)** $$\lim_{h\to 0}\frac{f(x-2h)+f(x+2h)-2f(x)}{4h^2}\underset{DLH}{\overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=}}\lim_{h\to 0}\frac{-2f'(x-2h)+2f'(x+2h)}{8h}\underset{DLH}{\overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=}}$$

$$\lim_{h\to 0}\frac{4f''(x-2h)+4f''(x+2h)}{8}=\frac{4f''(x)+4f''(x)}{8}=f''(x)$$

β) $$\lim_{h\to 0}\frac{f(x-2h)-2f(x)+f(x+2h)}{h^2}\underset{DLH}{\overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=}}\lim_{h\to 0}\frac{-2f'(x-2h)+2f'(x+2h)}{2h}\underset{DLH}{\overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=}}$$

$$\lim_{h\to 0}\frac{4f''(x-2h)+4f''(x+2h)}{2}=\frac{4f''(x)+4f''(x)}{2}=4f''(x)$$

5.828. $$\lim_{x\to x_0}\left[\frac{1}{f(x)-f(x_0)}-\frac{1}{(x-x_0)f'(x_0)}\right]=\lim_{x\to x_0}\frac{(x-x_0)f'(x_0)-f(x)+f(x_0)}{(x-x_0)f'(x_0)\big(f(x)-f(x_0)\big)}\underset{DLH}{\overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=}}$$

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f'(x_0)-f'(x)}{(x-x_0)f'(x_0)f'(x)+f'(x_0)\big(f(x)-f(x_0)\big)}=$$

$$\lim_{x\to x_0}\frac{-\frac{f'(x)-f'(x_0)}{x-x_0}}{f'(x_0)f'(x)+f'(x_0)\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}}=\frac{-f''(x_0)}{\big(f'(x_0)\big)^2+f'(x_0)f'(x_0)}=\frac{4}{1+1}=2$$

5.829. $$\lim_{x\to+\infty}\frac{xf'(x)}{f(x)}\underset{DLH}{\overset{\left(\frac{\infty}{\infty}\right)}{=}}\lim_{x\to+\infty}\frac{f'(x)+xf''(x)}{f'(x)}=\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{xf''(x)}{f'(x)}\right)=1+3=4 \text{ , γιατί}$$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{xf''(x)}{f'(x)}\underset{DLH}{\overset{\left(\frac{\infty}{\infty}\right)}{=}}\lim_{x\to+\infty}\frac{f''(x)+xf^{(3)}(x)}{f''(x)}=\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{xf^{(3)}(x)}{f''(x)}\right)=3$$

5.830. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2+f(x)}{xf'(x)} \underset{DLH}{\overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=}} \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2x+f'(x)}{f'(x)+xf''(x)} = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cancel{x}\left(2+\dfrac{f'(x)}{x}\right)}{\cancel{x}\left(\dfrac{f'(x)}{x}+f''(x)\right)} = \dfrac{2+f''(0)}{f''(0)+f''(0)} = \dfrac{4}{4} = 1$

5.831. Επειδή οι συναρτήσεις f,g είναι παραγωγίσιμες στο $\mathbb{R}$ και

$\lim\limits_{x\to 0}\left[6f(6x)-10f(10x)+8f(8x)\right]=0$, $\lim\limits_{x\to 0}\left[3g(3x)-5g(5x)+4g(4x)\right]=0$,

έχουμε:

$$\lim_{x\to 0}\frac{6f(6x)-10f(10x)+8f(8x)}{3g(3x)-5g(5x)+4g(4x)} \underset{DLH}{\overset{\frac{0}{0}}{=}} \lim_{x\to 0}\frac{36f'(6x)-100f'(10x)+64f'(8x)}{9g'(3x)-25g'(5x)+16g'(4x)}$$

Επειδή οι συναρτήσεις f',g' είναι παραγωγίσιμες στο $\mathbb{R}$ και

$\lim\limits_{x\to 0}\left[36f'(6x)-100f'(10x)+64f'(8x)\right]=0$,

$\lim\limits_{x\to 0}\left[9g'(3x)-25g'(5x)+16g'(4x)\right]=0$, έχουμε:

$$\lim_{x\to 0}\frac{36f'(6x)-100f'(10x)+64f'(8x)}{9g'(3x)-25g'(5x)+16g'(4x)} \underset{DLH}{\overset{\frac{0}{0}}{=}}$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{216f''(6x)-1000f''(10x)+512f''(8x)}{27g''(3x)-125g''(5x)+64g''(4x)} =$$

$$\frac{216f''(0)-1000f''(0)+512f''(0)}{27g''(0)-125g''(0)+64g''(0)} = \frac{-272f''(0)}{-34g''(0)} = 8\frac{f''(0)}{g''(0)}$$

5.832. Θεωρούμε τη συνάρτηση $h(x)=\dfrac{f(x)}{g(x)}$ η οποία ορίζεται στο $\mathbb{R}$ γιατί $g(x)\neq 0$ και η οποία είναι δύο φορές παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ γιατί f,g είναι δύο φορές παραγωγίσιμες.

Οπότε $A=\dfrac{f(\alpha)}{g(\alpha)}=h(\alpha)$ και

$$B=\frac{f'(\alpha)-\dfrac{f(\alpha)}{g(\alpha)}\cdot g'(\alpha)}{g(\alpha)}=\frac{f'(\alpha)\cdot g(\alpha)-f(\alpha)\cdot g'(\alpha)}{g^2(\alpha)}=\left(\frac{f}{g}\right)'(\alpha)=h'(\alpha).$$

Οπότε η δοσμένη σχέση γίνεται :

$$\frac{h(x)}{(x-\alpha)^2}=\frac{h(\alpha)}{(x-\alpha)^2}+\frac{h'(\alpha)}{(x-\alpha)}+\frac{\Phi(x)}{g(x)}\Leftrightarrow$$

$$\frac{\Phi(x)}{g(x)}=\frac{h(x)}{(x-\alpha)^2}-\frac{h(\alpha)}{(x-\alpha)^2}-\frac{h'(\alpha)}{x-\alpha}\Leftrightarrow\frac{\Phi(x)}{g(x)}=\frac{h(x)-h(\alpha)-h'(\alpha)\cdot(x-\alpha)}{(x-\alpha)^2}\Leftrightarrow$$

$$\Phi(x)=\left[\frac{h(x)-h(\alpha)-h'(\alpha)\cdot(x-\alpha)}{(x-\alpha)^2}\right]g(x).$$

$$\lim_{x\to\alpha}\frac{h(x)-h(\alpha)-h'(\alpha)\cdot(x-\alpha)}{(x-\alpha)^2}\underset{DLH}{\overset{\frac{0}{0}}{=}}\lim_{x\to\alpha}\frac{\left[h(x)-h(\alpha)-h'(\alpha)\cdot(x-\alpha)\right]'}{\left((x-\alpha)^2\right)'}=$$

$$=\lim_{x\to\alpha}\frac{h'(x)-h'(\alpha)}{2(x-\alpha)}=\frac{1}{2}\lim_{x\to\alpha}\frac{h'(x)-h'(\alpha)}{x-\alpha}=\frac{1}{2}h''(\alpha),\text{ άρα }\lim_{x\to\alpha}\Phi(x)=\frac{1}{2}h''(\alpha)g(\alpha).$$

5.833. α) $\lim_{h\to0}\frac{g'(x)-g'(x-h)}{h}\underset{u\to0}{\overset{-h=u}{=}}\lim_{u\to0}\frac{-(g'(x+u)-g'(x))}{-u}=\lim_{u\to0}\frac{g'(x+u)-g'(x)}{u}=g''(x)$

β) $\lim_{h\to0}\frac{g(x+h)-2g(x)+g(x-h)}{h^2}\underset{DLH}{\overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=}}\lim_{h\to0}\frac{g'(x+h)-g'(x-h)}{2h}=$

$\frac{1}{2}\lim_{h\to0}\left[\frac{g'(x+h)-g'(x)}{h}+\frac{g'(x-h)-g'(x)}{-h}\right]=g''(x)$, άρα

$g''(x)=20x^3+6x=\left(5x^4+3x^2\right)'\Leftrightarrow g'(x)=5x^4+3x^2+c_1$

$g'(0)=1\Leftrightarrow c_1=1$, άρα

$g'(x)=5x^4+3x^2+1=\left(x^5+x^3+x\right)'\Leftrightarrow g(x)=x^5+x^3+x+c_2$

$g(0)=1\Leftrightarrow c_2=1$, άρα $g(x)=x^5+x^3+x+1.$

5.834. α) $\lim_{x\to+\infty}f(x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{e^xf(x)}{e^x}\underset{DLH}{\overset{\left(\frac{\infty}{\infty}\right)}{=}}\lim_{x\to+\infty}\frac{e^xf(x)+e^xf'(x)}{e^x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\cancel{e^x}\left[f(x)+f'(x)\right]}{\cancel{e^x}}=2$

β) Έστω $f(x)+f'(x)=g(x)\Leftrightarrow f'(x)=g(x)-f(x)$, τότε

$\lim_{x\to+\infty}f'(x)=\lim_{x\to+\infty}\left[g(x)-f(x)\right]=2-2=0$

5.835. α) $\lim_{x\to-\infty}f(x)=\lim_{x\to-\infty}\frac{e^{-3x}f(x)}{e^{-3x}}\underset{DLH}{\overset{\left(\frac{\infty}{\infty}\right)}{=}}\lim_{x\to-\infty}\frac{-3e^{-3x}f(x)+e^{-3x}f'(x)}{-3e^{-3x}}=$

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{\cancel{e^{-3x}}\left[-3f(x)+f'(x)\right]}{-3\cancel{e^{-3x}}}=\frac{6}{-3}=-2$$

β) Έστω $-3f(x)+f'(x)=g(x)\Leftrightarrow f'(x)=g(x)+3f(x)$, τότε

$\lim_{x\to+\infty}f'(x)=\lim_{x\to+\infty}\left[g(x)+3f(x)\right]=6-6=0$

5.836. α) $\lim_{x\to+\infty}f(x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{xf(x)}{x}\underset{DLH}{\overset{\left(\frac{\infty}{\infty}\right)}{=}}\lim_{x\to+\infty}\frac{f'(x)+xf(x)}{1}=1$

β) Εστω $f(x)+f'(x)=g(x)\Leftrightarrow f'(x)=g(x)-f(x)$, τότε

$\lim_{x\to+\infty}f'(x)=\lim_{x\to+\infty}\left[g(x)-f(x)\right]=1-1=0$

5.837. α) $\lim_{x\to-\infty}\left(xe^x\right)\overset{\infty\cdot0}{=}\lim_{x\to-\infty}\frac{x}{e^{-x}}\underset{DLH}{\overset{\left(\frac{\infty}{\infty}\right)}{=}}\lim_{x\to-\infty}\frac{1}{-e^{-x}}=0$

β) $\lim\limits_{x\to 0^+}\left(x^2\ln x\right)=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{\ln x}{\frac{1}{x^2}}\underset{DLH}{\overset{\left(\frac{-\infty}{+\infty}\right)}{=}}\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{\frac{1}{x}}{-\frac{2}{x^3}}=\lim\limits_{x\to 0^+}\left(-\dfrac{x^2}{2}\right)=0$

γ) $\lim\limits_{x\to 0}\left(x^2e^{\frac{1}{x^2}}\right)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{\frac{1}{x^2}}}{\frac{1}{x^2}}\underset{u\to+\infty}{\overset{\frac{1}{x^2}=u}{=}}\lim\limits_{u\to+\infty}\dfrac{e^u}{u}\underset{DLH}{\overset{\left(\frac{\infty}{\infty}\right)}{=}}\lim\limits_{u\to+\infty}\dfrac{e^u}{1}=+\infty$

δ) $\lim\limits_{x\to 0^+}\left[\sigma\varphi x\left(e^x-1\right)\right]=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{\sigma\upsilon\nu x\left(e^x-1\right)}{\eta\mu x}\underset{DLH}{\overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=}}\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{-\eta\mu x\left(e^x-1\right)+e^x\sigma\upsilon\nu x}{\sigma\upsilon\nu x}=1$

ε) $\lim\limits_{x\to 1^+}\left[\ln x\ln\left(\ln x\right)\right]\underset{u\to 0^+}{\overset{\ln x=u}{=}}\lim\limits_{u\to 0^+}u\ln u\overset{0\cdot\infty}{=}\lim\limits_{u\to 0^+}\dfrac{\ln u}{\frac{1}{u}}\underset{DLH}{\overset{\left(\frac{-\infty}{+\infty}\right)}{=}}\lim\limits_{u\to 0^+}\dfrac{\frac{1}{u}}{-\frac{1}{u^2}}=\lim\limits_{u\to 0^+}\left(-u\right)=0$.

στ) $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(x^2+x\right)e^x=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{x^2+x}{e^{-x}}\underset{DLH}{\overset{\left(\frac{\infty}{\infty}\right)}{=}}\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{2x+1}{-e^{-x}}\underset{DLH}{\overset{\left(\frac{\infty}{\infty}\right)}{=}}\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{2}{e^{-x}}=0$

ζ) $\lim\limits_{x\to 0^+}\left[\ln x\cdot\ln\left(x+1\right)\right]=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{\ln\left(x+1\right)}{\frac{1}{\ln x}}\underset{DLH}{\overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=}}\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{\frac{1}{x+1}}{-\frac{1}{\ln^2 x}\cdot\frac{1}{x}}=\lim\limits_{x\to 0^+}\left(-\dfrac{1}{x+1}\dfrac{\ln^2 x}{\frac{1}{x}}\right)=0$

γιατί $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{\ln^2 x}{\frac{1}{x}}\underset{DLH}{\overset{\left(\frac{\infty}{\infty}\right)}{=}}\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{\frac{2\ln x}{x}}{-\frac{1}{x^2}}=-2\lim\limits_{x\to 0^+}x\ln x=-2\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{\ln x}{\frac{1}{x}}\underset{DLH}{\overset{\left(\frac{\infty}{\infty}\right)}{=}}$

$-2\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}}=-2\lim\limits_{x\to 0^+}\left(-x\right)=0$

η) $\lim\limits_{x\to 0^+}\ln x\left(\eta\mu x-x\right)=\lim\limits_{x\to 0^+}\left(x\ln x\dfrac{\eta\mu x-x}{x}\right)=\lim\limits_{x\to 0^+}\left(x\ln x\left(\dfrac{\eta\mu x}{x}-1\right)\right)=0$ γιατί

$\lim\limits_{x\to 0^+}x\ln x=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{\ln x}{\frac{1}{x}}\underset{DLH}{\overset{\left(\frac{\infty}{\infty}\right)}{=}}\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}}=\lim\limits_{x\to 0^+}\left(-x\right)=0$ και $\lim\limits_{x\to 0^+}\left(\dfrac{\eta\mu x}{x}-1\right)=1-1=0$

5.838. α) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(e^x-x-x^2\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left[x^2\left(\dfrac{e^x}{x^2}-\dfrac{1}{x}-1\right)\right]=+\infty$, γιατί

$\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{e^x}{x^2}\underset{DLH}{\overset{\left(\frac{\infty}{\infty}\right)}{=}}\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{e^x}{2x}\underset{DLH}{\overset{\left(\frac{\infty}{\infty}\right)}{=}}\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{e^x}{2}=+\infty$, $\lim\limits_{x\to+\infty}x^2=+\infty$, $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{e^x}{x^2}-\dfrac{1}{x}-1\right)=+\infty$

β) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(x-\ln x\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left[x\left(1-\dfrac{\ln x}{x}\right)\right]=+\infty$, γιατί $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln x}{x}\underset{DLH}{\overset{\left(\frac{\infty}{\infty}\right)}{=}}\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\frac{1}{x}}{1}=0$

γ) $\lim\limits_{x\to 0^+}\left(\frac{1}{\eta\mu x}-\frac{1}{x}\right)=\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{x-\eta\mu x}{x\eta\mu x}\underset{DLH}{\overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=}}\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{1-\sigma\upsilon\nu x}{\eta\mu x+x\sigma\upsilon\nu x}\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{\frac{1-\sigma\upsilon\nu x}{x}}{\frac{\eta\mu x}{x}+\sigma\upsilon\nu x}=\frac{0}{1+1}=0$

δ) $\lim\limits_{x\to 1^-}\left(\frac{1}{\ln x}-\frac{1}{x-1}\right)=\lim\limits_{x\to 1^-}\frac{x-1-\ln x}{(x-1)\ln x}\underset{DLH}{\overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=}}\lim\limits_{x\to 1^-}\frac{1-\frac{1}{x}}{\ln x+\frac{x-1}{x}}=\lim\limits_{x\to 1^-}\frac{\frac{x-1}{\cancel{x}}}{\frac{x\ln x+x-1}{\cancel{x}}}=$

$$\lim\limits_{x\to 1^-}\frac{x-1}{x\ln x+x-1}\underset{DLH}{\overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=}}\lim\limits_{x\to 1^-}\frac{1}{\ln x+1+1}=\frac{1}{2}$$

ε) $\lim\limits_{x\to 0^+}\left(\frac{1}{x}-\frac{x}{1-\sigma\upsilon\nu x}\right)=\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{1-\sigma\upsilon\nu x-x^2}{x(1-\sigma\upsilon\nu x)}\underset{DLH}{\overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=}}\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{\eta\mu x-2x}{1-\sigma\upsilon\nu x+x\eta\mu x}\underset{DLH}{\overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=}}$

$$\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{\sigma\upsilon\nu x-2}{\eta\mu x+\eta\mu x+x\sigma\upsilon\nu x}=\lim\limits_{x\to 0^+}\left[(\sigma\upsilon\nu x-2)\frac{1}{2\eta\mu x+x\sigma\upsilon\nu x}\right]=-\infty$$

γιατί $\lim\limits_{x\to 0^+}(\sigma\upsilon\nu x-2)=-1$ και $\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{1}{2\eta\mu x+x\sigma\upsilon\nu x}=+\infty$ αφού

$\lim\limits_{x\to 0^+}(2\eta\mu x+x\sigma\upsilon\nu x)=0$ και $2\eta\mu x+x\sigma\upsilon\nu x>0$ για κάθε $x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$.

στ) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[\ln(e^x+1)-x\right]=\lim\limits_{x\to+\infty}\left[\ln(e^x+1)-\ln e^x\right]=\lim\limits_{x\to+\infty}\ln\frac{e^x+1}{e^x}=0$ γιατί

$$\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{e^x+1}{e^x}\underset{DLH}{\overset{\left(\frac{\infty}{\infty}\right)}{=}}\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\cancel{e^x}}{\cancel{e^x}}=1$$

5.839. **α)** Για κάθε $x>1$ είναι $(x-1)^{x-1}=e^{\ln(x-1)^{x-1}}=e^{(x-1)\ln(x-1)}$

$\lim\limits_{x\to 1}(x-1)\ln(x-1)=\lim\limits_{x\to 1}\frac{\ln(x-1)}{\frac{1}{x-1}}\underset{DLH}{\overset{\left(\frac{\infty}{\infty}\right)}{=}}\lim\limits_{x\to 1}\frac{\frac{1}{\cancel{x-1}}}{-\frac{1}{(x-1)^{\cancel{2}}}}=\lim\limits_{x\to 1}(-x+1)=0$, οπότε

$$\lim\limits_{x\to 1}(x-1)^{x-1}=e^0=1$$

β) Για κάθε $x>0$ είναι $x^{\frac{1}{x}}=e^{\ln x^{\frac{1}{x}}}=e^{\frac{1}{x}\ln x}=e^{\frac{\ln x}{x}}$

$\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x}\underset{DLH}{\overset{\left(\frac{\infty}{\infty}\right)}{=}}\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\frac{1}{x}}{1}=0$, άρα $\lim\limits_{x\to+\infty}x^{\frac{1}{x}}=e^0=1$

γ) Για κάθε $x>0$ είναι $(\ln x)^{\frac{1}{x}}=e^{\ln\left[(\ln x)^{\frac{1}{x}}\right]}=e^{\frac{1}{x}\ln(\ln x)}=e^{\frac{\ln(\ln x)}{x}}$

$\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\ln(\ln x)}{x}\underset{DLH}{\overset{\left(\frac{\infty}{\infty}\right)}{=}}\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\frac{1}{\ln x}\cdot\frac{1}{x}}{1}=0$, άρα $\lim\limits_{x\to+\infty}(\ln x)^{\frac{1}{x}}=e^0=1$

δ) Για κάθε $x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ είναι $(\eta\mu x)^x=e^{\ln(\eta\mu x)^x}=e^{x\ln(\eta\mu x)}$

$$\lim_{x\to 0^+} x\ln(\eta\mu x)=\lim_{x\to 0^+}\frac{\ln(\eta\mu x)}{\frac{1}{x}}\overset{\left(\frac{\infty}{\infty}\right)}{\underset{DLH}{=}}\lim_{x\to 0^+}\frac{\frac{\sigma\upsilon\nu x}{\eta\mu x}}{-\frac{1}{x^2}}=\lim_{x\to 0^+}\left(\frac{x\sigma\upsilon\nu x}{\frac{\eta\mu x}{x}}\right)=0\text{, άρα}$$

$$\lim_{x\to 0^+}(\eta\mu x)^x=\lim_{x\to 0^+}e^{x\ln(\eta\mu x)}\underset{u\to 0}{\overset{x\ln(\eta\mu x)=u}{=}}\lim_{u\to 0}e^u=1$$

ε) Για κάθε $x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ είναι $(x+1)^{\frac{1}{\eta\mu x}}=e^{\ln(x+1)^{\frac{1}{\eta\mu x}}}=e^{\frac{\ln(x+1)}{\eta\mu x}}$

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{\ln(x+1)}{\eta\mu x}\overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{\underset{DLH}{=}}\lim_{x\to 0^+}\frac{\frac{1}{x+1}}{\sigma\upsilon\nu x}=1\text{, άρα }\lim_{x\to 0^+}(x+1)^{\frac{1}{\eta\mu x}}=e$$

στ) Για κάθε $x>0$ είναι $e^x>x$, οπότε $(e^x-x)^{\frac{1}{x}}=e^{\ln(e^x-x)^{\frac{1}{x}}}=e^{\frac{\ln(e^x-x)}{x}}$

$$\lim_{x\to+\infty}(e^x-x)=\lim_{x\to+\infty}\left[x\left(\frac{e^x}{x}-1\right)\right]=+\infty\text{, γιατί }\lim_{x\to+\infty}\frac{e^x}{x}\overset{\left(\frac{\infty}{\infty}\right)}{\underset{DLH}{=}}\lim_{x\to+\infty}\frac{e^x}{1}=+\infty$$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln(e^x-x)}{x}\overset{\left(\frac{\infty}{\infty}\right)}{\underset{DLH}{=}}\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{e^x-1}{e^x-x}}{1}=\lim_{x\to+\infty}\frac{e^x-1}{e^x-x}\overset{\left(\frac{\infty}{\infty}\right)}{\underset{DLH}{=}}\lim_{x\to+\infty}\frac{e^x}{e^x-1}\overset{\left(\frac{\infty}{\infty}\right)}{\underset{DLH}{=}}\lim_{x\to+\infty}\frac{e^x}{e^x}=1\text{, άρα}$$

$$\lim_{x\to+\infty}(e^x-x)^{\frac{1}{x}}=e$$

ζ) Για κάθε $x\in(0,1)$ είναι $(\varepsilon\varphi x)^{\frac{1}{\ln x}}=e^{\ln(\varepsilon\varphi x)^{\frac{1}{\ln x}}}=e^{\frac{\ln(\varepsilon\varphi x)}{\ln x}}$

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{\ln(\varepsilon\varphi x)}{\ln x}\overset{\left(\frac{\infty}{\infty}\right)}{\underset{DLH}{=}}\lim_{x\to 0^+}\frac{\frac{1}{\varepsilon\varphi x}\cdot\frac{1}{\sigma\upsilon\nu^2 x}}{\frac{1}{x}}=\lim_{x\to 0^+}\frac{x}{\varepsilon\varphi x\sigma\upsilon\nu^2 x}=$$

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{x}{\frac{\eta\mu x}{\cancel{\sigma\upsilon\nu x}}\sigma\upsilon\nu^{\cancel{2}}x}=\lim_{x\to 0^+}\frac{1}{\frac{\eta\mu x}{x}\sigma\upsilon\nu x}=1\text{, άρα }\lim_{x\to 0^+}(\varepsilon\varphi x)^{\frac{1}{\ln x}}=e$$

η) Για κάθε $x>0$ είναι $\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=e^{\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)^x}=e^{x\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)}$

Είναι $\lim\limits_{x\to+\infty}x\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)\overset{\infty\cdot 0}{=}\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)}{\frac{1}{x}}\overset{\frac{0}{0}}{\underset{DLH}{=}}\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\frac{1}{1+\frac{1}{x}}\left(-\frac{1}{x^2}\right)}{-\frac{1}{x^2}}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{1+\frac{1}{x}}=1$

οπότε $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=\lim\limits_{x\to+\infty}e^{x\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)}=e$

5.840. Εστω $\frac{1}{x}=u$, τότε $x=\frac{1}{u}$ και όταν $x\to-\infty$ είναι $u\to 0$. Τότε:

$$\lim_{x\to-\infty}\left(x-x^2\eta\mu\frac{1}{x}\right)=\lim_{u\to 0}\left(\frac{1}{u}-\frac{1}{u^2}\eta\mu u\right)=\lim_{u\to 0}\frac{u-\eta\mu u}{u^2}\overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{\underset{DLH}{=}}\lim_{u\to 0}\frac{(u-\eta\mu u)'}{(u^2)'}=$$

$$\lim_{u\to 0}\frac{1-\sigma\upsilon\nu u}{2u}=\lim_{u\to 0}\frac{1}{2}\cdot\frac{1-\sigma\upsilon\nu u}{u}=0$$

5.841. Εστω $f(x)=x^2\ln x+3x+e,\ x>0$. Είναι

$f'(x)=2x\ln x+x+3,\ f''(x)=2\ln x+2+1=2\ln x+3\geq 0\Leftrightarrow x\geq e^{-\frac{3}{2}}$

Για κάθε $x\in\left(0,e^{-\frac{3}{2}}\right)$ είναι $f''(x)<0\Rightarrow f'\downarrow\left(0,e^{-\frac{3}{2}}\right]$, οπότε

$f'(x)>f'\left(e^{-\frac{3}{2}}\right)=3-\dfrac{2}{e\sqrt{e}}>0\Rightarrow f\uparrow\left(0,e^{-\frac{3}{2}}\right]$.

