ΜΙΓΑΔΙΚΟΙ

1. Δίνεται μιγαδικός z για τον οποίο ισχύει:

$$\left(z-2i\right)^{100}+\left(2i\right)^{51}\cdot\left(\bar{z}+2i\right)^{49}=0$$

Να αποδείξετε ότι:

Α) $\left|z-2i\right|=2$ Β) $w=\left(z-2i\right)^{149}\in I$

2. Δίνεται μιγαδικός αριθμός $z\neq-2i$, για τον οποίο ισχύει ότι: $z^7+iz\left(2z^5-1\right)+2=0$. Να αποδείξετε ότι:

Α) $z^6=\dfrac{iz-2}{z+2i}$ Β) $\left|z\right|=1$ Γ) $1-2iz+iz^6+2z^7=0$

3. Δίνονται οι μιγαδικοί $z=-\dfrac{1}{2}+i\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ και $w=1+z$.

Α) Να αποδείξετε ότι:

i. $1+z+z^2=0$ ii. $z^3=1$

iii. $w^{2\nu+1}=-z^{\nu+2}$ iv. $w^{2\nu}=z^{\nu}$

Β) Να βρείτε τους μιγαδικούς w^{48} και w^{25}.

4. Δίνονται οι μη μηδενικοί μιγαδικοί z,w, για τους οποίους ισχύει: $z^2=\bar{w}$ και $w^2=-i\bar{z}$. Να αποδείξετε ότι:

Α) $\left|z\right|=\left|w\right|=1$ Β) $w^2+z^2=0$

Γ) $z^3=i$ και $w^3=-1$ Δ) $w^{2010}+z^{2010}=0$

5. Δίνονται οι μιγαδικοί z_1,z_2,z_3 για τους οποίους ισχύουν οι σχέσεις: $z_1+z_2+z_3\neq0$, $\left|z_1\right|=\left|z_2\right|=\left|z_3\right|=2$ και $z_1^2+z_2^2+z_3^2=0$. Να αποδειχθεί ότι:

Α) $\left|z_1+z_2+z_3\right|^2=16\left|\dfrac{1}{z_1}+\dfrac{1}{z_2}+\dfrac{1}{z_3}\right|$ Β) $\left|z_1+z_2+z_3\right|=4$

6. Δίνονται οι μη μηδενικοί μιγαδικοί z_1,z_2,z_3 για τους οποίους ισχύουν οι σχέσεις:

$z_1+z_2+z_3=0$ και $z_1^2+z_2^2+z_3^2=0$. Να αποδειχθεί ότι:

Α) $z_1^2+z_1z_2+z_2^2=0$, $z_2^2+z_2z_3+z_3^2=0$ και $z_3^2+z_3z_1+z_1^2=0$

Β) $\left|z_1\right|=\left|z_2\right|=\left|z_3\right|$

7. Δίνεται μιγαδικός z για τον οποίο ισχύει $2z^5+5\bar{z}^5=7$. Να αποδείξετε ότι:

Α) $2\bar{z}^5+5z^5=7$ Β) $z^5=1$ Γ) $w=\left(z^2+\dfrac{1}{z^2}\right)\in\mathbb{R}$

8. Αν η εξίσωση $z^2+\alpha z+\beta=0$, όπου $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$, έχει ρίζες τους μιγαδικούς $z_1=2-3i$ και z_2, τότε:

Α) Να βρείτε τους α, β και z_2.

Β) Να αποδείξετε ότι για κάθε θετικό ακέραιο ν ο μιγαδικός $w=z_1^{\nu}-z_2^{\nu}$ είναι φανταστικός.

Γ) Να βρείτε τη μικρότερη τιμή της παράστασης

$$f(z)=|z-z_1|+|z-z_2|.$$

9. Δίνονται οι μιγαδικοί z,w για τους οποίους ισχύει: $zw=1-i$. Αν η εικόνα του w βρίσκεται σε κύκλο κέντρου Κ(0,1) και ακτίνας 1, να βρείτε:

Α) την γραμμή στην οποία κινείται η εικόνα Μ του z.

Β) την ελάχιστη τιμή του $|z|$.

10. Δίνονται οι μιγαδικοί z,w με $z\neq 0$ και $w=z(1+\alpha i)$, $\alpha>0$. Αν Α,Β οι εικόνες των μιγαδικών z,w αντίστοιχα και το τρίγωνο ΟΑΒ, όπου Ο η αρχή των αξόνων, είναι ισοσκελές, να αποδείξετε ότι είναι και ορθογώνιο.

