<u>ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ Γ΄ΛΥΚΕΙΟΥ</u>

<u>Διαγώνισμα: ΚΕΦΑΛΑΙΑ 1-2</u>

<u>ΘΕΜΑ 1^{ο}</u>

Α) Σε καθεμιά από τις παρακάτω περιπτώσεις να κυκλώσετε το γράμμα Α, αν ο ισχυρισμός είναι αληθής και το γράμμα Ψ, αν ο ισχυρισμός είναι ψευδής, αιτιολογώντας συγχρόνως την απάντησή σας.

α) Αν $\lim\limits_{x\to 1}\frac{f(x)}{x-1}=l\in\mathbb{R}$, τότε $\lim\limits_{x\to 1}f(x)=0$. Α Ψ

β) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(x\eta\mu\frac{1}{x}\right)=1$ Α Ψ

γ) $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\eta\mu x}{x}=1$. Α Ψ

δ) Αν $0\le f(x)\le 1$ κοντά στο 0, τότε $\lim\limits_{x\to 0}(x^2 f(x))=0$. Α Ψ

ε)Αν $f(x)\le\frac{1}{x^2}$, $x\in(\alpha,+\infty)$, τότε κατ' ανάγκη θα είναι $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=0$. Α Ψ

στ)Αν υπάρχει το $\lim\limits_{x\to 6}\big(f(x)g(x)\big)$, τότε είναι ίσο με $f(6)\cdot g(6)$. Α Ψ

ζ) Αν η *f* είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$ και για $x\neq 4$ ισχύει $f(x)=\frac{x^2-7x+12}{x-4}$,

τότε το $f(4)$ είναι ίσο με 1. Α Ψ

η) Αν η *f* είναι συνεχής στο $[-1,1]$ και $f(-1)=4$, $f(1)=3$, τότε υπάρχει πραγματικός αριθμός $x_0\in(-1,1)$ τέτοιος, ώστε $f(x_0)=\pi$. Α Ψ

μ 2x8

Β) Να κυκλώσετε τη σωστή απάντηση σε καθεμιά από τις παρακάτω περιπτώσεις

1. Αν $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=l$, $\lim\limits_{x\to x_0}g(x)=m$, $l,m\in\mathbb{R}$ και $f(x)<g(x)$ κοντά στο x_0, τότε κατ' ανάγκη θα είναι:

Α) $l<m$ Β) $l\le m$ Γ) $l\ge m$
Δ) $l=m$ Ε) $m<l$.

2. Το όριο $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{(1-2x^2)^3}{(x^2+1)^3}$ είναι ίσο με:

Α) 8 Β) 1 Γ) 0 Δ) $+\infty$ Ε) -8.

3. Το $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{|x^3-x^2-1|-x^3+x^2}{x^2}$ είναι ίσο με:

Α) $+\infty$ Β) $-\infty$ Γ) 1 Δ) -1 Ε) 0.

μ 3x3

<u>ΘΕΜΑ 2^{ο}</u>

Α) Εστω συνάρτηση f γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$ με $f\big(f(x)\big)=x$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

Να αποδείξετε ότι $f(x)=x$, $x\in\mathbb{R}$. (άτοπο) (μ 5)

Β) Εστω $f(x)=\frac{x^2+3\alpha x+\beta-6}{x-2}$.Αν $\lim\limits_{x\to 2}f(x)=10$, να βρεθούν τα α, $\beta\in\mathbb{R}$. (μ 8)

Γ) Δίνεται συνεχής συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ για την οποία ισχύει: $f(x)+e^{f(x)}=5-4x$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$ και $f(1)=0$. Να αποδείξετε ότι:

i. Η f αντιστρέφεται (μ4)

ii. Η εξίσωση $(f\circ f)(x)-f(5-10x^3)=0$ έχει τουλάχιστον μία ρίζα στο $(0,1)$. (μ 8)

ΘΕΜΑ 3^{o}

Α. Να υπολογισθεί το όριο $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{(x+1)ημ2x}{x^4+2}$. (μ 8)

Β. Αν οι εικόνες των μιγαδικών z_1, z_2 στο μιγαδικό επίπεδο είναι εσωτερικά σημεία του κύκλου C: $x^2+y^2=1$, να δείξετε ότι: $|z_1-z_2|<|1-\bar{z}_1\cdot z_2|$. (μ 8)

Γ. Εστω συνάρτηση f συνεχής στο $\mathbb{R}$,ώστε να ικανοποιεί τις συνθήκες :

α) $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{f(x)}{x-1}=4$ β) $4ημ(x-2)\le(x-2)f(x)\le x^2-4$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

Να αποδειχθεί ότι η C_f τέμνει την Cg ,όπου $g(x)=x^2-x+1$ σε σημείο με τετμημένη στο (1,2). (μ 9)

ΘΕΜΑ 4^{o}

Εστω μιγαδικός αριθμός z και συνάρτηση f ορισμένη στο $\mathbb{R}$ για την οποία ισχύει ότι: $e^{f(x)}+f(x)=x$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$ και η γραφική της παράσταση διέρχεται από το σημείο $A(e+1,|z|)$.

i. Να αποδείξετε ότι η f αντιστρέφεται και να βρείτε την αντίστροφή της. (μ 5)

ii. Να αποδείξετε ότι οι γραφικές παραστάσεις των f,f^{-1} δεν τέμνονται. (μ 5)

iii. Να βρείτε τον γεωμετρικό τόπο των εικόνων των μιγαδικών αριθμών z. (μ 5)

iv. Αν $|z-2f(e+1)i|=|z-f(1)i|$, να βρείτε τον z. (μ 6)

v. Να αποδείξετε ότι ο μιγαδικός $w=z+\dfrac{1}{z}$ είναι πραγματικός. (μ 4)

Καλή Τύχη!

Στέλιος Μιχαήλογλου