Για κάθε $x>e^{-\frac{3}{2}}$ είναι $f''(x)>0\Rightarrow f'\uparrow\left[e^{-\frac{3}{2}},+\infty\right)$, οπότε

$f'(x)>f'\left(e^{-\frac{3}{2}}\right)=3-\dfrac{2}{e\sqrt{e}}>0\Rightarrow f\uparrow\left[e^{-\frac{3}{2}},+\infty\right)$.

Είναι $\lim\limits_{x\to 0^+}x^2\ln x=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{\ln x}{\frac{1}{x^2}}\underset{DLH}{\overset{\left(\frac{\infty}{\infty}\right)}{=}}\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{\frac{1}{x}}{-\frac{2}{x^3}}=\lim\limits_{x\to 0^+}\left(-\dfrac{x^2}{2}\right)=0$, άρα

$\lim\limits_{x\to 0^+}f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}\left(x^2\ln x+3x+e\right)=e$ και $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(x^2\ln x+3x+e\right)=+\infty$.

$f(A)=\left(\lim\limits_{x\to 0^+}f(x),\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)\right)=(e,+\infty)$, οπότε $f(x)>e>0$.

5.842. $x^x=2^{x+4}\Leftrightarrow\ln x^x=\ln 2^{x+4}\Leftrightarrow x\ln x=(x+4)\ln 2\Leftrightarrow$

$x\ln x-x\ln 2-4\ln 2=0\Leftrightarrow x(\ln x-\ln 2)-4\ln 2=0\Leftrightarrow x\ln\dfrac{x}{2}-4\ln 2=0$.

Εστω $f(x)=x\ln\dfrac{x}{2}-4\ln 2,\ x>0$. Είναι $f'(x)=\ln\dfrac{x}{2}+x\dfrac{1}{\frac{x}{2}}\dfrac{1}{2}=\ln\dfrac{x}{2}+1$.

$f'(x)\geq 0\Leftrightarrow\ln\dfrac{x}{2}+1\geq 0\Leftrightarrow\ln\dfrac{x}{2}\geq -1\Leftrightarrow\dfrac{x}{2}\geq\dfrac{1}{e}\Leftrightarrow x\geq\dfrac{2}{e}$.

Αν $x\in\left(0,\dfrac{2}{e}\right)$, είναι $f'(x)<0$ και f γνησίως φθίνουσα στο $\left(0,\dfrac{2}{e}\right]$.

Αν $x\in\left(\dfrac{2}{e},+\infty\right)$ είναι $f'(x)>0$ και f γνησίως αύξουσα στο $\left[\dfrac{2}{e},+\infty\right)$.

Είναι $\lim\limits_{x\to 0^+}x\ln\dfrac{x}{2}=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{\ln x-\ln 2}{\frac{1}{x}}\underset{DLH}{\overset{\frac{\infty}{\infty}}{=}}\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}}=\lim\limits_{x\to 0^+}(-x)=0$, άρα

$\lim\limits_{x\to 0^+}f(x)=-4\ln 2$ και $f\left(\dfrac{2}{e}\right)=-\dfrac{2}{e}-4\ln 2$, άρα το διάστημα $\Delta_1=\left(0,\dfrac{2}{e}\right]$, έχει σύνολο

τιμών: $f(\Delta_1)=\left[-\dfrac{2}{e}-4\ln 2,-4\ln 2\right)$. Άρα $f(x)<0$ για κάθε $x\in\left(0,\dfrac{2}{e}\right]$.

Επειδή $f(4)=4\ln2-4\ln2=0$ και f γνησίως αύξουσα στο $\left[\frac{2}{e},+\infty\right)$, η $x=4$ είναι η μοναδική ρίζα της εξίσωσης $f(x)=0$.

5.843. α) $x\ln x\geq x-1\Leftrightarrow x\ln x-x+1\geq 0$.

Εστω $f(x)=x\ln x-x+1,\ x>0$.

Η f είναι παραγωγίσιμη στο $(0,+\infty)$ με $f'(x)=\ln x+1-1=\ln x$.

$f'(x)\geq 0\Leftrightarrow \ln x\geq 0\Leftrightarrow x\geq 1$

x	0	1	$+\infty$
f'	-	0	+
f	$\searrow$	Ο.Ε	$\nearrow$

Για κάθε $x\in(0,1)$ είναι $f'(x)<0$, άρα η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $(0,1]$.

Για κάθε $x\in(1,+\infty)$ είναι $f'(x)>0$, άρα η f είναι γνησίως αύξουσα στο $[1,+\infty)$. Η f έχει ελάχιστο το $f(1)=\ln1-1+1=0$, άρα $f(x)\geq f(1)\Leftrightarrow x\ln x-x+1\geq 0$.

β) Εστω $g(x)=2x^2\ln x-3x^2+4x-1,\ x>0$.

Η g είναι παραγωγίσιμη στο $(0,+\infty)$ με

$$g'(x)=4x\ln x+2x-6x+4=4x\ln x-4x+4=4(x\ln x-x+1)=4f(x)$$

Για κάθε $x\in(0,1)\cup(1,+\infty)$ είναι $g'(x)>0$, άρα η g είναι γνησίως αύξουσα στο $(0,+\infty)$.

Είναι $\lim\limits_{x\to0^+}x^2\ln x=\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{\ln x}{\frac{1}{x^2}}\overset{\frac{\infty}{\infty}}{\underset{\text{DLH}}{=}}\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{\frac{1}{x}}{-\frac{2}{x^3}}=\lim\limits_{x\to0^+}\left(-\dfrac{x^2}{2}\right)=0$, οπότε

$$\lim_{x\to0^+}g(x)=\lim_{x\to0^+}\left(2x^2\ln x-3x^2+4x-1\right)=-1.$$

$$\lim_{x\to+\infty}g(x)=\lim_{x\to+\infty}\left[x^2\left(2\ln x-3+\frac{4}{x}-\frac{1}{x^2}\right)\right]=+\infty.$$

Για το σύνολο τιμών της f έχουμε: $f(A)=\left(\lim\limits_{x\to0^+}g(x),\lim\limits_{x\to+\infty}g(x)\right)=(-1,+\infty)$.

Επειδή το 0 περιέχεται στο σύνολο τιμών της f και η f είναι συνεχής και γνησίως αύξουσα στο $(0,+\infty)$, η εξίσωση $f(x)=0$ έχει μοναδική ρίζα στο $(0,+\infty)$.

5.844. Εστω $f(x)=\ln^2x-2x\ln x+1,\ x\in(0,+\infty)$. Η f είναι παραγωγίσιμη στο $(0,+\infty)$ με:

$$f'(x)=2\ln x(\ln x)'-\left(2\ln x+2x\frac{1}{x}\right)+1=2\frac{\ln x}{x}-2\ln x-2+1=2\frac{\ln x}{x}-2\ln x-1$$

και $f''(x)=2\dfrac{1-\ln x}{x^2}-\dfrac{2}{x}=2\dfrac{1-\ln x-x}{x^2}$.

Παρατηρούμε ότι το πρόσημο της f'' εξαρτάται από το πρόσημο της παράστασης $1-\ln x-x$.

Εστω $g(x)=1-\ln x-x$, $x\in(0,+\infty)$. Η g είναι παραγωγίσιμη στο $(0,+\infty)$ με:

$g'(x)=-\frac{1}{x}-1$. Είναι $g'(x)<0$ άρα η g είναι γνησίως φθίνουσα στο $(0,+\infty)$.

Παρατηρούμε ότι $g(1)=0$.

Για κάθε $x>1$ είναι $g(x)<g(1)=0$, άρα $f''(x)<0$ και η f' είναι γνησίως φθίνουσα στο $[1,+\infty)$. Άρα $f'(x)<f'(1)=-2<0$, οπότε η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $[1,+\infty)$.

Για κάθε $0<x<1$ είναι $g(x)>g(1)=0$, άρα $f''(x)>0$ και η f' είναι γνησίως αύξουσα στο $(0,1]$. Άρα $f'(x)<f'(1)=-2<0$, οπότε η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $(0,1]$.Επειδή η f είναι συνεχής στο $(0,+\infty)$, είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα αυτό.

Είναι $\lim\limits_{x\to0^+} f(x)=\lim\limits_{x\to0^+}\left(\ln^2x-2x\ln x+1\right)=+\infty$, γιατί $\lim\limits_{x\to0^+}\ln^2x=+\infty$ και

$$\lim_{x\to0^+}x\ln x=\lim_{x\to0^+}\frac{\ln x}{\frac{1}{x}}\underset{DLH}{\overset{\frac{\infty}{\infty}}{=}}\lim_{x\to0^+}\frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}}=\lim_{x\to0^+}(-x)=0.$$

Ακόμη $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left[x\left(\frac{\ln^2x}{x}-2\ln x+\frac{1}{x}\right)\right]=-\infty$, γιατί

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln^2x}{x}\underset{DLH}{\overset{\frac{\infty}{\infty}}{=}}\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{2\ln x}{x}}{1}=\lim_{x\to+\infty}\frac{2\ln x}{x}\underset{DLH}{\overset{\frac{\infty}{\infty}}{=}}\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{2}{x}}{1}=\lim_{x\to+\infty}\frac{2}{x}=0 \text{ και}$$

$\lim\limits_{x\to+\infty}\ln x=+\infty$

Για το σύνολο τιμών της f έχουμε:

$f((0,+\infty))=\left(\lim\limits_{x\to+\infty}f(x),\lim\limits_{x\to0^+}f(x)\right)=(-\infty,+\infty)=\mathbb{R}$.

Επειδή το 0 ανήκει στο σύνολο τιμών της f και η f είναι γνησίως φθίνουσα, υπάρχει μοναδικό $x_0\in(0,+\infty)$ τέτοιο, ώστε $f(x_0)=0$.

5.845. Για κάθε $x\in(0,1)\cup(1,+\infty)$ είναι $f'(x)=\frac{(\ln x+1)(x-1)-x\ln x}{(x-1)^2}=\frac{x-\ln x-1}{(x-1)^2}$

Εστω $g(x)=x-\ln x-1,\ x>0$. Είναι $g'(x)=1-\frac{1}{x}=\frac{x-1}{x}\geq0\Leftrightarrow x\geq1$.

Για κάθε $x\in(0,1)$ είναι $g'(x)<0\Rightarrow g\downarrow(0,1]$, άρα

$g(x)>g(1)=0\Rightarrow f'(x)>0\Rightarrow f\uparrow(0,1)$.

Για κάθε $x>1$ είναι $g'(x)>0\Rightarrow g\uparrow[1,+\infty)$, άρα

$g(x)>g(1)=0\Rightarrow f'(x)>0\Rightarrow f\uparrow(1,+\infty)$.

$$\lim_{x\to0^+}x\ln x=\lim_{x\to0^+}\frac{\ln x}{\frac{1}{x}}\underset{DLH}{\overset{\frac{\infty}{\infty}}{=}}\lim_{x\to0^+}\frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}}=\lim_{x\to0^+}(-x)=0,\text{ άρα }\lim_{x\to0^+}f(x)=0.$$

$$\lim_{x\to1^-}f(x)=\lim_{x\to1^-}\frac{x\ln x}{x-1}\underset{DLH}{\overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=}}\lim_{x\to1^-}\frac{\ln x+1}{1}=1=\lim_{x\to1^+}f(x)\text{ και}$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{x\ln x}{x-1}\underset{DLH}{\overset{\left(\frac{\infty}{\infty}\right)}{=}}\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln x+1}{1}=+\infty.$$

Στο διάστημα $\Delta_1=(0,1)$ η f είναι συνεχής και γνησίως αύξουσα, άρα

$$f(\Delta_1)=\left(\lim_{x\to0^+} f(x),\lim_{x\to1^-} f(x)\right)=(0,1)$$

Στο διάστημα $\Delta_2=(1,+\infty)$ η f είναι συνεχής και γνησίως αύξουσα, άρα

$$f(\Delta_2)=\left(\lim_{x\to1^+} f(x),\lim_{x\to+\infty} f(x)\right)=(1,+\infty),\text{ άρα}$$

$$f(A)=f(\Delta_1)\cup f(\Delta_2)=(0,1)\cup(1,+\infty)$$

5.846. Αρκεί η $\ln x=\alpha x$ να έχει δύο ρίζες.

Εστω $g(x)=\ln x-\alpha x$, $x>0$.

$g(1)=-\alpha<0$, $g(e)=1-\alpha e>0$, δηλαδή $g(1)g(e)<0$.

Οπότε λόγω Θ. Bolzano υπάρχει $x_1\in(1,e):g(x_1)=0$.

Είναι $\lim_{x\to+\infty} g(x)=\lim_{x\to+\infty}(\ln x-\alpha x)=\lim_{x\to+\infty}\left[x\left(\frac{\ln x}{x}-\alpha\right)\right]=-\infty$,

γιατί $\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x}\overset{\frac{\infty}{\infty}}{=}\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{1}{x}}{1}=0$, οπότε υπάρχει $\beta>e$ τέτοιος, ώστε $g(\beta)<0$.

Είναι $g(e)g(\beta)<0$, άρα λόγω Θ. Bolzano υπάρχει $x_2\in(e,\beta):g(x_2)=0$.

Εστω ότι η g έχει και τρίτη ρίζα, την $x_3>x_2>x_1$, τότε, λόγω Θ. Rolle η εξίσωση $g'(x)=\frac{1}{x}-\alpha=0$ έχει τουλάχιστον 2 ρίζες.

Είναι $\frac{1}{x}-\alpha=0\Leftrightarrow x=\frac{1}{\alpha}$ που είναι μοναδική.

Άρα, η $g(x)=0$ δεν έχει 3 ρίζες και έχει ακριβώς 2.

5.847. **α)** $f'(x)=\lambda\left(\frac{1}{2\sqrt{x}}\cdot\ln x+\sqrt{x}\cdot\frac{1}{x}\right)$

$f'(1)=\lambda_\varepsilon=e\Leftrightarrow\lambda=e$

β)i. $f'(x)=e\left(\frac{\ln x}{2\sqrt{x}}+\sqrt{x}\cdot\frac{1}{x}\right)=e\frac{\ln x+2}{2\sqrt{x}}\geq0\Leftrightarrow\ln x+2\geq0\Leftrightarrow\ln x\geq-2\Leftrightarrow x\geq e^{-2}$

Για κάθε $x\in(0,e^{-2})$ είναι $f'(x)<0\Rightarrow f\downarrow(0,e^{-2}]$ και για κάθε $x>e^{-2}$ είναι $f'(x)>0\Rightarrow f\uparrow[e^{-2},+\infty)$. Η f έχει ελάχιστο το $f(e^{-2})=0$

ii. $\lim_{x\to0^+}\sqrt{x}\ln x=\lim_{x\to0^+}\frac{\ln x}{\frac{1}{\sqrt{x}}}\underset{DLH}{\overset{\left(\frac{\infty}{\infty}\right)}{=}}\lim_{x\to0^+}\frac{\frac{1}{\cancel{x}}}{-\frac{1}{2\cancel{x}\sqrt{x}}}=\lim_{x\to0^+}(-2\sqrt{x})=0$, άρα $\lim_{x\to0^+} f(x)=2$

και $\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty}(e\sqrt{x}\ln x+2)=+\infty$.

Στο διάστημα $\Delta_1=\left(0,e^{-2}\right]$ η f είναι συνεχής και γνησίως φθίνουσα, άρα $f\left(\Delta_1\right)=\left(0,2\right]$.Στο διάστημα $\Delta_2=\left[e^{-2},+\infty\right)$ η f είναι συνεχής και γνησίως αύξουσα, άρα $f\left(\Delta_2\right)=\left[0,+\infty\right)$. Είναι $f\left(A\right)=f\left(\Delta_1\right)\cup f\left(\Delta_2\right)=\left[0,+\infty\right)$, άρα $f\left(x\right)\geq 0$ για κάθε $x>0$.

iii. $e^{-2}<x<x+1\overset{f\uparrow}{\Rightarrow} f\left(x\right)<f\left(x+1\right)\Leftrightarrow e\sqrt{x}\ln x+\cancel{2}<e\sqrt{x+1}\ln\left(x+1\right)+\cancel{2}\Leftrightarrow$

$\cancel{e}\sqrt{x}\ln x<\cancel{e}\sqrt{x+1}\ln\left(x+1\right)\Leftrightarrow \ln x^{\sqrt{x}}<\ln\left(x+1\right)^{\sqrt{x+1}}\Leftrightarrow x^{\sqrt{x}}<\left(x+1\right)^{\sqrt{x+1}}$

5.848. **α)** Η f είναι παραγωγίσιμη στο $\left(0,+\infty\right)$ με $f'\left(x\right)=\dfrac{2\ln x}{x}$.

$f'\left(x\right)\geq 0\Leftrightarrow \ln x\geq 0\Leftrightarrow x\geq 1$

Για κάθε $x\in\left(0,1\right)$ είναι $f'\left(x\right)<0$ άρα η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $\left(0,1\right]$.

Για κάθε $x\in\left(1,+\infty\right)$ είναι $f'\left(x\right)>0$ άρα η f είναι γνησίως αύξουσα στο $\left[1,+\infty\right)$.

β) i. Η g είναι παραγωγίσιμη στο $\left(1,+\infty\right)$ με $g'\left(x\right)=e^{f(x)}f'\left(x\right)>0$ άρα η g είναι γνησίως αύξουσα στο $\left(1,+\infty\right)$,οπότε είναι και 1-1 και αντιστρέφεται.

Είναι $g\left(x\right)=y\Leftrightarrow e^{\ln^2 x}=y\Leftrightarrow \ln^2 x=\ln y\Leftrightarrow \ln x=\sqrt{\ln y}\Leftrightarrow x=e^{\sqrt{\ln y}}$ άρα

$g^{-1}\left(x\right)=e^{\sqrt{\ln x}}$

ii. Επειδή η g είναι γνησίως αύξουσα στο $\left(1,+\infty\right)$, ισχύει:

$g\left(x\right)>g^{-1}\left(x\right)\Leftrightarrow g\left(x\right)>x\Leftrightarrow e^{\ln^2 x}>x\Leftrightarrow \ln^2 x>\ln x\Leftrightarrow$

$\ln x\left(\ln x-1\right)>0\Leftrightarrow \ln x>1\Leftrightarrow x>e$

iii. $\displaystyle\lim_{x\to 1}\frac{g^{-1}\left(x\right)-1}{\sqrt[4]{f\left(x\right)}}=\lim_{x\to 1}\frac{e^{\sqrt{\ln x}}-1}{\sqrt{\ln x}}\overset{\sqrt{\ln x}=u}{=}\lim_{u\to 0}\frac{e^u-1}{u}\underset{DLH}{\overset{\frac{0}{0}}{=}}\lim_{u\to 0}\frac{e^u}{1}=1$

$\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln g^{-1}\left(x\right)}{f\left(x\right)}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln e^{\sqrt{\ln x}}}{\ln^2 x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{\ln x}}{\ln^2 x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{\ln x\sqrt{\ln x}}=0$

5.849. **α)** $\displaystyle\lim_{x\to 1}\frac{1-e^{-x+1}}{x-1}\underset{DLH}{\overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=}}\lim_{x\to 1}\frac{e^{-x+1}}{1}=1$

β) $\displaystyle\lim_{x\to 1^-}f\left(x\right)=1+\alpha=f\left(1\right)$ και

$\displaystyle\lim_{x\to 1^+}f\left(x\right)=\lim_{x\to 1^+}\left[\left(1-e^{-x+1}\right)\ln\left(x-1\right)\right]=\lim_{x\to 1^+}\left[\frac{1-e^{-x+1}}{x-1}\left(x-1\right)\ln\left(x-1\right)\right]=1\cdot 0=0$

γιατί $\displaystyle\lim_{x\to 1}\frac{1-e^{-x+1}}{x-1}=1$ και

$\displaystyle\lim_{x\to 1^+}\left(x-1\right)\ln\left(x-1\right)\overset{0\cdot\infty}{=}\lim_{x\to 1^+}\frac{\ln\left(x-1\right)}{\frac{1}{x-1}}\underset{DLH}{\overset{\left(\frac{\infty}{\infty}\right)}{=}}\lim_{x\to 1^+}\frac{\frac{1}{\cancel{x-1}}}{-\frac{1}{\left(x-1\right)^{\cancel{2}}}}=\lim_{x\to 1^+}\left(-x+1\right)=0.$

Για να είναι η f συνεχής στο $x_0=1$ πρέπει $1+\alpha=0\Leftrightarrow\alpha=-1$.

γ) Η f είναι συνεχής στο $[1,2]$, παραγωγίσιμη στο $(1,2)$ και $f(1)=f(2)=0$, άρα από το θ.Rolle υπάρχει $\xi\in(1,2)$ τέτοιο, ώστε $f'(\xi)=0$.

5.850. **α)** $f'(x)=1-\frac{1}{x}+e^x=\frac{x-1}{x}+e^x>0\Rightarrow f\uparrow(1,+\infty)$

β) $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x}\overset{\left(\frac{\infty}{\infty}\right)}{\underset{DLH}{=}}\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\frac{1}{x}}{1}=0$, $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{e^x}{x}\overset{\left(\frac{\infty}{\infty}\right)}{\underset{DLH}{=}}\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{e^x}{1}=+\infty$,

$\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left[x\left(1-\frac{\ln x}{x}+\frac{e^x}{x}\right)\right]=+\infty$

γ) $\lim\limits_{x\to1^+}f(x)=1+e$, $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$, άρα $f((1,+\infty))=(1+e,+\infty)$.

Το 1821 ανήκει στο σύνολο τιμών της f, οπότε η εξίσωση $f(x)=1821$ έχει μοναδική λύση στο $(1,+\infty)$.

5.851. **α)** $f(x)=x^2\cdot\ln x,\ x>0$

Η f είναι παραγωγίσιμη στο $(0,+\infty)$ με $f'(x)=2x\ln x+x=x(2\ln x+1)$.

Είναι : $f'(x)\geq0\Leftrightarrow x(2\ln x+1)\geq0\overset{x>0}{\Leftrightarrow}2\ln x+1\geq0\Leftrightarrow\ln x\geq-\frac{1}{2}\Leftrightarrow x\geq e^{-\frac{1}{2}}=\frac{1}{\sqrt{e}}$.

Για κάθε $0<x<\frac{1}{\sqrt{e}}$ είναι $f'(x)<0$ και f γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $\left(0,\frac{1}{\sqrt{e}}\right]$.

Για κάθε $x>\frac{1}{\sqrt{e}}$ είναι $f'(x)>0$ και f γνησίως αύξουσα στο διάστημα $\left[\frac{1}{\sqrt{e}},+\infty\right)$.

Η f παρουσιάζει ολικό ελάχιστο στο $x=\frac{1}{\sqrt{e}}$ το

$$f\left(\frac{1}{\sqrt{e}}\right)=\left(\frac{1}{\sqrt{e}}\right)^2\cdot\ln\frac{1}{\sqrt{e}}=\frac{1}{e}\cdot\ln e^{-\frac{1}{2}}=-\frac{1}{2e}.$$

β) Η f' είναι παραγωγίσιμη στο $(0,+\infty)$ με $f''(x)=2\ln x+2+1=2\ln x+3$.

$f''(x)=0\Leftrightarrow2\ln x+3=0\Leftrightarrow\ln x=-\frac{3}{2}\Leftrightarrow x=e^{-\frac{3}{2}}=\frac{1}{e\sqrt{e}}$.

Για $x<\frac{1}{e\sqrt{e}}$ είναι $f''(x)<0$ και f κοίλη στο $\left(0,\frac{1}{e\sqrt{e}}\right]$.

Για $x>\frac{1}{e\sqrt{e}}$ είναι $f''(x)>0$ και f κυρτή στο $\left[\frac{1}{e\sqrt{e}},+\infty\right)$.

Η f έχει σημείο καμπής το $\left(\frac{1}{e\sqrt{e}},f\left(\frac{1}{e\sqrt{e}}\right)\right)$ δηλαδή το $\left(\frac{1}{e\sqrt{e}},\frac{-3}{2e^3}\right)$.

γ) Είναι $\lim\limits_{x\to0}f(x)=\lim\limits_{x\to0}x^2\ln x=\lim\limits_{x\to0}\frac{\ln x}{\frac{1}{x^2}}\overset{\left(\frac{\infty}{\infty}\right)}{=}\lim\limits_{x\to0}\frac{(\ln x)'}{\left(\frac{1}{x^2}\right)'}=\lim\limits_{x\to0}\frac{\frac{1}{x}}{\frac{-2}{x^3}}=\lim\limits_{x\to0}-\frac{x^2}{2}=0$ και

$\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}(x^2\ln x)=+\infty$ αφού $\lim\limits_{x\to+\infty}x^2=+\infty$ και $\lim\limits_{x\to+\infty}\ln x=+\infty$.

Για το διάστημα $\Delta_1=\left(0,\frac{1}{\sqrt{e}}\right]$ είναι : $f(\Delta_1)=\left[f\left(\frac{1}{\sqrt{e}}\right),\lim\limits_{x\to 0^+}f(x)\right)=\left[-\frac{1}{2e},+\infty\right)$.

Για το διάστημα $\Delta_2=\left[\frac{1}{\sqrt{e}},+\infty\right)$ είναι : $f(\Delta_2)=\left[f\left(\frac{1}{\sqrt{e}}\right),\lim\limits_{x\to +\infty}f(x)\right)=\left[-\frac{1}{2e},+\infty\right)$.

Για το σύνολο τιμών της f έχουμε : $f(A)=f(\Delta_1)\cup f(\Delta_2)=\left[-\frac{1}{2e},+\infty\right)$.

5.852. α) i. Εστω $g(t)=\ln t,\ t\in[x,x+1],\ x>0$.

Η g είναι συνεχής στο $[x,x+1]$ και παραγωγίσιμη στο $(x,x+1)$ με $g'(t)=\frac{1}{t}$,

οπότε λόγω του Θ.Μ.Τ υπάρχει $\xi\in(x,x+1)$ τέτοιο, ώστε :

$$g'(\xi)=\frac{g(x+1)-g(x)}{x+1-x}\Leftrightarrow\frac{1}{\xi}=\ln(x+1)-\ln x.$$

Είναι $x<\xi<x+1$ άρα $\frac{1}{\xi}<\frac{1}{x}\Leftrightarrow\ln(x+1)-\ln x<\frac{1}{x}$.

ii. Είναι : $f'(x)=\ln(x+1)+x\cdot\frac{1}{x+1}-\ln x-\frac{x+1}{x}\Leftrightarrow$

$$f'(x)=\left(\ln(x+1)-\ln x\right)+\frac{x}{x+1}-\frac{x+1}{x}<\frac{1}{x}+\frac{x}{x+1}-\frac{x+1}{x}=-\frac{1}{x+1}<0,$$

άρα $f\downarrow(0,+\infty)$.

