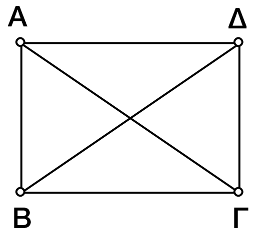
ΕΥΚΛΕΙΔΙΑ ΚΑΙ ΑΝΑΛΥΤΙΚΗ ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ ΣΕ ΑΝΤΙΠΑΡΑΘΕΣΗ

1. Να αποδείξετε ότι σε κάθε ορθογώνιο οι διαγώνιες του είναι ίσες.

Λύση

Ευκλείδεια



Τα τρίγωνα ΑΒΓ και ΒΓΔ έχουν

$\hat{B}=\hat{\Gamma}=90^\circ$,

$AB=\Gamma\Delta$ (απέναντι πλευρές του ορθογωνίου)

ΒΓ κοινή πλευρά

Άρα τα τρίγωνα είναι ίσα, οπότε και $A\Gamma=B\Delta$

Διανύσματα

Εστω $|\vec{AB}|=|\vec{\Gamma\Delta}|=\alpha>0$ και $|\vec{A\Delta}|=|\vec{B\Gamma}|=\beta>0$, τότε

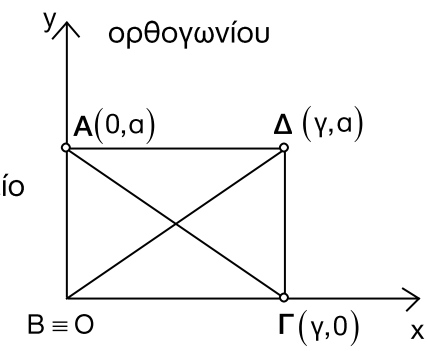
$$|\vec{A\Gamma}|^2=|\vec{AB}+\vec{B\Gamma}|^2=\left(\vec{AB}+\vec{B\Gamma}\right)^2=\vec{AB}^2+2\vec{AB}\cdot\vec{B\Gamma}+\vec{B\Gamma}^2=|\vec{AB}|^2+2\cdot 0+|\vec{B\Gamma}|^2=\alpha^2+\beta^2\quad\left(\vec{AB}\perp\vec{B\Gamma}\right)$$

$$|\vec{B\Delta}|^2=|\vec{B\Gamma}+\vec{\Gamma\Delta}|^2=\left(\vec{B\Gamma}+\vec{\Gamma\Delta}\right)^2=\vec{B\Gamma}^2+2\vec{B\Gamma}\cdot\vec{\Gamma\Delta}+\vec{\Gamma\Delta}^2=|\vec{B\Gamma}|^2+2\cdot 0+|\vec{\Gamma\Delta}|^2=\beta^2+\alpha^2\quad\left(\vec{B\Gamma}\perp\vec{\Gamma\Delta}\right)$$

Άρα $|\vec{A\Gamma}|^2=|\vec{B\Delta}|^2\Leftrightarrow|\vec{A\Gamma}|=|\vec{B\Delta}|$

Συντεταγμένες

Εστω ορθοκανονικό σύστημα αξόνων στο οποίο η κορυφή Β του ορθογωνίου ταυτίζεται με την αρχή Ο των αξόνων και οι πλευρές ΒΓ,ΒΑ αντίστοιχα
βρίσκονται επί των ημιαξόνων Ox, Oy.
Εστω ότι το Γ έχει συντεταγμένες $(\gamma,0)$ και το $A(0,\alpha)$. Τότε το σημείο Δ έχει συντεταγμένες (γ,α).



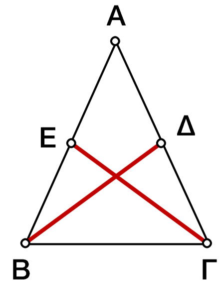
Είναι $(A\Gamma)=\sqrt{(\gamma-0)^2+(0-\alpha)^2}=\sqrt{\gamma^2+\alpha^2}$ και

$(B\Delta)=\sqrt{(\gamma-0)^2+(\alpha-0)^2}=\sqrt{\gamma^2+\alpha^2}$, άρα $(A\Gamma)=(B\Delta)$

2. Να αποδείξετε ότι σε κάθε ισοσκελές τρίγωνο οι διάμεσοι που αντιστοιχούν στις ίσες πλευρές του είναι ίσες.

Λύση

Ευκλείδεια



Τα τρίγωνα ΒΔΓ και ΒΕΓ έχουν: ΒΓ πλευρά κοινή

$BE=\Gamma\Delta$ μισά των ίσων πλευρών ΑΒ και ΑΓ

$\hat{B}=\hat{\Gamma}$ στη βάση του ισοσκελούς τριγώνου

Άρα τα τρίγωνα ΒΔΓ και ΒΕΓ είναι ίσα, οπότε είναι και $B\Delta=\Gamma E$.

Διανύσματα

Εστω $|\vec{AB}|=|\vec{A\Gamma}|=\alpha>0$

$\overrightarrow{B\Delta}=\overrightarrow{A\Delta}-\overrightarrow{AB}=\frac{1}{2}\overrightarrow{A\Gamma}-\overrightarrow{AB}$, άρα

$$\left|\overrightarrow{B\Delta}\right|^2=\left|-\overrightarrow{AB}+\frac{1}{2}\overrightarrow{A\Gamma}\right|^2=\left(\frac{1}{2}\overrightarrow{A\Gamma}-\overrightarrow{AB}\right)^2=\frac{1}{4}\overrightarrow{A\Gamma}^2-\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{A\Gamma}+\overrightarrow{AB}^2=\left|\overrightarrow{AB}\right|^2+\frac{1}{4}\left|\overrightarrow{A\Gamma}\right|^2-\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{A\Gamma}\Leftrightarrow$$

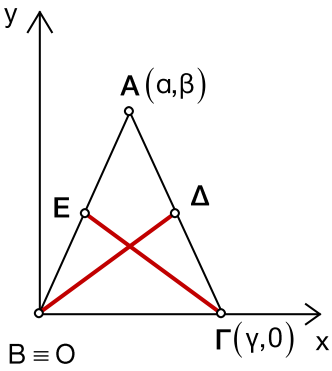
$$\left|\overrightarrow{B\Delta}\right|^2=\alpha^2+\frac{\alpha^2}{4}-\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{A\Gamma}=\frac{5\alpha^2}{4}-\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{A\Gamma}$$

Είναι $\overrightarrow{\Gamma E}=\overrightarrow{AE}-\overrightarrow{A\Gamma}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{A\Gamma}$ και

$$\left|\overrightarrow{\Gamma E}\right|^2=\left|\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{A\Gamma}\right|^2=\left(\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{A\Gamma}\right)^2=\frac{1}{4}\overrightarrow{AB}^2-\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{A\Gamma}+\overrightarrow{A\Gamma}^2=\frac{1}{4}\left|\overrightarrow{AB}\right|^2-\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{A\Gamma}+\left|\overrightarrow{A\Gamma}\right|^2\Leftrightarrow$$

$$\left|\overrightarrow{\Gamma E}\right|^2=\frac{\alpha^2}{4}-\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{A\Gamma}+\alpha^2=\frac{5\alpha^2}{4}-\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{A\Gamma}$$

Άρα $\left|\overrightarrow{B\Delta}\right|^2=\left|\overrightarrow{\Gamma E}\right|^2\Leftrightarrow\left|\overrightarrow{B\Delta}\right|=\left|\overrightarrow{\Gamma E}\right|$.



Συντεταγμένες

Εστω ορθοκανονικό σύστημα αξόνων και έστω ότι η αρχή O των αξόνων ταυτίζεται με τη κορυφή B και η πλευρά BΓ βρίσκεται στον άξονα x΄x.

Εστω ότι η κορυφή A έχει συντεταγμένες (α,β) και η κορυφή $\Gamma(\gamma,0)$.

