

E.2 Σύνολα

- i. Τι είναι το σύνολο;
- ii. Ποιοι είναι οι βασικοί τρόποι παράστασης συνόλων και τι γνωρίζετε γι αυτούς;
- iii. Πότε δύο σύνολα είναι ίσα;
- iv. Πότε ένα σύνολο A λέγεται υποσύνολο ενός συνόλου B;
- v. Ποιο σύνολο λέγεται κενό;
- vi. Ποιο σύνολο λέγεται ένωση δύο συνόλων A,B;
- vii. Ποιο σύνολο λέγεται τομή των συνόλων A,B;
- viii. Ποιο σύνολο λέγεται συμπλήρωμα ενός υποσυνόλου A ενός βασικού συνόλου Ω ;

1 Πιθανότητες

Δειγματικός χώρος - ενδεχόμενα

- i. Ποιο πείραμα λέγεται αιτιοκρατικό;
- ii. Ποιο πείραμα ονομάζεται πείραμα τύχης;
- iii. Τι είναι ο δειγματικός χώρος ενός πειράματος τύχης;
- iv. Τι ονομάζεται ενδεχόμενο του πειράματος;
- v. Ποιο ενδεχόμενο ονομάζεται απλό και ποιο σύνθετο;
- vi. Ποιο ενδεχόμενο λέγεται αδύνατο και ποιο βέβαιο;
- vii. Να σχεδιάσετε με διαγράμματα Venn τα παρακάτω ενδεχόμενα και να γράψετε το συμβολισμό τους:
 - α) Πραγματοποιούνται συγχρόνως τα ενδεχόμενα A και B.
 - β) Πραγματοποιείται τουλάχιστον ένα από τα A και B.
 - γ) Δεν πραγματοποιείται το A.
 - δ) Πραγματοποιείται το A και όχι το B.
 - ε) Πραγματοποιείται μόνο ένα από τα A και B.
 - στ) Δεν πραγματοποιείται κανένα από τα A και B.
- viii. Πότε δύο ενδεχόμενα λέγονται ασυμβίβαστα;

Εννοια της πιθανότητας

- i. Τι ονομάζεται στατιστική ομαλότητα ή νόμος των μεγάλων αριθμών;
- ii. Ποιος είναι ο κλασικός ορισμός της πιθανότητας;
- iii. Ποια ενδεχόμενα έχουν πιθανότητα 1 και 0 αντίστοιχα;
- iv. Να αποδείξετε ότι για οποιαδήποτε ασυμβίβαστα μεταξύ τους ενδεχόμενα A και B ισχύει:
$$P(A \cup B) = P(A) + P(B)$$
- v. Να αποδείξετε ότι για δύο συμπληρωματικά ενδεχόμενα A και A' ισχύει:
$$P(A') = 1 - P(A)$$
- vi. Να αποδείξετε ότι για δύο ενδεχόμενα A και B ενός δειγματικού χώρου Ω ισχύει:
$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$
- vii. Να αποδείξετε ότι $\alpha \nu A \subseteq B$, τότε $P(A) \leq P(B)$
- viii. Να αποδείξετε ότι για δύο ενδεχόμενα A και B ενός δειγματικού χώρου Ω ισχύει:

$$P(A-B) = P(A) - P(A \cap B)$$

- ix. Αν A, B δύο ενδεχόμενα ενός δειγματικού χώρου Ω , να γράψετε τη σχέση από την οποία υπολογίζουμε τη πιθανότητα να πραγματοποιηθεί ακριβώς ένα από τα A και B καθώς και τη πιθανότητα να μην πραγματοποιηθεί κανένα από τα A και B.

Βασικές ασκήσεις

1. Για τα ενδεχόμενα A και B του ίδιου δειγματικού χώρου είναι γνωστό ότι $P(A) = P(B)$, $P(A \cup B) = 0,6$ και $P(A \cap B) = 0,2$. Να βρείτε την $P(A)$.
2. Για τα ενδεχόμενα A και B του ίδιου δειγματικού χώρου Ω δίνεται ότι $P(A) = \frac{1}{2}$, $P(B') = \frac{2}{3}$ και $P(A \cap B) = \frac{1}{12}$. Να βρείτε την $P(A \cup B)$.
3. Ένα ορισμένο κατάστημα δέχεται πιστωτικές κάρτες D ή V. Το 25% των πελατών έχουν κάρτα D, το 55% έχουν κάρτα V και το 15% έχουν και τις δύο κάρτες. Ποια είναι η πιθανότητα ένας πελάτης που επιλέγεται τυχαία να έχει μία τουλάχιστον από τις δυο κάρτες;
4. Το 10% των ατόμων ενός πληθυσμού έχουν υπέρταση, το 6% στεφανιαία καρδιακή ασθένεια και το 2% έχουν και τα δύο. Για ένα άτομο που επιλέγεται τυχαία ποια είναι η πιθανότητα να έχει **α)** τουλάχιστον μία ασθένεια; **β)** μόνο μία ασθένεια;
5. Σε μια κωμόπολη το 15% των νοικοκυριών δεν έχουν τηλεόραση, το 40% δεν έχουν βίντεο και το 10% δεν έχουν ούτε τηλεόραση ούτε βίντεο. Επιλέγουμε τυχαίως ένα νοικοκυριό. Να βρείτε την πιθανότητα να έχει τηλεόραση και βίντεο.
6. Αν $0 < P(A) < 1$, να αποδείξετε ότι $\frac{1}{P(A)} + \frac{1}{P(A')} \geq 4$.
7. Αν A και B είναι ενδεχόμενα του ίδιου δειγματικού χώρου Ω με $P(A) = 0,6$ και $P(B) = 0,7$, να δείξετε ότι $0,3 \leq P(A \cap B) \leq 0,6$.