β) $$\lim_{x\to+\infty}\left[x\cdot\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)\right]=\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)}{\frac{1}{x}}\overset{\frac{0}{0}}{=}\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{1}{1+\frac{1}{x}}\cdot\left(-\frac{1}{x^2}\right)}{\left(-\frac{1}{x^2}\right)}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{1+\frac{1}{x}}=1.$$

γ) Είναι : $f(x)=x\ln(x+1)-x\ln x-\ln x=x\left(\ln(x+1)-\ln x\right)-\ln x=x\ln\frac{x+1}{x}-\ln x=$

$$=x\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)-\ln x.$$

Είναι : $$\lim_{x\to0^+}x\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)=\lim_{x\to0^+}\frac{\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)}{\frac{1}{x}}\overset{\frac{\infty}{\infty}}{=}\lim_{x\to0^+}\frac{\frac{1}{1+\frac{1}{x}}\cdot\left(-\frac{1}{x^2}\right)}{-\frac{1}{x^2}}=\lim_{x\to0^+}\frac{1}{1+\frac{1}{x}}=0$$

και $\lim\limits_{x\to0^+}\ln x=-\infty$, οπότε $\lim\limits_{x\to0^+}f(x)=+\infty$.

Επειδή $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[x\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)\right]=1$ και $\lim\limits_{x\to+\infty}\ln x=+\infty$, είναι $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=-\infty$.

Για το σύνολο τιμών της f, έχουμε :

$$f(A)=f\left((0,+\infty)\right)=\left(\lim_{x\to+\infty}f(x),\lim_{x\to0^+}f(x)\right)=\mathbb{R}.$$

Επειδή $0\in f(A)$ και $f\downarrow(0,+\infty)$ υπάρχει μοναδικός $\alpha\in(0,+\infty)$ τέτοιος, ώστε :

$$f(\alpha)=0\Leftrightarrow\ \alpha\cdot\ln(\alpha+1)-(\alpha+1)\ln\alpha=0\Leftrightarrow\ln(\alpha+1)^{\alpha}=\ln\alpha^{\alpha+1}\Leftrightarrow(\alpha+1)^{\alpha}=\alpha^{\alpha+1}.$$

5.853. α) Είναι $f'(x)=\dfrac{\ln(x+1)+x}{x+1}$

Εστω $g(x)=\ln(x+1)+x$ με $g'(x)=1+\dfrac{1}{x+1}>0$ για $x>-1$

Παρατηρούμε ότι $g(0)=0$ οπότε η g έχει μοναδική ρίζα την $x=0$.

Για $-1<x<0 \overset{g\uparrow}{\Rightarrow} g(x)<g(0)$ οπότε $f'(x)<0 \Rightarrow f\downarrow(0,1]$

Για $x>0 \overset{g\uparrow}{\Rightarrow} g(x)>g(0)$ οπότε $f'(x)>0 \Rightarrow f\uparrow[0,+\infty)$

Άρα η f έχει ολικό ελάχιστο για $x=0$ το $f(0)=0$.

β) Η εξίσωση είναι ισοδύναμη με την $f(x)=0$ και επειδή $f(x)>0$ για κάθε $x\in(-1,0)\cup(0,+\infty)$ και $f(0)=0$ τότε η εξίσωση έχει μοναδική ρίζα $x=0$

γ) Επειδή $\lim\limits_{x\to -1^+}\ln(x+1)=-\infty$, είναι $\lim\limits_{x\to -1^+} f(x)=+\infty$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty}\left[x\left(1-\frac{\ln(x+1)}{x}+\frac{1}{2}\frac{\ln^2(x+1)}{x}\right)\right]=\ldots=+\infty \text{ γιατί}$$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln(x+1)}{x}\underset{DLH}{\overset{\frac{\infty}{\infty}}{=}}\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{1}{x+1}}{1}=0,$$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln^2(x+1)}{x}\underset{DLH}{\overset{\frac{\infty}{\infty}}{=}}\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{2\ln(x+1)}{x+1}}{1}=\lim_{x\to+\infty}\frac{2\ln(x+1)}{x+1}\underset{DLH}{\overset{\frac{\infty}{\infty}}{=}}\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{2}{x+1}}{1}=0$$

Για το $\Delta_1=(-1,0]$ είναι $f(\Delta_1)=[0,+\infty)$ και για το $\Delta_2=[0,+\infty)$ είναι $f(\Delta_2)=[0,+\infty)$, οπότε το $f(A)=[0,+\infty)$.

5.854. α) $f'(x)=2e^{-x^2}(1-2x^2)$

x	$-\infty$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$		$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$+\infty$
f'	$-$		$+$		$-$
f	↘	Τ.Ε.	↗	Τ.Μ.	↘

τ. ε $f\left(-\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)=-\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{e}}$,

τ.μ. $f\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)=\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{e}}$

β) $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{2x}{e^{x^2}}\overset{\frac{-\infty}{+\infty}}{=}\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{2}{2xe^{x^2}}=0$, $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2x}{e^{x^2}}\overset{\frac{-\infty}{+\infty}}{=}\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2}{2xe^{x^2}}=0$

Οπότε $f(A)=\left[-\sqrt{\dfrac{2}{e}},\sqrt{\dfrac{2}{e}}\right]$

γ) $f''(x)=4xe^{-x^2}(2x^2-3)$

Τα Σ.Κ. είναι $O(0,0)$

$A\left(-\sqrt{\dfrac{3}{2}},\,-2\sqrt{\dfrac{3}{2}}e^{-\frac{3}{2}}\right)$, $B\left(\sqrt{\dfrac{3}{2}},\,2\sqrt{\dfrac{3}{2}}e^{-\frac{3}{2}}\right)$

x	$-\infty$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$		0		$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$+\infty$
f''	$-$		$+$		$-$		$+$
f	∩	ΣΚ	∪	ΣΚ	∩	ΣΚ	∪

Το Ο είναι μέσο του ΑΒ, οπότε τα Α,Ο,Β είναι συνευθειακά.

5.855. α) $h'(x)=\dfrac{f'(x)}{f(x)}+x$, $h''(x)=\dfrac{f''(x)f(x)-(f'(x))^2}{f^2(x)}+1$

Όμως $h''(x)>1$ άρα $\dfrac{f''(x)f(x)-(f'(x))^2}{f^2(x)}>0 \Leftrightarrow f''(x)f(x)>f^2(x)\geq 0$ άρα

$f''(x)f(x)>0 \overset{f(x)>0}{\Rightarrow}$ τότε $f''(x)>0$ άρα f κυρτή.

β) Είναι $\dfrac{f(4)}{f(2)}=e^{-6}$ οπότε $\ln\dfrac{f(4)}{f(2)}=\ln e^{-6} \Leftrightarrow \ln f(4)-\ln f(2)=-6 \Leftrightarrow$

$\ln f(4)+8=\ln f(2)+2 \Leftrightarrow \ln f(4)+\dfrac{1}{2}4^2=\ln f(2)+\dfrac{1}{2}2^2$

Άρα $h(4)=h(2)$ οπότε από Θ. Rolle $\exists x_0\in(2,4): h'(x_0)=0$

$\dfrac{f'(x_0)}{f(x_0)}+x_0=0 \Leftrightarrow f'(x_0)=-x_0 f(x_0)$

γ) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(\ln x)}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\left[\dfrac{f(\ln x)}{\ln x}\dfrac{\ln x}{x}\right]=2014\cdot 0$ γιατί

$\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(\ln x)}{\ln x}\overset{\ln x=u}{=}\lim\limits_{u\to+\infty}\dfrac{f(\ln u)}{u}=2014$ και $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln x}{x}\overset{\frac{-\infty}{+\infty}}{=}\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\frac{1}{x}}{1}=\dfrac{1}{x}$

5.856. α) $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=+\infty$ γιατί $\lim\limits_{x\to-\infty}x^2=+\infty$, $\lim\limits_{x\to-\infty}e^{\frac{1}{x}}=1$, $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(e^x-2ex\right)=+\infty$,

$\lim\limits_{x\to 0^-}f(x)=1$,

Είναι $\lim\limits_{x\to 0^+}x^2e^{\frac{1}{x}}=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{e^{\frac{1}{x}}}{\frac{1}{x^2}}\overset{\frac{1}{x}=u}{=}\lim\limits_{u\to+\infty}\dfrac{e^u}{u^2}\underset{DLH}{\overset{\left(\frac{\infty}{\infty}\right)}{=}}\lim\limits_{u\to+\infty}\dfrac{e^u}{2u}\underset{DLH}{\overset{\left(\frac{\infty}{\infty}\right)}{=}}\lim\limits_{u\to+\infty}\dfrac{e^u}{2}=+\infty$, οπότε και

$\lim\limits_{x\to 0^+}f(x)=+\infty$.

$\lim\limits_{x\to 0^-}x^2e^{\frac{1}{x}}=0$, $\lim\limits_{x\to 0^-}\left(e^x-2ex\right)=1$, άρα $\lim\limits_{x\to 0^-}f(x)=1$

$\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left[x^2\left(e^{\frac{1}{x}}+\dfrac{e^x}{x^2}-\dfrac{2e}{x}\right)\right]=+\infty$.

β) $f'(x)=2xe^{\frac{1}{x}}+x^2e^{\frac{1}{x}}\left(-\dfrac{1}{x^2}\right)+e^x-2e=2xe^{\frac{1}{x}}-e^{\frac{1}{x}}+e^x-2e=e^{\frac{1}{x}}(2x-1)+e^x-2e$,

$f''(x)=-e^{\frac{1}{x}}\dfrac{1}{x^2}(2x-1)+2e^{\frac{1}{x}}+e^x=e^{\frac{1}{x}}\dfrac{2x^2-2x+1}{x^2}+e^x>0\Rightarrow f'\uparrow$ σε καθένα από τα διαστήματα $(-\infty,0)$ και $(0,+\infty)$, οπότε η f είναι κυρτή στα διαστήματα αυτά.

Παρατηρούμε ότι $f'(1)=0$, οπότε για κάθε $x>1$ είναι $f'(x)>f'(1)=0\Rightarrow f\uparrow[1,+\infty)$ και για κάθε $x\in(0,1)$ είναι $f'(x)<f'(1)=0\Rightarrow f\downarrow(0,1]$. Η f έχει τοπικό ελάχιστο το $f(1)=0$.

$\lim\limits_{x\to-\infty} f'(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\left[e^{\frac{1}{x}}(2x-1)+e^x-2e\right]=-\infty$,

$\lim\limits_{x\to0^-} f'(x)=\lim\limits_{x\to0^-}\left[e^{\frac{1}{x}}(2x-1)+e^x-2e\right]=1-2e<0$. Το σύνολο τιμών της f' στο $(-\infty,0)$ είναι

το $f((-\infty,0))=(-\infty,1-2e)$, άρα $f'(x)<0\Rightarrow f\downarrow(-\infty,0)$

γ) $f([1,+\infty))=[0,+\infty)$, $f((-\infty,0))=(1,+\infty)$ και

$f((0,1])=[0,+\infty)$, άρα $f(A)=[0,+\infty)$

δ) $x^2e^{\frac{1}{x^2}}=2ex+\lambda-e^x\Leftrightarrow f(x)=\lambda$

- Αν $\lambda<0$ η εξίσωση δεν έχει καμία λύση.
- Αν $\lambda=0$ η εξίσωση έχει μία λύση την $\rho_1=1$.
- Αν $\lambda\in(0,1]$ η εξίσωση έχει δύο λύσεις $\rho_1\in(0,1)$, $\rho_2\in(1,+\infty)$.
- Αν $\lambda>1$ η εξίσωση έχει τρείς λύσεις.

5.857. α) i. $f'(x)=8x\ln x-8x+8$, $f''(x)=8\ln x$

Για κάθε $x>1$ είναι $f''(x)>0\Rightarrow f$ κυρτή στο $[1,+\infty)$ και για $x\in(0,1)$ είναι

$f''(x)<0\Rightarrow f$ κοίλη στο $(0,1]$. Σημείο καμπής το $(1,f(1))\equiv(1,3)$.

ii. $f''(x)>0\Rightarrow f'\uparrow[1,+\infty)$, οπότε για $x>1\Rightarrow f'(x)>f'(1)=0\Rightarrow f\uparrow[1,+\infty)$ και

$f''(x)<0\Rightarrow f'\downarrow(0,1]$, οπότε για $0<x<1\Rightarrow f'(x)>f'(1)=0\Rightarrow f\uparrow(0,1]$.

Επειδή η f είναι συνεχής, είναι $\uparrow$ στο $(0,+\infty)$.

β) i. Είναι $f(1)=0$ και αφού $f\uparrow$ τότε το $x_0=1$ μοναδική ρίζα της f.

Για $x<1$ είναι $f(x)<f(1)\Leftrightarrow f(x)<0$

Για $x>1$ είναι $f(x)>f(1)\Leftrightarrow f(x)>0$

ii. $\lim\limits_{x\to0^+} f(x)=\lim\limits_{x\to0^+}\left[4x^2\ln x+6x^2+8x-2\right]=-2$ γιατί

$$\lim_{x\to0^+}(x^2\ln x)=\lim_{x\to0^+}\frac{\ln x}{\frac{1}{x^2}}\overset{\frac{+\infty}{-\infty}}{=}\lim_{x\to0^+}\frac{\frac{1}{x}}{-\frac{2}{x^3}}=0 \text{ και } \lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty}\left[2x^2(2\ln x-3)+8x-2\right]=+\infty.$$

Άρα $f(A)=(-2,+\infty)$

5.858. α) $g'(x)=\dfrac{f'(x)x^2-f(x)2x}{x^4}=\dfrac{\cancel{x}(xf'(x)-2f(x))}{x^{\cancel{4}3}}=\dfrac{2\cancel{x}}{x^{\cancel{3}2}}>0\Rightarrow g\uparrow(0,+\infty)$

β) $xf'(x)-2f(x)=2x\Leftrightarrow x^2f'(x)-2xf(x)=2x^2\Leftrightarrow\dfrac{x^2f'(x)-2xf(x)}{x^4}=\dfrac{2}{x^2}\Leftrightarrow$

$$\left(\frac{f(x)}{x^2}\right)'=\left(-\frac{2}{x}\right)'\Leftrightarrow\frac{f(x)}{x^2}=-\frac{2}{x}+c\Leftrightarrow f(x)=-2x+cx^2,\ x>0,\ c\in\mathbb{R}.$$

$f(2)=0\Leftrightarrow -4+4c=0\Leftrightarrow c=1$, άρα $f(x)=x^2-2x,\ x>0$.

γ) $$\lim_{x\to2}\frac{h(x)}{\ln^2(x-1)}\overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{\underset{DLH}{=}}\lim_{x\to2}\frac{h'(x)}{\frac{2\ln(x-1)}{x-1}}=\lim_{x\to2}\frac{(x^2-2x)(x-1)}{2\ln(x-1)}\overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{\underset{DLH}{=}}$$

$$\lim_{x\to2}\frac{(2x-2)(x-1)+x^2-2x}{\frac{2}{x-1}}=0$$

5.859. α) $f'(x)=-\frac{1}{e^x}+1=1-\frac{1}{e^x}=\frac{e^x-1}{e^x}\geq0\Leftrightarrow e^x\geq1\Leftrightarrow x\geq0$

Για κάθε $x<0$ είναι $f'(x)<0\Rightarrow f\downarrow(-\infty,0]$ και για κάθε $x>0$ είναι $f'(x)>0\Rightarrow f\uparrow[0,+\infty)$. Η f έχει ελάχιστο για $x=0$ το $f(0)=0$.

β) Μοναδική ρίζα $x=0$ αφού $f(x)>f(0)=0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}^*$.

$$\lim_{x\to-\infty}f(x)=\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{1}{e^x}-1+x\right)=\lim_{x\to-\infty}\left[x\left(\frac{e^{-x}-1}{x}+1\right)\right]=+\infty \text{ γιατί}$$

$$\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{e^{-x}-1}{x}\right)\overset{\frac{+\infty}{-\infty}}{=}\lim_{x\to-\infty}\frac{-e^{-x}}{1}=-\infty$$

$\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{1}{e^x}-1+x\right)=+\infty$. Άρα το σύνολο τιμών $[0,+\infty)$.

γ) Για $x>0$ είναι $f(x)=f(x^3)+2\ln x\Leftrightarrow f(x)+\ln x=f(x^3)+3\ln x\Leftrightarrow$

$f(x)+\ln x=f(x^3)+\ln x^3\Leftrightarrow g(x)=g(x^3)$ όπου $g(x)=f(x)+\ln x$.

Για $0<x_1<x_2\overset{f\uparrow}{\Rightarrow}f(x_1)<f(x_2)$ και $\ln x_1<\ln x_2$, άρα και $g(x_1)<g(x_2)$

άρα $g\uparrow(0,+\infty)$ άρα και 1–1, οπότε $x^3=x\Leftrightarrow x=1$ αφού $x>0$.

5.860. α) $f'(x)=1007-\frac{x^2}{x^2+e^x}=\frac{1007x^2+1007e^x-x^2}{x^2+e^x}=\frac{1006x^2+1007e^x}{x^2+e^x}>0\Rightarrow f\uparrow\mathbb{R}$.

β) $$f''(x)=\frac{(2012x+1007e^x)(x^2+e^x)-(1006x^2+1007e^x)(2x+e^x)}{(x^2+e^x)^2}=\frac{e^x x(x-2)}{(x^2+e^x)^2}$$

η f κυρτή στα $(-\infty,0]$, $[2,+\infty)$ και κοίλη στο $[0,2]$ με σημεία καμπής $A(0,f(0))$ $B(2,f(2))$

x	$-\infty$		0		2		$+\infty$
f''		$+$		$-$		$+$	
f		$\cup$		$\cap$		$\cup$	

γ) Από Θ.Μ.Τ. για τη f στο $[x,x+2]$, $x>0$ υπάρχει $\xi\in(x,x+2)$, τέτοιο ώστε

$f'(\xi)=\dfrac{f(x+2)-f(x)}{2}$. Είναι

$$x<\xi<x+2 \underset{\substack{f \text{ κυρτή} \\ \text{στο } [2,+\infty)}}{\overset{f'\uparrow}{\Rightarrow}} f'(x)<\frac{f(x+2)-f(x)}{2}<f'(x+2)\Leftrightarrow$$

$$2f'(x)<f(x+2)-f(x)<2f'(x+2)$$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2}{x^2+e^x}\underset{DLH}{\overset{\left(\frac{+\infty}{+\infty}\right)}{=}}\lim_{x\to+\infty}\frac{2x}{2x+e^x}\overset{\left(\frac{+\infty}{+\infty}\right)}{=}\lim_{x\to+\infty}\frac{2}{2+e^x}=0 \text{ , άρα } \lim_{x\to+\infty}2f'(x)=2014$$

$\lim\limits_{x\to+\infty}2f'(x+2)\overset{x+2=u}{=}\lim\limits_{u\to+\infty}2f'(u)=2014$ οπότε από το κ. παρεμβολής

είναι και $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[f(x+2)-f(x)\right]=2014$.

5.861. α) Είναι $D_f=\mathbb{R}$ και $f'(x)=e^x-\alpha\ge 0\Leftrightarrow e^x\ge\alpha\Leftrightarrow x\ge\ln\alpha$

Για κάθε $x<\ln\alpha$ είναι $f'(x)<0\Rightarrow f\downarrow(-\infty,\ln\alpha]$ και για κάθε $x>\ln\alpha$ είναι $f'(x)>0\Rightarrow f\uparrow[\ln\alpha,+\infty)$. Η f έχει ελάχιστο για $x=\ln\alpha$ το $f(\ln\alpha)=\alpha-\alpha\ln\alpha-1$.

β) $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\left(e^x-\alpha x-1\right)=+\infty$ και $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left[x\left(\dfrac{e^x}{x}-\alpha-\dfrac{1}{x}\right)\right]=+\infty$ αφού

$\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{e^x}{x}\overset{\left(\frac{+\infty}{+\infty}\right)}{=}\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{e^x}{1}=+\infty$ και $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{x}=0$. Άρα $f(A)=\left[\alpha-\alpha\ln\alpha-1,+\infty\right)$

γ) Εστω $g(\alpha)=\alpha-\alpha\ln\alpha-1,\ \alpha\in[1,+\infty)$ είναι $g'(\alpha)=1-\ln\alpha-1=-\ln\alpha<0$ για

$\alpha>1$ άρα $g\downarrow$ οπότε $\alpha>1\Leftrightarrow g(\alpha)<g(1)\Leftrightarrow g(\alpha)<0$, άρα η $f(x)=0$ έχει δύο ρίζες μια $\rho_1\in(-\infty,\ln\alpha)$ και $\rho_2\in(\ln\alpha,+\infty)$.

5.862. α) Για $x>0$ η $f(x)=\dfrac{\ln(x+1)}{x}$ είναι συνεχής ως πηλίκο συνεχών συναρτήσεων.

Στο $x_0=0$ είναι: $\lim\limits_{x\to0^+}f(x)=\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{\ln(x+1)}{x}\overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=}\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{\frac{1}{x+1}}{1}=1=f(0)$.

Άρα η f συνεχής στο $[0,+\infty)$.

β) Για $x>0$ είναι $f'(x)=\dfrac{x-\ln(x+1)(x+1)}{x^2(x+1)}$. Επίσης

$$\lim_{x\to0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x}=\lim_{x\to0^+}\frac{\ln(x+1)-x}{x^2}\underset{DLH}{\overset{\frac{0}{0}}{=}}\lim_{x\to0^+}\frac{\frac{1}{x+1}-1}{2x}=\lim_{x\to0^+}\frac{-1}{2x+2}=-\frac{1}{2}$$

$$\text{Άρα } f'(x)=\begin{cases}\dfrac{x-\ln(x+1)(x+1)}{x^2(x+1)} & ,x>0\\[2ex] -\dfrac{1}{2} & ,x=0\end{cases}$$

γ) Εστω $g(x)=x-\ln(x+1)(x+1)$ με $g'(x)=-\ln(x+1)<0$ για $x>0$, άρα $g\downarrow$ και για

$x>0$ είναι $g(x)<g(0)=0$. Άρα $f'(x)=\dfrac{g(x)}{x^2(x+1)}<0 \Rightarrow f\downarrow(0,+\infty)$, άρα

$0<x<x+1 \overset{f\downarrow}{\Rightarrow} f(x)>f(x+1) \Leftrightarrow \dfrac{\ln(x+1)}{x}>\dfrac{\ln(x+2)}{x+1} \Leftrightarrow (x+1)^{x+1}>(x+2)^{x}$, οπότε για $x=2013$ προκύπτει $2014^{2014}>2015^{2013}$, δηλαδή $\alpha>\beta$.

δ) Είναι $f(e^x)\le \dfrac{x+k}{e^x} \Leftrightarrow \dfrac{\ln(e^x+1)}{e^x}\le\dfrac{x+k}{e^x} \Leftrightarrow \ln(e^x+1)-x\le k$ για κάθε $x\ge 0$. Έστω $\varphi(x)=\ln(e^x+1)-x$, $x\ge 0$

$\varphi'(x)=\dfrac{e^x}{e^x+1}-1=\dfrac{e^x-e^x-1}{e^x+1}=-\dfrac{1}{e^x+1}<0$, άρα $\varphi\downarrow$ στο $[0,+\infty)$. Συνεπώς για $x\ge 0$ είναι $\varphi(x)\le\varphi(0)\Leftrightarrow\varphi(x)\le\ln 2$. Άρα $k_{min}=\ln 2$

ε) Είναι $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{e^{f(x)}-e+\lambda x}{x}=0 \Leftrightarrow \lim\limits_{x\to 0^+}\left[\dfrac{e^{f(x)}-e}{x}+\lambda\right]=0 \quad (1)$. Αρκεί να υπολογίσουμε

το $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{e^{f(x)}-e}{x}$ το οποίο αφού η f είναι συνεχής στο $x_0=0$ είναι

$\lim\limits_{x\to 0^+}f(x)=f(0)=1$, οπότε είναι της μορφής $\left(\dfrac{0}{0}\right)$. Έχουμε

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{e^{f(x)}-e}{x}=\lim_{x\to 0^+}\frac{e^{f(x)}\cdot f'(x)}{1} \text{ με } \lim_{x\to 0^+}e^{f(x)}=e^1=e \text{ και}$$

$$\lim_{x\to 0^+}f'(x)=\lim_{x\to 0^+}\frac{x-\ln(x+1)(x+1)}{x^2(x+1)}=\lim_{x\to 0^+}\left[\frac{1}{x+1}\cdot\frac{x-\ln(x+1)(x+1)}{x^2}\right]=-\frac{1}{2} \text{ γιατί}$$

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{x-\ln(x+1)(x+1)}{x^2}\underset{DLH}{\overset{\frac{0}{0}}{=}}\lim_{x\to 0^+}\frac{1-1-\ln(x+1)}{2x}\underset{DLH}{\overset{\frac{0}{0}}{=}}\lim_{x\to 0^+}\frac{-\frac{1}{x+1}}{2}=-\frac{1}{2}. \text{ Άρα}$$

$\lim\limits_{x\to 0}e^{f(x)}\cdot f'(x)=e\cdot\left(-\dfrac{1}{2}\right)=-\dfrac{e}{2}$. Συνεπώς από (1) $(1)\Rightarrow -\dfrac{e}{2}+\lambda=0\Leftrightarrow\lambda=\dfrac{e}{2}$

5.863. **α)** Η f είναι παραγωγίσιμη στο $(0,+\infty)$ με: $f'(x)=2x(\ln x-\lambda)+x$

Επειδή η ευθεία $y=-2x+\dfrac{1}{2}$ εφάπτεται στη C_f στο Α, ισχύει:

$f'(1)=-2 \Leftrightarrow -2\lambda+1=-2\Leftrightarrow\lambda=\dfrac{3}{2}$.

Τότε $f(1)=-2\cdot 1+\dfrac{1}{2}\Leftrightarrow -2+\dfrac{1}{2}=1^2(\ln 1-\lambda)\Leftrightarrow -\dfrac{3}{2}=-\lambda\Leftrightarrow\lambda=\dfrac{3}{2}$

β) Για $\lambda=\dfrac{3}{2}$ είναι $f(x)=x^2\left(\ln x-\dfrac{3}{2}\right)$ και

$f'(x)=2x\left(\ln x-\dfrac{3}{2}\right)+x=2x(\ln x-1)$

$f'(x)=0\Leftrightarrow 2x(\ln x-1)=0\Leftrightarrow x=0$ που απορρίπτεται ή $x=e$.

x	0		e		$+\infty$
f'		$-$	0	$+$	
f		$\searrow$	Ο.Ε.	$\nearrow$	

Για κάθε $x\in(0,e)$ είναι $f'(x)<0$ άρα η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $(0,e]$.