Επειδή το τρίγωνο είναι ισοσκελές, έχουμε:

$(AB)=(A\Gamma)\Leftrightarrow\sqrt{\alpha^2+\beta^2}=\sqrt{(\alpha-\gamma)^2+\beta^2}\Leftrightarrow\alpha^2+\beta^2=\alpha^2-2\alpha\gamma+\gamma^2+\beta^2\Leftrightarrow$

$\gamma^2-2\alpha\gamma=0\Leftrightarrow\gamma(\gamma-2\alpha)=0\Leftrightarrow\gamma=0$ που είναι αδύνατο ή

$\gamma=2\alpha$. Τότε $\Gamma(2\alpha,0)$.

Επειδή το Δ είναι μέσο του AΓ είναι: $x_\Delta=\frac{x_A+x_\Gamma}{2}=\frac{3\alpha}{2}$ και $y_\Delta=\frac{y_A+y_\Gamma}{2}=\frac{\beta}{2}$, άρα $\Delta\left(\frac{3\alpha}{2},\frac{\beta}{2}\right)$ και

$$(B\Delta)=\sqrt{\left(\frac{3\alpha}{2}\right)^2+\left(\frac{\beta}{2}\right)^2}=\sqrt{\frac{9\alpha^2}{4}+\frac{\beta^2}{4}}.$$

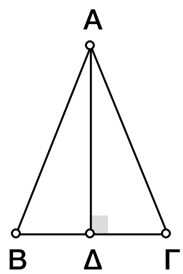
Επειδή το E είναι μέσο του AB είναι: $x_E=\frac{x_A+x_B}{2}=\frac{\alpha}{2}$ και $y_E=\frac{y_A+y_B}{2}=\frac{\beta}{2}$, άρα $E\left(\frac{\alpha}{2},\frac{\beta}{2}\right)$ και

$(\Gamma E)=\sqrt{\left(\frac{\alpha}{2}-2\alpha\right)^2+\left(\frac{\beta}{2}\right)^2}=\sqrt{\left(-\frac{3\alpha}{2}\right)^2+\frac{\beta^2}{4}}=\sqrt{\frac{9\alpha^2}{4}+\frac{\beta^2}{4}}$. Άρα $(B\Delta)=(\Gamma E)$.

3. Να αποδείξετε ότι σε κάθε ισοσκελές τρίγωνο οι προσκείμενες στην βάση γωνίες είναι ίσες.

Λύση

Ευκλείδεια



Εστω AΔ το ύψος που αντιστοιχεί στη βάση του ισοσκελούς τριγώνου ABΓ.

Τα ορθογώνια τρίγωνα ABΔ και AΔΓ έχουν την πλευρά AΔ κοινή και τις πλευρές AB και AΓ ίσες, οπότε είναι ίσα και έχουν και τις γωνίες B και Γ ίσες.

Διανύσματα

Είναι $\sigma\upsilon\nu B=\dfrac{\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{B\Gamma}}{\left|\overrightarrow{BA}\right|\left|\overrightarrow{B\Gamma}\right|}$ και $\sigma\upsilon\nu\Gamma=\dfrac{\overrightarrow{\Gamma A}\cdot\overrightarrow{\Gamma B}}{\left|\overrightarrow{\Gamma A}\right|\left|\overrightarrow{\Gamma B}\right|}$.

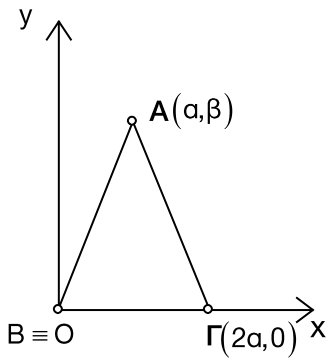
Για να είναι το τρίγωνο ισοσκελές πρέπει να αποδείξουμε ότι $B=\hat{\Gamma}$, οπότε αρκεί:

$$\sigma\upsilon\nu B=\sigma\upsilon\nu\Gamma\Leftrightarrow\frac{\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{B\Gamma}}{\cancel{\left|\overrightarrow{BA}\right|}\cancel{\left|\overrightarrow{B\Gamma}\right|}}=\frac{\overrightarrow{\Gamma A}\cdot\overrightarrow{\Gamma B}}{\cancel{\left|\overrightarrow{\Gamma A}\right|}\cancel{\left|\overrightarrow{\Gamma B}\right|}}\Leftrightarrow\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{B\Gamma}=\overrightarrow{\Gamma A}\cdot\overrightarrow{\Gamma B}\Leftrightarrow\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{B\Gamma}+\overrightarrow{\Gamma A}\cdot\overrightarrow{B\Gamma}=0\Leftrightarrow$$

$$\overrightarrow{B\Gamma}\left(\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{\Gamma A}\right)=0\Leftrightarrow-\overrightarrow{B\Gamma}\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{A\Gamma}\right)=0\Leftrightarrow\overrightarrow{B\Gamma}\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{A\Gamma}\right)=0\quad(1)$$

Επειδή το ΑΔ είναι διάμεσος του τριγώνου ΑΒΓ, είναι: $\overrightarrow{A\Delta}=\dfrac{\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{A\Gamma}}{2}\Leftrightarrow\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{A\Gamma}=2\overrightarrow{A\Delta}$, οπότε η σχέση (1) γίνεται: $\overrightarrow{B\Gamma}\cdot2\overrightarrow{A\Delta}=0\Leftrightarrow\overrightarrow{B\Gamma}\cdot\overrightarrow{A\Delta}=0\Leftrightarrow\overrightarrow{B\Gamma}\perp\overrightarrow{A\Delta}$ που ισχύει.

Συντεταγμένες



Εστω ορθοκανονικό σύστημα αξόνων και έστω ότι η αρχή Ο των αξόνων ταυτίζεται με τη κορυφή Β και η πλευρά ΒΓ βρίσκεται στον άξονα x΄x.

Εστω ότι η κορυφή Α έχει συντεταγμένες (α,β) και η κορυφή $\Gamma(\gamma,0)$.

Επειδή το τρίγωνο είναι ισοσκελές, έχουμε:

$$(AB)=(A\Gamma)\Leftrightarrow\sqrt{\alpha^2+\beta^2}=\sqrt{(\alpha-\gamma)^2+\beta^2}\Leftrightarrow\alpha^2+\beta^2=\alpha^2-2\alpha\gamma+\gamma^2+\beta^2\Leftrightarrow$$

$\gamma^2-2\alpha\gamma=0\Leftrightarrow\gamma(\gamma-2\alpha)=0\Leftrightarrow\gamma=0$ που είναι αδύνατο ή $\gamma=2\alpha$. Τότε $\Gamma(2\alpha,0)$.

Η ευθεία ΑΒ έχει συντελεστή διεύθυνσης $\lambda_{AB}=\dfrac{\beta}{\alpha}$, όμως $\lambda_{AB}=\varepsilon\varphi B$, άρα $\varepsilon\varphi B=\dfrac{\beta}{\alpha}$.

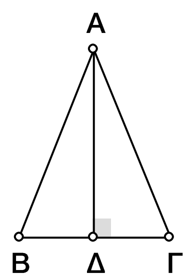
Η ευθεία ΑΓ έχει συντελεστή διεύθυνσης $\lambda_{A\Gamma}=\dfrac{\beta}{\alpha-2\alpha}=-\dfrac{\beta}{\alpha}$, όμως $\lambda_{A\Gamma}=\varepsilon\varphi A\Gamma x$, άρα $\varepsilon\varphi A\Gamma x=-\dfrac{\beta}{\alpha}$.

Όμως $A\Gamma x=180^\circ-\hat{\Gamma}=180^\circ-B$, άρα $\varepsilon\varphi A\Gamma x=\varepsilon\varphi\left(180^\circ-B\right)=-\varepsilon\varphi B=-\dfrac{\beta}{\alpha}$ που ισχύει.

4. Να αποδείξετε ότι σε κάθε ισοσκελές τρίγωνο το ύψος που αντιστοιχεί στη βάση του είναι και διάμεσός του.

