ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ Γ΄ΛΥΚΕΙΟΥ

Διαγώνισμα: 3ο

Εξεταζόμενη ύλη: Μιγαδικοί – Συναρτήσεις - Όρια

ΘΕΜΑ Α

Εστω μιγαδικός αριθμός z και συνάρτηση f ορισμένη στο $\mathbb{R}$ για την οποία ισχύει ότι:
$e^{f(x)}+f(x)=x$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$ και η γραφική της παράσταση διέρχεται από το σημείο $A\left(e+1,|z|\right)$.

Α1 Να αποδείξετε ότι η f αντιστρέφεται και να βρείτε την αντίστροφή της. μ 5

Α2 Να αποδείξετε ότι οι γραφικές παραστάσεις των f,f^{-1} δεν τέμνονται. μ 5

Α3 Να βρείτε τον γεωμετρικό τόπο των εικόνων των μιγαδικών αριθμών z. μ 6

Α4 Αν $\left|z-2f(e+1)i\right|=\left|z-f(1)i\right|$, να βρείτε τον z. μ 4

Α5 Να αποδείξετε ότι ο μιγαδικός $w=z+\dfrac{1}{z}$ είναι πραγματικός. μ 5

ΘΕΜΑ Β

Δίνεται η συνεχής συνάρτηση f στο $\mathbb{R}$ και ο μιγαδικός αριθμός $z=f(x)+i\eta\mu x$, τέτοιος ώστε:

$$|z|^2-2\mathrm{Re}(z)\mathrm{Im}(z)=x^2+9 \text{ για κάθε } x\in\mathbb{R}.$$

Β1 Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $g(x)=f(x)-\eta\mu x$ διατηρεί σταθερό πρόσημο στο $\mathbb{R}$. μ 7

Β2 Αν $f(0)=3$,

α) να βρείτε τη συνάρτηση f. μ 6

β) να βρείτε το $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)+\eta\mu x-3}{x}$. μ 6

γ) να αποδείξετε ότι υπάρχει $x_0\in(0,\pi)$ τέτοιο, ώστε $f(x_0)=\pi$. μ 6

ΘΕΜΑ Γ

Εστω z_1,z_2 ρίζες της εξίσωσης: $z+\dfrac{1}{z}=1,\ z\in\mathbb{C}^*$. Να αποδείξετε ότι:

Γ1 **α)** $z_1z_2=1$ **β)** $z_1+z_2=1$ **γ)** $z_1^3=z_2^3=-1$ μ 3+3+5

Γ2 $z_1^{14}+\dfrac{1}{z_2^{22}}+1=0$ μ 6

Γ3 Αν Γ είναι η εικόνα του μιγαδικού $z=3z_1+3z_2$ και Α,Β οι εικόνες των z_1 και z_2 αντίστοιχα, να αποδείξετε ότι το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ισοσκελές. μ 8

ΘΕΜΑ Δ

Δίνεται συνεχής συνάρτηση $f:[0,1]\to[0,+\infty)$ και οι μιγαδικοί αριθμοί $z=x+(x-1)i$, $w=f(x)+i$, $x\in[0,1]$, με εικόνες τα σημεία Α,Β αντίστοιχα.

Δ1 Να αποδείξετε ότι υπάρχει τουλάχιστον μία τιμή του $x\in(0,1]$, για την οποία το τρίγωνο ΟΑΒ, όπου Ο η αρχή των αξόνων, είναι ορθογώνιο στο Ο. μ 5

Δ2 Αν $|z|=|w|$ και $|z-w|=\sqrt{2}$, να αποδείξετε ότι:

α) $z=1,\ w=i$ μ 4

β) $(z-w)^{100}=(z+w)^{100}$ μ 4

γ) $(z-kw)^{100}=(kz+w)^{100},\ k\in\mathbb{R}$ μ 4

Δ3 Αν $|z|=|w|$ και $|z-w|\neq\sqrt{2}$, να αποδείξετε ότι:

i. $z^{4\nu}=w^{4\kappa},\ \nu,\kappa\in\mathbb{N}^*$ μ 4

ii. οι εικόνες των μιγαδικών u, wu, zu, $u\in\mathbb{C}$ σχηματίζουν ορθογώνιο και ισοσκελές τρίγωνο. μ 4

Καλή τύχη!

Στέλιος Μιχαήλογλου