2 Οι πραγματικοί αριθμοί

Οι πράξεις και οι ιδιότητες τους

- i. Ποιες είναι οι ιδιότητες της πρόσθεσης και του πολλαπλασιασμού πραγματικών αριθμών;
- ii. Πως ορίζεται η αφαίρεση και η διάρεση δύο πραγματικών αριθμών;
- iii. Να συμπληρώσετε τις παρακάτω ιδιότητες δυνάμεων:

$$a^0 = \dots, a \neq 0 \quad a^{-v} = \dots, a \neq 0 \quad a^k \cdot a^\lambda = \dots \quad a^k : a^\lambda = \dots$$

$$\alpha^k \cdot \beta^k = \dots\dots\dots \quad \frac{\alpha^k}{\beta^k} = \dots\dots\dots \quad (\alpha^k)^\lambda = \dots\dots\dots$$

iv. Να συμπληρώσετε τις παρακάτω ταυτότητες:

$$(\alpha + \beta)^2 = \dots\dots\dots \quad (\alpha - \beta)^2 = \dots\dots\dots \quad \alpha^2 - \beta^2 = \dots\dots\dots$$

$$(\alpha + \beta)^3 = \dots\dots\dots \quad (\alpha - \beta)^3 = \dots\dots\dots$$

$$\alpha^3 + \beta^3 = \dots\dots\dots \quad \alpha^3 - \beta^3 = \dots\dots\dots$$

$$(\alpha + \beta + \gamma)^2 = \dots\dots\dots$$

v. Να γράψετε τις ιδιότητες των αναλογιών που απορέουν από την ισότητα

$$\frac{\alpha}{\beta} = \frac{\gamma}{\delta}, \quad \beta\delta(\beta + \delta) \neq 0$$

Βασικές ασκήσεις

8. Να απλοποιήσετε τις παραστάσεις: **α)** $\frac{\alpha^3 - 2\alpha^2 + \alpha}{\alpha^2 - \alpha}$ **β)** $\left(\alpha - \frac{1}{\alpha}\right)^2 \cdot \frac{\alpha^3 + \alpha^2}{(\alpha + 1)^2}$

9. Να αποδείξετε ότι: $\left(\frac{x^3 + y^3}{x^2 - y^2}\right) : \left(\frac{x^2}{x - y} - y\right) = 1$

Διάταξη πραγματικών αριθμών

- i. Πότε ένας αριθμός α είναι μεγαλύτερος από έναν αριθμό β;
- ii. Αν δύο αριθμοί α, β είναι ομόσημοι τότε τι συμπεραίνετε για το άθροισμα, το γινόμενο και το πηλίκο τους;
- iii. Αν δύο αριθμοί α, β είναι ετερόσημοι τότε τι συμπεραίνετε για το γινόμενο και το πηλίκο τους;
- iv. Να συμπληρώσετε τις παρακάτω σχέσεις:
 $\alpha^2 \dots 0$ $\alpha^2 + \beta^2 = 0 \Leftrightarrow \dots\dots\dots$ $\alpha^2 + \beta^2 > 0 \Leftrightarrow \dots\dots\dots$
- v. Να αποδείξετε ότι για θετικούς αριθμούς α, β και θετικό ακέραιο ν ισχύει η ισοδυναμία:
 $\alpha = \beta \Leftrightarrow \alpha^v = \beta^v$

Βασικές ασκήσεις

10. Να αποδείξετε ότι:

α) $\alpha^2 + 9 \geq 6\alpha$ **β)** $2(\alpha^2 + \beta^2) \geq (\alpha + \beta)^2$ **γ)** $(\alpha + \beta) \left(\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta}\right) \geq 4, \quad \alpha, \beta > 0$

11. Να αποδείξετε ότι $\alpha^2 + \beta^2 - 2\alpha + 1 \geq 0$. Πότε ισχύει η ισότητα;

12. Αν $4,5 < x < 4,6$ και $5,3 < y < 5,4$, να βρείτε τα όρια μεταξύ των οποίων περιέχεται η τιμή καθενιάς από τις παραστάσεις:

α) $x + y$ **β)** $x - y$ **γ)** $\frac{x}{y}$ **δ)** $x^2 + y^2$

13. Αν $\alpha > 1 > \beta$, να αποδείξετε ότι: $\alpha + \beta > 1 + \alpha\beta$.