Λύση

Ευκλείδεια



Εστω ΑΔ το ύψος που αντιστοιχεί στη βάση του ισοσκελούς τριγώνου ΑΒΓ.

Τα ορθογώνια τρίγωνα ΑΒΔ και ΑΔΓ έχουν:

ΑΔ κοινή πλευρά και

$AB=A\Gamma$

Άρα τα τρίγωνα είναι ίσα, οπότε έχουν και $B\Delta=\Delta\Gamma$.

Διανύσματα

Είναι $\left|\overrightarrow{BA}\right|=\left|\overrightarrow{\Gamma A}\right|$ και $\overrightarrow{A\Delta}\perp\overrightarrow{B\Gamma}$. Αρκεί να αποδείξουμε ότι $\left|\overrightarrow{B\Delta}\right|=\left|\overrightarrow{\Delta\Gamma}\right|$. Είναι

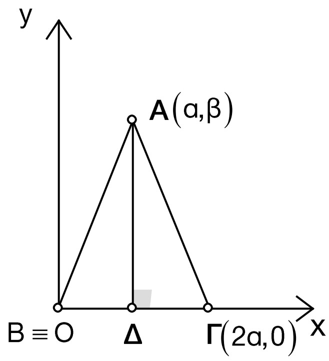
$$\left|\overrightarrow{B\Delta}\right|=\left|\overrightarrow{\Delta\Gamma}\right|\Leftrightarrow\left|\overrightarrow{A\Delta}-\overrightarrow{AB}\right|^2=\left|\overrightarrow{A\Gamma}-\overrightarrow{A\Delta}\right|^2\Leftrightarrow\left(\overrightarrow{A\Delta}-\overrightarrow{AB}\right)^2=\left(\overrightarrow{A\Gamma}-\overrightarrow{A\Delta}\right)^2\Leftrightarrow$$

$\cancel{\overrightarrow{A\Delta}^2} - 2\overrightarrow{A\Delta}\cdot\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AB}^2 = \overrightarrow{A\Gamma}^2 - 2\overrightarrow{A\Gamma}\cdot\overrightarrow{A\Delta} + \cancel{\overrightarrow{A\Delta}^2} \Leftrightarrow -2\overrightarrow{A\Delta}\cdot\overrightarrow{AB} + \cancel{|\overrightarrow{AB}|^2} = \cancel{|\overrightarrow{A\Gamma}|^2} - 2\overrightarrow{A\Gamma}\cdot\overrightarrow{A\Delta} \Leftrightarrow$

$2\overrightarrow{A\Gamma}\cdot\overrightarrow{A\Delta} - 2\overrightarrow{A\Delta}\cdot\overrightarrow{AB} = 0 \Leftrightarrow \overrightarrow{A\Delta}\left(\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{A\Gamma}\right) = 0 \Leftrightarrow \overrightarrow{A\Delta}\cdot\overrightarrow{B\Gamma} = 0 \Leftrightarrow \overrightarrow{A\Delta} \perp \overrightarrow{B\Gamma}$ που ισχύει.

Συντεταγμένες

Εστω ορθοκανονικό σύστημα αξόνων και έστω ότι η αρχή Ο των αξόνων ταυτίζεται με τη κορυφή Β και η πλευρά ΒΓ βρίσκεται στον άξονα x΄x.



Εστω ότι η κορυφή Α έχει συντεταγμένες (α,β) και η κορυφή $\Gamma(\gamma,0)$.

Επειδή το τρίγωνο είναι ισοσκελές, έχουμε:

$(AB) = (A\Gamma) \Leftrightarrow \sqrt{\alpha^2+\beta^2} = \sqrt{(\alpha-\gamma)^2+\beta^2} \Leftrightarrow \alpha^2+\beta^2 = \alpha^2 - 2\alpha\gamma + \gamma^2 + \beta^2 \Leftrightarrow$

$\gamma^2 - 2\alpha\gamma = 0 \Leftrightarrow \gamma(\gamma-2\alpha) = 0 \Leftrightarrow \gamma = 0$ που είναι αδύνατο ή

$\gamma = 2\alpha$. Τότε $\Gamma(2\alpha,0)$.

Επειδή $A\Delta \perp x'x$, το Δ έχει συντεταγμένες $(\alpha,0)$.

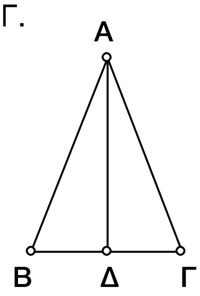
Επειδή $x_\Delta = \dfrac{x_B + x_\Gamma}{2}$ και $y_\Delta = \dfrac{y_B + y_\Gamma}{2}$, το Δ είναι μέσο του ΒΓ.

5. Αν σε τρίγωνο μια διάμεσος του είναι και ύψος του, να αποδείξετε ότι το τρίγωνο είναι ισοσκελές.

Λύση

Ευκλείδεια

Εστω ΑΔ διάμεσος που αντιστοιχεί στη βάση του ισοσκελούς τριγώνου ΑΒΓ.



Τα τρίγωνα ΑΒΔ και ΑΔΓ έχουν:

ΑΔ κοινή πλευρά

$AB = A\Gamma$ και

$B\Delta = \Delta\Gamma$

Άρα τα τρίγωνα είναι ίσα, οπότε έχουν και $\Delta_1 = \Delta_2$.

Όμως $\Delta_1 + \Delta_2 = 180^\circ$, άρα $\Delta_1 = \Delta_2 = 90^\circ$.

Διανύσματα

Αρκεί να αποδείξουμε ότι $|\overrightarrow{AB}| = |\overrightarrow{A\Gamma}|$.

$|\overrightarrow{AB}| = |\overrightarrow{A\Gamma}| \Leftrightarrow |\overrightarrow{AB}|^2 = |\overrightarrow{A\Gamma}|^2 \Leftrightarrow \left(\overrightarrow{\Delta B} - \overrightarrow{\Delta A}\right)^2 = \left(\overrightarrow{\Delta\Gamma} - \overrightarrow{\Delta A}\right)^2 \Leftrightarrow$

$\overrightarrow{\Delta B}^2 - 2\overrightarrow{\Delta B}\cdot\overrightarrow{\Delta A} + \cancel{\overrightarrow{\Delta A}^2} = \overrightarrow{\Delta\Gamma}^2 - 2\overrightarrow{\Delta\Gamma}\cdot\overrightarrow{\Delta A} + \cancel{\overrightarrow{\Delta A}^2}$ (1)

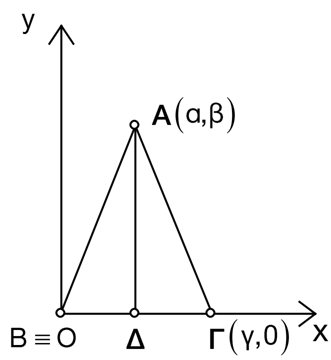
Όμως $\overrightarrow{\Delta B} \perp \overrightarrow{\Delta A} \Leftrightarrow \overrightarrow{\Delta B}\cdot\overrightarrow{\Delta A} = 0$ και $\overrightarrow{\Delta\Gamma} \perp \overrightarrow{\Delta A} \Leftrightarrow \overrightarrow{\Delta\Gamma}\cdot\overrightarrow{\Delta A} = 0$, οπότε η σχέση (1) γίνεται:

$|\overrightarrow{\Delta B}|^2 = |\overrightarrow{\Delta\Gamma}|^2 \Leftrightarrow |\overrightarrow{\Delta B}| = |\overrightarrow{\Delta\Gamma}|$ που ισχύει.

Συντεταγμένες

Εστω ορθοκανονικό σύστημα αξόνων και έστω ότι η αρχή Ο των αξόνων ταυτίζεται με τη κορυφή Β και η πλευρά ΒΓ βρίσκεται στον άξονα x΄x.