Για κάθε $x>e$ είναι $f'(x)>0$ άρα η f είναι γνησίως αύξουσα στο $[e,+\infty)$.

Η f έχει ολικό ελάχιστο το $f(e)=-\dfrac{e^2}{2}$.

γ) Είναι $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+} x^2\left(\ln x-\dfrac{3}{2}\right)=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{\ln x-\frac{3}{2}}{\frac{1}{x^2}}\overset{\frac{\infty}{\infty}}{\underset{\text{DLH}}{=}}\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{\frac{1}{x}}{-\frac{2}{x^3}}=$

$=\lim\limits_{x\to 0^+}\left(-\dfrac{x^2}{2}\right)=0$ και

$\lim\limits_{x\to +\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to +\infty} x^2\left(\ln x-\dfrac{3}{2}\right)=+\infty$, οπότε: Για το διάστημα $\Delta_1=(0,e]$, έχουμε:

$f(\Delta_1)=\left[f(e),\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)\right)=\left[-\dfrac{e^2}{2},0\right)$ και για το διάστημα $\Delta_2=[e,+\infty)$,

έχουμε: $f(\Delta_2)=\left[f(e),\lim\limits_{x\to +\infty} f(x)\right)=\left[-\dfrac{e^2}{2},+\infty\right)$.

Άρα $f(A)=f(\Delta_1)\cup f(\Delta_2)=\left[-\dfrac{e^2}{2},+\infty\right)$.

δ) Επειδή $2014\in f(\Delta_2)=\left[-\dfrac{e^2}{2},+\infty\right)$ και $2014\notin f(\Delta_1)=\left[-\dfrac{e^2}{2},0\right)$,

υπάρχει $x_1\in(e,+\infty)$ τέτοιο, ώστε $f(x_1)=2014$. Επειδή η f είναι γνησίως αύξουσα στο $(e,+\infty)$, το x_1 είναι μοναδικό.

5.864. **α)** $f'(x)=\left(x^{\frac{1}{x}}\right)'=\left(e^{\frac{\ln x}{x}}\right)'=e^{\frac{\ln x}{x}}\dfrac{1-\ln x}{x^2}\geq 0\Leftrightarrow \ln x\leq 1\Leftrightarrow x\leq e$.

Για κάθε $x\in(0,e)$ είναι $f'(x)>0\Rightarrow f\uparrow(0,e]$ και για $x>e$ είναι

$f'(x)<0\Rightarrow f\downarrow[e,+\infty)$. Έχει μέγιστο το $f(e)=e^{\frac{1}{e}}$.

β) Είναι $f(x)\leq f(e)=e^{\frac{1}{e}}=\sqrt[e]{e}$.

γ) $f(x)\leq\sqrt[e]{e}\Leftrightarrow x^{\frac{1}{x}}\leq e^{\frac{1}{e}}\Leftrightarrow \ln x^{\frac{1}{x}}\leq \ln e^{\frac{1}{e}}\Leftrightarrow \dfrac{1}{x}\ln x\leq\dfrac{1}{e}\ln e\Leftrightarrow e\ln x\leq x\ln e\Leftrightarrow$

$\ln x^e\leq \ln e^x\Leftrightarrow x^e\leq e^x$, $x>0$

δ) $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{\ln x}{x}=\lim\limits_{x\to 0^+}\left(\ln x\dfrac{1}{x}\right)=-\infty$ άρα $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+} e^{\frac{\ln x}{x}}=0$.

$\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{\ln x}{x}\overset{\frac{\infty}{\infty}}{\underset{\text{DLH}}{=}}\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{\frac{1}{x}}{1}=0$, άρα $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to +\infty} e^{\frac{\ln x}{x}}=1$

Για το $\Delta_1=(0,e]$ είναι $f(\Delta_1)=\left(0,\sqrt[e]{e}\right]$ και για το $\Delta_2=[e,+\infty)$ είναι

$f(\Delta_2)=\left(1,\sqrt[e]{e}\right]$, άρα $f(A)=f(\Delta_1)\cup f(\Delta_2)=\left(0,\sqrt[e]{e}\right]$

Ασύμπτωτες

5.876. α) $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 1^+} \dfrac{x}{x-1} = +\infty \Rightarrow x=1$ κατακόρυφη ασύμπτωτη.

β) $\lim\limits_{x\to 4} f(x) = \lim\limits_{x\to 4} \dfrac{(x-1)\cancel{(x-4)}}{\cancel{x-4}} = 3 \Rightarrow$ η C_f δεν έχει κατακόρυφη ασύμπτωτη.

γ) $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^x-1}{x} \overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{\underset{DLH}{=}} \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^x}{1} = 1 \Rightarrow$ η C_f δεν έχει κατακόρυφη ασύμπτωτη.

δ) $\lim\limits_{x\to 1} f(x) = \lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\ln x}{x-1} \overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{\underset{DLH}{=}} \lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\frac{1}{x}}{1} = 1 \Rightarrow$ η C_f δεν έχει κατακόρυφη ασύμπτωτη.

ε) $\lim\limits_{x\to -\frac{\pi}{2}^+} f(x) = \lim\limits_{x\to -\frac{\pi}{2}^+} \dfrac{\eta\mu x}{\sigma\upsilon\nu x} = -\infty \Rightarrow x = -\dfrac{\pi}{2}$ κατακόρυφη ασύμπτωτη.

$\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}^-} f(x) = \lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}^-} \dfrac{\eta\mu x}{\sigma\upsilon\nu x} = +\infty \Rightarrow x = \dfrac{\pi}{2}$ κατακόρυφη ασύμπτωτη.

στ) $\lim\limits_{x\to -1^-} f(x) = \lim\limits_{x\to -1^-} \dfrac{3}{x+1} = -\infty \Rightarrow x=-1$ κατακόρυφη ασύμπτωτη.

5.877. α) $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to +\infty} \left(\sqrt{x^2+4x+6} - x\right) = \lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{\cancel{x^2}+4x+6-\cancel{x^2}}{\sqrt{x^2+4x+6}+x} =$

$$\lim\limits_{x\to +\infty} \frac{\cancel{x}\left(4+\frac{6}{x}\right)}{\cancel{x}\left(\sqrt{1+\frac{4}{x}+\frac{6}{x^2}}+1\right)} = 2 \Rightarrow y=2 \text{ οριζόντια ασύμπτωτη στο } +\infty .$$

$\lim\limits_{x\to -\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to -\infty} \left(\sqrt{x^2+4x+6} - x\right) = \lim\limits_{x\to -\infty} \left[x\left(-\sqrt{1+\dfrac{4}{x}+\dfrac{6}{x^2}}-1\right)\right] = +\infty \Rightarrow$ δεν έχει οριζόντια ασύμπτωτη στο $-\infty$.

β) $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{\cancel{x}\sqrt{4+\frac{1}{x^2}}}{\cancel{x}} = 2 \Rightarrow y=2$ οριζόντια ασύμπτωτη στο $+\infty$.

$\lim\limits_{x\to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{-\cancel{x}\sqrt{4+\frac{1}{x^2}}}{\cancel{x}} = -2 \Rightarrow y=-2$ οριζόντια ασύμπτωτη στο $-\infty$.

γ) $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{2x^3+6x+5}{x^3+1} = \lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{2\cancel{x^3}}{\cancel{x^3}} = 2 \Rightarrow y=2$ οριζόντια ασύμπτωτη .

5.878. $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to +\infty} \left(\dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{e^x-1}\right) = 0 \Rightarrow y=0$ οριζόντια ασύμπτωτη στο $+\infty$.

$\lim\limits_{x\to -\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to -\infty} \left(\dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{e^x-1}\right) = 0-(-1) = 1 \Rightarrow y=1$ οριζόντια ασύμπτωτη στο $-\infty$.

5.879. Για $y=x_0$ είναι $\left|f(x)-f(x_0)\right|\le\dfrac{(x-x_0)^2}{|x-x_0|+1}$.

Είναι $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{(x-x_0)^2}{|x-x_0|+1}=0$, άρα και $\lim\limits_{x\to x_0}\left|f(x)-f(x_0)\right|=0$, οπότε $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=f(x_0)$, άρα f συνεχής στο $\mathbb{R}$ και δεν έχει κατακόρυφη ασύμπτωτη.

5.880. $\lim\limits_{x\to0^+}x\ln x\overset{0\cdot\infty}{=}\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{\ln x}{\frac{1}{x}}\underset{DLH}{\overset{\left(\frac{\infty}{\infty}\right)}{=}}\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{\frac{1}{\cancel{x}}}{-\frac{1}{x^{\cancel{2}}}}=\lim\limits_{x\to0^+}(-x)=0$, οπότε

$\lim\limits_{x\to0^+}f(x)=\lim\limits_{x\to0^+}\left(x\ln x-(x+1)\ln(x+1)\right)=0$, άρα η C_f δεν έχει κατακόρυφη ασύμπτωτη.

5.881. α) $\lim\limits_{x\to0^+}f(x)=\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{x^2+2}{x^3+x}=\lim\limits_{x\to0^+}\left(\dfrac{x^2+2}{x^2+1}\cdot\dfrac{1}{x}\right)=+\infty\Rightarrow x=0$ κατακόρυφη ασύμπτωτη.

$\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^2+2}{x^3+x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\cancel{x^2}}{x^{\cancel{3}}}=0\Rightarrow y=0$ οριζόντια ασύμπτωτη.

β) $\lim\limits_{x\to-5^-}f(x)=\lim\limits_{x\to-5^-}\left[(x-2)\dfrac{1}{x+5}\right]=+\infty\Rightarrow x=-5$ κατακόρυφη ασύμπτωτη.

$\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x-2}{x+5}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x}{x}=1\Rightarrow y=1$ οριζόντια ασύμπτωτη.

γ) $\lim\limits_{x\to2^+}f(x)=\lim\limits_{x\to2^+}\left[(x^2+3x+4)\dfrac{1}{x-2}\right]=+\infty\Rightarrow x=2$ κατακόρυφη ασύμπτωτη.

$\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^2+3x+4}{x^2-2x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^2}{x^2}=1$,

$\lim\limits_{x\to+\infty}\left(f(x)-x\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{x^2+3x+4}{x-2}-x\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{5x+4}{x-2}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{5x}{x}=5$, άρα

η $y=x+5$ είναι πλάγια ασύμπτωτη της C_f.

δ) $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\cancel{4x^2}+3x+1-\cancel{4x^2}}{\sqrt{4x^2+3x+1}+2x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\cancel{x}\left(3+\frac{1}{x}\right)}{\cancel{x}\left(\sqrt{4+\frac{3}{x}+\frac{1}{x^2}}+2\right)}=\dfrac{3}{4}\Rightarrow y=\dfrac{3}{4}$

οριζόντια ασύμπτωτη της C_f στο $+\infty$.

$\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{\cancel{x}\left(-\sqrt{4+\frac{3}{x}+\frac{1}{x^2}}-2\right)}{\cancel{x}}=-4$ και

$\lim\limits_{x\to-\infty}\left(f(x)+4x\right)=\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\sqrt{4x^2+3x+1}+2x\right)=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{\cancel{4x^2}+3x+1-\cancel{4x^2}}{\sqrt{4x^2+3x+1}-2x}=$

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{\cancel{x}\left(3+\frac{1}{x}\right)}{\cancel{x}\left(-\sqrt{4+\frac{3}{x}+\frac{1}{x^2}}-2\right)}=-\frac{3}{4},\ \text{άρα}$$

η $y=-4x-\dfrac{3}{4}$ είναι πλάγια ασύμπτωτη της C_f στο $-\infty$.

ε) $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}\left(\ln x\dfrac{1}{x}\right)=-\infty\cdot(+\infty)=-\infty \Rightarrow x=0$ κατακόρυφη ασύμπτωτη.

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x}\underset{DLH}{\overset{\left(\frac{\infty}{\infty}\right)}{=}}\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{1}{x}}{1}=0\Rightarrow y=0 \text{ οριζόντια ασύμπτωτη.}$$

στ) $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+} x\ln x \overset{0\cdot\infty}{=}\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{\ln x}{\frac{1}{x}}\underset{DLH}{\overset{\left(\frac{\infty}{\infty}\right)}{=}}\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}}=\lim\limits_{x\to 0^+}(-x)=0\Rightarrow$ δεν έχει κατακόρυφη ασύμπτωτη.

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}(x\ln x)=+\infty$ και $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\ln x=+\infty$, άρα η C_f δεν έχει οριζόντια ή πλάγια ασύμπτωτη.

ζ) $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}\left[\left(e^x+2\right)\dfrac{1}{e^x-1}\right]=+\infty\Rightarrow x=0$ κατακόρυφη ασύμπτωτη.

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{e^x+2}{e^x-1}\underset{DLH}{\overset{\left(\frac{\infty}{\infty}\right)}{=}}\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{e^x}{e^x}=1\Rightarrow y=1$ οριζόντια ασύμπτωτη της C_f στο $+\infty$.

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{e^x+2}{e^x-1}=\dfrac{0+2}{0-1}=-2\Rightarrow y=-2$ οριζόντια ασύμπτωτη στο $-\infty$.

η) $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\eta\mu x}{x}=1\Rightarrow \nexists$ κατακόρυφη ασύμπτωτη.

$\left|\dfrac{\eta\mu x}{x}\right|=\dfrac{|\eta\mu x|}{|x|}\le\dfrac{1}{|x|}\Leftrightarrow-\dfrac{1}{|x|}\le\dfrac{\eta\mu x}{x}\le\dfrac{1}{|x|}$ και από το Κ.Π είναι $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=0\Rightarrow y=0$ οριζόντια ασύμπτωτη.

θ) $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x}{e^x}\underset{DLH}{\overset{\left(\frac{\infty}{\infty}\right)}{=}}\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{e^x}=0\Rightarrow y=0$ οριζόντια ασύμπτωτη στο $+\infty$.

5.882. Αρκεί $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(f(x)-(2x-1)\right)=0$. Είναι

$$\lim_{x\to+\infty}\left(f(x)-(2x-1)\right)=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{2x^2-5x+1}{x-2}-(2x-1)\right)=$$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\cancel{2x^2}-5x+1-\cancel{2x^2}+4x+x-2}{x-2}=\lim_{x\to+\infty}\frac{-1}{x-2}=0$$

5.883. $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^-}\left(3x-2+\dfrac{1}{x^2}\right)=+\infty\Rightarrow x=0$ κατακόρυφη ασύμπτωτη.

$\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to-\infty}\left(3-\dfrac{2}{x}+\dfrac{1}{x^3}\right)=3$ και $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(f(x)-3x\right)=\lim\limits_{x\to-\infty}\left(-2+\dfrac{1}{x^2}\right)=-2$, άρα η $y=3x-2$ είναι πλάγια ασύμπτωτη της C_f στο $-\infty$.

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x}{1-e^x}\underset{DLH}{\overset{\left(\frac{\infty}{\infty}\right)}{=}}\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{-e^x}=0\Rightarrow y=0$ οριζόντια ασύμπτωτη στο $+\infty$.

5.884. Είναι $\lim\limits_{x\to1} f(x)=\lim\limits_{x\to1}\left(\frac{\ln x}{x-1}\cdot\frac{\eta\mu\pi x}{x-1}\right)=1(-\pi)=-\pi=f(1)$ γιατί $\lim\limits_{x\to1}\frac{\ln x}{x-1}\overset{\frac{0}{0}}{=}\lim\limits_{x\to1}\frac{\frac{1}{x}}{1}=1$ και

$\lim\limits_{x\to1}\frac{\eta\mu\pi x}{x-1}\overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=}\lim\limits_{x\to1}\frac{\sigma\upsilon\nu(\pi x)\cdot\pi}{1}=-\pi$. Οπότε η f συνεχής στο $(0,+\infty)$ και εξετάζουμε για κατακόρυφη μόνο στο $x_0=0$

$$\lim_{x\to0^+} f(x)=\lim_{x\to0^+}\left[\ln x\frac{\eta\mu\pi x}{(x-1)^2}\right]\overset{(-\infty)0}{=}\lim_{x\to0^+}\left[\ln x\frac{\eta\mu\pi x}{\pi x}\pi x\frac{1}{(x-1)^2}\right]=$$

$\lim\limits_{x\to0^+}\left[(x\ln x)\cdot\frac{\eta\mu\pi x}{\pi x}\cdot\pi\frac{1}{(x-1)^2}\right]=0\cdot1\cdot\pi\cdot1=0$ οπότε δεν έχει κατακόρυφη ασύμπτωτη στο $x_0=0$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty}\left[\frac{\ln x}{x-1}\cdot\frac{\eta\mu(\pi x)}{x-1}\right]=0\cdot0=0$$

γιατί $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x-1}\overset{\frac{+\infty}{+\infty}}{=}\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\frac{1}{x}}{1}=0$ και $\left|\frac{\eta\mu(\pi x)}{x-1}\right|\le\frac{1}{|x-1|}\Rightarrow-\frac{1}{|x-1|}\le\frac{\eta\mu\pi x}{x-1}\le\frac{1}{|x-1|}$

και από κριτήριο παρέμβασης $\lim\limits_{x\to1}\frac{\eta\mu\pi x}{x-1}=0$

5.885. Εστω $f(x)-x^2\eta\mu\frac{1}{x}=g(x)\overset{x>0}{\Leftrightarrow}f(x)=g(x)+x^2\eta\mu\frac{1}{x}$

$\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{g(x)}{x}+x\eta\mu\frac{1}{x}\right)=1$, γιατί $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{g(x)}{x}=0$ και

$\lim\limits_{x\to+\infty}x\eta\mu\frac{1}{x}\underset{u\to0}{\overset{\frac{1}{x}=u}{=}}\lim\limits_{u\to0}\frac{\eta\mu u}{u}=1.$

$\lim\limits_{x\to+\infty}(f(x)-x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(g(x)+x^2\eta\mu\frac{1}{x}-x\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left[g(x)+x\left(x\eta\mu\frac{1}{x}-x\right)\right]=2$ γιατί

$$\lim_{x\to+\infty}x\left(x\eta\mu\frac{1}{x}-1\right)=\lim_{x\to+\infty}\frac{x\eta\mu\frac{1}{x}-1}{\frac{1}{x}}\underset{u\to0}{\overset{\frac{1}{x}=u}{=}}\lim_{u\to0}\frac{\frac{\eta\mu u}{u}-1}{u}=\lim_{u\to0}\frac{\eta\mu u-u}{u^2}\underset{DLH}{\overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=}}$$

$$\lim_{u\to0}\frac{\sigma\upsilon\nu u-1}{2u}\underset{DLH}{\overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=}}\frac{-\eta\mu u}{2}=0,\text{ άρα}$$

η $y=x+2$ είναι πλάγια ασύμπτωτη της C_f στο $+\infty$.

5.886. $A_f=(0,1)\cup(1,+\infty)$.

$\lim\limits_{x\to0^+} f(x)=\lim\limits_{x\to0^+}\frac{x\ln x}{x^2-1}=0$, γιατί $\lim\limits_{x\to0^+}x\ln x=\lim\limits_{x\to0^+}\frac{\ln x}{\frac{1}{x}}\underset{DLH}{\overset{\left(\frac{\infty}{\infty}\right)}{=}}\lim\limits_{x\to0^+}\frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}}=\lim\limits_{x\to0^+}(-x)=0$

$\lim\limits_{x\to 1} f(x)=\lim\limits_{x\to 1}\left(\frac{x}{x+1}\cdot\frac{\ln x}{x-1}\right)=\frac{1}{2}$ γιατί $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x}{x+1}=\frac{1}{2}$ και $\lim\limits_{x\to 1}\frac{\ln x}{x-1}\underset{DLH}{\overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=}}\lim\limits_{x\to 1}\frac{\frac{1}{x}}{1}=1$

Η C_f δεν έχει κατακόρυφη ασύμπτωτη.

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x\ln x}{x^2-1}\underset{DLH}{\overset{\left(\frac{\infty}{\infty}\right)}{=}}\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\ln x+1}{2x}\underset{DLH}{\overset{\left(\frac{\infty}{\infty}\right)}{=}}\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\frac{1}{x}}{2}=0$, άρα η $y=0$ είναι οριζόντια ασύμπτωτη της C_f.

5.887. α) Εστω $g(x)=2e^x+x-1,\ x\ge 0$. Είναι $g'(x)=2e^x+1>0$, άρα $g\uparrow$ στο $[0,+\infty)$.

Για κάθε $x\ge 0$ είναι $g(x)\ge g(0)=1>0\Leftrightarrow 2e^x+x-1>0$.

β) $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{e^x}{2e^x+x-1}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{e^x}{e^x\left(2+\frac{x}{e^x}-e^{-x}\right)}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{2+\frac{x}{e^x}-e^{-x}}=\frac{1}{2}$, γιατί

$\lim\limits_{x\to+\infty}e^{-x}=0$ και $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x}{e^x}\overset{\frac{\infty}{\infty}}{=}\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{e^x}=0$.

$\lim\limits_{x\to+\infty}\left(f(x)-\frac{1}{2}x\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{-x^2+x}{2e^x+x-1}\overset{\frac{\infty}{\infty}}{=}\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{-2x+1}{2e^x+1}\overset{\frac{\infty}{\infty}}{=}\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{-2}{2e^x}=0$, άρα η $y=\frac{1}{2}x$ είναι ασύμπτωτη της C_f στο $+\infty$.

5.888. α) Πρέπει $\lim\limits_{x\to 1^-}f(x)=\lim\limits_{x\to 1^+}f(x)=f(1)\Leftrightarrow\lim\limits_{x\to 1^-}\left(-\frac{3}{4}x+\lambda\right)=\lim\limits_{x\to 1^+}\frac{x^2-8x+4}{4x}=-\frac{3}{4}+\lambda\Leftrightarrow$

$-\frac{3}{4}+\lambda=-\frac{3}{4}\Leftrightarrow\lambda=0$.

β) i. Για κάθε $x<1$ η f είναι παραγωγίσιμη με $f'(x)=-\frac{3}{4}$.

Για κάθε $x>1$ η f είναι παραγωγίσιμη με $f'(x)=\frac{x^2-4}{4x^2}$. Στο $x_0=1$ έχουμε:

$\lim\limits_{x\to 1^-}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim\limits_{x\to 1^-}\frac{-\frac{3}{4}x+\frac{3}{4}}{x-1}=\lim\limits_{x\to 1^-}\frac{-\frac{3}{4}\cancel{(x-1)}}{\cancel{x-1}}=-\frac{3}{4}$ και

$\lim\limits_{x\to 1^+}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim\limits_{x\to 1^+}\frac{\frac{x^2-8x+4}{4x}+\frac{3}{4}}{x-1}=\lim\limits_{x\to 1^+}\frac{\cancel{(x-1)}(x-4)}{4x\cancel{(x-1)}}=-\frac{3}{4}$, άρα $f'(1)=-\frac{3}{4}$.

ii. $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x^2-8x+4}{4x^2}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\cancel{x^2}}{4\cancel{x^2}}=\frac{1}{4}$ και

$\lim\limits_{x\to+\infty}\left(f(x)-\frac{1}{4}x\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{x^2-8x+4}{4x}-\frac{x}{4}\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x^2-8x+4-\cancel{x^2}}{4x}=$

$\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{-8x}{4x}=-2$

άρα η $y=\frac{1}{4}x-2$ είναι πλάγια ασύμπτωτη της C_f στο $+\infty$.

5.889. α) Η συνάρτηση f έχει πεδίο ορισμού το $(0,+\infty)$. Αρχικά θα αναζητήσουμε κατακόρυφη ασύμπτωτη. Είναι:

$$\lim_{x\to0^+} f(x)=\lim_{x\to0^+}(\eta\mu x\cdot\ln x)=\lim_{x\to0^+}\left(\frac{\eta\mu x}{x}\cdot x\ln x\right)=0 \text{ ,γιατί } \lim_{x\to0^+}\frac{\eta\mu x}{x}=1 \text{ και}$$

$$\lim_{x\to0^+} x\ln x=\lim_{x\to0^+}\frac{\ln x}{\frac{1}{x}}\underset{DLH}{\overset{\frac{\infty}{\infty}}{=}}\lim_{x\to0^+}\frac{(\ln x)'}{\left(\frac{1}{x}\right)'}=\lim_{x\to0^+}\frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}}=\lim_{x\to0^+}(-x)=0.$$

Οπότε η f δεν έχει κατακόρυφη ασύμπτωτη.

β) Για πλάγια ασύμπτωτη έχουμε: $\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\eta\mu x\cdot\ln x}{x}$.

Είναι $\left|\frac{\eta\mu x\cdot\ln x}{x}\right|=|\eta\mu x|\left|\frac{\ln x}{x}\right|\le\left|\frac{\ln x}{x}\right|\Leftrightarrow-\left|\frac{\ln x}{x}\right|\le\frac{\eta\mu x\cdot\ln x}{x}\le\left|\frac{\ln x}{x}\right|$

Επειδή $\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x}\underset{DLH}{\overset{\frac{\infty}{\infty}}{=}}\lim_{x\to+\infty}\frac{(\ln x)'}{x'}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{1}{x}}{1}=0$, λόγω του κριτηρίου παρεμβολής είναι και $\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\eta\mu x\cdot\ln x}{x}=0$, οπότε η C_f δεν έχει πλάγια ασύμπτωτη.

5.890. Πρέπει $\lim_{x\to+\infty}\left(f(x)-(2x-1)\right)=0$

$$\lim_{x\to+\infty}\left(f(x)-(2x-1)\right)=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{\alpha x^2+\beta x}{x-2}-(2x-1)\right)=\lim_{x\to+\infty}\frac{(\alpha-2)x^2+(\beta+5)x-2}{x-2}$$

Αν $\alpha\neq2$, τότε $\lim_{x\to+\infty}\left(f(x)-(2x-1)\right)=\lim_{x\to+\infty}\frac{(\alpha-2)x^{\cancel{2}}}{\cancel{x}}=\pm\infty$,οπότε για να είναι $\lim_{x\to+\infty}\left(f(x)-(2x-1)\right)=0$ πρέπει $\alpha=2$. Τότε

$$\lim_{x\to+\infty}\left(f(x)-(2x-1)\right)=\lim_{x\to+\infty}\frac{(\beta+5)x-2}{x-2}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\cancel{x}\left(\beta+5-\frac{2}{x}\right)}{\cancel{x}\left(1-\frac{2}{x}\right)}=\beta+5.$$

Είναι $\beta+5=0\Leftrightarrow\beta=-5$.

