ΜΙΓΑΔΑΝΑΛΥΣΗ

1. Δίνεται συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ για την οποία ισχύει: $f^3(x)+3f(x)=x-3$ (1) για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

i. Να αποδείξετε ότι η f αντιστρέφεται και να βρείτε την f^{-1}.

ii. Να αποδείξετε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$.

iii. Να λύσετε την εξίσωση $f(x)=f^{-1}(x)$.

iv. Αν $f^{-1}\left(f\left(|z-6-8i|\right)-1\right)=3$, να βρείτε τον γεωμετρικό τόπο των εικόνων των μιγαδικών z.

v. Να αποδείξετε ότι $3\le|z|\le17$.

vi. Αν $z=\alpha+\beta i$, $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$, να αποδείξετε ότι η εξίσωση $(\alpha-6)^2x^4+(\beta-8)^2x-5=0$ έχει τουλάχιστον μία ρίζα στο διάστημα $(0,1)$.

2. Εστω μιγαδικός αριθμός z και συνάρτηση f ορισμένη στο $\mathbb{R}$ για την οποία ισχύει ότι: $e^{f(x)}+f(x)=x$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$ και η γραφική της παράσταση διέρχεται από το σημείο $A\left(e+1,|z|\right)$.

i. Να αποδείξετε ότι η f αντιστρέφεται και να βρείτε την αντίστροφή της.

ii. Να αποδείξετε ότι οι γραφικές παραστάσεις των f,f^{-1} δεν τέμνονται.

iii. Να βρείτε τον γεωμετρικό τόπο των εικόνων των μιγαδικών αριθμών z.

iv. Αν $|z-2f(e+1)i|=|z-f(1)i|$, να βρείτε τον z.

v. Να αποδείξετε ότι ο μιγαδικός $w=z+\dfrac{1}{z}$ είναι πραγματικός.

3. Δίνεται μιγαδικός z του οποίου η εικόνα βρίσκεται σε κύκλο με κέντρο $K(3,-4)$ και ακτίνα $\rho=5$.

i. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $\left|z-x^2-2+\left(x^2+3\right)i\right|=10x$ έχει τουλάχιστον μία ρίζα στο διάστημα $(-1,1)$.

i. Αν $\lim\limits_{x\to3}\dfrac{|z-x+(x+1)i|^2-25}{x-3}=12-2\mathrm{Re}(z)$, να βρείτε τον μιγαδικό z.

ii. Να αποδείξετε ότι $|z|\le10$.

4. Εστω η συνεχής στο $\mathbb{R}$ συνάρτηση $f(x)=\begin{cases}|xz+w|, & x\ge1\\ |z|x^2+x|w|, & x<1\end{cases}$, όπου z,w μιγαδικοί αριθμοί με $w\ne0$.

i. Να αποδείξετε ότι ο μιγαδικός $u=\dfrac{z}{w}$ είναι πραγματικός αριθμός.

ii. Αν $z=\alpha+f(\alpha)i$, $w=f(\beta)+\beta i$, $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$ με $\alpha<0<\beta$, να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f(x)=0$ έχει τουλάχιστον μία ρίζα στο διάστημα (α,β).

iii. Αν $|w|=4$ και $f(2)=2f(-1)$, να βρείτε τον γεωμετρικό τόπο της εικόνας του μιγαδικού z.

5. Δίνεται συνάρτηση f συνεχής στο $[\alpha,\beta]$ καθώς και το πολυώνυμο $P(z)=z^3+f(\alpha)z^2+f(\beta)z+1,\ z\in\mathbb{C}$. Αν ο αριθμός $1+i$ είναι ρίζα του P(z) να αποδείξετε ότι υπάρχει τουλάχιστον ένα $\xi(\alpha,\beta)$ τέτοιο, ώστε $f(\xi)=0$.

6. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\dfrac{|z|x^2-|z-2|x}{x^2-4}$, $z\in\mathbb{C}^*$.

i. Αν $\lim\limits_{x\to 2}f(x)=1$, να βρείτε τον μιγαδικό z.

ii. Αν η C_f διέρχεται από το σημείο $A\left(1,\dfrac{|z|}{3}\right)$, να βρείτε τον γεωμετρικό τόπο της εικόνας M του z.

iii. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση: $f(x)=\left(|z-2|+|z|\right)x^2+x^3-1$ έχει τουλάχιστον μία ρίζα στο διάστημα (0,1).

7. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=4x^2-|z|-\sigma\upsilon\nu x$, $z\in\mathbb{C}$.

i. Να μελετηθεί η f ως προς την μονοτονία στο $\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right]$.

ii. Να βρεθεί το σύνολο τιμών της f για $x\in\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right]$.

iii. Να βρεθεί ο γεωμετρικός τόπος των εικόνων του μιγαδικού z ,αν γνωρίζουμε ότι η εξίσωση $f(x)=0$ έχει ακριβώς μια ρίζα στο $\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$.

8. Να βρεθεί ο γεωμετρικός τόπος των εικόνων του μιγαδικού $z\neq 0$,για τον οποίο ισχύει : $\eta\mu\left(|z|x\right)\leq \eta\mu 5x+\eta\mu x$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

9. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=|z|\ x^{2\nu+1}+|w|\ x^{2\nu}-|z+w|$, $x\in\mathbb{R}$, $\nu\in\mathbb{N}$, όπου z,w μιγαδικοί αριθμοί. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f(x)=0$ έχει μία τουλάχιστον ρίζα στο $[-1,1]$.

10. Δίνεται συνάρτηση f συνεχής στο διάστημα $[\alpha,\beta]$ και οι μιγαδικοί $z=f(\alpha)+1+\alpha i$ και $w=f(\beta)+1+\beta i$. Αν $|z+w|>|1+\bar{z}w|$ να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f^2(x)+2f(x)=-x^2$ έχει τουλάχιστον μία ρίζα στο (α,β).

11. Δίνονται οι μιγαδικοί z ,w, για τους οποίους ισχύει :
$$\lim_{x\to 1}\frac{|z-3-4i|x^2-|w-3+6i|x+2}{x^2-1}=\frac{1}{2}$$

i. Να βρεθεί ο γεωμετρικός τόπος των εικόνων του μιγαδικού z .

ii. Να βρεθεί ο γεωμετρικός τόπος των εικόνων του μιγαδικού w .

iii. Να βρεθεί η ελάχιστη τιμή του $|z-w|$.

12. Δίνεται συνεχής συνάρτηση f ορισμένη στο $\mathbb{R}$ και οι μιγαδικοί, $z=\alpha+f(\beta)i$, $w=f(\alpha)-\beta i$ όπου οι α,β είναι ομόσημοι. Αν $|iz-w|^2=|z|^2+|w|^2$, τότε:

i. Να αποδείξετε ότι ο $\frac{z}{w}$ είναι πραγματικός.

ii. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f(x)=0$ έχει τουλάχιστον μια ρίζα στο (α,β).

iii. Να αποδείξετε ότι οι εικόνες των μιγαδικών z , $-iw$ και η αρχή Ο των αξόνων, σχηματίζουν ορθογώνιο τρίγωνο.

13. Δίνεται συνάρτηση f συνεχής στο $[1,2]$ και οι μιγαδικοί $z=f(1)+i$ και $w=1+f(2)i$. Αν ισχύει ότι $|z+w|=|z-w|$, να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f(x)=0$ έχει τουλάχιστον μια ρίζα στο διάστημα $[1,2]$.

14. Δίνεται συνάρτηση f συνεχής στο $[\alpha,\beta]$ με $f(\alpha)>\alpha>0$ και ο μιγαδικός $z=\frac{\alpha+if(\alpha)}{\beta-if(\beta)}$.

A) Να γράψετε τον z στη μορφή $z=x+yi, x,y\in\mathbb{R}$.

B) Αν η εικόνα του z βρίσκεται στον άξονα y΄y, να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f(x)=x$ έχει μια τουλάχιστον λύση στο διάστημα (α,β).