Απόλυτη τιμή πραγματικού αριθμού

i. Τι ονομάζεται απόλυτη τιμή του πραγματικού αριθμού α ;

ii. Να συμπληρώσετε τις παρακάτω σχέσεις:

$$|\alpha| \dots -|\alpha| \dots 0 \qquad |\alpha| \dots \alpha \text{ και } |\alpha| \dots -\alpha \qquad |\alpha|^2 \dots \alpha^2$$

Αν $\theta > 0$, τότε $|x| = \theta \Leftrightarrow \dots\dots\dots$

$$|x| = |\alpha| \Leftrightarrow \dots\dots\dots$$

iii. Να αποδείξετε ότι: $|\alpha \cdot \beta| = |\alpha| \cdot |\beta|$

iv. Να αποδείξετε ότι: $|\alpha + \beta| \leq |\alpha| + |\beta|$

v. Πως συμβολίζεται η απόσταση δύο αριθμών α, β και με τι είναι ίση;

vi. Εστω ότι τα σημεία A και B παριστάνουν στον άξονα τα άκρα α, β του διαστήματος

$$[\alpha, \beta]. \text{ Αν } M(x_0) \text{ το μέσο AB, να αποδείξετε ότι } x_0 = \frac{\alpha + \beta}{2}.$$

vii. Να συμπληρώσετε τις παρακάτω σχέσεις:

Για $x_0 \in \mathbb{R}$, $\rho > 0$ ισχύει: $|x - x_0| < \rho \Leftrightarrow \dots\dots\dots$

$$|x| < \rho \Leftrightarrow \dots\dots\dots$$

Για $x_0 \in \mathbb{R}$, $\rho > 0$ ισχύει: $|x - x_0| > \rho \Leftrightarrow \dots\dots\dots$

$$|x| > \rho \Leftrightarrow \dots\dots\dots$$

Βασικές ασκήσεις

14. Να γράψετε χωρίς την απόλυτη τιμή την παράσταση $|x - 3| + |x - 4|$, όταν:

- α)** $x < 3$ **β)** $x > 4$ **γ)** $x \in \mathbb{R}$

15. Να αποδείξετε ότι $|\alpha - \beta| \leq |\alpha - \gamma| + |\gamma - \beta|$.

16. Αν $\alpha > \beta$, να δείξετε ότι: **α)** $\alpha = \frac{\alpha + \beta + |\alpha - \beta|}{2}$ **β)** $\beta = \frac{\alpha + \beta - |\alpha - \beta|}{2}$

17. Τι σημαίνει για τους αριθμούς x και y :

- α)** η ισότητα $|x| + |y| = 0$ **β)** η ανισότητα $|x| + |y| > 0$;

18. Αν $|x| < 3$ και $|y| < 2$, να αποδείξετε ότι:

- α)** $|2x - 3y| < 12$ **β)** $|3x - y + 1| < 12$

Ρίζες πραγματικών αριθμών

i. Να δώσετε τον ορισμό της τετραγωνικής ρίζας ενός μη αρνητικού αριθμού a .

ii. Να συμπληρώσετε τις παρακάτω σχέσεις: $\sqrt{\alpha^2} = \dots\dots\dots (\sqrt{\alpha})^2 = \dots\dots\dots, \alpha \geq 0$

$$\sqrt{\alpha} \cdot \sqrt{\beta} = \dots\dots\dots, \alpha, \beta \geq 0 \qquad \frac{\sqrt{\alpha}}{\sqrt{\beta}} = \dots\dots\dots, \alpha \geq 0, \beta > 0$$

iii. Τι ονομάζεται ν-οστή ρίζα ενός μη σρνητικού αριθμού α;

iv. Αν $\alpha, \beta \geq 0$ να συμπληρώσετε τις παρακάτω σχέσεις:

$$(\sqrt[n]{\alpha})^v = \dots\dots\dots \sqrt[v]{\alpha^n} = \dots\dots\dots \frac{\sqrt[n]{\alpha}}{\sqrt[n]{\beta}} = \dots\dots\dots \sqrt[n]{\sqrt[v]{\alpha}} = \dots\dots\dots$$

$$\sqrt[p]{\alpha^{mp}} = \dots\dots\dots \sqrt[\mu]{\alpha^k} \dots\dots (\sqrt{\alpha})^k \qquad \sqrt[\mu]{\alpha^v \cdot \beta} = \dots\dots\dots$$

$$\alpha^{\frac{\mu}{\nu}} = \dots\dots\dots, \alpha > 0, \mu \in \mathbb{Z}, \nu \text{ θετικός ακέραιος}$$

v. Να αποδείξετε ότι $\sqrt[n]{\alpha} \cdot \sqrt[n]{\beta} = \sqrt[n]{\alpha \cdot \beta}$

Βασικές ασκήσεις

19. Να αποδείξετε ότι:

- | | |
|---|--|
| α) $\sqrt{(2-\sqrt{5})^2} + \sqrt{(3-\sqrt{5})^2} = 1$ | β) $(\sqrt{8}-\sqrt{18})(\sqrt{50}+\sqrt{72}-\sqrt{32}) = -14$ |
| γ) $\sqrt{2}\sqrt{2-\sqrt{2}}\sqrt{2+\sqrt{2}} = 2$ | δ) $\sqrt{\sqrt{2}\sqrt[3]{2}} = \sqrt[3]{2}$ |
| ε) $\sqrt[4]{3^3} \cdot \sqrt[3]{3} = 3 \cdot \sqrt[12]{3}$ | στ) $\frac{\sqrt{216} \cdot \sqrt{75}}{\sqrt{50}} = 18$ |
| ζ) $\frac{3\sqrt{3}-2\sqrt{2}}{\sqrt{3}-\sqrt{2}} = 5+\sqrt{6}$ | η) $\frac{1}{(2-\sqrt{3})^2} - \frac{1}{(2+\sqrt{3})^2} = 8\sqrt{3}$ |

20. Να αποδείξετε ότι:

- | | | |
|--------------------------------|--|--|
| α) $\sqrt[5]{5} < \sqrt[3]{3}$ | β) $\sqrt{7} + \sqrt{3} < \sqrt{21} + 1$ | γ) $\sqrt{8-2\sqrt{10}} > \sqrt{5} - \sqrt{2}$ |
|--------------------------------|--|--|

3 Εξισώσεις

Εξισώσεις 1ου βαθμού

- i. Να λύσετε την εξίσωση $\alpha x + \beta = 0$ για τις διάφορες τιμές των $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.
- ii. Ποιος αριθμός λέγεται ρίζα της εξίσωσης;

Βασικές ασκήσεις

21. Να λύσετε τις εξισώσεις:

- | | |
|--|---|
| α) $\frac{1-4x}{5} - \frac{x+1}{4} = \frac{x-4}{20} + \frac{5}{4}$ | β) $2(3x-1) - 3(2x-1) = 4$ |
| γ) $x^2(x-4) + 2x(x-4) + (x-4) = 0$ | δ) $x(x-2)^2 = x^2 - 4x + 4$ |
| ε) $x^3 - 2x^2 - x + 2 = 0$ | στ) $\frac{1}{x-1} + \frac{1}{x+1} = \frac{2}{x^2-1}$ |

22. Να λύσετε τις εξισώσεις:

α) $\lambda(\lambda-1)x = \lambda-1$

β) $(x+\alpha)^2 - (x-\beta)^2 = 2\alpha(\alpha+\beta)$

23. Να λύσετε τις εξισώσεις:

α) $|2x-3|=5$

β) $|2x-4|=|x-1|$

γ) $|x-2|=2x-1$

δ) $\frac{|x|+4}{3} - \frac{|x|+4}{5} = \frac{2}{3}$

ε) $|x-1||x-2|=|x-1|$

στ) $|2|x|-1|=3$

ζ) $\sqrt{x^2-2x+1}=|3x-5|$

η) $3|x-1|-|x+2|=x+3$

θ) $||x-3|+2|=|2|x-3|-4|$

24. Δίνεται η εξίσωση $(\alpha+3)x = 2\beta-4$.

α) Για ποιες τιμές των α, β η εξίσωση έχει μοναδική λύση;

β) Για ποιες τιμές των α, β η εξίσωση είναι αδύνατη;

γ) Για ποιες τιμές των α, β η εξίσωση είναι ταυτότητα;

Η εξίσωση $x^v = \alpha$

- i. Να γράψετε τη λύση της εξίσωσης $x^v = \alpha$, $\alpha > 0$, v περιττός φυσικός αριθμός.
- ii. Να γράψετε τις λύσεις της εξίσωσης $x^v = \alpha$, $\alpha > 0$, v άρτιος φυσικός αριθμός.
- iii. Να γράψετε τη λύση της εξίσωσης $x^v = \alpha$, $\alpha < 0$, v περιττός φυσικός αριθμός.
- iv. Να γράψετε τη λύση της εξίσωσης $x^v = \alpha$, $\alpha < 0$, v άρτιος φυσικός αριθμός.

Βασικές ασκήσεις

25. Να λύσετε τις εξισώσεις:

α) $x^3 - 125 = 0$

β) $x^5 + 243 = 0$

γ) $x^2 - 64 = 0$

δ) $x^5 - 8x^2 = 0$

ε) $x^4 + x = 0$

στ) $x^5 + 16x = 0$

ζ) $(x+1)^3 = 64$

η) $1 + 125x^3 = 0$

Εξισώσεις 2ου βαθμού

- i. Να λύσετε την εξίσωση $\alpha x^2 + \beta x + \gamma = 0$, $\alpha \neq 0$
- ii. Πότε μια εξίσωση δευτέρου βαθμού έχει δύο ρίζες άνισες και ποιες;
- iii. Πότε μια εξίσωση δευτέρου βαθμού έχει μια διπλή ρίζα; Ποια είναι η ρίζα;
- iv. Πότε μια εξίσωση δευτέρου βαθμού είναι αδύνατη;
- v. Να αποδείξετε τους τύπους του Vieta, δηλαδή ότι αν x_1, x_2 είναι οι ρίζες της εξίσωσης

$\alpha x^2 + \beta x + \gamma = 0$, $\alpha \neq 0$, τότε το άθροισμα των ριζών είναι $S = -\frac{\beta}{\alpha}$, το γινόμενο των

ριζών είναι $P = \frac{\gamma}{\alpha}$ και η εξίσωση παίρνει τη μορφή $x^2 - Sx + P = 0$.