5.891. Αν $x^2+\alpha x+\beta\neq0$, τότε $A_f=\mathbb{R}$ και η C_f δεν έχει κατακόρυφες ασύμπτωτες. Αν ρ_1,ρ_2 ρίζες του τριωνύμου, τότε $A_f=\mathbb{R}-\{\rho_1,\rho_2\}$ και πιθανές κατακόρυφες ασύμπτωτες είναι οι $x=\rho_1$ και $x=\rho_2$. Άρα $\rho_1=1$ και $\rho_2=4$. Τότε $1+\alpha+\beta=0$ (1) και $16+4\alpha+\beta=0$ (2). Από το σύστημα των (1),(2) προκύπτει: $\alpha=-5$ και $\beta=4$. Τότε $f(x)=\frac{4x-5}{x^2-5x+4}$ και

$$\lim_{x\to1^+}f(x)=\lim_{x\to1^+}\left(\frac{4x-5}{x-4}\cdot\frac{1}{x-1}\right)=+\infty \text{ και } \lim_{x\to4^+}f(x)=\lim_{x\to4^+}\left(\frac{4x-5}{x-1}\cdot\frac{1}{x-4}\right)=+\infty$$

5.892. Επειδή $A_f=\mathbb{R}-\{\gamma\}$, η ευθεία $x=\gamma$ είναι η μόνη πιθανή κατακόρυφη ασύμπτωτη της C_f. Άρα $\gamma=2$. Τότε $f(x)=\frac{(\alpha-1)x^2+\beta x+3}{x-2}$.

Για να είναι η ευθεία $y=2$ οριζόντια ασύμπτωτη της C_f πρέπει $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=2$.

Αν $\alpha\neq 1$, τότε $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{(\alpha-1)x^{\cancel{2}}}{\cancel{x}}=\pm\infty$, άρα $\alpha=1$. Τότε

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{\beta x+3}{x-2}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\cancel{x}\left(\beta+\frac{3}{x}\right)}{\cancel{x}\left(1-\frac{2}{x}\right)}=\beta$$, άρα $\beta=2$. Τότε

$$\lim_{x\to2^-} f(x)=\lim_{x\to2^-}\left[(2x+3)\frac{1}{x-2}\right]=-\infty$$

5.893. Πρέπει $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(f(x)-(2x-1)\right)=0$

$$\lim_{x\to+\infty}\left(f(x)-(2x-1)\right)=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{\alpha x^2-\beta x+2}{x-3}-(2x-1)\right)=\lim_{x\to+\infty}\frac{(\alpha-2)x^2+(7-\beta)x-1}{x-3}.$$

Αν $\alpha\neq 2$, τότε $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(f(x)-(2x-1)\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{(\alpha-2)x^{\cancel{2}}}{\cancel{x}}=\pm\infty$,οπότε για να είναι

$\lim\limits_{x\to+\infty}\left(f(x)-(2x-1)\right)=0$ πρέπει $\alpha=2$. Τότε

$$\lim_{x\to+\infty}\left(f(x)-(2x-1)\right)==\lim_{x\to+\infty}\frac{(7-\beta)x-1}{x-3}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\cancel{x}\left(7-\beta-\frac{1}{x}\right)}{\cancel{x}\left(1-\frac{3}{x}\right)}=7-\beta$$. Πρέπει

$7-\beta=0\Leftrightarrow\beta=7$.

5.894. Πρέπει $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(f(x)-(2x+4)\right)=0$

$$\lim_{x\to+\infty}\left(f(x)-(2x+4)\right)=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{(2\alpha+\beta-1)x^3+(\alpha+\beta)x^2+2}{x^2+1}-(2x+4)\right)=$$
$$\lim_{x\to+\infty}\frac{(2\alpha+\beta-3)x^3+(\alpha+\beta-4)x^2-2x-2}{x^2+1}$$

Αν $2\alpha+\beta-3\neq 0$, τότε

$\lim\limits_{x\to+\infty}\left(f(x)-(2x+4)\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{(2\alpha+\beta-3)x^{\cancel{3}}}{\cancel{x^2}}=\pm\infty$, άρα πρέπει $2\alpha+\beta-3=0$ (1). Τότε

$$\lim_{x\to+\infty}\left(f(x)-(2x+4)\right)=\lim_{x\to+\infty}\frac{(\alpha+\beta-4)x^2-2x-2}{x^2+1}=$$
$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\cancel{x^2}\left(\alpha+\beta-4-\frac{2}{x}-\frac{2}{x^2}\right)}{\cancel{x^2}\left(1+\frac{1}{x^2}\right)}=\alpha+\beta-4$$

Πρέπει $\alpha+\beta-4=0$ (2). Από το σύστημα των (1),(2), προκύπτει: $\alpha=-1$ και $\beta=5$.

5.895. Πρέπει $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(f(x)-(6x-1)\right)=0$

$$\lim_{x\to+\infty}\left(f(x)-(6x-1)\right)=\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{9x^2-\alpha x+2}+\beta x-6x+1\right)=$$

$$\lim_{x\to+\infty}\left[x\left(\sqrt{9-\frac{\alpha}{x}\frac{2}{x^2}}+\beta-6+\frac{1}{x}\right)\right]$$

Είναι $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{9-\frac{\alpha}{x}\frac{2}{x^2}}+\beta-6+\frac{1}{x}\right)=3+\beta-6=\beta-3$, οπότε

αν $\beta-3>0\Rightarrow\beta>3$, τότε $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(f(x)-(6x-1)\right)=+\infty$, ενώ

αν $\beta-3<0\Rightarrow\beta<3$, τότε $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(f(x)-(6x-1)\right)=-\infty$.

Οπότε για να είναι $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(f(x)-(6x-1)\right)=0$, πρέπει $\beta=3$. Τότε

$$\lim_{x\to+\infty}\left(f(x)-(6x-1)\right)=\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{9x^2-\alpha x+2}-3x+1\right)=$$

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{\cancel{9x^2}-\alpha x+2-\cancel{9x^2}}{\sqrt{9x^2-\alpha x+2}+3x}+1\right)=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{\cancel{x}\left(-\alpha+\frac{2}{x}\right)}{\cancel{x}\left(\sqrt{9-\frac{\alpha}{x}+\frac{2}{x^2}}+3\right)}+1\right)=-\frac{\alpha}{6}+1$$

Πρέπει $-\frac{\alpha}{6}+1=0\Leftrightarrow\alpha=6$

5.896. Πρέπει $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(f(x)-(3x-4)\right)=0$.

$$\lim_{x\to+\infty}\left(f(x)-(3x-4)\right)=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{(\alpha+1)x^2-\beta x+\gamma}{x+\gamma}-(3x-4)\right)=$$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{(\alpha-2)x^2-(\beta+3\gamma-4)x+5\gamma}{x+\gamma}$$

Αν $\alpha\neq2$, τότε $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(f(x)-(3x-4)\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{(\alpha-2)x^{\cancel{2}}}{\cancel{x}}=\pm\infty$, άρα πρέπει $\alpha=2$.

Τότε $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(f(x)-(3x-4)\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{(\beta+3\gamma-4)x+5\gamma}{x+\gamma}=$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\cancel{x}\left(\beta+3\gamma-4+\frac{5\gamma}{x}\right)}{\cancel{x}\left(1+\frac{\gamma}{x}\right)}=\beta+3\gamma-4.$$

Πρέπει $\beta+3\gamma-4=0$ (1)

Επειδή $A_f=\mathbb{R}-\{\gamma\}$, η ευθεία $x=-\gamma$ είναι η μόνη πιθανή κατακόρυφη ασύμπτωτη της C_f. Άρα $\gamma=-2$ και $(1)\Rightarrow\beta-6-4=0\Leftrightarrow\beta=10$. Τότε

$$\lim_{x\to-2^+}f(x)=\lim_{x\to-2^+}\frac{3x^2-10x-2}{x-2}=\lim_{x\to-2^+}\left[\left(3x^2-10x-2\right)\frac{1}{x-2}\right]=-\infty$$

5.897. Για να είναι η ευθεία $\varepsilon_1: y=-2$ είναι ασύμπτωτη της C_f στο $+\infty$, πρέπει

$\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=-2$. Είναι $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left[x\left(\sqrt{\alpha^2+\frac{\beta}{x}+\frac{10}{x^2}}-\gamma\right)\right]$.

Επειδή $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{\alpha^2+\frac{\beta}{x}+\frac{10}{x^2}}-\gamma\right)=\alpha-\gamma$, αν $\alpha-\gamma>0$ τότε $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$, ενώ αν $\alpha-\gamma<0$ τότε $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=-\infty$. Άρα για να είναι $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=-2$, πρέπει $\alpha-\gamma=0 \Leftrightarrow \alpha=\gamma$. Τότε $f(x)=\sqrt{\alpha^2x^2+\beta x+10}-\alpha x$.

Για να είναι η ευθεία $\varepsilon_2: y=-2x+2$ είναι ασύμπτωτη της C_f στο $-\infty$, πρέπει $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(f(x)-(-2x+2)\right)=0$. Είναι

$$\lim_{x\to-\infty}\left(f(x)-(-2x+2)\right)=\lim_{x\to-\infty}\left(\sqrt{\alpha^2x^2+\beta x+10}-\alpha x+2x-2\right)=$$

$$\lim_{x\to-\infty}\left(\sqrt{\alpha^2x^2+\beta x+10}-(\alpha-2)x-2\right)=$$

$$\lim_{x\to-\infty}\left[x\left(-\sqrt{\alpha^2+\frac{\beta}{x}+\frac{10}{x^2}}-\alpha+2-\frac{2}{x^2}\right)\right]$$

Επειδή $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(-\sqrt{\alpha^2+\frac{\beta}{x}+\frac{10}{x^2}}-\alpha+2-\frac{2}{x^2}\right)=-2\alpha+2$, αν $-2\alpha+2>0$ τότε $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(f(x)-(-2x+2)\right)=+\infty$, ενώ αν $-2\alpha+2<0 \Leftrightarrow \alpha>1$, τότε $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(f(x)-(-2x+2)\right)=-\infty$. Άρα για να είναι $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(f(x)-(-2x+2)\right)=0$, πρέπει $-2\alpha+2=0 \Leftrightarrow \alpha=1$ και $\gamma=1$. Τότε

$$\lim_{x\to-\infty}\left(f(x)-(-2x+2)\right)=\lim_{x\to-\infty}\left(\sqrt{x^2+\beta x+10}+x-2\right)=\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{\cancel{x^2}+\beta x+10-\cancel{x^2}}{\sqrt{x^2+\beta x+10}-x}-2\right)=$$

$$\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{\cancel{x}\left(\beta+\frac{10}{x}\right)}{\cancel{x}\left(-\sqrt{1+\frac{\beta}{x}+\frac{10}{x^2}}-1\right)}-2\right)=-\frac{\beta}{2}-2$$

Πρέπει $-\frac{\beta}{2}-2=0 \Leftrightarrow \beta=-4$.

5.898. α) $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=2$, $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(f(x)-2x\right)=5$

β) $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\lambda f(x)+4x}{xf(x)-2x^2+3x}=1 \Leftrightarrow \lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\cancel{x}\left(\lambda\frac{f(x)}{x}+4\right)}{\cancel{x}\left(f(x)-2x+3\right)}=1 \Leftrightarrow \frac{2\lambda+4}{5+3}=1 \Leftrightarrow \lambda=2$

5.899. α) $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=3$, $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(f(x)-3x\right)=-7$.

β) $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{\alpha f(x)+4x}{xf(x)-3x^2+3x}=2 \Leftrightarrow \lim\limits_{x\to-\infty}\frac{\cancel{x}\left(\alpha\frac{f(x)}{x}+4\right)}{\cancel{x}\left(f(x)-3x+3\right)}=2 \Leftrightarrow \frac{3\alpha+4}{-7+3}=2 \Leftrightarrow \alpha=-4$

5.900. $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x}=4$, $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(f(x)-4x\right)=3$

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{xf(x)-4x^2+6x\eta\mu x}{x^2f(x)-4x^3+2\eta\mu x^2}=\lim_{x\to-\infty}\frac{\cancel{x^2}\left(\frac{f(x)}{x}-4+6\frac{\eta\mu x}{x}\right)}{\cancel{x^2}\left(f(x)-4x+2\frac{\eta\mu x^2}{x^2}\right)}=\frac{4-4+6\cdot0}{3+2\cdot0}=0$$

γιατί $\left|\frac{\eta\mu x}{x}\right|=\frac{|\eta\mu x|}{|x|}\le\frac{1}{|x|}\Leftrightarrow-\frac{1}{|x|}\le\frac{\eta\mu x}{x}\le\frac{1}{|x|}$ και από Κ.Π. είναι $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{\eta\mu x}{x}=0$ και

όμοια $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{\eta\mu x^2}{x^2}=0$.

5.901. α) Είναι $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=3$, $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(f(x)-3x\right)=-7$,

Α. $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{g(x)}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)-x+4}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{f(x)}{x}-1+\frac{4}{x}\right)=3-1=2$

Β. $$\lim_{x\to+\infty}\frac{g(x)+3x+\eta\mu2x}{xf(x)-3x^2+1}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\cancel{x}\left(\frac{g(x)}{x}+3+\frac{\eta\mu2x}{x}\right)}{\cancel{x}\left(f(x)-3x+\frac{1}{x}\right)}=\frac{2+3+0}{-7+0}=-\frac{5}{7}$$

β) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(f(x)-3x+7\right)=0\Leftrightarrow\lim\limits_{x\to+\infty}\left(g(x)+x-4-3x+7\right)=0\Leftrightarrow\lim\limits_{x\to+\infty}\left(g(x)-2x+3\right)=0$

άρα η ευθεία $y=2x-3$ είναι ασύμπτωτη της C_g στο $+\infty$.

5.902. α) Επειδή η f είναι δύο φορές παραγωγίσιμη στο $(0,+\infty)$ με $f'(x)=2x+\frac{2\alpha}{x}$ και

$f''(x)=2-\frac{2\alpha}{x^2}$, για να παρουσιάζει καμπή στο $x_0=2$, ισχύει ότι:

$f''(2)=0\Leftrightarrow2-\frac{2\alpha}{4}=0\Leftrightarrow\alpha=4$. Τότε $f(x)=x^2+8\ln x$,

$f''(x)=2-\frac{8}{x^2}\ge0\Leftrightarrow2\ge\frac{8}{x^2}\Leftrightarrow x^2\ge4\overset{x>0}{\Leftrightarrow}x\ge2$.

Για κάθε $x\in(0,2)$ είναι $f''(x)<0\Rightarrow f$ κοίλη στο $(0,2]$ και για κάθε $x>2$ είναι

$f''(x)>0\Rightarrow f$ κυρτή στο $[2,+\infty)$. Σημείο καμπής το $(2,f(2))$.

β) $\lim\limits_{x\to0^+}f(x)=\lim\limits_{x\to0^+}\left(x^2+8\ln x\right)=-\infty\Rightarrow x=0$ κατακόρυφη ασύμπτωτη της C_f.

$\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(x+8\frac{\ln x}{x}\right)=+\infty$, γιατί $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x}\overset{\left(\frac{\infty}{\infty}\right)}{\underset{DLH}{=}}\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\frac{1}{x}}{1}=0$, άρα η C_f δεν έχει

οριζόντια ή πλάγια ασύμπτωτη.

5.903. α) $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{g(x)}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(2+\frac{\ln x}{x\sqrt[3]{x}}\right)=2$, γιατί

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x\sqrt[3]{x}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x^{\frac{4}{3}}}\overset{\left(\frac{\infty}{\infty}\right)}{\underset{DLH}{=}}\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{1}{x}}{\frac{4}{3}x^{\frac{1}{3}}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{3}{4x\sqrt[3]{x}}=0 \text{ και}$$

$\lim\limits_{x\to+\infty}\left(g(x)-2x\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{\sqrt[3]{x}}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x^{\frac{1}{3}}}\underset{DLH}{\overset{\left(\frac{\infty}{\infty}\right)}{=}}\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\frac{1}{x}}{\frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}}}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{3\sqrt[3]{x^2}}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{3}{\sqrt[3]{x}}=0$, άρα η ευθεία $y=2x$ είναι πλάγια ασύμπτωτη της C_f.

β) Εστω $(\rho_1,2\rho_1),(\rho_2,2\rho_2)$ τα κοινά σημεία της C_f με την $y=2x$. Τότε $f(\rho_1)=2\rho_1$ και $f(\rho_2)=2\rho_2$. Έστω $h(x)=\frac{f(x)}{x}$, $x\in[\rho_1,\rho_2]$. Η h είναι συνεχής στο $[\rho_1,\rho_2]$, παραγωγίσιμη στο (ρ_1,ρ_2) με $h'(x)=\frac{xf'(x)-f(x)}{x^2}$, και

$h(\rho_1)=\frac{2\rho_1}{\rho_1}=2=\frac{2\rho_2}{\rho_2}=h(\rho_2)$, άρα από το Θ.Rolle η εξίσωση $h'(x)=0\Leftrightarrow$ $xf'(x)-f(x)=0$ έχει τουλάχιστον μία ρίζα στο (ρ_1,ρ_2).

Εστω $t(x)=xf'(x)-f(x),\ x>0$.

Είναι $t'(x)=f'(x)+xf''(x)-f'(x)=xf''(x)>0\Rightarrow t\uparrow(0,+\infty)$, οπότε η προηγούμενη ρίζα είναι μοναδική.

5.904. α) $f(-x)=-f(x)$ και για $x=0: f(0)=0$.

Επειδή ασύμπτωτη της C_f στο $+\infty$ είναι η $y=x$, ισχύει $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=1$ και $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(f(x)-x\right)=0$.

Οπότε: $1+\lim\limits_{x\to0}\frac{f(x)}{x}=0\Leftrightarrow\lim\limits_{x\to0}\frac{f(x)}{x}=-1\Leftrightarrow\lim\limits_{x\to0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=-1\Leftrightarrow f'(0)=-1$

β) Εστω $\varphi(x)=f(x)-x$, $\lim\limits_{x\to+\infty}\varphi(x)=0$. Τότε $f(x)=\varphi(x)+x$ και $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$.

5.905. α) $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(2-\frac{1}{x}+e^{-2x}\frac{\eta\mu x}{x}\right)=2$, γιατί

$\left|\frac{\eta\mu x}{x}\right|=\frac{|\eta\mu x|}{|x|}\le\frac{1}{|x|}\Leftrightarrow-\frac{1}{|x|}\le\frac{\eta\mu x}{x}\le\frac{1}{|x|}$ και από Κ.Π είναι $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\eta\mu x}{x}=0$.

$\lim\limits_{x\to+\infty}\left(f(x)-2x\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(-1+e^{-2x}\eta\mu x\right)=-1$, γιατί

$\left|e^{-2x}\eta\mu x\right|=\left|e^{-2x}\right|\left|\eta\mu x\right|\le e^{-2x}\Leftrightarrow-e^{-2x}\le e^{-2x}\eta\mu x\le e^{-2x}$.

Επειδή $\lim\limits_{x\to+\infty}e^{-2x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(-e^{-2x}\right)=0$, από το Κ.Π είναι και $\lim\limits_{x\to+\infty}e^{-2x}\eta\mu x=0$.

Επομένως η ευθεία $y=2x-1$ είναι πλάγια ασύμπτωτη της C_f στο $+\infty$.

β) $f(x)=2x-1\Leftrightarrow 2x-1+e^{-2x}\eta\mu x=2x-1\Leftrightarrow e^{-2x}\eta\mu x=0\Leftrightarrow$ $\eta\mu x=0\Leftrightarrow x=k\pi,\ k\in\mathbb{Z}$. Κοινά σημεία τα $(k\pi,2k\pi-1),\ k\in\mathbb{Z}$.

5.906. Εστω $\varepsilon_1: y=\lambda_1x+\beta_1$ και $\varepsilon_2: y=\lambda_2x+\beta_2$ οι πλάγιες ασύμπτωτες των C_g,C_f αντίστοιχα. Τότε $\lambda_1=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{g(x)}{x}$ και $\lambda_2=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}$.

Για να είναι $\varepsilon_1\perp\varepsilon_2$ αρκεί να δείξουμε ότι $\lambda_1\cdot\lambda_2=-1$.

Στη σχέση $\left|g(x)f(x)+x^2\right|\le x\ln x$ διαιρούμε με x^2, και έχουμε:

$$\frac{\left|g(x)f(x)+x^2\right|}{x^2}\le\frac{x\ln x}{x^2}\Leftrightarrow\frac{\left|g(x)f(x)+x^2\right|}{\left|x^2\right|}\le\frac{\ln x}{x}\Leftrightarrow\qquad\left|\frac{g(x)f(x)+x^2}{x^2}\right|\le\frac{\ln x}{x}\Leftrightarrow$$

$$\left|\frac{g(x)f(x)}{x^2}+1\right|\le\frac{\ln x}{x}\Leftrightarrow-\frac{\ln x}{x}\le\frac{g(x)f(x)}{x^2}+1\le\frac{\ln x}{x}\Leftrightarrow-\frac{\ln x}{x}-1\le\frac{g(x)f(x)}{x^2}\le\frac{\ln x}{x}-1.$$

Όμως, $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x}\overset{\left(\frac{+\infty}{+\infty}\right)}{=}\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\frac{1}{x}}{1}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{x}=0$, άρα $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(-\frac{\ln x}{x}-1\right)=-1$ και

$\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{\ln x}{x}-1\right)=-1$, οπότε σύμφωνα με το κριτήριο παρεμβολής θα είναι :

$\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{g(x)f(x)}{x^2}=-1\Leftrightarrow\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{g(x)}{x}\cdot\frac{f(x)}{x}\right)=-1$ άρα $\lambda_1\cdot\lambda_2=-1.$

5.907. Είναι $h^2(x)=\left|h^2(x)\right|$ και $h^2(x)\le x^4g^2(x)+h^2(x)$, οπότε

$\left|h^2(x)\right|\le x^4g^2(x)+h^2(x)\Leftrightarrow\ -\left(x^4g^2(x)+h^2(x)\right)\le h^2(x)\le x^4g^2(x)+h^2(x)$ και

$\lim\limits_{x\to+\infty}\left[-\left(x^4g^2(x)+h^2(x)\right)\right]=0$, $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(x^4g^2(x)+h^2(x)\right)=0$

οπότε, από το κριτήριο παρεμβολής είναι και $\lim\limits_{x\to+\infty}h^2(x)=0$ άρα $\lim\limits_{x\to+\infty}h(x)=0$.

Εστω $\varphi(x)=x^4g^2(x)+h^2(x)$ με $\lim\limits_{x\to+\infty}\varphi(x)=0$, τότε $x^4g^2(x)=\varphi(x)-h^2(x)\Leftrightarrow$

$g^2(x)=\frac{1}{x^4}\left(\varphi(x)-h^2(x)\right)$, $x\ne0$ και επειδή $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{x^4}=0$, τότε:

$\lim\limits_{x\to+\infty}g^2(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left[\frac{1}{x^4}\left(\varphi(x)-h^2(x)\right)\right]=0$, άρα και $\lim\limits_{x\to+\infty}g(x)=0$.

Για την ασύμπτωτη της C_f στο $+\infty$, έχουμε:

$\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{g(x)+h(x)}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\left[\frac{1}{x}\left(g(x)-h(x)\right)\right]=0(0+0)=0$ και

$\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(g(x)-h(x)\right)=0+0=0$, .

Άρα, η $y=0$ (άξονας $x'x$) είναι οριζόντια ασύμπτωτη της C_f στο $+\infty$.

5.908. Είναι $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(g(x)-(-x+4)\right)=0\Leftrightarrow\lim\limits_{x\to+\infty}\left(f(x)-2x-(-x+4)\right)=0\Leftrightarrow$

$\lim\limits_{x\to+\infty}\left(f(x)-(x+4)\right)=0$,άρα η ευθεία $y=x+4$ είναι ασύμπτωτη της C_f στο $+\infty$.

5.909. Είναι $g'(x)=f'(x)+3\ \Leftrightarrow g'(x)=\left(f(x)+3x\right)'\Leftrightarrow g(x)=f(x)+3x+c,\ c\in\mathbb{R}$.

Επειδή οι C_f, C_g τέμνονται επί της ευθείας $x=2$, ισχύει: $f(2)=g(2)$.

Όμως $f(2)=g(2)+6+c\Leftrightarrow c=-6$ και $g(x)=f(x)+3x-6,\ x\in\mathbb{R}$.

Επειδή η C_g έχει ασύμπτωτη στο $+\infty$ την ευθεία $y=-x+2$, ισχύει:

$\lim\limits_{x\to+\infty}\left(g(x)-(-x+2)\right)=0\Leftrightarrow\lim\limits_{x\to+\infty}\left(f(x)+3x-6+x-2\right)=0\Leftrightarrow\lim\limits_{x\to+\infty}\left(f(x)+4x-8\right)=0$

Οπότε η ευθεία $y=-4x+8$ είναι ασύμπτωτη της C_f στο $+\infty$.

5.910. Επειδή η f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$, είναι συνεχής στο $[1,x]$, $x>1$ και παραγωγίσιμη στο $(1,x)$, άρα λόγω του θεωρήματος μέσης τιμής υπάρχει $\xi\in(1,x)$ τέτοιο, ώστε: $f'(\xi)=\dfrac{f(x)-f(1)}{x-1}=\dfrac{f(x)}{x-1}$.

Επειδή η f είναι κυρτή, η f' είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$.

Είναι $1<\xi<x \overset{f'\uparrow}{\Leftrightarrow} f'(1)<f'(\xi)<f'(x)\le 1+\dfrac{\ln x}{x^2}$.

Όμως $1\le f'(1)\le 1+\dfrac{\ln 1}{1^2}\Leftrightarrow 1\le f'(1)\le 1\Leftrightarrow f'(1)=1$, άρα

$$1<f'(\xi)<1+\frac{\ln x}{x^2}\Leftrightarrow 1<\frac{f(x)}{x-1}<1+\frac{\ln x}{x^2}\Leftrightarrow x-1<f(x)<x-1+\frac{(x-1)\ln x}{x^2}\Leftrightarrow$$

$$0<f(x)-(x-1)<\frac{(x-1)\ln x}{x^2}$$

Είναι $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{(x-1)\ln x}{x^2}\underset{DLH}{\overset{\frac{\infty}{\infty}}{=}}\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln x+\dfrac{x-1}{x}}{2x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{\ln x}{2x}+\dfrac{x-1}{2x^2}\right)=0$, γιατί

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{2x^2}\underset{DLH}{\overset{\frac{\infty}{\infty}}{=}}\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{1}{x}}{4x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{4x^2}=0 \text{ και } \lim_{x\to+\infty}\frac{x-1}{2x^2}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x}{2x^2}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{2x}=0.$$

Από το κριτήριο παρεμβολής είναι και $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[f(x)-(x-1)\right]=0$ άρα η ευθεία $y=x-1$ είναι πλάγια ασύμπτωτη της C_f στο $+\infty$.