Εστω ότι η κορυφή Α έχει συντεταγμένες (α,β) και η κορυφή $\Gamma(\gamma,0)$.



Εστω τώρα ότι το ύψος ΑΔ είναι και διάμεσος. Επειδή $ΑΔ \perp x'x$, είναι $x_Δ = x_A = α$, οπότε $Δ(α,0)$.

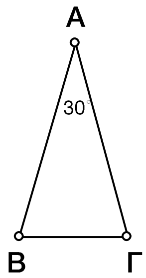
Επειδή το Δ είναι το μέσο του ΒΓ είναι $x_Δ = \frac{x_B + x_Γ}{2} \Leftrightarrow x_Γ = 2α$, άρα $Γ(2α,0)$.

Είναι $(ΑΒ) = \sqrt{α^2+β^2}$ και $(ΑΓ) = \sqrt{(α-2α)^2+β^2} = \sqrt{α^2+β^2}$.
Επειδή $(ΑΒ)=(ΑΓ)$, το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ισοσκελές.

6. Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ με $ΑΒ = ΑΓ$ και $Α = 30^\circ$. Να αποδείξετε ότι $ΒΓ = ΑΓ\sqrt{2-\sqrt{3}}$.

Λύση

Ευκλείδεια



Από το νόμο των συνημιτόνων στο τρίγωνο ΑΒΓ, έχουμε:

$$ΒΓ^2 = ΑΒ^2 + ΑΓ^2 - 2ΑΒ\cdot ΑΓ συν30^\circ = ΑΓ^2 + ΑΓ^2 - 2ΑΓ\cdot ΑΓ \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow$$

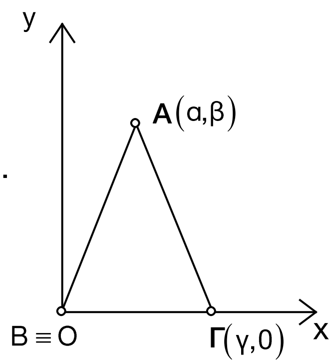
$$ΒΓ^2 = 2ΑΓ^2 - ΑΓ^2\sqrt{3} = ΑΓ^2\left(2-\sqrt{3}\right) \Leftrightarrow ΒΓ = ΑΓ\sqrt{2-\sqrt{3}}.$$

Διανύσματα

Είναι $\left|\overrightarrow{ΒΓ}\right|^2 = \left|\overrightarrow{ΑΓ}-\overrightarrow{ΑΒ}\right|^2 = \left(\overrightarrow{ΑΓ}-\overrightarrow{ΑΒ}\right)^2 = \overrightarrow{ΑΓ}^2 - 2\overrightarrow{ΑΓ}\cdot\overrightarrow{ΑΒ} + \overrightarrow{ΑΒ}^2 \Leftrightarrow$

$$\left|\overrightarrow{ΒΓ}\right|^2 = \left|\overrightarrow{ΑΓ}\right|^2 - 2\left|\overrightarrow{ΑΓ}\right|\cdot\left|\overrightarrow{ΑΒ}\right| συν30^\circ + \left|\overrightarrow{ΑΒ}\right|^2$$

Συντεταγμένες



Εστω ορθοκανονικό σύστημα αξόνων και έστω ότι η αρχή Ο των αξόνων ταυτίζεται με τη κορυφή Β και η πλευρά ΒΓ βρίσκεται στον άξονα x΄x.
Εστω ότι η κορυφή Α έχει συντεταγμένες $(α,β)$ και η κορυφή $Γ(γ,0)$.

Επειδή το τρίγωνο είναι ισοσκελές, έχουμε:

$$(ΑΒ)=(ΑΓ) \Leftrightarrow \sqrt{α^2+β^2} = \sqrt{(α-γ)^2+β^2} \Leftrightarrow α^2+β^2 = α^2-2αγ+γ^2+β^2 \Leftrightarrow$$

$γ^2 - 2αγ = 0 \Leftrightarrow γ(γ-2α) = 0 \Leftrightarrow γ = 0$ που είναι αδύνατο ή $γ = 2α$. Τότε $Γ(2α,0)$.

Είναι $\overrightarrow{ΑΒ} = (-α,-β)$ και $\overrightarrow{ΑΓ} = (2α-α, 0-β) = (α,-β)$.

$$συνΑ = συν\left(\overrightarrow{ΑΒ},\overrightarrow{ΑΓ}\right) = \frac{\overrightarrow{ΑΒ}\cdot\overrightarrow{ΑΓ}}{\left|\overrightarrow{ΑΒ}\right|\left|\overrightarrow{ΑΓ}\right|} \Leftrightarrow$$

$$συν30^\circ = \frac{(-α)α + (-β)(-β)}{\sqrt{(-α)^2+(-β)^2}\sqrt{α^2+(-β)^2}} \Leftrightarrow$$

$$\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{-α^2+β^2}{\sqrt{α^2+β^2}\sqrt{α^2+β^2}} \Leftrightarrow$$

$$\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{-\alpha^2+\beta^2}{\left(\sqrt{\alpha^2+\beta^2}\right)^2}\Leftrightarrow$$

$$\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{-\alpha^2+\beta^2}{\alpha^2+\beta^2}\Leftrightarrow$$

$$\sqrt{3}\alpha^2+\sqrt{3}\beta^2=-2\alpha^2+2\beta^2\Leftrightarrow$$

$$\left(2+\sqrt{3}\right)\alpha^2=\left(2-\sqrt{3}\right)\beta^2\Leftrightarrow$$

$$\alpha^2=\frac{\left(2-\sqrt{3}\right)}{\left(2+\sqrt{3}\right)}\beta^2=\frac{\left(2-\sqrt{3}\right)^2}{\left(2+\sqrt{3}\right)\left(2-\sqrt{3}\right)}\beta^2=\frac{\left(2-\sqrt{3}\right)^2}{4-3}\beta^2=\left(2-\sqrt{3}\right)^2\beta^2\Leftrightarrow\alpha=\left(2-\sqrt{3}\right)\beta$$

Είναι $(\text{ΑΓ})=\sqrt{\alpha^2+\beta^2}=\sqrt{\left(2-\sqrt{3}\right)^2\beta^2+\beta^2}=\sqrt{\left(4-4\sqrt{3}+3+1\right)\beta^2}=\sqrt{\left(8-4\sqrt{3}\right)\beta^2}\Leftrightarrow$

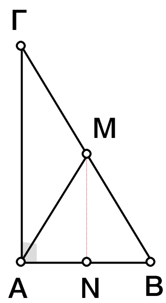
$(\text{ΑΓ})=\sqrt{4\left(2-\sqrt{3}\right)\beta^2}=2\sqrt{2-\sqrt{3}}\beta$ και $(\text{ΒΓ})=2\alpha=2\left(2-\sqrt{3}\right)\beta$

$$(\text{ΑΓ})\sqrt{2-\sqrt{3}}=2\sqrt{2-\sqrt{3}}\beta\sqrt{2-\sqrt{3}}=2\beta\left(\sqrt{2-\sqrt{3}}\right)^2=2\beta\left(2-\sqrt{3}\right)=(\text{ΒΓ})$$

7. Να αποδείξετε ότι η διάμεσος που αντιστοιχεί στην υποτείνουσα ορθογωνίου τριγώνου είναι ίση με το μισό της υποτείνουσας.

Λύση

Ευκλείδεια



Εστω ορθογώνιο ΑΒΓ με $\text{Α}=90^\circ$ και έστω ΑΜ διάμεσός του.
Αν Ν το μέσο της πλευράς ΑΒ, τότε επειδή το ευθύγραμμο τμήμα ΜΝ ενώνει τα μέσα δύο πλευρών του τριγώνου ΑΒΓ, θα είναι $\text{ΜΝ}\parallel\text{ΑΓ}$.
Όμως $\text{ΑΓ}\perp\text{ΑΒ}$, άρα και $\text{ΜΝ}\perp\text{ΑΒ}$.
Στο τρίγωνο ΑΜΒ το ΜΝ είναι διάμεσος και ύψος, άρα το τρίγωνο είναι ισοσκελές, δηλαδή $\text{ΑΜ}=\text{ΜΒ}=\frac{\text{ΒΓ}}{2}$.