Βασικές ασκήσεις

26. Να λύσετε τις εξισώσεις:

α) $2x^2 - 5x + 3 = 0$

β) $x^2 - 6x + 9 = 0$

γ) $3x^2 + 4x + 2 = 0$

δ) $x^2 - 9 = 0$

ε) $x^2 - 3x = 0$

στ) $x^2 + 4 = 0$

ζ) $x^2 - (\sqrt{5} + \sqrt{3})x + \sqrt{15} = 0$

η) $x^2 - 7|x| + 12 = 0$

θ) $x^4 + 6x^2 - 40 = 0$

27. Να αποδείξετε ότι οι παρακάτω εξισώσεις έχουν πραγματικές ρίζες:
α) $\lambda x^2 + 2x - (\lambda - 2) = 0, \lambda \neq 0$ **β)** $\alpha x^2 + (\alpha + \beta)x + \beta = 0, \alpha \neq 0$
28. Να βρείτε την εξίσωση 2ου βαθμού που έχει ρίζες τους αριθμούς:
α) 2 και 3 **β)** 1 και $\frac{1}{2}$
29. Να βρείτε τις τιμές του $\alpha \in \mathbb{R}$ για τις οποίες η εξίσωση $2x^2 + (\alpha - 9)x + \alpha^2 + 3\alpha + 4 = 0$ έχει διπλή ρίζα.
30. Δίνεται η εξίσωση $x^2 - 4x + \lambda = 0$. Να βρείτε την τιμή του πραγματικού αριθμού λ για την οποία η εξίσωση έχει:
α) ρίζα το 3 **β)** δύο ρίζες πραγματικές και άνισες
γ) μία διπλή ρίζα **δ)** καμία πραγματική ρίζα
31. Αν x_1, x_2 είναι οι ρίζες της εξίσωσης $x^2 - 4x - 6 = 0$, να υπολογίσετε τις παραστάσεις:
α) $x_1 + x_2$ **β)** $x_1 x_2$ **γ)** $x_1^2 + x_2^2$ **δ)** $x_1^3 + x_2^3$ **ε)** $\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2}$
32. Να βρείτε τις τιμές του πραγματικού αριθμού λ για την οποία η εξίσωση $x^2 + (\lambda + 1)x + \lambda^2 - 3 = 0$ έχει ρίζες αντίστροφες.
33. Να βρείτε τις τιμές του πραγματικού αριθμού λ για την οποία η εξίσωση $x^2 + (\lambda^2 - 9)x + \lambda + 2 = 0$ έχει ρίζες αντίθετες.

4 Ανισώσεις

Ανισώσεις 1ου βαθμού

- i. Να λύσετε την ανίσωση $\alpha x + \beta > 0$, όπου α, β συγκεκριμένοι αριθμοί.

Βασικές ασκήσεις

34. Να λύσετε τις ανισώσεις:
α) $\frac{x-1}{2} + \frac{2x+3}{6} < \frac{x}{6}$ **β)** $|x-1| \leq 4$ **γ)** $|2x+1| > 5$
δ) $\frac{|x-1|-4}{2} + \frac{5}{3} < \frac{|x-1|}{3}$ **ε)** $\sqrt{x^2 - 6x + 9} \leq 5$ **στ)** $|x-5| \leq 0$
ζ) $|x-2| > 0$ **η)** $||x-2|-3| < 1$ **θ)** $||x-1|-2| \geq 3$
35. Να βρείτε τις τιμές του x για τις οποίες ισχύει:
α) $3 \leq 4x - 1 \leq 6$ **β)** $2 \leq |x-5| \leq 4$
36. Να λύσετε τις εξισώσεις: **α)** $|2x-6| = 2x-6$ **β)** $|3x-1| = 1-3x$

Ανισώσεις 2ου βαθμού

- i. Να παραγοντοποιήσετε το τριώνυμο $\alpha x^2 + \beta x + \gamma$, $\alpha \neq 0$ για τις διαφορετικές τιμές της διακρίνουσας Δ .
- ii. Πότε το τριώνυμο $\alpha x^2 + \beta x + \gamma$, $\alpha \neq 0$ είναι ομόσημο του α και πότε ετερόσημο του α ;
- iii. Να βρείτε το πρόσημο του τριωνύμου $\alpha x^2 + \beta x + \gamma$, $\alpha \neq 0$ όταν $\Delta > 0$.
- iv. Να βρείτε το πρόσημο του τριωνύμου $\alpha x^2 + \beta x + \gamma$, $\alpha \neq 0$ όταν $\Delta = 0$.
- v. Να βρείτε το πρόσημο του τριωνύμου $\alpha x^2 + \beta x + \gamma$, $\alpha \neq 0$ όταν $\Delta < 0$.