11. Δίνονται οι μιγαδικοί z_1,z_2 για τους οποίους ισχύει ότι:

$|z_1+z_2|=|z_1|=|z_2|\neq 0$. Να αποδείξετε ότι:

Α) $\left(\dfrac{z_1}{z_2}\right)^2+\dfrac{z_1}{z_2}+1=0$ Β) $z_1^3=z_2^3$ Γ) $\left|\dfrac{z_1}{z_2}-1\right|=\sqrt{3}$

12. Δίνεται μιγαδικός z για τον οποίο ισχύει ότι:

$$|z-4|+|z+4|=10 \quad (1).$$

Α) Να βρείτε τον γεωμετρικό τόπο της εικόνας του z.

Β) Να αποδείξετε ότι $3\leq|z|\leq 5$.

Γ) Αν z_1,z_2 δύο από τους μιγαδικούς που ικανοποιούν τη σχέση(1), να αποδείξετε ότι $|z_1-z_2|\leq 10$.

Δ) Να αποδείξετε ότι:

i. $|z^2|+|z^2-16|=34$ ii. $9\leq|z^2-16|\leq 25$

13. Εστω z_1,z_2 οι ρίζες της εξίσωσης $z^2+2z+2=0$.

Να αποδείξετε ότι:

Α) $\dfrac{z_1}{z_2}=i$

Β) $z_1^4+4=z_2^4+4=0$

Γ) $z_1^{2012}-(iz_2)^{2012}=0$

Δ) οι εικόνες των z_1,z_2 και η αρχή των αξόνων, ορίζουν ορθογώνιο και ισοσκελές τρίγωνο.

14. Εστω Α,Β οι εικόνες των μιγαδικών z, w για τους οποίους ισχύει ότι: $$z=(1+i)w.$$

Α) Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο ΟΑΒ, όπου Ο η αρχή των αξόνων, είναι ορθογώνιο.

Β) Να βρελίτε μιγαδικό z_1 με εικόνα το σημείο Γ, για την οποία το τετράπλευρο ΟΒΑΓ είναι παραλληλόγραμμο.

15. Δίνεται η συνάρτηση $f(z)=|iz-1|,\ z\in\mathbb{C}$.

Α) Αν $f(z)=f(\bar{z})$, να αποδείξετε ότι $z\in\mathbb{R}$.

Β) Αν $f(z)=1$, να βρείτε τον γεωμετρικό τόπο της εικόνας Μ του z.

Γ) Αν $z_1,z_2\in\mathbb{C}$ με $f(z_1)=f(z_2)=1$, να αποδείξετε ότι $|z_1-z_2|\le 2$.

16. Δίνονται οι μιγαδικοί z, w για τους οποίους ισχύει ότι:
$$z\bar{z}+2z+2\bar{z}=5 \text{ και } w=\alpha-(\alpha+2)i, \alpha\in\mathbb{R}.$$

Α) Να αποδείξετε ότι ο γεωμετρικός τόπος του z είναι κύκλος C του οποίου να βρείτε το κέντρο και την ακτίνα.

Β) Να αποδείξετε ότι οι εικόνες του w στο μιγαδικό επίπεδο βρίσκονται σε ευθεία ε της οποίας να βρείτε την εξίσωση.

Γ) Να αποδείξετε ότι η ευθεία ε και ο κύκλος C τέμνονται σε δύο αντιδιαμετρικά σημεία.

Δ) Να βρείτε τον μιγαδικό z που έχει μέγιστο μέτρο.

Ε) Να βρείτε τον μιγαδικό w που έχει ελάχιστο μέτρο.

17. Α) Να περιγράψετε γεωμετρικά το σύνολο (Γ) των εικόνων των μιγαδικών αριθμών z που ικανοποιούν τις σχέσεις:
$$|z|=3 \text{ και } \mathrm{Im}(z)\le 0.$$

Β) Αν οι εικόνες του z ανήκουν στο σύνολο (Γ), να βρείτε τον γεωμετρικό τόπο των εικόνων του μιγαδικού $w=z+4-3i$.

Γ) Να βρείτε τον μιγαδικό w που έχει το μέγιστο μέτρο.