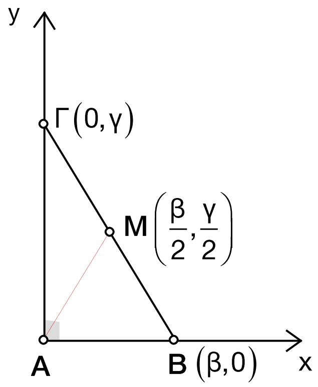
Διανύσματα

Είναι $\overrightarrow{\text{ΑΜ}}=\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{\text{ΑΒ}}+\overrightarrow{\text{ΑΓ}}\right)$, άρα

$$\left|\overrightarrow{\text{ΑΜ}}\right|^2=\frac{1}{4}\left|\overrightarrow{\text{ΑΒ}}+\overrightarrow{\text{ΑΓ}}\right|^2=\frac{1}{4}\left(\overrightarrow{\text{ΑΒ}}+\overrightarrow{\text{ΑΓ}}\right)^2=\frac{1}{4}\left(\overrightarrow{\text{ΑΒ}}^2+2\overrightarrow{\text{ΑΒ}}\cdot\overrightarrow{\text{ΑΓ}}+\overrightarrow{\text{ΑΓ}}^2\right)\overset{\overrightarrow{\text{ΑΒ}}\perp\overrightarrow{\text{ΑΓ}}}{\Leftrightarrow}$$

$$\left|\overrightarrow{\text{ΑΜ}}\right|^2=\frac{1}{4}\left(\left|\overrightarrow{\text{ΑΒ}}\right|^2+\left|\overrightarrow{\text{ΑΓ}}\right|^2\right)=\frac{1}{4}\left|\overrightarrow{\text{ΒΓ}}\right|^2\Leftrightarrow\left|\overrightarrow{\text{ΑΜ}}\right|=\frac{1}{2}\left|\overrightarrow{\text{ΒΓ}}\right|$$

Συντεταγμένες



Εστω ορθοκανονικό σύστημα αξόνων και έστω ότι η αρχή Ο των αξόνων ταυτίζεται με τη κορυφή Α, η πλευρά ΑΒ βρίσκεται στον άξονα x΄x και η πλευρά ΑΓ στον άξονα y΄y.
Αν τα σημεία Β και Γ έχουν συντεταγμένες $(\beta,0)$ και $(0,\gamma)$ αντίστοιχα, τότε το μέσο Μ του ΒΓ έχει συντεταγμένες $\left(\frac{\beta}{2},\frac{\gamma}{2}\right)$.

Είναι $(\text{ΒΓ})=\sqrt{(0-\beta)^2+(\gamma-0)^2}=\sqrt{\beta^2+\gamma^2}$ και

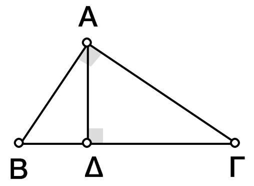
$$(ΑΜ)=\sqrt{\left(\frac{β}{2}\right)^2+\left(\frac{γ}{2}\right)^2}=\sqrt{\frac{β^2}{4}+\frac{γ^2}{4}}=\sqrt{\frac{β^2+γ^2}{4}}=\frac{\sqrt{β^2+γ^2}}{2}=\frac{(ΒΓ)}{2}$$

8. Εστω ΑΔ το ύψος ορθογωνίου τριγώνου ΑΒΓ $\left(Α=90^\circ\right)$. Να αποδείξετε ότι:

$ΑΒ^2=ΒΓ\cdot ΒΔ$ και $ΑΓ^2=ΒΓ\cdot ΔΓ$.

Λύση

Ευκλείδεια

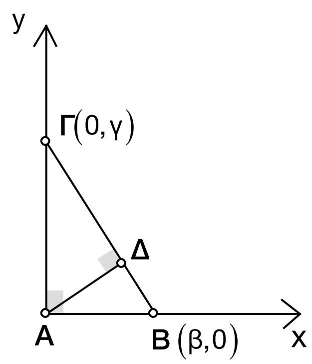


Τα τρίγωνα ΑΒΔ και ΑΒΓ είναι όμοια γιατί έχουν $Α=Δ=90^\circ$ και $ΒΑΔ=\hat{Γ}=90^\circ-Β$. Άρα $\frac{ΑΒ}{ΒΓ}=\frac{ΑΔ}{ΑΒ}\Leftrightarrow ΑΒ^2=ΑΔ\cdot ΒΓ$.

Διανύσματα

$$\vec{ΒΓ}\cdot\vec{ΒΔ}=\vec{ΒΓ}\cdot προβ_{\vec{ΒΓ}}\vec{ΒΑ}=\vec{ΒΓ}\cdot\vec{ΒΑ}=-\left(\vec{ΑΓ}-\vec{ΑΒ}\right)\vec{ΑΒ}=-\cancel{\vec{ΑΓ}\cdot\vec{ΑΒ}}^{\,0}+\vec{ΑΒ}^2=\vec{ΑΒ}^2$$

Συντεταγμένες



Εστω ορθοκανονικό σύστημα αξόνων και έστω ότι η αρχή Ο των αξόνων ταυτίζεται με τη κορυφή Α, η πλευρά ΑΒ βρίσκεται στον άξονα x΄x και η πλευρά ΑΓ στον άξονα y΄y.
Αν τα σημεία Β και Γ έχουν συντεταγμένες $(β,0)$ και $(0,γ)$ αντίστοιχα, τότε η ευθεία ΒΓ έχει συντελεστή διεύθυνσης $λ_{ΒΓ}=\frac{γ-0}{0-β}=-\frac{γ}{β}$, οπότε $ΑΔ\perp ΒΓ\Leftrightarrow λ_{ΑΔ}\cdot λ_{ΒΓ}=-1\Leftrightarrow λ_{ΑΔ}=\frac{β}{γ}$

Η ευθεία ΑΔ έχει εξίσωση $y=\frac{β}{γ}x$ και η ευθεία ΒΓ έχει εξίσωση:

$$y-γ=-\frac{γ}{β}(x-0)\Leftrightarrow y=-\frac{γ}{β}x+γ$$

Για το σημείο Δ θα λύσουμε το σύστημα των ΑΔ,ΒΓ. Είναι:

$$\begin{cases} y=-\frac{γ}{β}x+γ \\ y=\frac{β}{γ}x \end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases} \frac{β}{γ}x=-\frac{γ}{β}x+γ \\ y=\frac{β}{γ}x \end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases} β^2x=-γ^2x+βγ^2 \\ y=\frac{β}{γ}x \end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases} β^2x+γ^2x=βγ^2 \\ y=\frac{β}{γ}x \end{cases}\Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} \left(β^2+γ^2\right)x=βγ^2 \\ y=\frac{β}{γ}x \end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases} x=\frac{βγ^2}{β^2+γ^2} \\ y=\frac{β^2γ}{β^2+γ^2} \end{cases}$$

Άρα $Δ\left(\frac{βγ^2}{β^2+γ^2},\frac{β^2γ}{β^2+γ^2}\right)$.