5.911. $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(f(x)-(\lambda x+\beta)\right)=0 \underset{u\to-\infty}{\overset{x=-u}{\Leftrightarrow}} \lim\limits_{u\to-\infty}\left(f(-u)-(-\lambda u+\beta)\right)=0\Leftrightarrow$

$\lim\limits_{u\to-\infty}\left(-f(u)+\lambda u-\beta\right)=0\Leftrightarrow \lim\limits_{u\to-\infty}\left[-\left(f(u)-\lambda u+\beta\right)\right]=0\Leftrightarrow \lim\limits_{u\to-\infty}\left(f(u)-(\lambda u-\beta)\right)=0$,

άρα η ευθεία $y=\lambda x-\beta$ είναι ασύμπτωτη της C_f στο $-\infty$.

5.912. Εστω ότι η C_f έχει οριζόντια ασύμπτωτη την ευθεία $y=\beta$, τότε $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\beta$.

Είναι $\beta=\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{e^x f(x)}{e^x}\underset{DLH}{\overset{\frac{\infty}{\infty}}{=}}\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{e^x f(x)+e^x f'(x)}{e^x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\cancel{e^x}\left(f(x)+f'(x)\right)}{\cancel{e^x}}\Leftrightarrow$

$\beta=\lim\limits_{x\to+\infty}\left[f(x)+f'(x)\right]=\beta+\alpha\Leftrightarrow\alpha=0$ που είναι άτοπο.

5.913. α) Είναι $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x}=\lambda$ και $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(f(x)-\lambda x\right)=\beta$.

Εστω $g(x)=\dfrac{f(x)}{x}$, $x\neq 0$ με $\lim\limits_{x\to+\infty}g(x)=\lambda$. Τότε $f(x)=xg(x)$ και $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\begin{cases}-\infty & \lambda>0\\ +\infty & \lambda<0\end{cases}$,

οπότε: $\lambda=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x}\overset{\left(\frac{\infty}{\infty}\right)}{=}\lim\limits_{x\to+\infty}f'(x)$

β) $\beta=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(f(x)-\lambda x\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(x\left(\dfrac{f(x)}{x}-\lambda\right)\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\dfrac{f(x)}{x}-\lambda}{\dfrac{1}{x}}\overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=}$

$\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\left(\dfrac{f(x)}{x}-\lambda\right)'}{\left(\dfrac{1}{x}\right)'}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\dfrac{xf'(x)-f(x)}{x^2}}{-\dfrac{1}{x^2}}=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(f(x)-xf'(x)\right).$

5.914. α) Επειδή η $y=\lambda x+\beta$ είναι ασύμπτωτη της C_f στο $+\infty$, ισχύει ότι:

$\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x}=\lambda$ και $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[f(x)-\lambda x\right]=\beta$. Είναι: $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x}\cdot x=+\infty$

β) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(f(x))}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\left[\dfrac{f(f(x))}{f(x)}\cdot\dfrac{f(x)}{x}\right]=\lambda\cdot\lambda=\lambda^2$, γιατί αν θέσουμε $f(x)=u$, είναι

$\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(f(x))}{f(x)}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(u)}{u}=\lambda$.

Ακόμη $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[f(f(x))-\lambda^2x\right]=\lim\limits_{x\to+\infty}\left[f(f(x))-\lambda f(x)+\lambda f(x)-\lambda^2x\right]\Leftrightarrow$

$\lim\limits_{x\to+\infty}\left[f(f(x))-\lambda^2x\right]=\lim\limits_{x\to+\infty}\left[\left(f(f(x))-\lambda f(x)\right)+\lambda\left(f(x)-\lambda x\right)\right]\Leftrightarrow$

$\lim\limits_{x\to+\infty}\left[f(f(x))-\lambda^2x\right]=\beta+\lambda\beta$, γιατί $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[f(f(x))-\lambda f(x)\right]=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(f(u)-\lambda u\right)=\beta$.

Οπότε η ευθεία $y=\lambda^2x+\beta+\lambda\beta$ είναι ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης της fof στο $+\infty$.

γ) Για να δέχονται οι γραφικές παραστάσεις των f, fof, δέχονται κοινή ασύμπτωτη στο $+\infty$, πρέπει οι ευθείες $y=\lambda x+\beta$ και $y=\lambda^2x+\beta+\lambda\beta$, να ταυτίζονται.

Αυτό συμβαίνει όταν $\begin{cases}\lambda=\lambda^2\\ \beta=\beta+\lambda\beta\end{cases}\overset{\lambda>0}{\Leftrightarrow}\begin{cases}1=\lambda\\ \beta=\beta+\beta\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\lambda=1\\ \beta=0\end{cases}$.

Άρα οι C_f, C_{fof} δέχονται ως κοινή ασύμπτωτη την $y=x$.

5.915. α) Η f είναι παραγωγίσιμη στο $(0,+\infty)$ με $f'(x)=2x-\dfrac{2}{x}=2\dfrac{x^2-1}{x}$.

Είναι $f'(x)=0\Leftrightarrow 2\dfrac{x^2-1}{x}=0\Leftrightarrow x^2-1=0\Leftrightarrow x^2=1$ άρα $x=1$

Για κάθε $x\in(0,1)$ είναι $f'(x)<0$ άρα η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $(0,1]$.

Για κάθε $x\in(1,+\infty)$ είναι $f'(x)>0$ άρα η f είναι γνησίως αύξουσα στο $[1,+\infty)$.

Η f έχει ολικό ελάχιστο το $f(1)=1$, οπότε $f(x)\geq f(1)=1$ για κάθε $x>0$.

β) Είναι $\lim\limits_{x\to0^+}f(x)=\lim\limits_{x\to0^+}\left(x^2-2\ln x\right)=+\infty$, άρα η $x=0$, δηλαδή ο άξονας y΄y είναι κατακόρυφη ασύμπτωτη της C_f.

Είναι $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^2-2\ln x}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(x-2\dfrac{\ln x}{x}\right)=+\infty$, γιατί

$\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln x}{x}\underset{DLH}{\overset{\frac{0}{0}}{=}}\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\frac{1}{x}}{1}=0$, οπότε η C_f δεν έχει πλάγια ασύμπτωτη.

Είναι $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty}\left(x^2-2\ln x\right) = \lim\limits_{x\to+\infty}\left[x^2\left(1-2\dfrac{\ln x}{x^2}\right)\right] = +\infty$,

γιατί $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln x}{x^2} \underset{DLH}{\overset{\frac{0}{0}}{=}} \lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\frac{1}{x}}{2x} = \lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{2x^2} = 0$, οπότε η C_f δεν έχει οριζόντια ασύμπτωτη.

γ) i. Η g είναι συνεχής στο $(0,+\infty)$ ως πηλίκο συνεχών συναρτήσεων. Για να είναι η g συνεχής στο πεδίο ορισμού της, πρέπει: $\lim\limits_{x\to0^+} g(x) = g(0) \Leftrightarrow \lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{\ln x}{f(x)} = k \Leftrightarrow$

$\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{\ln x}{x^2-2\ln x} = k \Leftrightarrow \lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{1}{\frac{x^2-2\ln x}{\ln x}} = k \Leftrightarrow \lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{1}{x^2\frac{1}{\ln x}-2} = k \Leftrightarrow$

$\dfrac{1}{0\cdot0-2} = k \Leftrightarrow k = -\dfrac{1}{2}$

ii. $g'(x) = \dfrac{x(1-2\ln x)}{\left(x^2-2\ln x\right)^2} \geq 0 \Leftrightarrow 1-2\ln x \geq 0 \Leftrightarrow \ln x \leq \dfrac{1}{2} \Leftrightarrow x \leq \sqrt{e}$.

Για κάθε $x\in\left(0,\sqrt{e}\right)$ είναι $g'(x) > 0 \Rightarrow g\uparrow\left(0,\sqrt{e}\right]$ και για κάθε $x > \sqrt{e}$ είναι

$g'(x) < 0 \Rightarrow g\downarrow\left[\sqrt{e},+\infty\right)$. Είναι $g(0) = k = -\dfrac{1}{2}$, $g\left(\sqrt{e}\right) = \dfrac{1}{2e-2}$ και

$\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = \lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{\ln x}{x^2}\cdot\dfrac{1}{1-2\frac{\ln x}{x}}\right) = 0$, γιατί $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln x}{x^2} \underset{DLH}{\overset{\left(\frac{\infty}{\infty}\right)}{=}} \lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\frac{1}{x}}{2x} = \lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{2x^2} = 0$ και

$\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln x}{x} \underset{DLH}{\overset{\left(\frac{\infty}{\infty}\right)}{=}} \lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\frac{1}{x}}{1} = 0$.

Για το σύνολο τιμών της g, έχουμε: $g\left(\left[0,\sqrt{e}\right]\right) = \left[-\dfrac{1}{2},\dfrac{1}{2e-2}\right]$ και

$g\left(\left[\sqrt{e},+\infty\right)\right) = \left(0,\dfrac{1}{2e-2}\right]$, οπότε:

- Αν $\alpha < -\dfrac{1}{2}$, τότε $\alpha \notin g(A)$, οπότε η εξίσωση είναι αδύνατη.

- Αν $\alpha \in \left[-\dfrac{1}{2},0\right]$, τότε $\alpha \in g\left(\left[0,\sqrt{e}\right]\right)$, οπότε υπάρχει μοναδικό $x_1 \in \left[0,\sqrt{e}\right]: g(x_1) = \alpha$ και επειδή $\alpha \notin g\left(\left[\sqrt{e},+\infty\right)\right)$ η εξίσωση είναι αδύνατη στο $\left[\sqrt{e},+\infty\right)$.

- Αν $\alpha \in \left(0,\dfrac{1}{2e-2}\right]$, τότε η εξίσωση έχει δύο ρίζες, από μία σε καθένα από τα διαστήματα $\left[0,\sqrt{e}\right]$ και $\left[\sqrt{e},+\infty\right)$.

- Τέλος αν $\alpha > \dfrac{1}{2e-2}$ η εξίσωση είναι αδύνατη.

5.916. α) $f(x)=\ln\left[(\lambda+1)x^2+x+1\right]-\ln(x+2)=\ln\dfrac{(\lambda+1)x^2+x+1}{x+2}$.

Εστω $\dfrac{(\lambda+1)x^2+x+1}{x+2}=u$.

Αν $\lambda>-1$, τότε $\lim\limits_{x\to+\infty}u=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{(\lambda+1)x^{\cancel{2}}}{\cancel{x}}=+\infty$ και $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\lim\limits_{u\to+\infty}\ln u=+\infty$, οπότε για να είναι $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)\in\mathbb{R}$ πρέπει $\lambda=-1$. Τότε

$$\lim_{x\to+\infty}f(x)=\lim_{x\to+\infty}\ln\frac{x+1}{x+2}=\lim_{u\to1}\ln u=0$$

β) i. $f'(x)=\dfrac{1}{x+1}-\dfrac{1}{x+2}=\dfrac{1}{(x+1)(x+2)}>0\Rightarrow f\uparrow(-1,+\infty)$

$\lim\limits_{x\to-1^+}f(x)=\lim\limits_{x\to-1^+}\left[\ln(x+1)-\ln(x+2)\right]=-\infty$ και $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=0$, οπότε $f(A)=(-\infty,0)$.

ii. Επειδή $\lim\limits_{x\to-1^+}f(x)=-\infty$ η ευθεία $x=-1$ είναι κατακόρυφη ασύμπτωτη της C_f.

Επειδή $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=0$, η ευθεία $y=0$ είναι οριζόντια ασύμπτωτη της C_f

iii. $f(x)+\alpha^2=0\Leftrightarrow f(x)=-\alpha^2$.

Επειδή $-\alpha^2\in f(A)$ και η f είναι $\uparrow$, η εξίσωση έχει μοναδική λύση.

5.917. α) Η f είναι συνεχής στο $x_0=1$, αν και μόνο αν

$\lim\limits_{x\to1^-}f(x)=\lim\limits_{x\to1^+}f(x)=f(1)\Leftrightarrow\alpha+\beta=5$

β) $\lim\limits_{x\to1^-}\dfrac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim\limits_{x\to1^+}\dfrac{f(x)-f(1)}{x-1}\Leftrightarrow\lim\limits_{x\to1^-}\dfrac{\alpha x^2+\cancel{\beta}-\alpha-\cancel{\beta}}{x-1}=\lim\limits_{x\to1^+}\dfrac{2x+3-5}{x-1}\Leftrightarrow$

$\lim\limits_{x\to1^-}\dfrac{\alpha\cancel{(x-1)}(x+1)}{\cancel{x-1}}=\lim\limits_{x\to1^+}\dfrac{2\cancel{(x-1)}}{\cancel{x-1}}\Leftrightarrow2\alpha=2\Leftrightarrow\alpha=1$. Τότε $1+\beta=5\Leftrightarrow\beta=4$.

γ) $g(x)=\begin{cases}\dfrac{x^2+4}{x}, & x\le1,\ x\ne0\\[2mm] \dfrac{2x+3}{x}, & x>1\end{cases}$.

$\lim\limits_{x\to0^+}g(x)=\lim\limits_{x\to0^+}\left[(x^2+4)\dfrac{1}{x}\right]=+\infty\Rightarrow x=0$ κατακόρυφη ασύμπτωτη.

$\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{g(x)}{x}=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{x^2+4}{x^2}=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{x^{\cancel{2}}}{\cancel{x^2}}=1$ και

$\lim\limits_{x\to-\infty}(g(x)-x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\dfrac{x^2+4}{x}-x\right)=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{4}{x}=0$,

άρα η $y=x$ πλάγια ασύμπτωτη στο $-\infty$.

$\lim\limits_{x\to+\infty}g(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2x+3}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2x}{x}=2\Rightarrow y=2$ οριζόντια ασύμπτωτη στο $+\infty$.

5.918. α) Η f είναι παραγωγίσιμη στο $(0,+\infty)$ με:

$f'(x)=\frac{2\ln x}{x}+\ln x-1+x\frac{1}{x}=\frac{\ln x(x+2)}{x}$.

$f'(x)\geq 0\Leftrightarrow\frac{\ln x(x+2)}{x}\geq 0\Leftrightarrow\ln x\geq 0\Leftrightarrow x\geq 1$.

Για κάθε $x\in(0,1)$ είναι $f'(x)<0$, άρα η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $(0,1]$.

Για κάθε $x\in(1,+\infty)$ είναι $f'(x)>0$, άρα η f είναι γνησίως αύξουσα στο $[1,+\infty)$.

Η f παρουσιάζει ελάχιστο το $f(1)=0$.

β) Είναι $\lim\limits_{x\to 0^+}f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}\left[\ln^2 x+x(\ln x-1)+1\right]=\lim\limits_{x\to 0^+}\left(\ln^2 x+x\ln x-x+1\right)=+\infty$, γιατί

$\lim\limits_{x\to 0^+}\ln^2 x=+\infty$, $\lim\limits_{x\to 0^+}x\ln x=\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{\ln x}{\frac{1}{x}}\underset{DLH}{\overset{\frac{\infty}{\infty}}{=}}\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}}=\lim\limits_{x\to 0^+}(-x)=0$, $\lim\limits_{x\to 0^+}(-x-1)=-1$

και $\lim\limits_{x\to +\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to +\infty}\left[\ln^2 x+x(\ln x-1)+1\right]=+\infty$, γιατί

$\lim\limits_{x\to +\infty}\ln^2 x=+\infty$ και $\lim\limits_{x\to +\infty}\left[x(\ln x-1)-1\right]=+\infty$.

Για το διάστημα $\Delta_1=(0,1]$, έχουμε: $f(\Delta_1)=\left[f(1),\lim\limits_{x\to 0^+}f(x)\right)=[0,+\infty)$.

Για το διάστημα $\Delta_2=[1,+\infty)$, έχουμε: $f(\Delta_2)=\left[f(1),\lim\limits_{x\to +\infty}f(x)\right)=[0,+\infty)$.

Οπότε το σύνολο τιμών της f είναι: $f(A)=f(\Delta_1)\cup f(\Delta_2)=[0,+\infty)$.

Για κάθε $x\in(0,1)$ είναι $f(x)>f(1)=0$ και για κάθε $x\in(1,+\infty)$ είναι $f(x)>f(1)=0$, δηλαδή $f(x)>0$ για κάθε $x\in(0,1)\cup(1,+\infty)$. Επειδή $f(1)=0$, η $x=1$ είναι η μοναδική ρίζα της εξίσωσης $f(x)=0$.

γ) Επειδή $\lim\limits_{x\to 0^+}f(x)=+\infty$, η $x=0$ δηλαδή ο άξονας y΄y είναι κατακόρυφη ασύμπτωτη της C_f. Είναι

$$\lim_{x\to +\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to +\infty}\frac{\ln^2 x+x(\ln x-1)+1}{x}\underset{DLH}{\overset{\frac{\infty}{\infty}}{=}}\lim_{x\to +\infty}\frac{\frac{2\ln x}{x}+\ln x-1+1}{1}=$$

$$\lim_{x\to +\infty}\left(\frac{2\ln x}{x}+\ln x\right)=+\infty,$$

γιατί $\lim\limits_{x\to +\infty}\frac{\ln x}{x}\underset{DLH}{\overset{\frac{\infty}{\infty}}{=}}=\lim\limits_{x\to +\infty}\frac{\frac{1}{x}}{1}=0$ και $\lim\limits_{x\to +\infty}\ln x=+\infty$, οπότε η C_f δεν έχει πλάγια ασύμπτωτη.

Επειδή $\lim\limits_{x\to +\infty}f(x)=+\infty$, η C_f δεν έχει οριζόντια ασύμπτωτη.

δ) $$\lim_{x\to 1}\frac{f(x)}{(x-1)^2}=\lim_{x\to 1}\frac{\ln^2 x+x(\ln x-1)+1}{(x-1)^2}\underset{DLH}{\overset{\frac{0}{0}}{=}}\lim_{x\to 1}\frac{\frac{2\ln x}{x}+\ln x-1+1}{2(x-1)}=$$

$$\lim_{x\to 1}\frac{\ln x(x+2)}{2x(x-1)}\underset{DLH}{\overset{\frac{0}{0}}{=}}\lim_{x\to 1}\frac{\frac{x+2}{x}+\ln x}{2(x-1)+2x}=\frac{3}{2}$$

5.919. α) $f'(x)=\frac{3x^2-3}{x^2}\geq 0\Leftrightarrow x^2\geq 1\Leftrightarrow x\leq -1$ ή $x\geq 1$.

Για κάθε $x \in (-\infty,-1) \cup (1,+\infty)$, είναι $f'(x) > 0 \Rightarrow f \uparrow$ σε καθένα από τα διαστήματα $(-\infty,-1]$ και $[1,+\infty)$.

Για κάθε $x \in (-1,0) \cup (0,1)$ είναι $f'(x) < 0 \Rightarrow f \downarrow$ σε καθένα από τα διαστήματα $[-1,0)$ και $(0,1]$. Η f έχει τοπικό μέγιστο το $f(-1) = -6$ και τοπικό ελάχιστο το $f(1) = 6$.

β) $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 0^+} \left(\dfrac{x^2+3}{x} + 2x \right) = +\infty \Rightarrow x = 0$ κατακόρυφη ασύμπτωτη.

$\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x \to +\infty} \left(\dfrac{x^2+3}{x^2} + 2 \right) = 3$ και $\lim\limits_{x \to +\infty} (f(x) - 3x) = \lim\limits_{x \to +\infty} \left(\dfrac{x^2+3}{x} - x \right) = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{3}{x} = 0$,

άρα η $y = 3x$ είναι πλάγια ασύμπτωτη της C_f.

γ) $y - f(1) = f'(1)(x-1) \Leftrightarrow y = 6$

δ) $\lambda_{AB} = \dfrac{f(3)-f(1)}{3-1} = \dfrac{10-6}{2} = 2$, άρα

$f'(\xi) = 2 \Leftrightarrow \dfrac{3\xi^2 - 3}{\xi^2} = 2 \Leftrightarrow 3\xi^2 - 3 = 2\xi^2 \Leftrightarrow \xi^2 = 3 \overset{\xi>0}{\Leftrightarrow} \xi = \sqrt{3}$, άρα $M(\sqrt{3}, 4\sqrt{3})$.

5.920. α) Είναι $f'(x) = (x+1)e^{x-\alpha}$.

$f'(0) = \lambda_\varepsilon \Leftrightarrow e^{-\alpha} = e \Leftrightarrow -\alpha = 1 \Leftrightarrow \alpha = -1$.

β) i. $f'(x) = (x+1)e^{x+1} \geq 0 \Leftrightarrow x \geq -1$

Για κάθε $x < -1$ είναι $f'(x) < 0 \Rightarrow f \downarrow (-\infty,-1]$ και για κάθε $x > -1$ είναι $f'(x) > 0 \Rightarrow f \uparrow [-1,+\infty)$.

ii. $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to -\infty} xe^{x+1} = \lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{x}{e^{-x-1}} \overset{\left(\frac{\infty}{\infty}\right)}{\underset{DLH}{=}} \lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{1}{-e^{-x-1}} = 0$, άρα

η $y = 0$, δηλαδή ο άξονας x΄x είναι οριζόντια ασύμπτωτη της C_f στο $-\infty$.

5.921. α) Είναι $1 - \sigma\upsilon\nu x \geq 0$ οπότε και $x + 1 - \sigma\upsilon\nu x \geq x$ (1) για κάθε $x \geq 0$.

Εστω $g(x) = e^x - x - 1$, $x \in [0,+\infty)$. Είναι $g'(x) = e^x - 1 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq 0$.

Για κάθε $x < 0$ είναι $g'(x) < 0 \Rightarrow g \downarrow (-\infty,0]$ και για κάθε $x > 0$ είναι $g'(x) > 0 \Rightarrow g \uparrow [0,+\infty)$. Ελάχιστο το $g(0) = 0$, άρα $g(x) \geq g(0) \Leftrightarrow$

$e^x - x - 1 \geq 0 \Leftrightarrow e^x \geq x + 1$ οπότε και $e^x - \sigma\upsilon\nu x \geq x + 1 - \sigma\upsilon\nu x$ (2)

Από (1) και (2) είναι $e^x - \sigma\upsilon\nu x \geq x + 1 - \sigma\upsilon\nu x \geq x$

β) $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\eta\mu x - \sigma\upsilon\nu x}{e^x - \sigma\upsilon\nu x}$

Για κάθε $x > 0$ είναι: $\left| \dfrac{\eta\mu x - \sigma\upsilon\nu x}{e^x - \sigma\upsilon\nu x} \right| \leq \dfrac{|\eta\mu x| + |\sigma\upsilon\nu x|}{|e^x - \sigma\upsilon\nu x|} \leq \dfrac{1+1}{|e^x - \sigma\upsilon\nu x|} = \dfrac{2}{e^x - \sigma\upsilon\nu x} \leq \dfrac{2}{x}$

Άρα $|f(x)| \leq \dfrac{2}{x} \Leftrightarrow -\dfrac{2}{x} \leq f(x) \leq \dfrac{2}{x}$ και από κριτήριο παρεμβολής προκύπτει ότι $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=0$. Άρα η ευθεία $y=0$ είναι οριζόντια ασύμπτωτη της C_f στο $+\infty$.

5.922. α) Αφού η f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ και $x=x_0$ είναι κρίσιμο σημείο της f τότε $f'(x_0)=0$. Παραγωγίζοντας την $(f(x))^2-xf(x)+x^2-12=0$ (1) ,έχουμε:

$2f(x)f'(x)-f(x)-xf'(x)+2x=0$ (2) και για $x=x_0$

$2f(x_0)f'(x_0)-f(x_0)-x_0f'(x_0)+2x_0=0$ άρα $f(x_0)=2x_0$ (3).

Οπότε η (1) με βάση την (3) γίνεται

$4x_0^2-x_02x_0+x_0^2-12=0 \Leftrightarrow 3x_0^2=12 \Leftrightarrow x_0=\pm2$

β) Εστω ότι η f έχει σημείο καμπής για $x=\kappa$ τότε $f''(\kappa)=0$. Παραγωγίζοντας την (2) έχουμε $2(f'(x))^2-f'(x)-f'(x)-xf''(x)+2=0$ και για $x=\kappa$ προκύπτει $2(f'(\kappa))^2-2f'(\kappa)+2=0$ άτοπο αφού το παραπάνω είναι τριώνυμο ως προς $f'(\kappa)$ με $\Delta=-12<0$ οπότε η f δεν έχει σημείο καμπής.

γ) Εστω ότι η f έχει την $y=\lambda x+\beta$ ασύμπτωτη στο $-\infty$ τότε $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{f(x)}{x}=\lambda\in\mathbb{R}$ και $\lim\limits_{x\to-\infty}\left[f(x)-\lambda x\right]=\beta\in\mathbb{R}$.

Για κάθε $x\neq0$ από την (1) προκύπτει $\left(\dfrac{f(x)}{x}\right)^2-\dfrac{f(x)}{x}+1-\dfrac{12}{x^2}=0$ οπότε

και $\lim\limits_{x\to-\infty}\left[\left(\dfrac{f(x)}{x}\right)^2-\left(\dfrac{f(x)}{x}\right)+1-\dfrac{12}{x^2}\right]=0 \Leftrightarrow \lambda^2-\lambda+1=0$ άτοπο άρα η C_f δεν έχει ασύμπτωτη στο $-\infty$.

5.923. α) $f(x)=x\left(1+e^{-2x}\right)$, $f'(x)=\dfrac{e^{2x}-2x+1}{e^{2x}}$ και $f''(x)=4(x-1)e^{-2x}$.

Παρατηρούμε ότι το πρόσημο της f' εξαρτάται από το πρόσημο της παράστασης $e^{2x}-2x+1$. Έστω $g(x)=e^{2x}-2x+1$, $x\in\mathbb{R}$.

$g'(x)=2e^{2x}-2\geq0 \Leftrightarrow x\geq0$.

Για κάθε $x<0$ είναι $g'(x)<0 \Rightarrow g\downarrow(-\infty,0]$, οπότε

$g(x)>g(0)=0 \Rightarrow f'(x)>0 \Rightarrow f\uparrow(-\infty,0]$. Για κάθε $x>0$ είναι

$g(x)>g(0)=0 \Rightarrow f'(x)>0 \Rightarrow f\uparrow[0,+\infty)$.