18. Δίνονται οι μη μηδενικοί μιγαδικοί z,w για τους οποίους ισχύουν οι σχέσεις:
$$w=\frac{\sqrt{5}\cdot z}{|z|} \text{ και } w^2=3+\lambda i\ ,\lambda>0.$$

Α) Να αποδείξετε ότι λ = 4.

Β) Να αποδείξετε ότι $5z-(3+4i)\bar{z}=0$.

Γ) Να βρείτε τον γεωμετρικό τόπο της εικόνας Μ του μιγαδικού z.

Δ) Να βρείτε την ελάχιστη τιμή του μέτρου $|z-3+4i|$.

19. Δίνονται οι μιγαδικοί z,w για τους οποίους ισχύουν οι σχέσεις:
$$|z-2|=|z+2-3i| \text{ και } |w+i|=|w-4+4i|.$$

Α) Να βρείτε τον γεωμετρικό τόπο των εικόνων των μιγαδικών z,w.

Β) Να βρείτε την ελάχιστη τιμή του $|z-w|$.

20. Δίνεται ο μιγαδικός z με $\mathrm{Re}\left(\frac{1}{z}\right)=\frac{1}{4}$, $z\neq 0$.

Α) Αν Im(z)=2, να βρείτε το Re(z).
Β) Να βρείτε τον γεωμετρικό τόπο των εικόνων Μ του μιγαδικού z.
Γ) Να βρείτε τη μέγιστη τιμή του $|z|$.
Δ) Αν $z_1,z_2\in\mathbb{C}$ με $\mathrm{Re}\left(\frac{1}{z_1}\right)=\mathrm{Re}\left(\frac{1}{z_2}\right)=\frac{1}{4}$, να βρείτε τη μέγιστη τιμή του $|z_1-z_2|$.

21. Εστω η εξίσωση $z^2-8\eta\mu\theta\cdot z+7\eta\mu^2\theta+9=0$, $\theta\in\mathbb{R},z\in\mathbb{C}$.
Α) Να λύσετε την εξίσωση
Β) Να αποδείξετε ότι οι εικόνες των ριζών της διαγράφουν έλλειψη.
Γ) Αν z_3,z_4, μιγαδικοί των οποίων οι εικόνες βρίσκονται στην προηγούμενη έλλειψη, να αποδείξετε ότι $|z_3-z_4|\leq 8$.

22. Δίνονται οι μιγαδικοί z,w για τους οποίους γνωρίζουμε ότι:

$$z=(\lambda+1)+\frac{22-3\lambda}{4}i,\ \lambda\in\mathbb{R} \text{ και } |w|=1.$$

Α) Να βρείτε τον γεωμετρικό τόπο των εικόνων Μ ,Ν των μιγαδικών z,w, αντίστοιχα.
Β) Να βρείτε τον μιγαδικό z που έχει ελάχιστο μέτρο.
Γ) Αν $z=3+4i$, να βρείτε:
i. τον w για τον οποίο ισχύει $|z+w|=6$.
ii.τη μέγιστη και την ελάχιστη τιμή του $|z+w|$.

23. Αν για τους μιγαδικούς αριθμούς z και w ισχύουν:

$$\left|\left(i+2\sqrt{2}\right)z\right|=6 \text{ και } \left|w-(1-i)\right|=\left|w-(3-3i)\right|,$$

τότε να βρείτε:
Α) το γεωμετρικό τόπο των εικόνων των μιγαδικών αριθμών z.
Β) το γεωμετρικό τόπο των εικόνων των μιγαδικών αριθμών w.
Γ) την ελάχιστη τιμή του $|w|$.
Δ) την ελάχιστη τιμή του $|z-w|$.

24. Δίνεται η συνάρτηση $f(z)=\frac{z+3i}{z-3i}, z\neq -3i$ και ο μιγαδικός $z_1=3i^3-3f(i)$.
Α) Να αποδείξετε ότι $|f(z)|=1$ για κάθε $z\in\mathbb{C}$ με $z\neq 3i$.
Β) Αν ισχύει $\overline{f(z)}=f(\bar{z})$, να αποδείξετε ότι ο z είναι φανταστικός.
Γ) Να βρείτε τον μιγαδικό z_1.
Δ) Να βρείτε τον γεωμετρικό τόπο των εικόνων του μιγαδικού w για τον οποίο ισχύει: $|w+z_1|=\left|\frac{if(z_1)\cdot z_1}{2+\sqrt{5}\cdot i}\right|$
Ε) Από τους μιγαδικούς w του προηγούμενου γεωμετρικού τόπου, να

βρείτε αυτόν που έχει το μικρότερο και αυτόν που έχει το μεγαλύτερο μέτρο.