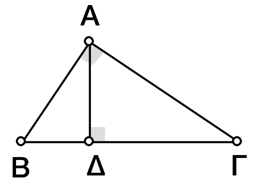
Είναι $(ΒΓ)=\sqrt{β^2+γ^2}$, $(ΑΒ)=β$ και

$$(ΒΔ)=\sqrt{\left(\frac{βγ^2}{β^2+γ^2}-β\right)^2+\left(\frac{β^2γ}{β^2+γ^2}\right)^2}=\sqrt{\frac{β^6}{\left(β^2+γ^2\right)^2}+\frac{β^4γ^2}{\left(β^2+γ^2\right)^2}}=\sqrt{\frac{β^4\cancel{\left(β^2+γ^2\right)}}{\left(β^2+γ^2\right)^{\cancel{2}}}}=\frac{β^2}{\sqrt{β^2+γ^2}}.$$

$$(\mathrm{B\Gamma})(\mathrm{B\Delta})=\sqrt{\beta^2+\gamma^2}\cdot\frac{\beta^2}{\sqrt{\beta^2+\gamma^2}}=\beta^2=(\mathrm{AB})^2$$

9. Να αποδείξετε ότι σε κάθε ορθογώνιο το άθροισμα των τετραγώνων των δύο καθέτων πλευρών ισούται με το τετράγωνο της υποτείνουσας και αντιστρόφως.

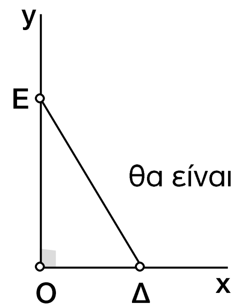
Λύση



Ευκλείδεια

Είναι $\mathrm{AB}^2=\mathrm{B\Gamma}\cdot\mathrm{B\Delta}$ και $\mathrm{A\Gamma}^2=\mathrm{B\Gamma}\cdot\mathrm{\Delta\Gamma}$, οπότε με πρόσθεση κατά μέλη έχουμε: $\mathrm{AB}^2+\mathrm{A\Gamma}^2\mathrm{B\Gamma}\cdot\mathrm{B\Delta}+\mathrm{B\Gamma}\cdot\mathrm{\Delta\Gamma}=\mathrm{B\Gamma}(\mathrm{B\Delta}+\mathrm{\Delta\Gamma})=\mathrm{B\Gamma}\cdot\mathrm{B\Gamma}=\mathrm{B\Gamma}^2$

Αντιστρόφως



Εστω ότι $\mathrm{AB}^2+\mathrm{A\Gamma}^2=\mathrm{B\Gamma}^2$, θα αποδείξουμε ότι $\mathrm{A}=90^\circ$.
Εστω ορθή γωνία xOy. Πάνω στην ΟΧ θεωρούμε σημείο Δ τέτοιο, ώστε $\mathrm{O\Delta}=\mathrm{AB}$ και πάνω στην O y σημείο Ε, τέτοιο, ώστε $\mathrm{OE}=\mathrm{A\Gamma}$.
Είναι $\mathrm{O\Delta}^2+\mathrm{OE}^2=\mathrm{\Delta E}^2\Leftrightarrow\mathrm{AB}^2+\mathrm{A\Gamma}^2=\mathrm{\Delta E}^2\Leftrightarrow\mathrm{B\Gamma}^2=\mathrm{\Delta E}^2\Leftrightarrow\mathrm{B\Gamma}=\mathrm{\Delta E}$.
Τα τρίγωνα ΑΒΓ και ΟΔΕ έχουν τις πλευρές τους ίσες μία προς μία, οπότε θα είναι ίσα, άρα θα έχουν και τις γωνίες Α και xOy ίσες. Δηλαδή $\mathrm{A}=xOy=90^\circ$.

Διανύσματα

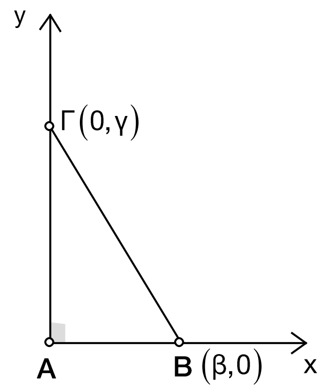
$$\left|\overrightarrow{\mathrm{B\Gamma}}\right|^2=\left(\overrightarrow{\mathrm{A\Gamma}}-\overrightarrow{\mathrm{AB}}\right)^2=\overrightarrow{\mathrm{A\Gamma}}^2-2\cancel{\overrightarrow{\mathrm{A\Gamma}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AB}}}^{0}+\overrightarrow{\mathrm{AB}}^2=\left|\overrightarrow{\mathrm{A\Gamma}}\right|^2+\left|\overrightarrow{\mathrm{AB}}\right|^2$$

Αντιστρόφως

$$\left|\overrightarrow{\mathrm{B\Gamma}}\right|^2=\left|\overrightarrow{\mathrm{A\Gamma}}\right|^2+\left|\overrightarrow{\mathrm{AB}}\right|^2\Leftrightarrow\left(\overrightarrow{\mathrm{A\Gamma}}-\overrightarrow{\mathrm{AB}}\right)^2=\overrightarrow{\mathrm{A\Gamma}}^2+\overrightarrow{\mathrm{AB}}^2\Leftrightarrow\cancel{\overrightarrow{\mathrm{A\Gamma}}^2}-2\overrightarrow{\mathrm{A\Gamma}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AB}}+\cancel{\overrightarrow{\mathrm{AB}}^2}=\cancel{\overrightarrow{\mathrm{A\Gamma}}^2}+\cancel{\overrightarrow{\mathrm{AB}}^2}\Leftrightarrow$$

$$2\overrightarrow{\mathrm{A\Gamma}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AB}}=0\Leftrightarrow\overrightarrow{\mathrm{A\Gamma}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AB}}=0\Leftrightarrow\overrightarrow{\mathrm{A\Gamma}}\perp\overrightarrow{\mathrm{AB}}$$, άρα $\mathrm{A}=90^\circ$.

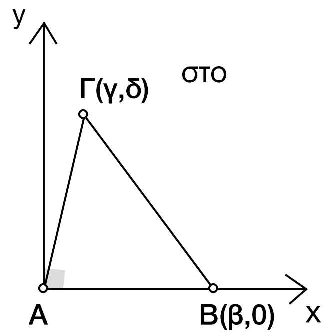
Συντεταγμένες



Εστω ορθοκανονικό σύστημα αξόνων και έστω ότι η αρχή Ο των αξόνων ταυτίζεται με τη κορυφή Α, η πλευρά ΑΒ βρίσκεται στον άξονα x΄x και η πλευρά ΑΓ στον άξονα y΄y.
Αν τα σημεία Β και Γ έχουν συντεταγμένες $(\beta,0)$ και $(0,\gamma)$ αντίστοιχα, τότε:
$(\mathrm{AB})=\beta,\ (\mathrm{A\Gamma})=\gamma$ και

$$(\mathrm{B\Gamma})^2=\left(\sqrt{(\beta-0)^2+(0-\gamma)^2}\right)^2=\beta^2+\gamma^2=(\mathrm{AB})^2+(\mathrm{A\Gamma})^2$$

Αντιστρόφως



Εστω ότι το τρίγωνο ΑΒΓ στο οποίο ισχύει η σχέση $\mathrm{AB}^2+\mathrm{A\Gamma}^2=\mathrm{B\Gamma}^2$, δεν είναι ορθογώνιο στο Α. Θεωρούμε ορθοκανονικό σύστημα αξόνων στο οποίο η κορυφή Α ταυτίζεται με την αρχή των αξόνων και η πλευρά ΑΒ βρίσκεται στον άξονα x΄x. Έστω $\mathrm{B}(\beta,0)$ και $\Gamma(\gamma,\delta)$ με $\gamma,\delta\neq0$. Είναι

$$\mathrm{AB}^2+\mathrm{A\Gamma}^2=\mathrm{B\Gamma}^2\Leftrightarrow\beta^2+\left(\sqrt{\gamma^2+\delta^2}\right)^2=\left(\sqrt{(\gamma-\delta)^2+\beta^2}\right)^2\Leftrightarrow$$

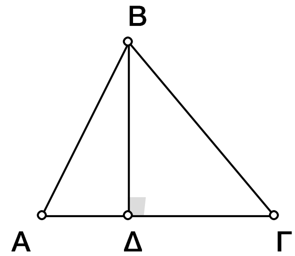
$$\beta^2+\gamma^2+\delta^2=\gamma^2-2\gamma\delta+\delta^2+\beta^2\Leftrightarrow2\gamma\delta=0\Leftrightarrow$$

$\gamma=0$ ή $\delta=0$ που είναι αδύνατο. Άρα $A=90^\circ$.