Επειδή η f είναι συνεχής στο $x_0=0$ είναι $\uparrow$ στο $\mathbb{R}$.

$f''(x)\geq0 \Leftrightarrow 4(x-1)e^{-2x}\geq0 \Leftrightarrow x\geq1$. Για κάθε $x<1$ είναι $f''(x)<0 \Rightarrow f'\downarrow(-\infty,1]$ και για κάθε $x>1$ είναι $f''(x)>0 \Rightarrow f'\uparrow[1,+\infty)$.

β) Επειδή $f\uparrow\mathbb{R}$, δεν έχει ακρότατα. Σημείο καμπής το $(1,f(1))\equiv\left(1,1+\dfrac{1}{e^2}\right)$

γ) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{e^{2x}+1}{e^{2x}}=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1+e^{-2x}\right)=1$ και

$\lim\limits_{x\to+\infty}(f(x)-x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{x(e^{2x}+1)}{e^{2x}}-x\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x}{e^{2x}}\overset{\left(\frac{\infty}{\infty}\right)}{\underset{DLH}{=}}\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{2e^{2x}}=0$, άρα η ευθεία $y=x$ είναι ασύμπτωτη της C_f στο $+\infty$.

Επειδή $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to-\infty}(1+e^{-2x})=1$ και $\lim\limits_{x\to+\infty}(f(x)-x)=0$, η ευθεία $y=x$ είναι ασύμπτωτη της C_f στο $-\infty$.

5.924. α) $f'(x)=\ln x+1-\ln(x+1)-1=\ln x-\ln(x+1)$.

Είναι $0<x<x+1\Rightarrow \ln x<\ln(x+1)\Rightarrow f'(x)<0\Rightarrow f\downarrow(0,+\infty)$.

$f''(x)=\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{x+1}=\dfrac{1}{x(x+1)}>0\Rightarrow f$ κυρτή στο $(0,+\infty)$.

β) Επειδή $\lim\limits_{x\to0^+}x\ln x=\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{\ln x}{\frac{1}{x}}\overset{\left(\frac{\infty}{\infty}\right)}{\underset{DLH}{=}}\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}}=\lim\limits_{x\to0^+}(-x)=0$, είναι $\lim\limits_{x\to0^+}f(x)=0$, οπότε η C_f δεν δέχεται κατακόρυφη ασύμπτωτη.

γ) $f'(x)=1\Leftrightarrow \ln x-\ln(x+1)=1\Leftrightarrow \ln\dfrac{x}{x+1}=1\Leftrightarrow\dfrac{x}{x+1}=e\Leftrightarrow x=ex+e\Leftrightarrow$

$x(1-e)=e\Leftrightarrow x=\dfrac{e}{1-e}<0\Rightarrow$ η C_f δεν δέχεται εφαπτομένη παράλληλη στη $y=x$.

5.925. α) Είναι $1+e^{-x}>0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$ οπότε $D_f=\mathbb{R}$. Η f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με $f'(x)=\dfrac{-e^{-x}}{1+e^{-x}}+\dfrac{1}{2}=\dfrac{-2e^{-x}+1+e^{-x}}{2(1+e^{-x})}=\dfrac{1-e^{-x}}{2(1+e^{-x})}$.

Είναι $f'(x)\ge0\Leftrightarrow 1-e^{-x}\ge0\Leftrightarrow e^{-x}\le1\Leftrightarrow e^{-x}\le e^0\Leftrightarrow -x\le0\Leftrightarrow x\ge0$.

Για κάθε $x<0$ είναι $f'(x)<0\Rightarrow f\downarrow(-\infty,0]$ και για κάθε $x>0$ είναι $f'(x)>0\Rightarrow f\uparrow[0,+\infty)$. Ελάχιστο το $f(0)=\ln2$.

Είναι $f''(x)=\dfrac{2e^{-x}}{(1+e^{-x})^2}>0\Rightarrow f$ κυρτή στο $\mathbb{R}$.

β) $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\left[\ln(1+e^{-x})+\dfrac{x}{2}\right]=\lim\limits_{x\to-\infty}\left[\ln\dfrac{e^x+1}{e^x}+\dfrac{x}{2}\right]=$

$$\lim\limits_{x\to-\infty}\left[\ln(e^x+1)-x+\dfrac{x}{2}\right]=\lim\limits_{x\to-\infty}\left[\ln(e^x+1)-\dfrac{x}{2}\right]=+\infty$$

Επίσης $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left[\ln(1+e^{-x})+\dfrac{x}{2}\right]=+\infty$ αφού $\underset{x\to+\infty}{\ln}\left[\ln(1+e^{-x})\right]=0$

Στο διάστημα $\Delta_1=(-\infty,0]$ η f είναι συνεχής και $\downarrow$, άρα $f(\Delta_1)=[\ln2,+\infty)$

Στο διάστημα $\Delta_1=[0,+\infty)$ η f είναι συνεχής και $\uparrow$, άρα $f(\Delta_2)=[\ln2,+\infty)$.

Άρα $f(A)=[\ln2,+\infty)$.

γ) Η f συνεχής στο $\mathbb{R}$ άρα δεν έχει κατακόρυφες ασύμπτωτες. Επίσης $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=+\infty$ και $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$ οπότε δεν έχει οριζόντιες ασύμπτωτες.

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln\left(1+e^{-x}\right)+\frac{x}{2}}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln\left(e^{x}+1\right)-\frac{x}{2}}{x}\overset{\frac{+\infty}{+\infty}}{=}\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{e^x}{e^x+1}-\frac{1}{2}}{1}=1-\frac{1}{2}=\frac{1}{2}\text{ και}$$

$\lim\limits_{x\to+\infty}\left[f(x)-\frac{1}{2}x\right]=\lim\limits_{x\to+\infty}\left[\ln\left(1+e^{-x}\right)\right]=\ln1=0$. Άρα $y=\frac{1}{2}x$ πλάγια στο $+\infty$.

Επίσης $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{\ln\left(e^{x}+1\right)-\frac{x}{2}}{x}\overset{\frac{+\infty}{-\infty}}{=}\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{\frac{e^x}{e^x-1}-\frac{1}{2}}{x}=-\frac{1}{2}$ και

$$\lim_{x\to-\infty}\left[f(x)+\frac{1}{2}x\right]=\lim_{x\to-\infty}\left[\ln\left(1+e^{-x}\right)+x\right]=$$

$$\lim_{x\to-\infty}\left[\ln\left(\frac{e^x+1}{e^x}\right)+x\right]=\lim_{x\to-\infty}\left[\ln\left(e^x+1\right)-x+x\right]=0.$$

Άρα $y=-\frac{1}{2}x$ είναι πλάγια στο $-\infty$. Οι ασύμπτωτες τέμνονται στο $(0,0)$.

δ) Για κάθε $x>0$ είναι

$$f(x)>\frac{x}{2}\Leftrightarrow\ln\left(1+e^{-x}\right)+\frac{x}{2}>\frac{x}{2}\Rightarrow\ln\left(\frac{e^x+1}{e^x}\right)>0\Rightarrow\ln\frac{e^x+1}{e^x}>1\Rightarrow\frac{e^x+1}{e^x}>1\text{ που}$$

ισχύει.
Για κάθε $x<0$ είναι

$$f(x)>-\frac{1}{2}x\Leftrightarrow\ln\left(1+e^{-x}\right)+\frac{x}{2}>-\frac{x}{2}\Leftrightarrow\ln\left(\frac{1+e^x}{e^x}\right)+x>0\Leftrightarrow\ln\left(1+e^x\right)-x+x>0\Leftrightarrow$$

$\ln\left(1+e^x\right)>0$ που ισχύει. Άρα η C_f βρίσκεται πάνω από τις ασύμπτωτες για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

5.926. α) Είναι $h'(x)=5x^4f(x)+x^5f'(x)=5x^4f(x)+x^4xf'(x)=$

$$=5x^4f(x)-5x^4f(x)=0\text{ άρα } h'(x)=0\Leftrightarrow h(x)=\begin{cases}c_1, & x<0\\ c_2, & x>0\end{cases}$$

β) Αφού η f είναι άρτια και $f(1)=3$ τότε $f(-1)=f(1)=3$ άρα $h(1)=1^5\cdot3=3=c_2$

$h(-1)=(-1)^5\cdot3=-3=c_1$,

Άρα $h(x)=\begin{cases}-3, & x<0\\ 3, & x>0\end{cases}$ οπότε για $x<0$: $x^5f(x)=-3\Leftrightarrow f(x)=\frac{-3}{x^5}$

ενώ για $x>0$ είναι $x^5f(x)=3\Leftrightarrow f(x)=\frac{3}{x^5}$. Οπότε $f(x)=\begin{cases}\frac{-3}{x^5}, & x<0\\ \frac{3}{x^5}, & x>0\end{cases}$

γ) Επειδή $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=0$ και $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=0$, η ευθεία $y=0$ είναι οριζόντια ασύμπτωτη C_f στο $+\infty$ και στο $-\infty$.

$\lim\limits_{x\to0^+} f(x)=\lim\limits_{x\to0^+}\frac{3}{x^5}=+\infty\Rightarrow x=0$ κατακόρυφη ασύμπτωτη της C_f.

5.927. **α)** Επειδή $y=4x+5$ είναι πλάγια ασύμπτωτη της C_f στο $+\infty$ τότε

$\lim\limits_{x\to+\infty}\left[f(x)-(4x+5)\right]=0$. Έστω $h(x)=f(x)-(4x+5)$ (1) με $\lim\limits_{x\to+\infty}h(x)=0$ τότε

αφού $x+1\to+\infty$ θα είναι και $\lim\limits_{x\to+\infty}h(x+1)=0$.

Στην (1) όπου x το $x+1$ προκύπτει $h(x+1)=f(x+1)-\left[4(x+1)+5\right]$ (2)

Αφαιρώντας (2)−(1) έχω

$h(x+1)-h(x)=f(x+1)-f(x)-\left[4x+4+5\right]+4(x+5)$

$h(x+1)-h(x)=f(x+1)-f(x)-4\Leftrightarrow f(x+1)-f(x)=h(x+1)-h(x)+4$ συνεπώς και

$\lim\limits_{x\to+\infty}\left[f(x+1)-f(x)\right]=\lim\left[h(x+1)-h(x)+4\right]=4$.

β) ΘΜΤ στο $[x-1,x]$: $\exists\,\xi_1\in(x-1,x)$: $f'(\xi_1)=f(x)-f(x-1)$

Όμοια ΘΜΤ στο $[x,x+1]$: $\exists\,\xi_2\in(x,x+1)$: $f'(\xi_2)=f(x+1)-f(x)$

$x-1<\xi_1<x<\xi_2<x+1\overset{f'\uparrow}{\Rightarrow} f'(\xi_1)<f'(x)<f'(\xi_2)\Leftrightarrow$

$f(x)-f(-1)<f'(x)<f(x+1)-f(x)$

γ) Επειδή $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[f(x+1)-f(x)\right]=4$, θέτοντας $x=u-1$, προκύπτει

$\lim\limits_{u\to+\infty}\left[f(u-1)-f(u)\right]=4$ οπότε από Κ.Π, είναι και $\lim\limits_{x\to+\infty}f'(x)=4$.

5.928. **α)** Είναι $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(g(x)+3\right)=0$ και $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(f(x)-2x+1\right)=0$. Το κλάσμα $\dfrac{g'(x)}{f'(x)-2}$ ορίζεται σε διάστημα της μορφής $[\alpha,+\infty)$ αφού $f'(x)\neq2$ οπότε από το θεώρημα DLH

προκύπτει: $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{g(x)+3}{f(x)-2x+1}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{g'(x)}{f'(x)-2}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f'(x)-2}{f'(x)-2}=1$

β) Είναι $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(g(x)+3\right)=0$ άρα $\lim\limits_{x\to+\infty}g(x)=-3\Rightarrow y=-3$ οριζόντια στο $+\infty$. Επίσης

$\lim\limits_{x\to+\infty}\left(f(x)-(2x-1)\right)=0$ άρα $y=2x-1$ πλάγια της C_f στο $+\infty$.

γ) Εστω ότι έχει δύο ρίζες ρ_1, ρ_2 με $\rho_1<\rho_2$. Εφαρμόζουμε Rolle για τη g στο $[\rho_1,\rho_2]$

οπότε $\exists\,\xi\in(\rho_1,\rho_2)$: $g'(\xi)=0$. Άρα $f'(\xi)-g'(\xi)=2\Leftrightarrow f'(\xi)=2$ άτοπο.

δ) $f'(x)-g'(x)=2\Leftrightarrow\left(f(x)-g(x)\right)'=(2x)'$ άρα

$f(x)-g(x)=2x+c\Leftrightarrow f(x)-2x=g(x)+c\Leftrightarrow f(x)-2x+1=g(x)+c+1\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow f(x)-2x+1=g(x)+3+c-2$ οπότε $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(f(x)-2x+1\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left[\left(g(x)+3\right)+c-2\right]$

δηλαδή $0=0+c-2\Leftrightarrow c=2$. Άρα $f(x)-g(x)=2x+2$.

5.929. **α)** Πρέπει $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{(\alpha-2)x+9}{x+\beta}=3$

Αν $\alpha=2$ τότε $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=0$ άτοπο.

Αν $\alpha\neq2$ τότε $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\dfrac{(\alpha-2)x}{x}=\alpha-2$ άρα $\alpha-2=3$ οπότε $\alpha=5$ και

$f(x)=\dfrac{3x+9}{x+\beta}$.

Είναι $A_f = \mathbb{R} - \{-\beta\}$. Αν η C_f έχει κατακόρυφη ασύμπτωτη, τότε αυτή θα είναι η $x = -\beta$. Επειδή όμως η ασύμπτωτη είναι η $x = -1$, ισχύει ότι $-\beta = -1 \Leftrightarrow \beta = 1$.

Τότε $\lim\limits_{x \to -1^+} f(x) = \lim\limits_{x \to -1^+} \dfrac{3x+9}{x+1} = \lim\limits_{x \to -1^+} \left[(3x+9)\dfrac{1}{x+1} \right] = +\infty$

β) $f(x) = \dfrac{3x+9}{x+1} = \dfrac{3x+3+6}{x+1} = 3 + \dfrac{6}{x+1}$ άρα $G(x) = 3x + 6\ln|x+1| + c$ επειδή $G(0) = 3$ τότε $c = 3$ άρα $G(x) = 3x + 3 + 6\ln|x+1|$

γ) $g(x) = \dfrac{G(x)}{x+1} = 3 + 6\dfrac{\ln(x+1)}{x+1}$ για $x > -1$ οπότε

$g'(x) = 6\dfrac{1-\ln(x+1)}{(x+1)^2} \geq 0 \Leftrightarrow \ln(x+1) \leq 1 \Leftrightarrow x+1 \leq e \Leftrightarrow x \leq e-1$

Για κάθε $x \in (-1, e-1)$ είναι $g'(x) > 0 \Rightarrow g \uparrow (-1, e-1]$ και για κάθε $x > e-1$ είναι

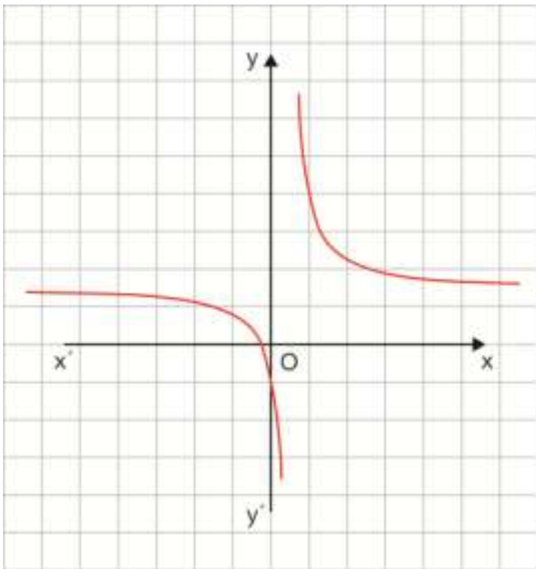
$g'(x) < 0 \Rightarrow g \downarrow [e-1, +\infty)$. Μέγιστο το $g(e-1) = 3 + \dfrac{6}{e}$.

Μελέτη συνάρτησης

5.932. **α)** $f'(x)=-\dfrac{3}{(x-1)^2}$, $f''(x)=\dfrac{6}{(x-1)^3}$

x	$-\infty$ 1	$+\infty$
f''	$-$	$+$
f'	$-$	$-$
f		

Οριζόντια ασύμπτωτη η $y=2$ και κατακόρυφη η $x=1$



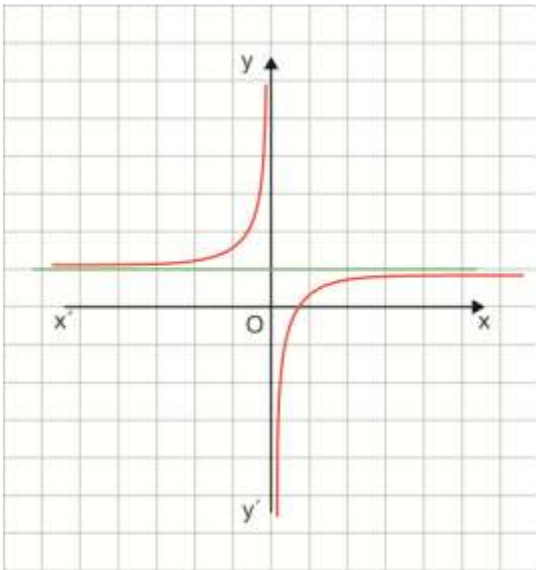
β) $f'(x)=1+\dfrac{1}{x^2}>0 \Rightarrow f\uparrow(-\infty,0)$ και $\uparrow(0,+\infty)$.

$f''(x)=-\dfrac{2}{x^3}$, f κυρτή στο $(-\infty,0)$ και κοίλη στο $(0,+\infty)$.

x	$-\infty$ 0	$+\infty$
f''	$+$	$-$
f'	$+$	$+$
f		

$\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=+\infty \Rightarrow y'y$ κατακόρυφη ασύμπτωτη.

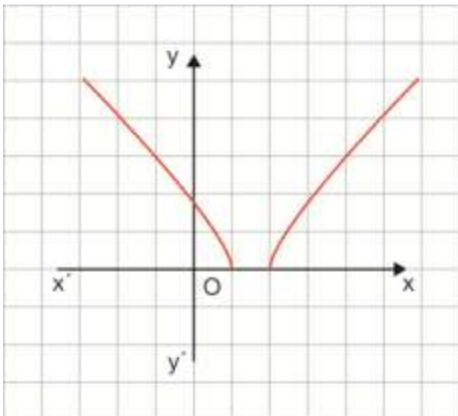
$\lim\limits_{x\to +\infty} f(x)=1 \Rightarrow y=1$ οριζόντια ασύμπτωτη



γ) $f'(x)=\dfrac{x-2}{\sqrt{x^2-4x+3}}$, $x\in(-\infty,1)\cup(3,+\infty)$

$f''(x)=-\dfrac{1}{(x^2-4x+3)\sqrt{x^2-4x+3}}<0 \Rightarrow f$ κοίλη σε καθένα από τα $(-\infty,1)$ και $(3,+\infty)$.

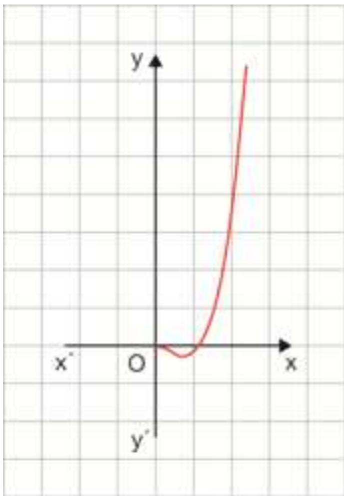
x	$-\infty$ 1	2	3 $+\infty$
f''	$-$		$-$
f'	$-$		$+$
f			



δ) $f'(x)=x(2\ln x+1)\ge 0 \Leftrightarrow x\ge e^{-\frac{1}{2}}$.

Είναι $f\downarrow\left(0,e^{-\frac{1}{2}}\right]$ και $\uparrow\left[e^{-\frac{1}{2}},+\infty\right)$

$f''(x)=2\ln x+3\ge 0 \Leftrightarrow x\ge e^{-\frac{3}{2}}$.



x	0 $\quad$ $e^{-\frac{3}{2}}$	$e^{-\frac{1}{2}}$	$+\infty$
f''	–	+	+
f'	–	–	+
f	Σ.Κ.	Ο.Ε.	

Η f είναι κοίλη στο $\left(0,e^{-\frac{3}{2}}\right]$ και κυρτή στο $\left[e^{-\frac{3}{2}},+\infty\right)$. Σημείο καμπής το $\left(e^{-\frac{3}{2}},-\frac{3}{2e^3}\right)$.

$$\lim_{x\to 0^+} f(x)=\lim_{x\to 0^+}\left(x^2\ln x\right)=\lim_{x\to 0^+}\frac{\ln x}{\frac{1}{x^2}}\underset{DLH}{\overset{\left(\frac{\infty}{\infty}\right)}{=}}\lim_{x\to 0^+}\frac{\frac{1}{x}}{-\frac{2}{x^3}}=\lim_{x\to 0^+}\left(-x^2\right)=0,$$

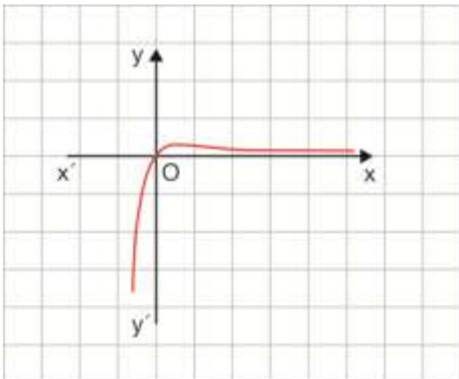
$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$$

ε) $f'(x)=e^{-x}(1-x)\ge 0 \Leftrightarrow x\le 1$. Είναι $f\uparrow(-\infty,1)$ και

$\downarrow(1,+\infty)$

Μέγιστο το $f(1)=\frac{1}{e}$.

$f''(x)=e^{-x}(x-2)\ge 0 \Leftrightarrow x\ge 2$.



x	$-\infty$ $\quad$ 1	2	$+\infty$
f''	–	–	+
f'	+	–	–
f	Ο.Μ.	Σ.Κ.	

Η f είναι κοίλη στο $(-\infty,2]$ και κυρτή στο $[2,+\infty)$. Σημείο καμπής το $\left(2,\frac{2}{e^2}\right)$

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty} xe^{-x}=-\infty$, $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x}{e^x}\underset{DLH}{\overset{\left(\frac{\infty}{\infty}\right)}{=}}\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{e^x}=0$, άρα οριζόντια ασύμπτωτη της C_f στο $+\infty$ ο άξονας $x'x$.

στ) $f'(x)=\dfrac{e^x(x-1)}{x^2}\geq 0 \Leftrightarrow x\geq 1$.

x	$-\infty$ 0	1	$+\infty$
f″	–	+	+
f′	–	–	+
f			T.E.

Είναι $f\downarrow(-\infty,0)$ και $(0,1]$ και $\uparrow(1,+\infty)$.

Τοπικό ελάχιστο το $f(1)=e$.

$f''(x)=\dfrac{e^x\left(x^2-2x+2\right)}{x^3}>0\Rightarrow x>0$.

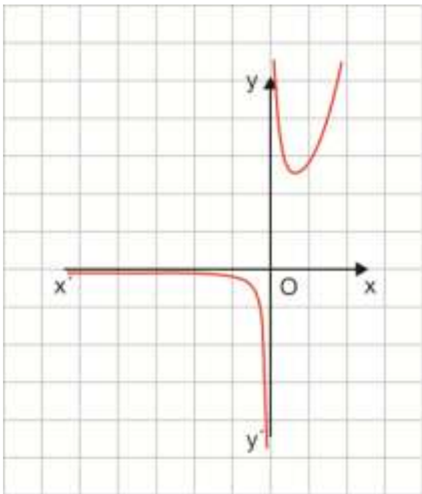
Η f είναι κοίλη στο $(-\infty,0)$ και κυρτή στο $(0,+\infty)$.

$\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{e^x}{x}=\lim\limits_{x\to-\infty}\left(e^x\dfrac{1}{x}\right)=0\Rightarrow y=0$ οριζόντια ασύμπτωτη στο $-\infty$.

$\lim\limits_{x\to0^-}f(x)=\lim\limits_{x\to0^-}\dfrac{e^x}{x}=-\infty$, $\lim\limits_{x\to0^+}f(x)=\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{e^x}{x}=+\infty$,

άρα η $x=0$ είναι κατακόρυφη ασύμπτωτη της C_f.

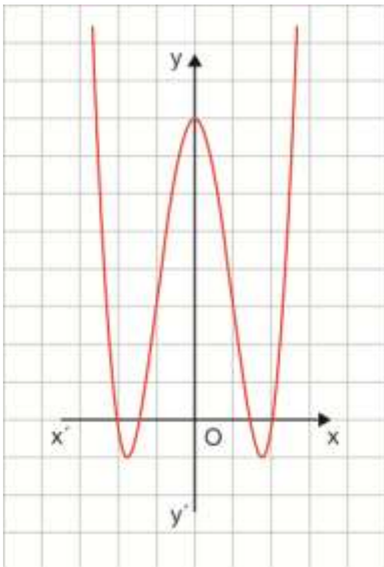
$\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{e^x}{x}\overset{\left(\frac{\infty}{\infty}\right)}{\underset{DLH}{=}}\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{e^x}{1}=+\infty$



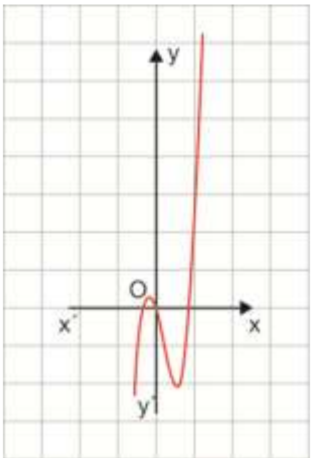
5.933. **α)** $f'(x)=4x\left(x^2-3\right)$. Είναι $f\downarrow\left(-\infty,-\sqrt{3}\right]$, $\left[0,\sqrt{3}\right]$ και $f\uparrow\left[-\sqrt{3},0\right]$, $\left[\sqrt{3},+\infty\right)$.