Βασικές ασκήσεις

37. Να απλοποιήσετε τις παραστάσεις:

α) $\frac{x^2 - 3x + 2}{2x^2 - 3x - 2}$

β) $\frac{4x^2 - 12x + 9}{2x^2 - 5x + 3}$

γ) $\frac{\alpha^2 + \alpha\beta - 2\beta^2}{\alpha^2 - \alpha\beta - 6\beta^2}$

38. Να λύσετε τις ανισώσεις:

α) $5x^2 \leq 20x$

β) $x^2 + 3x \leq 4$

γ) $x^2 + 4 > 4x$

δ) $x^2 + 9 \leq 6x$

ε) $x^2 + 3x + 5 \leq 0$

στ) $2x^2 - 3x + 20 > 0$

ζ) $-\frac{1}{4}(x^2 - 4x + 3) > 0$

39. Να βρείτε τις τιμές του x για τις οποίες ισχύει: $2x - 1 < x^2 - 4 < 12$

40. Δίνεται η εξίσωση $\lambda x^2 + 3\lambda x + \lambda + 5 = 0$, $\lambda \in \mathbb{R}$. Να βρείτε τις τιμές του λ για τις οποίες η εξίσωση:

α) έχει ρίζες ίσες

β) έχει ρίζες άνισες

γ) είναι αδύνατη.

41. Να βρείτε τις τιμές του $\lambda \in \mathbb{R}$ για τις οποίες η ανίσωση $x^2 + 3\lambda x + \lambda > 0$ αληθεύει για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

42. Δίνεται το τριώνυμο $(\lambda + 2)x^2 - 2\lambda x + 3\lambda$, $\lambda \neq -2$.

α) Να βρείτε τη διακρίνουσα Δ του τριωνύμου και να λύσετε την ανίσωση $\Delta < 0$.

β) Να βρείτε τις τιμές του λ για τις οποίες η ανίσωση $(\lambda + 2)x^2 - 2\lambda x + 3\lambda < 0$, $\lambda \neq -2$ αληθεύει για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$.

5 Πρόοδοι

Ακολουθίες

- i. Τι είναι η ακολουθία πραγματικών αριθμών; Ποιος αριθμός καλείται πρώτος όρος και ποιος n -οστός όρος;

Βασικές ασκήσεις

43. Να ορίσετε αναδρομικά τις ακολουθίες: α) $\alpha_n = n + 5$

β) $\alpha_n = 2^n$

44. Να βρείτε το n -οστό όρο των ακολουθιών:

α) $\alpha_1 = 1, \alpha_{n+1} = \alpha_n + 2$

β) $\alpha_1 = 3, \alpha_{n+1} = 5\alpha_n$

Αριθμητική πρόοδος

- i. Ποια ακολουθία λέγεται αριθμητική πρόοδος; Τι είναι η διαφορά της προόδου;
- ii. Ποια σχέση συνδέει τους διαδοχικούς όρους α_{n+1} και α_n της προόδου;
- iii. Να αποδείξετε ότι ο n -οστός όρος αριθμητικής προόδου με πρώτο όρο α_1 και διαφορά ω είναι: $\alpha_n = \alpha_1 + (n-1)\omega$.
- iv. Να αποδείξετε ότι τρεις αριθμοί α, β, γ είναι διαδοχικοί όροι αριθμητικής προόδου αν και μόνο αν $\beta = \frac{\alpha + \gamma}{2}$.
- v. Να γράψετε τους τύπους από τους οποίους υπολογίζετε το άθροισμα S_n των n πρώτων όρων αριθμητικής προόδου α_n με διαφορά ω .

Βασικές ασκήσεις

45. Να βρείτε το n -οστό όρο των αριθμητικών προόδων: α) 7, 10, 13, ... β) 5, 2, -1, ...
46. Ο 5ος όρος μιας αριθμητικής προόδου είναι -5 και ο 15ος όρος της είναι -2. Να βρείτε τον 50ο όρο της προόδου.
47. Ποιος όρος της αριθμητικής προόδου με $\alpha_1 = 80$ και $\omega = -3$ ισούται με -97;
48. Να βρείτε για ποια τιμή του x ο αριθμητικός μέσος των $5x+1$ και 11 είναι ο $3x-2$.
49. Να υπολογίσετε το άθροισμα $1+5+9+\dots+197$.
50. Ο n -οστός όρος μιας ακολουθίας είναι $\alpha_n = 12-4n$. Να αποδείξετε ότι η ακολουθία αυτή είναι αριθμητική πρόοδος και να γράψετε τον πρώτο όρο α_1 και τη διαφορά της ω .
51. Μεταξύ των αριθμών 3 και 80 θέλουμε να βρούμε άλλους 10 αριθμούς που όλοι μαζί να είναι διαδοχικοί όροι μιας αριθμητικής προόδου. Να βρεθούν οι αριθμοί αυτοί.