25. Δίνονται οι μη μηδενικοί μιγαδικοί z_1, z_2 με $z_1 \neq \pm z_2$ και $|z_1 + z_2| = |z_1 - z_2|$.

Α) Να αποδείξετε ότι ο μιγαδικός $\frac{z_1}{z_2}$ είναι φανταστικός.

Β) Να αποδείξετε ότι $\left|\frac{z_1}{z_1+z_2}\right| + \left|\frac{iz_2}{z_1+z_2}\right| \geq 1$

Γ) Αν $z_2 = 4+3i$, τότε:

i. να βρείτε τον γεωμετρικό τόπο του z_1.

ii. να βρείτε την ελάχιστη τιμή του $|z_1 - z_2|$.

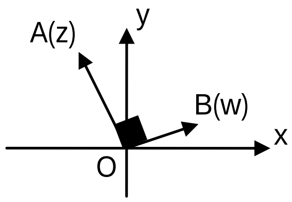
26. Εστω $f(z) = \frac{iz-1}{z+1}$,$z \in \mathbb{C} - \{-1\}$.

Α) Να αποδείξετε ότι $f^{12}(i) = -64$.

Β) Να βρείτε τον μιγαδικό z για τον οποίο ισχύει $f(z) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}i$.

Γ) Αν $|f(z_1)| = 1$ και $|f(z_2)| = 2$,$z_1, z_2 \in \mathbb{C} - \{-1\}$, να βρείτε την ελάχιστη τιμή του $|z_1 - z_2|$.

27.Στο διπλανό σχήμα δίνονται οι εικόνες Α,Β των μιγαδικών z, w αντίστοιχα. Αν είναι $\overrightarrow{OA} \perp \overrightarrow{OB}$ και (ΟΑ)=2(ΟΒ), να αποδείξετε ότι: $z^2 + 4w^2 = 0$.



28. Δίνονται οι μιγαδικοί $w = \left(\frac{z}{|z|} + 1\right)^{2\nu}$ και $u = \left(\frac{z}{|z|} - 1\right)^{2\nu}$, όπου $z \in \mathbb{C}^*$. Αν Α,Β είναι οι εικόνες των μιγαδικών w και u στο μιγαδικό επίπεδο, να αποδείξετε ότι τα σημεία Α,Β και η αρχή Ο των αξόνων είναι συνευθειακά.

29. Δίνονται οι μιγαδικοί αριθμοί z,w με εικόνες στο μιγαδικό επίπεδο τα σημεία Α και Β αντίστοιχα.

Α) Να αποδείξετε ότι $\mathrm{Re}(z\overline{w}) = \overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB}$, όπου Ο η αρχή των αξόνων.

Β) Να βρείτε τη γωνία που σχηματίζει με τον άξονα x΄x η ευθεία που ορίζουν οι εικόνες των μιγαδικών z-1 και z-i.

Γ) Να αποδείξετε ότι οι εικόνες των μιγαδικών z, z-1, z-i στο μιγαδικό επίπεδο, σχηματίζουν ορθογώνιο και ισοσκελές τρίγωνο.

30. Αν οι εικόνες των μιγαδικών z_1, z_2 και η αρχή των αξόνων σχηματίζουν ισόπλευρο τρίγωνο πλευράς 1, να αποδείξετε ότι:

Α) $\frac{z_1}{z_2}+\frac{z_2}{z_1}=1$ Β) $z_1^3=-z_2^3$ Γ) $z_1^{2010}-z_2^{2010}=0$

Δ) $\left(\frac{z_1}{z_2}\right)^{2007}+\left(\frac{z_2}{z_1}\right)^{2010}+\left(\frac{z_1}{z_2}\right)^{2013}=-1$.

Ε) Οι εικόνες των z_1, z_2 στο μιγαδικό επίπεδο και η αρχή Ο των αξόνων, σχηματίζουν ισόπλευρο τρίγωνο.