Τοπικά ελάχιστα τα $f\left(-\sqrt{3}\right)=-1$, $f\left(\sqrt{3}\right)=-1$ και τοπικό μέγιστο το $f(0)=8$.

x	$-\infty$ $-\sqrt{3}$	-1	0	1	$\sqrt{3}$	$+\infty$
f″	+	+	–	–	+	+
f′	–	+	+	–	–	+
f	T.E.	Σ.Κ.	Τ.Μ.	Σ.Κ.	Τ.Ε.	



β) $f'(x)=3(x+1)(x-5)$.



Είναι $f\uparrow(-\infty,-1]$, $[5,+\infty)$ και $f\downarrow[-1,5]$.

Τοπικό μέγιστο το $f(-1)=8$ και τοπικό ελάχιστο το $f(5)=-100$.

$f''(x)=6(x-2)$. Η f είναι κοίλη στο $(-\infty,2]$ και κυρτή στο $[2,+\infty)$.

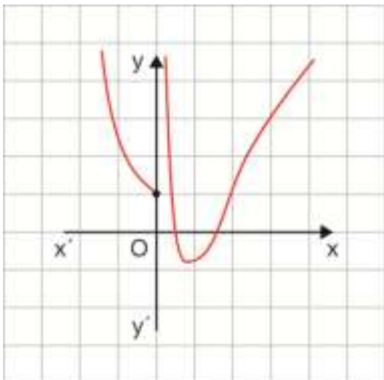
Εχει σημείο καμπής το $(2,-46)$.

x	$-\infty$ -1	2	5	$+\infty$
f''	–	–	+	+
f'	+	–	–	+
f		Τ.Μ.	Σ.Κ.	Τ.Ε.

5.934. $f'(x)=\begin{cases} 2xe^{x^2}-2, & x<0 \\ \dfrac{2}{x}(\ln x-1), & x>0 \end{cases}$. Είναι $f\downarrow(-\infty,0)$, $(0,e]$ και $\uparrow[e,+\infty)$.

Τοπικό ελάχιστο το $f(e)=-1$.

$f''(x)=\begin{cases} 2e^{x^2}\left(1+2x^2\right), & x<0 \\ \dfrac{2(2-\ln x)}{x^2}, & x>0 \end{cases}$. Η f είναι κυρτή στα $(-\infty,0)$, $\left[e^2,+\infty\right)$ και κοίλη στο $\left(0,e^2\right]$. Έχει σημείο καμπής το $\left(e^2,0\right)$.



$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\left(e^{x^2}-2x\right)=+\infty$,

$\lim\limits_{x\to0^+} f(x)=\lim\limits_{x\to0^+}\left[\ln x(\ln x-2)\right]=+\infty$

Η $x=0$ $(y'y)$ κατακόρυφη ασύμπτωτη της C_f.

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left[\ln x(\ln x-2)\right]=+\infty$

x	$-\infty$ 0	e	e^2	$+\infty$
f''	+	+	+	–
f'	–	–	+	+
f			Τ.Ε.	Σ.Κ.

5.935. $f'(x)=e^x(\eta\mu x+\sigma\upsilon\nu x)\geq 0 \Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu x\geq -\eta\mu x \Leftrightarrow \sigma\varphi x\geq -1=\sigma\varphi\dfrac{3\pi}{4}\Rightarrow 0\leq x\leq\dfrac{3\pi}{4}$

$f\uparrow\left[0,\dfrac{3\pi}{4}\right]$ και $\downarrow\left[\dfrac{3\pi}{4},\pi\right]$.

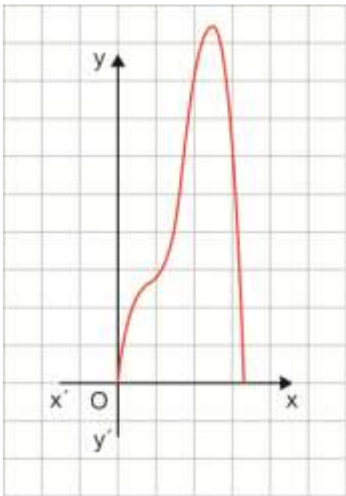
Η f έχει μέγιστο το $f\left(\dfrac{3\pi}{4}\right)=e^{\frac{3\pi}{4}}\eta\mu\dfrac{3\pi}{4}=-\dfrac{e^{\frac{3\pi}{4}}\sqrt{2}}{2}$ και

τοπικά ελάχιστα τα $f(0)=0$ και $f(\pi)=0$

$f''(x)=2e^x\sigma\upsilon\nu x\geq 0\Leftrightarrow x\in\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right]$.

Η f είναι κυρτή στο $\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right]$ και κοίλη στο $\left[\dfrac{\pi}{2},\pi\right]$.

Εχει σημείο καμπής το $\left(\dfrac{\pi}{2},e^{\frac{\pi}{2}}\right)$



x	0		π/2		3π/4		π
f″		+		–		–	
f′		+		+		–	
f	Τ.Ε.		Σ.Κ.		Τ.Μ.		Τ.Ε.

5.936. **α)** $f'(x)=1+\sigma\upsilon\nu x>0$,

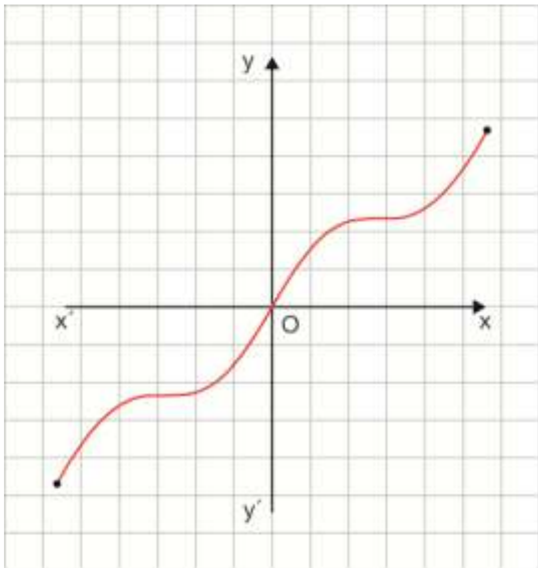
$x\in(-2\pi,-\pi)\cup(-\pi,\pi)\cup(\pi,2\pi)\Rightarrow f\uparrow[-2\pi,2\pi]$

Ελάχιστο το $f(-2\pi)=-2\pi$ και μέγιστο το

$f(2\pi)=2\pi$.

$f''(x)=-\eta\mu x\geq 0\Rightarrow x\in[-\pi,0]\cup[\pi,2\pi]$

Η f είναι κυρτή σε καθένα από τα $[-\pi,0]$ και $[\pi,2\pi]$, κοίλη στα $[-2\pi,-\pi]$ και $[0,\pi]$. Σημεία καμπής τα $(-\pi,-\pi)$, $(0,0)$, (π,π).



x	–2π		–π		0		π		2π
f″		–		+		–		+	
f′		+		+		+		+	
f	Ο.Ε.		Σ.Κ.		Σ.Κ.		Σ.Κ.		Ο.Μ.

β) $f'(x)=1-2\sigma\upsilon\nu x\geq 0 \Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu x\leq \frac{1}{2}=\sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{3}\Rightarrow \frac{\pi}{3}\leq x\leq 2\pi$

$f\downarrow\left[0,\frac{\pi}{3}\right]$ και $\uparrow\left[\frac{\pi}{3},2\pi\right]$.

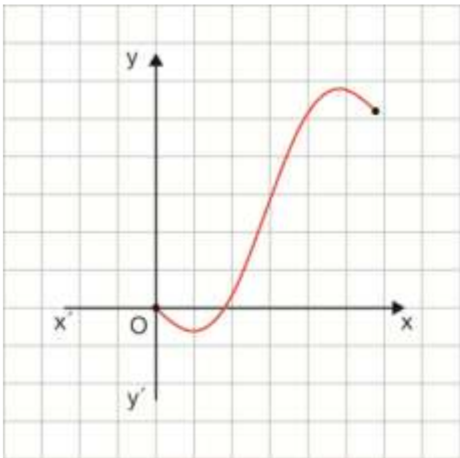
x	0 — $\pi/3$	— π	— 2π
f''	+	+	–
f'	–	+	+
f	Τ.Μ. ↘ Ο.Ε.	↗ Σ.Κ.	↗ Τ.Μ.

Τοπικά μέγιστα τα $f(0)=0$ και $f(\pi)=2\pi$.

Ελάχιστο το $f\left(\frac{\pi}{3}\right)=\frac{\pi}{3}-2\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{\pi-3\sqrt{3}}{3}$.

$f''(x)=2\eta\mu x\geq 0\Leftrightarrow x\in[0,\pi]$.

Η f είναι κυρτή στο $[0,\pi]$ και κοίλη στο $[\pi,2\pi]$. Σημείο καμπής το (π,π).



5.937. α) $f'(x)=\frac{(x^2+3)^2}{(x^2-1)^2}>0$ για κάθε $x\neq\pm1 \Rightarrow f\uparrow$ σε καθένα από τα $(-\infty,-1)$, $(-1,1)$ και $(1,+\infty)$.

$\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{x^3-9x}{x^2-1}=\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{x^{\cancel{3}}}{\cancel{x^2}}=-\infty$, $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x^3-9x}{x^2-1}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x^{\cancel{3}}}{\cancel{x^2}}=+\infty$

$\lim\limits_{x\to-1^-}f(x)=\lim\limits_{x\to-1^-}\left(\frac{x^3-9x}{x-1}\cdot\frac{1}{x+1}\right)=+\infty$, $\lim\limits_{x\to-1^+}f(x)=\lim\limits_{x\to-1^+}\left(\frac{x^3-9x}{x-1}\cdot\frac{1}{x+1}\right)=-\infty$,

$\lim\limits_{x\to1^-}f(x)=\lim\limits_{x\to1^-}\left(\frac{x^3-9x}{x+1}\cdot\frac{1}{x-1}\right)=+\infty$, $\lim\limits_{x\to1^+}f(x)=\lim\limits_{x\to1^+}\left(\frac{x^3-9x}{x+1}\cdot\frac{1}{x-1}\right)=-\infty$

Στο διάστημα $\Delta_1=(-\infty,-1)$ η f είναι συνεχής και $\uparrow$,

άρα $f(\Delta_1)=\left(\lim\limits_{x\to-\infty}f(x),\lim\limits_{x\to-1^-}f(x)\right)=\mathbb{R}$

Στο διάστημα $\Delta_2=(-1,1)$ η f είναι συνεχής και $\uparrow$, άρα $f(\Delta_2)=\left(\lim\limits_{x\to-1^+}f(x),\lim\limits_{x\to1^-}f(x)\right)=\mathbb{R}$.

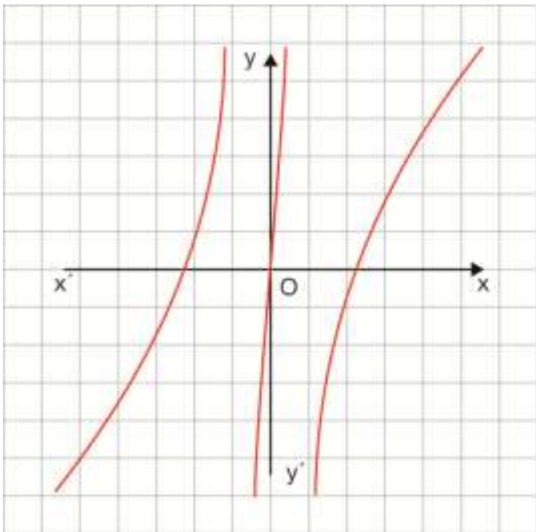
Στο διάστημα $\Delta_3=(1,+\infty)$ η f είναι συνεχής και $\uparrow$, άρα $f(\Delta_3)=\left(\lim\limits_{x\to1^+}f(x),\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)\right)=\mathbb{R}$.

Είναι $f(A)=f(\Delta_1)\cup f(\Delta_2)\cup f(\Delta_3)=\mathbb{R}$.

β) $x^3-\alpha x^2-9x+\alpha=0 \Leftrightarrow x^3-9x=\alpha\left(x^2-1\right) \overset{x\neq\pm1}{\Leftrightarrow} \dfrac{x^3-9x}{x^2-1}=\alpha \Leftrightarrow f(x)=\alpha$.

Επειδή το α ανήκει σε καθένα από τα $f(\Delta_1)$, $f(\Delta_2)$, $f(\Delta_3)$, η εξίσωση $f(x)=\alpha$ έχει ακριβώς μία ρίζα σε καθένα από τα διαστήματα Δ_1,Δ_2, Δ_3. Οπότε η εξίσωση έχει τρείς πραγματικές ρίζες.

γ) Παρατηρούμε ότι η C_f τέμνει τον $x'x$ σε τρία σημεία.



5.938. **α)** $f'(x)=-e^{1+x-e^x}<0 \Rightarrow f\downarrow\mathbb{R}$. Η f δεν έχει ακρότατα.

β) $f''(x)=e^{1+x-e^x}\left(e^x-1\right)\geq 0 \Leftrightarrow e^x-1\geq 0 \Leftrightarrow e^x\geq 1 \Leftrightarrow x\geq 0$.

Η f είναι κοίλη στο $\left(-\infty,0\right]$ και κυρτή στο $\left[0,+\infty\right)$, έχει σημείο καμπής το $(0,1)$.

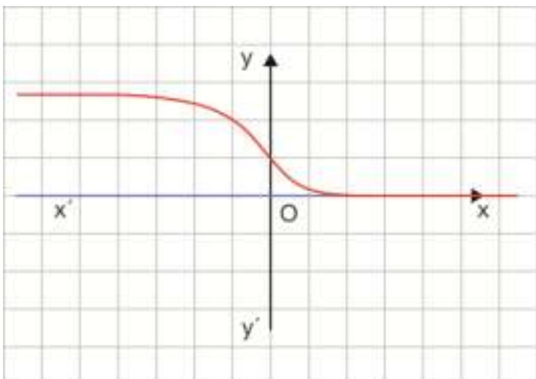
γ) $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty} e^{1-e^x} \overset{1-e^x=u}{=} \lim\limits_{u\to-\infty} e^u=0$,

άρα η $y=0$ $(x'x)$ είναι οριζόντια ασύμπτωτη της C_f στο $+\infty$.

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty} e^{1-e^x} \overset{1-e^x=u}{=} \lim\limits_{u\to1} e^u=e$ και $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{e^{1-e^x}}{x}=0$,

οπότε η C_f δεν έχει ασύμπτωτη στο $-\infty$.

δ) Η f είναι συνεχής και γνησίως φθίνουσα στο $\mathbb{R}$, οπότε: $f(A)=\left(\lim\limits_{x\to+\infty} f(x), \lim\limits_{x\to-\infty} f(x)\right)=(0,e)$



5.939. **α)** $f'(x)=\dfrac{1-\ln x}{x^2}\geq 0\Leftrightarrow \ln x\leq 1\Leftrightarrow 0<x\leq e$. Για κάθε $x\in(0,e)$ είναι $f'(x)>0\Rightarrow f\uparrow(0,e]$

και για κάθε $x>e$ είναι $f'(x)<0\Rightarrow f\downarrow[e,+\infty)$. Η f έχει μέγιστο το $f(e)=\dfrac{1}{e}$.

β) $f''(x)=\dfrac{2\ln x-3}{x^3}\geq 0\Leftrightarrow \ln x\geq \dfrac{3}{2}\Leftrightarrow x\geq e^{\frac{3}{2}}$.

Η f είναι κοίλη στο $\left(0,e^{\frac{3}{2}}\right]$ και κυρτή στο $\left[e^{\frac{3}{2}},+\infty\right)$. Σημείο καμπής το $\left(e^{\frac{3}{2}},\dfrac{3}{2e\sqrt{e}}\right)$.

γ) $\lim\limits_{x\to 0^+}f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}\left(\ln x\cdot\dfrac{1}{x}\right)=-\infty$. Ο άξονας $y'y$ είναι κατακόρυφη ασύμπτωτη της C_f

$\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln x}{x}\underset{DLH}{\overset{\left(\frac{\infty}{\infty}\right)}{=}}\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\frac{1}{x}}{1}=0\Rightarrow y=0$ οριζόντια ασύμπτωτη της C_f.

δ) $x^e\leq e^x\Leftrightarrow \ln x^e\leq \ln e^x\Leftrightarrow e\ln x\leq x\Leftrightarrow \dfrac{\ln x}{x}\leq\dfrac{1}{e}\Leftrightarrow f(x)\leq\dfrac{1}{e}$ ισχύει αφού η f έχει μέγιστο το $\dfrac{1}{e}$.

ε) $e<10<11\overset{f\downarrow}{\Rightarrow} f(10)>f(11)\Leftrightarrow \dfrac{\ln 10}{10}>\dfrac{\ln 11}{11}\Leftrightarrow 11\ln 10>10\ln 11\Leftrightarrow$

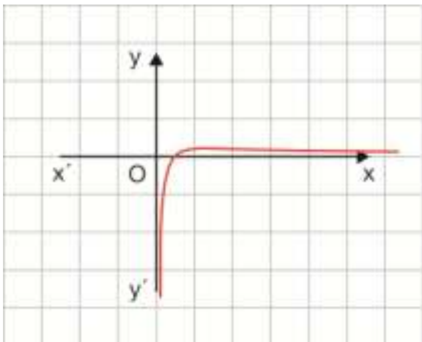
$\Leftrightarrow \ln 10^{11}>\ln 11^{10}\Leftrightarrow 10^{11}>11^{10}$

στ) $x=e^{\lambda x}\Leftrightarrow \ln x=\lambda x\Leftrightarrow \dfrac{\ln x}{x}=\lambda\Leftrightarrow f(x)=\lambda$.

Η f είναι συνεχής και $\uparrow$ στο $\Delta_1=(0,e]$, άρα $f(\Delta_1)=\left(-\infty,\dfrac{1}{e}\right]$.

Η f είναι συνεχής και $\downarrow$ στο $\Delta_2=[e,+\infty)$, άρα $f(\Delta_2)=\left(0,\dfrac{1}{e}\right]$

- Αν $\lambda\leq 0$, τότε $\lambda\in f(\Delta_1)\Rightarrow \exists x_1\in\Delta_1: f(x_1)=\lambda$. Επειδή f $\uparrow$ στο Δ_1, το x_1 είναι μοναδικό. Επειδή $\lambda\notin f(\Delta_2)$η εξίσωση $f(x)=\lambda$ είναι αδύνατη στο Δ_2.
- Αν $\lambda\in\left(0,\dfrac{1}{e}\right]$, τότε $\lambda\in f(\Delta_1)$και $\lambda\in f(\Delta_2)$, οπότε η εξίσωση $f(x)=\lambda$ έχει ακριβώς μια ρίζα σε καθένα από τα διαστήματα Δ_1 και Δ_2, άρα η εξίσωση έχει δύο ρίζες στη περίπτωση αυτή.
- Τέλος αν $\lambda>\dfrac{1}{e}$ η εξίσωση είναι αδύνατη..



5.940. **α)** $f'(x)=\dfrac{1}{x\ln x}>0\Rightarrow f\uparrow(1,+\infty)$. Η f δεν έχει ακρότατα.

Είναι $\lim\limits_{x\to1^+}f(x)=\lim\limits_{x\to1^+}\ln(\ln x)\overset{\ln x=u}{=}\lim\limits_{u\to0^+}\lim\limits_{u\to0^+}\ln u=-\infty$ και

$\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\ln(\ln x)\overset{\ln x=u}{=}\lim\limits_{u\to+\infty}\lim\limits_{u\to+\infty}\ln u=+\infty$, άρα $f(A)=(-\infty,+\infty)=\mathbb{R}$.

β) $f''(x)=-\dfrac{\ln x+1}{x^2\ln^2 x}<0\Rightarrow f$ κοίλη στο $(1,+\infty)$.

γ) Επειδή $\lim\limits_{x\to1^+}f(x)=-\infty$, η ευθεία $x=1$ είναι κατακόρυφη ασύμπτωτη της C_f.

$\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln(\ln x)}{x}\underset{DLH}{\overset{\left(\frac{\infty}{\infty}\right)}{=}}\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\frac{1}{x\ln x}}{1}=0$ και $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$, οπότε η C_f δεν έχει οριζόντια ή πλάγια ασύμπτωτη.

δ) Αν $\alpha=\beta$ ισχύει η ισότητα.

Αν $\alpha<\beta$, τότε από το Θ.Μ.Τ υπάρχουν $\xi_1\in\left(\alpha,\dfrac{\alpha+\beta}{2}\right)$ και $\xi_2\in\left(\dfrac{\alpha+\beta}{2},\beta\right)$ τέτοια ώστε:

$$f'(\xi_1)=\frac{f\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)-f(\alpha)}{\frac{\beta-\alpha}{2}} \text{ και } f'(\xi_2)=\frac{f(\beta)-f\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)}{\frac{\beta-\alpha}{2}}.$$

$$\xi_1<\xi_2\overset{f'\downarrow}{\Leftrightarrow}f'(\xi_1)>f'(\xi_2)\Leftrightarrow\frac{f\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)-f(\alpha)}{\frac{\beta-\alpha}{2}}>\frac{f(\beta)-f\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)}{\frac{\beta-\alpha}{2}}\Leftrightarrow$$

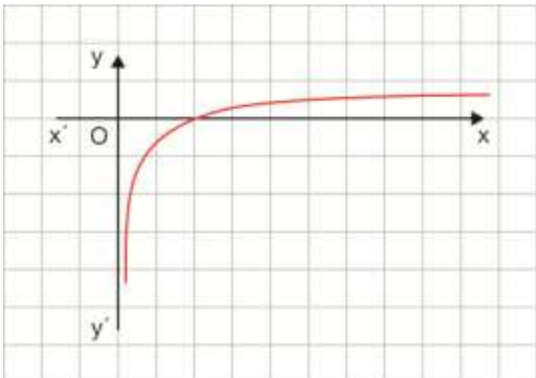
$$\Leftrightarrow f\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)-f(\alpha)>f(\beta)-f\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\Leftrightarrow 2f\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)>f(\alpha)+f(\beta)\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2\ln\left(\ln\frac{\alpha+\beta}{2}\right)>\ln(\ln\alpha)+\ln(\ln\beta)\Leftrightarrow\ln\left(\ln\frac{\alpha+\beta}{2}\right)^2>\ln(\ln\alpha\cdot\ln\beta)\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\left(\ln\frac{\alpha+\beta}{2}\right)^2>\ln\alpha\cdot\ln\beta.$$

Όμοια αν $\alpha>\beta$.

ε)



5.941. α) $f'(x)=e^x(x+1)\geq 0 \Leftrightarrow x\geq -1$.

Για κάθε $x<-1$ είναι $f'(x)<0 \Rightarrow f\downarrow(-\infty,-1]$ και για κάθε $x>-1$ είναι $f'(x)>0 \Rightarrow f\uparrow[-1,+\infty)$. Ελάχιστο το $f(-1)=-\dfrac{1}{e}$.

$$\lim_{x\to-\infty} f(x)=\lim_{x\to-\infty} xe^x \overset{\infty\cdot 0}{=} \lim_{x\to-\infty}\frac{x}{e^{-x}} \underset{DLH}{\overset{\left(\frac{\infty}{\infty}\right)}{=}} \lim_{x\to-\infty}\frac{1}{-e^{-x}}=0,\ \lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty} xe^x=+\infty.$$

Στο διάστημα $\Delta_1=(-\infty,-1]$ η f είναι συνεχής και $\downarrow$, άρα $f(\Delta_1)=\left[-\dfrac{1}{e},0\right)$.

Στο διάστημα $\Delta_2=[-1,+\infty)$ η f είναι συνεχής και $\uparrow$, άρα $f(\Delta_2)=\left[-\dfrac{1}{e},+\infty\right)$.

Είναι $f(A)=f(\Delta_1)\cup f(\Delta_2)=\left[-\dfrac{1}{e},+\infty\right)$.

β) Για κάθε $x\in\mathbb{R}$ είναι $f(x)\geq f(-1) \Leftrightarrow xe^x\geq -\dfrac{1}{e} \Leftrightarrow xe^x\cdot e\geq -1 \Leftrightarrow xe^{x+1}+1\geq 0$.

γ) $f''(x)=e^x(x+2)\geq 0 \Leftrightarrow x\geq -2$. Η f είναι κοίλη στο $(-\infty,-2]$ και κυρτή στο $[-2,+\infty)$.

Σημείο καμπής το $\left(-2,-\dfrac{2}{e^2}\right)$.

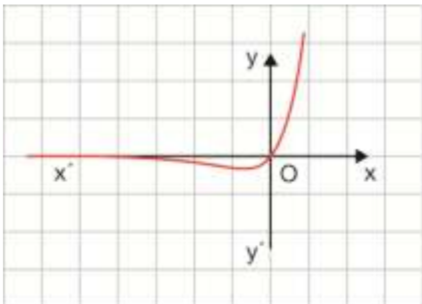
δ) Παρατηρούμε ότι $f'(1)=2e$. Η εφαπτομένη της C_f στο $x_0=1$ είναι

$\varepsilon: y-f(1)=f'(1)(x-1) \Leftrightarrow y-e=2e(x-1) \Leftrightarrow y=2ex-e$. Επειδή η C_f είναι κυρτή στο $[-2,+\infty)$, βρίσκεται πάνω από κάθε εφαπτομένη της στο διάστημα αυτό, οπότε βρίσκεται πάνω και από την ε, δηλαδή: $f(x)\geq 2ex-e \Leftrightarrow xe^x\geq 2ex-e$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

ε) Επειδή $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=0$, ο άξονας $x'x$ είναι οριζόντια ασύμπτωτη της C_f στο $-\infty$. Επειδή

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$ και $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty} e^x=+\infty$ η C_f δεν έχει οριζόντια ή πλάγια ασύμπτωτη.

στ)



ζ) $x=\lambda e^{-x} \Leftrightarrow xe^x=\lambda \Leftrightarrow f(x)=\lambda$.

- Αν $\lambda<-\dfrac{1}{e}$, τότε $\lambda\notin f(A)$, οπότε η εξίσωση είναι αδύνατη.
- Αν $-\dfrac{1}{e}\leq\lambda<0$, τότε $\lambda\in f(\Delta_1)$ και $\lambda\in f(\Delta_2)$, οπότε η εξίσωση έχει από μία ρίζα σε καθένα από τα διαστήματα Δ_1 και Δ_2.
- Αν $\lambda\geq 0$, τότε $\lambda\in f(\Delta_2)$, οπότε η εξίσωση έχει ακριβώς μία ρίζα στο Δ_2.