Γεωμετρική πρόοδος

- i. Ποια ακολουθία λέγεται γεωμετρική πρόοδος; Τι είναι ο λόγος της προόδου;
- ii. Ποια σχέση συνδέει τους διαδοχικούς όρους α_{n+1} και α_n της προόδου;
- iii. Να αποδείξετε ότι ο n -οστός όρος γεωμετρικής προόδου με πρώτο όρο α_1 και λόγο λ είναι: $\alpha_n = \alpha_1 \cdot \lambda^{n-1}$.
- iv. Να αποδείξετε ότι τρεις αριθμοί α, β, γ είναι διαδοχικοί όροι γεωμετρικής προόδου αν και μόνο αν $\beta^2 = \alpha \cdot \gamma$.
- v. Να γράψετε τον τύπο με τον οποίο υπολογίζετε το άθροισμα S_n των n πρώτων όρων γεωμετρικής προόδου α_n με λόγο λ .

Βασικές ασκήσεις

52. Να βρείτε το n -οστό όρο των γεωμετρικών προόδων: **α)** 3, 6, 12, ... **β)** 18, 6, 2, ...
53. Ο 4ος όρος μιας γεωμετρικής πρόοδου είναι 125 και ο 10ος όρος της είναι $\frac{125}{64}$. Να βρείτε τον 14ο όρο της πρόοδου.
54. Ποιος όρος της γεωμετρικής πρόοδου 3, 6, 12, ... ισούται με 768 ;
55. Να βρείτε για ποια τιμή του x για την οποία οι αριθμοί $x-4$, $x+1$, $x-19$ αποτελούν διαδοχικούς όρους γεωμετρικής πρόοδου.
56. Να βρείτε τον πρώτο όρο της γεωμετρικής πρόοδου 4, 8, 16, ... που υπερβαίνει το 2000.
57. Να υπολογίσετε το άθροισμα $2+8+32+\dots+8192$.
58. Ο n -οστός όρος μιας ακολουθίας είναι $a_n = 2^n \cdot \frac{1}{3^{n+1}}$. Να αποδείξετε ότι η ακολουθία αυτή είναι γεωμετρική πρόοδος και να γράψετε τον πρώτο όρο a_1 και το λόγο λ .

6 Βασικές έννοιες των συναρτήσεων

Η έννοια της συνάρτησης

- i. Τι ονομάζεται συνάρτηση από ένα σύνολο A σε ένα σύνολο B ; Πως ονομάζεται το σύνολο A ;
- ii. Στη συνάρτηση $y = f(x)$ ποια είναι η ανεξάρτητη και ποια η εξαρτημένη μεταβλητή;
- iii. Ποιο σύνολο ονομάζεται σύνολο τιμών της συνάρτησης f ; Πως συμβολίζεται;

Βασικές ασκήσεις

59. Να βρείτε το πεδίο ορισμού των παρακάτω συναρτήσεων:

α) $f(x) = \frac{4}{x-1} + 5$

β) $f(x) = \frac{x^2-16}{x^2-4x}$

γ) $f(x) = \frac{1}{x^2+1}$

δ) $f(x) = \frac{1}{|x|+x}$

ε) $f(x) = \sqrt{x-1} + \sqrt{2-x}$

στ) $f(x) = \sqrt{x^2-4}$

ζ) $f(x) = \sqrt{-x^2+4x-3}$

η) $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x-1}}$

θ) $f(x) = \frac{\sqrt{|x|-x}}{|x|-2}$

60. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^2 + 4$.

α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της.

β) Να υπολογίσετε τις τιμές $f(-2)$, $f(0)$, $f(2)$, $f(6)$.

γ) Να αποδείξετε ότι $f(\alpha\beta) + 4f(\alpha + \beta) - 8\alpha\beta = f(\alpha)f(\beta) + 4$.

δ) Να λύσετε την εξίσωση $f(\alpha+1)=8$

61. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} x^2, & x < 0 \\ 2x+3, & x \geq 0 \end{cases}$. Να βρείτε τις τιμές $f(-5)$, $f(0)$ και $f(6)$

Γραφική παράσταση συνάρτησης

i. Εστω $A(\alpha, \beta)$ ένα σημείο του καρτεσιανού επιπέδου.

- Τι συντεταγμένες έχει το συμμετρικό του A ως προς τον x' ;
- Τι συντεταγμένες έχει το συμμετρικό του A ως προς τον y' ;
- Τι συντεταγμένες έχει το συμμετρικό του A ως προς την αρχή O των αξόνων;
- Τι συντεταγμένες έχει το συμμετρικό του A ως προς τη διχοτόμο της 1ης – 3ης γωνίας των αξόνων;;

ii. Τι ονομάζεται γραφική παράσταση της συνάρτησης f και πως συμβολίζεται;

iii. Κάθε κατακόρυφη ευθεία πόσα κοινά σημεία μπορεί να έχει με τη γραφική παράσταση μιας συνάρτησης;

iv. Η γραφική παράσταση της συνάρτησης $-f$ βάση ποιας συμμετρίας προκύπτει από τη γραφική παράσταση της f ;

Βασικές ασκήσεις

62. Στο διπλανό σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση μιας συνάρτησης f .