31. Αν οι εικόνες Α,Β των μιγαδικών z_1, z_2 βρίσκονται σε τυχαίο κύκλο κέντρου Ο(0,0), να αποδείξετε ότι τα σημεία Α,Β καθώς και η εικόνα Γ του $-z_2$, σχηματίζουν ορθογώνιο τρίγωνο.

32. Δίνονται οι μιγαδικοί z_1, z_2, z_3 για τους οποίους ισχύει ότι:

$|z_1|=|z_2|=|z_3|=1$ και $z_1+z_2+z_3=0$.

Να αποδείξετε ότι:

Α) $|z_1+z_2|^2+|z_1-z_2|^2=2|z_1|^2+2|z_2|^2$

Β) $|z_1-z_2|^2=3$ και $\mathrm{Re}\left(z_1\overline{z_2}\right)=-\frac{1}{2}$

Γ) $|z_1-z_2|=|z_2-z_3|=|z_3-z_1|$

Δ) Οι εικόνες των μιγαδικών z_1, z_2, z_3 στο μιγαδικό επίπεδο σχηματίζουν ισόπλευρο τρίγωνο το οποίο είναι εγγεγραμμένο σε κύκλο του οποίου να βρείτε την εξίσωση.

33. Δίνεται μιγαδικός αριθμός z για τον οποίο ισχύει:

$$|z|^2-\left(\mathrm{Im}(z)+2\right)^2+4=0.$$

Α) Να βρείτε τον γεωμετρικό τόπο των εικόνων των μιγαδικών αριθμών z.

Β) Να βρείτε τους μιγαδικούς z που έχουν μέτρο $\sqrt{12}$.

Γ) Να αποδείξετε ότι για κάθε θετικό πραγματικό αριθμό θ υπάρχουν πάντα δύο μιγαδικοί z για τους οποίους ισχύει $|z|=\theta$.

34. Δίνεται μιγαδικός αριθμός z για τον οποίο ισχύει:

$$\mathrm{Re}\left(2z+\frac{8}{z}\right)=4\,\mathrm{Re}(z),\ z\neq 0\ (1).$$

Α) Να βρείτε τον γεωμετρικό τόπο των εικόνων των μιγαδικών z.

Β) Αν $\mathrm{Re}(z)\neq 0$, να αποδείξετε ότι:

i. ο μιγαδικός $u=2z+\frac{8}{z}$ είναι πραγματικός.

ii. $-8\le u\le 8$.

Γ) Αν z_1, z_2, z_3 μιγαδικοί που ικανοποιούν την (1), δεν είναι φανταστικοί και $z_1+z_2+z_3\neq 0$, $z_1^2+z_2^2+z_3^2=0$, να αποδείξετε ότι $|z_1+z_2+z_3|=4$.

35. Δίνεται ο θετικός πραγματικός αριθμός α και η εξίσωση $x^2-2\alpha x+2\alpha^2=0$, η οποία έχει ρίζες τους μιγαδικούς ρ_1,ρ_2 με $\mathrm{Im}(\rho_1)>0$.

Α) Να βρείτε τους μιγαδικούς ρ_1,ρ_2 και να αποδείξετε ότι $\rho_1=i\rho_2$.

Β) Να αποδείξετε ότι $\rho_1^{4\nu+2}+\rho_2^{4\nu+2}=0$ για κάθε θετικό ακέραιο ν.

Γ) Να βρείτε την τιμή του α αν γνωρίζετε ότι $\rho_1^4=-4$.

Δ) Να αποδείξετε ότι οι εικόνες των ρ_1,ρ_2 και η αρχή των αξόνων ορίζουν ορθογώνιο και ισοσκελές τρίγωνο.

36. Δίνονται οι μιγαδικοί $z_1=\alpha+\beta i$ και $z_2=\dfrac{2-\overline{z_1}}{2+\overline{z_1}}$, $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$ με $\beta\neq 0$. Δίνεται επίσης ότι $(z_2-z_1)\in\mathbb{R}$.

Α) Να αποδείξετε ότι $z_2-z_1=1$.

Β) Να βρείτε τον γεωμετρικό τόπο των εικόνων του z_1 στο μιγαδικό επίπεδο.

Γ) Αν ο αριθμός z_1^2 είναι φανταστικός και $\alpha\beta>0$, να υπολογίσετε τον z_1 και να αποδείξετε ότι: $(z_1+1+i)^{20}-(\overline{z_1}+1-i)^{20}=0$.