ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑ ΣΤΟΥΣ ΜΙΓΑΔΙΚΟΥΣ
Οκτώβριος 2013

ΘΕΜΑ Α

Εστω οι μιγαδικοί αριθμοί z, w με $z \neq i$, οι οποίοι ικανοποιούν τις σχέσεις:

$$|z-i|+|\bar{z}+i|=4 \text{ και } w=z+i-\frac{4}{z-i}$$

Α1 Να βρείτε τον γεωμετρικό τόπο των εικόνων των μιγαδικών αριθμών z

Μονάδες 10

Α2 Να αποδείξετε ότι $\bar{z}+i=\frac{4}{z-i}$

Μονάδες 6

Α3 Να δείξετε ο w είναι φανταστικός και ότι $-2 \leq \operatorname{Im}(w) \leq 6$

Μονάδες 8

Α4 Να αποδείξετε ότι : $|z-w| = |z|$

Μονάδες 6

ΘΕΜΑ Β

Θεωρούμε τους μιγαδικούς αριθμούς z, με $z \neq 3i$ για τους οποίους ο αριθμός $w=\frac{z-3i}{z+3i}$ είναι

φανταστικός .Να αποδείξετε ότι:

Β1 $|z|=3$

Μονάδες 7

Β2 Ο αριθμός $\left(\frac{z}{3}-\frac{3}{z}\right)^4$ είναι πραγματικός.

Μονάδες 8

Β3 $\left(\frac{1}{z_1}+\frac{1}{z_2}\right)(z_1+z_2) \leq 4$,όπου z_1, z_2 δύο από τους παραπάνω μιγαδικούς αριθμούς z

Μονάδες 7

Β4 Οι εικόνες των μιγαδικών αριθμών v, για τους οποίους ισχύει $v+vi=8w+\frac{2i}{w}$, $w \neq 0$ ανήκουν
στην υπερβολή $x^2-y^2=16$

Μονάδες 8

Β5 Να βρείτε την ελάχιστη τιμή του $|z-v|$

Μονάδες 6

ΘΕΜΑ Γ

Εστω οι μιγαδικοί αριθμοί w_1, w_2, w_3, οι οποίοι ικανοποιούν τις σχέσεις: $w_1 + w_2 + w_3 = 0$ και

$|w_1| = |w_2| = |w_3| = 1$. Αν Α,Β, Γ οι εικόνες των w_1, w_2, w_3 αντίστοιχα ,να αποδείξετε ότι:

Γ1 $|w_1 + w_2 + w_3| = |w_1 \cdot w_2 + w_2 \cdot w_3 + w_3 \cdot w_1|$

Μονάδες 8

Γ2 $|w_1 - w_2| = \sqrt{3}$

Μονάδες 8

Γ3 το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ισόπλευρο

Μονάδες 6

Γ4 $w_1 \cdot w_2 + w_2 \cdot w_3 + w_3 \cdot w_1 = 0$

Μονάδες 6

Γ5 $w_1^3 = w_2^3 = w_3^3 = w_1 \cdot w_2 \cdot w_3$

Μονάδες 6

Καλή Τύχη!

Σ.Μιχαήλογλου – Δ. Πατσιμάς