Να βρείτε:

α) Το πεδίο ορισμού της.

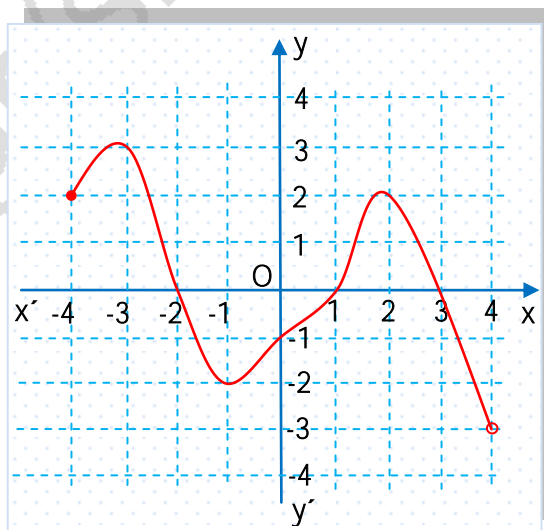
β) Το σύνολο τιμών της.

γ) Τις τιμές $f(0)$, $f(-4)$, $f(-1)$, $f(1)$ και

να αποδείξετε ότι $f(-4)+f(-1)-1=f(0)+f(1)$.

δ) Να λύσετε την εξίσωση $f(x)=0$.

ε) Να λύσετε την ανίσωση $f(x)<0$.



63. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^2 - 1$. Να βρείτε:

α) Τα σημεία τομής της C_f με τους άξονες.

β) Τις συντεταγμένες των σημείων της C_f που βρίσκονται πάνω από τον άξονα x' .

64. Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = x^2 - 5x + 4$ και $g(x) = 2x - 6$. Να βρείτε:

α) Τα κοινά σημεία των C_f και C_g .

β) Τις τετμημένες των σημείων της C_f που βρίσκονται κάτω από την C_g .

65. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{x-\alpha}{\beta x+2}$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, της οποίας η γραφική παράσταση

διέρχεται από τα σημεία $A(1,2)$ και $B(2,-1)$.

- i. Να αποδείξετε ότι $\alpha = \frac{1}{2}$ και $\beta = -\frac{7}{4}$.
- ii. Να βρείτε το σημείο τομής της γραφικής παράστασης της f με τον άξονα x' .
- iii. Να βρείτε τα σημεία τομής της γραφικής παράστασης της f με την ευθεία $y = 2$.

Η συνάρτηση $f(x) = \alpha x + \beta$

- i. Ποια είναι η γωνία που σχηματίζει μια ευθεία ε με τον άξονα x' και ποιες τιμές παίρνει;
- ii. Τι ονομάζεται συντελεστής διεύθυνσης ή κλίση της ευθείας;
- iii. Ποια συνάρτηση λέγεται σταθερή;
- iv. Ποιες είναι οι εξισώσεις των διχοτόμων των γωνιών των αξόνων;
- v. Πότε οι ευθείες $\varepsilon_1 : y = \alpha_1 x + \beta_1$ και $\varepsilon_2 : y = \alpha_2 x + \beta_2$ είναι παράλληλες και πότε ταυτίζονται;
- vi. Να χαράξετε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x) = |x|$.

Βασικές ασκήσεις

66. Να βρείτε τη γωνία που σχηματίζει με τον άξονα x' η ευθεία:

α) $y = x + 2$

β) $y = \sqrt{3} \cdot x - 1$

γ) $y = -x + 1$

δ) $y = -\sqrt{3} \cdot x + 2$

67. Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας η οποία:

α) Έχει κλίση $\alpha = -1$ και τέμνει τον άξονα $y'y$ στο σημείο $B(0,2)$.

β) Σχηματίζει με τον άξονα x' γωνία $\omega = 45^\circ$ και τέμνει τον άξονα $y'y$ στο σημείο $B(0,1)$.

γ) Είναι παράλληλη με την ευθεία $y = 2x - 3$ και διέρχεται από το σημείο $A(1,1)$.

68. Να παραστήσετε γραφικά τη συνάρτηση: $f(x) = \begin{cases} -x+2, & x < 0 \\ 2, & 0 \leq x < 1 \\ x+1, & x \geq 1 \end{cases}$

69. Στο παρακάτω σχήμα δίνονται η γραφική παράσταση μιας συνάρτησης f που είναι ορισμένη σε όλο το \mathbb{R} και η ευθεία $y = x$.

Να λύσετε γραφικά:

α) Τις εξισώσεις: $f(x) = 1$ και $f(x) = x$.

β) Τις ανισώσεις $f(x) < 1$ και $f(x) \geq x$