10. Εστω ΒΔ το ύψος τριγώνου ΑΒΓ. Να αποδείξετε ότι: Αν $A<90^\circ$, τότε $B\Gamma^2=AB^2+A\Gamma^2-2A\Gamma\cdot A\Delta$ (θεώρημα οξείας γωνίας).

Λύση

Ευκλείδεια



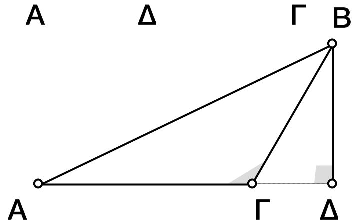
Από το πυθαγόρειο θεώρημα στο ΑΒΔ τρίγωνο, έχουμε:

$$B\Gamma^2=\Delta\Gamma^2+B\Delta^2 \quad (1)$$

Από το πυθαγόρειο θεώρημα στο ΔΒΓ τρίγωνο, έχουμε:

$$B\Delta^2=BA^2-A\Delta^2 \quad (2)$$

Αν $\hat{\Gamma}<90^\circ$, τότε $\Delta\Gamma=A\Gamma-A\Delta$, ενώ αν $\hat{\Gamma}>90^\circ$, τότε $\Delta\Gamma=A\Delta-A\Gamma$, σε κάθε περίπτωση είναι: $\Delta\Gamma^2=A\Delta^2-2A\Delta\cdot A\Gamma+A\Gamma^2$ (3)



Η σχέση (1) λόγω των (2),(3), γίνεται:

$B\Gamma^2=A\Delta^2-2A\Delta\cdot A\Gamma+A\Gamma^2+BA^2-A\Delta^2 \Leftrightarrow$

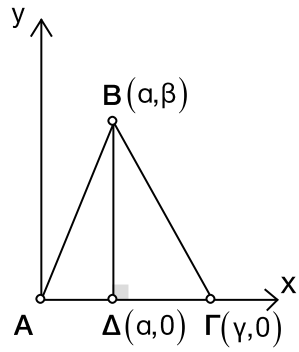
$B\Gamma^2=AB^2+A\Gamma^2-2A\Delta\cdot A\Gamma$

Διανύσματα

$\overrightarrow{B\Gamma}^2=\left(\overrightarrow{A\Gamma}-\overrightarrow{AB}\right)^2=\overrightarrow{A\Gamma}^2-2\overrightarrow{A\Gamma}\cdot\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AB}^2=\overrightarrow{A\Gamma}^2-2\overrightarrow{A\Gamma}\cdot\text{προβ}_{\overrightarrow{A\Gamma}}\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AB}^2 \Leftrightarrow$

$\overrightarrow{B\Gamma}^2=\overrightarrow{AB}^2+\overrightarrow{A\Gamma}^2-2\overrightarrow{A\Gamma}\cdot\overrightarrow{A\Delta}$

Συντεταγμένες



Εστω ορθοκανονικό σύστημα αξόνων και έστω ότι η αρχή Ο των αξόνων ταυτίζεται με τη κορυφή Α, η πλευρά ΑΓ βρίσκεται στον άξονα x΄x. Αν $\Gamma(\gamma,0)$ και $B(\alpha,\beta)$, τότε το σημείο Δ έχει συντεταγμένες $(\alpha,0)$.

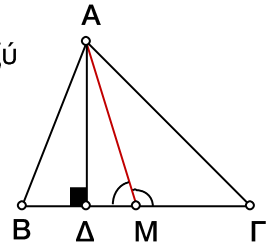
Είναι $(B\Gamma)=\sqrt{(\gamma-\alpha)^2+\beta^2}$, $(AB)=\sqrt{\alpha^2+\beta^2}$, $(A\Gamma)=\gamma$ και $(A\Delta)=\alpha$,

$$AB^2+A\Gamma^2-2A\Gamma\cdot A\Delta=\left(\sqrt{\alpha^2+\beta^2}\right)^2+\gamma^2-2\gamma\alpha=\alpha^2+\beta^2+\gamma^2-2\gamma\alpha=(\alpha-\gamma)^2+\beta^2=(B\Gamma)^2$$

11. Εστω ΑΜ διάμεσος τριγώνου ΑΒΓ. Να αποδείξετε ότι: $\beta^2+\gamma^2=2\mu_\alpha^2+\dfrac{\alpha^2}{2}$ (1° θεώρημα διαμέσων).

Λύση

Ευκλείδεια



Εστω ΑΔ το ύψος του τριγώνου. Αν $A\Gamma>AB$, τότε το Δ βρίσκεται μεταξύ των σημείων Μ,Β, οπότε $M_1<90^\circ$ και $M_2>90^\circ$.

Από το θεώρημα οξείας γωνίας στο τρίγωνο ΑΜΒ, έχουμε:

$$AB^2=AM^2+MB^2-2MB\cdot M\Delta \quad (1)$$

Από το θεώρημα αμβλείας γωνίας στο τρίγωνο ΑΜΓ, έχουμε:

$$A\Gamma^2=AM^2+M\Gamma^2+2M\Gamma\cdot M\Delta \quad (2)$$

Με πρόσθεση κατά μέλη των (1),(2), προκύπτει:

$$AB^2+A\Gamma^2=2AM^2+2M\Gamma^2 \Leftrightarrow \gamma^2+\beta^2=2\mu_\alpha^2+2\left(\frac{\alpha}{2}\right)^2=2\mu_\alpha^2+\frac{\alpha^2}{2}$$

Διανύσματα

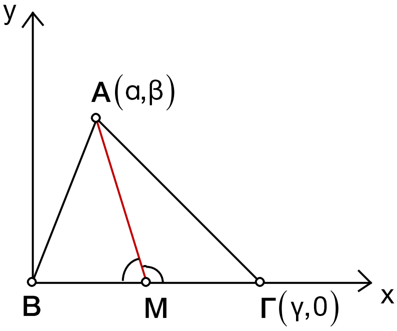
$$\vec{\beta}^2+\vec{\gamma}^2=\overrightarrow{A\Gamma}^2+\overrightarrow{AB}^2=\left(\overrightarrow{AM}+\overrightarrow{M\Gamma}\right)^2+\left(\overrightarrow{AM}+\overrightarrow{MB}\right)^2 \Leftrightarrow$$

$$\vec{\beta}^2+\vec{\gamma}^2=\overrightarrow{AM}^2+2\overrightarrow{AM}\cdot\overrightarrow{M\Gamma}+\overrightarrow{M\Gamma}^2+\overrightarrow{AM}^2+2\overrightarrow{AM}\cdot\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MB}^2 \Leftrightarrow$$

$$\vec{\beta}^2+\vec{\gamma}^2=2\overrightarrow{AM}^2+2\overrightarrow{AM}\cdot\left(\overrightarrow{M\Gamma}+\overrightarrow{MB}\right)+\overrightarrow{M\Gamma}^2+\overrightarrow{MB}^2 \Leftrightarrow$$

$$\vec{\beta}^2+\vec{\gamma}^2=2\vec{\mu}_\alpha^2+2\overrightarrow{AM}\cdot\cancel{\left(\overrightarrow{M\Gamma}+\overrightarrow{MB}\right)}^{0}+\left(\frac{\vec{\alpha}}{2}\right)^2+\left(\frac{\vec{\alpha}}{2}\right)^2=2\vec{\mu}_\alpha^2+2\frac{\vec{\alpha}^2}{4}=2\vec{\mu}_\alpha^2+\frac{\vec{\alpha}^2}{2}$$

