ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ Γ ΛΥΚΕΙΟΥ
Διάρκεια: 3 ώρες

ΘΕΜΑ Α

Α1) Να αποδείξετε αν μια συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο x_0 του πεδίου ορισμού της, τότε είναι και συνεχής σε αυτό. μ 4

Ισχύει το αντίστροφο; Δώστε παράδειγμα συγκεκριμένης συνάρτησης . μ 4

Α2) Να διατυπώσετε και να δώσετε γεωμετρική ερμηνεία του θεωρήματος ενδιάμεσων τιμών. μ 4

Α3) Εστω f μια συνάρτηση ορισμένη σε ένα διάστημα Δ. Τι ονομάζουμε αρχική συνάρτηση ή παράγουσα της f στο Δ. μ 3

Α4) *Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας, δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση, τη λέξη* ***Σωστό****, αν η πρόταση είναι σωστή, ή* ***Λάθος****, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.*

α) Αν οι συναρτήσεις f,g είναι ορισμένες σ' ένα διάστημα Δ, τότε $f^2(x)=g^2(x)\Leftrightarrow f(x)=\pm g(x)$.

β) Αν η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη και γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$, τότε $f'(x)>0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

γ) Αν $f(x)>g(x)$ για κάθε $x\in(\alpha,x_0)\cup(x_0,\beta)$ και ορίζονται τα $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ και $\lim\limits_{x\to x_0} g(x)$, τότε είναι $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)\geq \lim\limits_{x\to x_0} g(x)$

δ) Αν η f έχει δεύτερη παράγωγο στο x_0, τότε η f΄ είναι συνεχής στο x_0.

ε) Αν μια συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ και δεν είναι αντιστρέψιμη, τότε υπάρχει κλειστό διάστημα $[\alpha,\beta]$, στο οποίο η f ικανοποιεί τις προϋποθέσεις του θεωρήματος Rolle.

ΘΕΜΑ Β

Δίνονται οι μιγαδικοί $z_1=\eta\mu\theta+i\sigma\upsilon\nu\theta$ και $z_2=\sigma\upsilon\nu\theta-i\eta\mu\theta$, $\theta\in\mathbb{R}$.

Β1) Να αποδείξετε ότι: $z_1=iz_2$ μ 3

Β2) Να αποδείξετε ότι: $\left(1+\dfrac{\eta\mu\theta+i\sigma\upsilon\nu\theta}{\sigma\upsilon\nu\theta-i\eta\mu\theta}\right)^{100}=\left(1-\dfrac{\eta\mu\theta+i\sigma\upsilon\nu\theta}{\sigma\upsilon\nu\theta-i\eta\mu\theta}\right)^{100}$ μ 4

Β3) Να αποδείξετε ότι οι εικόνες των z_1,z_2 και η αρχή των αξόνων ορίζουν ορθογώνιο τρίγωνο. μ 4

Β4) Να αποδείξετε ότι $4\leq|z_1-3-4i|\leq 6$ μ 4

Β5) Να λύσετε την εξίσωση $z_2^2z^3+z_1^2=0$ και να αποδείξετε ότι οι εικόνες των ριζών της ορίζουν ισόπλευρο τρίγωνο. μ 4

Β6) Αν z_3 μια μη πραγματική ρίζα της προηγούμενης εξίσωσης, να αποδείξετε ότι:

i $z_3^{90}=1$ ii. $z_3+\dfrac{1}{z_3}=-1$ μ 3+3

ΘΕΜΑ Γ

Εστω ο μιγαδικός $z=\alpha+\beta i$, $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$, $\alpha>0$ με $|z|=1$ και η συνάρτηση $f(x)=|x+z|-|x-z|$, $x\in\mathbb{R}$.

Γ1) Να αποδείξετε ότι η f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ και να βρείτε την παράγωγό της. μ 4

Γ2) Να αποδείξετε ότι ο z δεν είναι πραγματικός. μ 6

Γ3) Αν η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της f στο σημείο $A(-\alpha, f(-\alpha))$ σχηματίζει με τον άξονα x΄x γωνία 45°, να δείξετε ότι $\alpha=1$. μ 5

Γ4) Να αποδείξετε ότι $\int_0^x f(t)dt=\int_0^{-x} f(t)dt$. μ 6

Γ5) Να βρείτε τον μιγαδικό z για τον οποίο η γραφική παράσταση της f διέρχεται από το σημείο $A(2,0)$. μ 4

ΘΕΜΑ Δ

Δίνεται συνάρτηση $f:[0,8]\to\mathbb{R}$, δύο φορές παραγωγίσιμη στο $(0,8)$ για την οποία ισχύει ότι:

$f(4)=4$, $f'(4)=0$ και $[f'(x)]^2+f(x)f''(x)=-1$ για κάθε $x\in(0,8)$.

Δ1) Να αποδείξετε ότι $f(x)>0$ για κάθε $x\in(0,8)$. μ 6

Δ2) Να αποδείξετε ότι $f(x)=\sqrt{8x-x^2}$. μ 4

Δ3) Α, Α,Β δύο τυχαία σημεία της γραφικής παράστασης της f, να αποδείξετε ότι $(AB)\le 8$. μ 5

Δ4) Να υπολογίσετε το $\int_0^2\sqrt{8x-x^2}dx$. μ 6

Δ5) Να βρείτε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της συνάρτησης $g(x)=(4-x)f(x)$, τους άξονες x΄x και y΄y και την ευθεία $x=4$. μ 4