Συντεταγμένες



Εστω ορθοκανονικό σύστημα αξόνων και έστω ότι η αρχή O των αξόνων ταυτίζεται με τη κορυφή B, η πλευρά BΓ βρίσκεται στον άξονα x΄x. Αν $\Gamma(\gamma,0)$ και $A(\alpha,\beta)$, τότε το μέσο M του BΓ έχει συντεταγμένες $\left(\frac{\gamma}{2},0\right)$. Είναι

$$(A\Gamma)^2+(AB)^2=\left(\sqrt{(\alpha-0)^2+(\beta-0)^2}\right)^2+\left(\sqrt{(\alpha-\gamma)^2+(\beta-0)^2}\right)^2 \Leftrightarrow$$

$$(A\Gamma)^2+(AB)^2=\alpha^2+\beta^2+\alpha^2-2\alpha\gamma+\gamma^2+\beta^2 \Leftrightarrow$$

$$(A\Gamma)^2+(AB)^2=2\alpha^2+2\beta^2+\gamma^2-2\alpha\gamma \quad (1)$$

$$2(AM)^2+\frac{1}{2}(B\Gamma)^2=2\left(\sqrt{\left(\alpha-\frac{\gamma}{2}\right)^2+(\beta-0)^2}\right)^2+\frac{1}{2}\gamma^2=2\left(\alpha^2-\alpha\gamma+\frac{\gamma^2}{4}\right)+2\beta^2+\frac{\gamma^2}{2} \Leftrightarrow$$

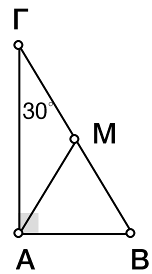
$$2(AM)^2+\frac{1}{2}(B\Gamma)^2=2\alpha^2-2\alpha\gamma+\gamma^2+2\beta^2 \quad (2)$$

Από τις σχέσεις (1),(2) προκύπτει ότι $(A\Gamma)^2+(AB)^2=2(AM)^2+\frac{1}{2}(B\Gamma)^2$.

12. Να αποδείξετε ότι αν σε ένα ορθογώνιο τρίγωνο μια γωνία του είναι ίση με 30°, τότε η απέναντι κάθετη πλευρά ισούται με το μισό της υποτείνουσας.

Λύση

Ευκλείδεια



Εστω AM η διάμεσος που αντιστοιχεί στην υποτείνουσα BΓ του τριγώνου. Επειδή $\hat{\Gamma}=30^\circ$, είναι $B=60^\circ$ και επειδή το τρίγωνο AMB είναι ισοσκελές, αφού $AM=MB=\frac{B\Gamma}{2}$, θα είναι ισόπλευρο, οπότε $AB=\frac{B\Gamma}{2}$

Διανύσματα

$$\overrightarrow{\Gamma B}\cdot\overrightarrow{\Gamma A}=\left|\overrightarrow{\Gamma B}\right|\left|\overrightarrow{\Gamma A}\right|\sigma\upsilon\nu 30^\circ \Leftrightarrow -\left(\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{A\Gamma}\right)\overrightarrow{A\Gamma}=\left|\overrightarrow{\Gamma B}\right|\left|\overrightarrow{A\Gamma}\right|\frac{\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow -2\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{A\Gamma}+2\overrightarrow{A\Gamma}^2=\sqrt{3}\left|\overrightarrow{\Gamma B}\right|\left|\overrightarrow{A\Gamma}\right| \Leftrightarrow$$

$$2\left|\overrightarrow{A\Gamma}\right|^2=\sqrt{3}\left|\overrightarrow{\Gamma B}\right|\left|\overrightarrow{A\Gamma}\right| \Leftrightarrow \left(2\left|\overrightarrow{A\Gamma}\right|^2\right)^2=\left(\sqrt{3}\left|\overrightarrow{\Gamma B}\right|\left|\overrightarrow{A\Gamma}\right|\right)^2 \Leftrightarrow 4\left|\overrightarrow{A\Gamma}\right|^4=3\left|\overrightarrow{\Gamma B}\right|^2\left|\overrightarrow{A\Gamma}\right|^2 \Leftrightarrow$$

$$4\left|\overrightarrow{A\Gamma}\right|^4-3\left|\overrightarrow{\Gamma B}\right|^2\left|\overrightarrow{A\Gamma}\right|^2=0 \Leftrightarrow$$

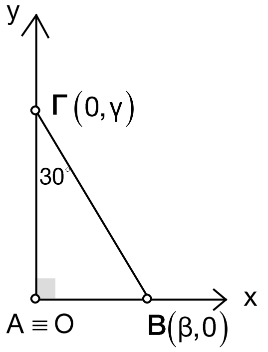
$\left|\overrightarrow{A\Gamma}\right|^2\left(4\left|\overrightarrow{A\Gamma}\right|^2-3\left|\overrightarrow{\Gamma B}\right|^2\right)=0 \Leftrightarrow \left|\overrightarrow{A\Gamma}\right|=0$ που είναι αδύνατο ή

$$4\left|\overrightarrow{A\Gamma}\right|^2-3\left|\overrightarrow{\Gamma B}\right|^2=0 \Leftrightarrow 4\left(\left|\overrightarrow{B\Gamma}\right|^2-\left|\overrightarrow{AB}\right|^2\right)-3\left|\overrightarrow{B\Gamma}\right|^2=0 \Leftrightarrow 4\left|\overrightarrow{B\Gamma}\right|^2-4\left|\overrightarrow{AB}\right|^2-3\left|\overrightarrow{B\Gamma}\right|^2=0 \Leftrightarrow$$

$$\left|\overrightarrow{B\Gamma}\right|^2=4\left|\overrightarrow{AB}\right|^2 \Leftrightarrow \left|\overrightarrow{B\Gamma}\right|=2\left|\overrightarrow{AB}\right| \Leftrightarrow \left|\overrightarrow{AB}\right|=\frac{\left|\overrightarrow{B\Gamma}\right|}{2}$$

Συντεταγμένες

Εστω ορθοκανονικό σύστημα αξόνων και έστω ότι η αρχή Ο των αξόνων ταυτίζεται με τη κορυφή Α και οι πλευρές ΑΒ και ΑΓ βρίσκεται επί των ημιαξόνων Οx, Οy αντίστοιχα. Έστω ότι τα σημεία Β και Γ έχουν συντεταγμένες $(\beta,0)$ και $(0,\gamma)$ αντίστοιχα.



Επειδή $\hat{\Gamma}=30^\circ$, είναι $B=60^\circ$, άρα $\Gamma Bx=120^\circ$.

Όμως $\varepsilon\varphi\Gamma Bx=\lambda_{B\Gamma} \Leftrightarrow \varepsilon\varphi 120^\circ=-\frac{\gamma}{\beta} \Leftrightarrow -\varepsilon\varphi 60^\circ=-\frac{\gamma}{\beta} \Leftrightarrow \sqrt{3}=\frac{\gamma}{\beta} \Leftrightarrow \gamma=\sqrt{3}\beta$.

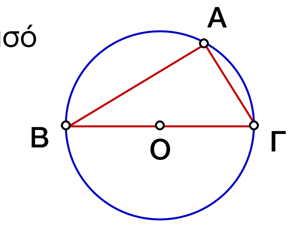
Είναι $(B\Gamma)=\sqrt{\beta^2+\gamma^2}=\sqrt{\beta^2+\left(\beta\sqrt{3}\right)^2}=\sqrt{\beta^2+3\beta^2}=\sqrt{4\beta^2}=2\beta=2(AB)$

13. Να αποδείξετε ότι κάθε γωνία εγγεγραμμένη σε ημικύκλιο είναι ορθή.

Λύση

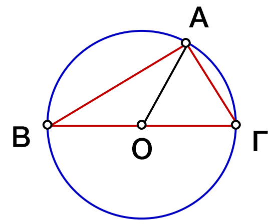
Ευκλείδεια

Επειδή το ημικύκλιο είναι 180° και κάθε εγγεγραμμένη είναι ίση με το μισό του τόξου στο οποίο αντιστοιχεί, ισχύει ότι: $BA\Gamma=\frac{180^\circ}{2}=90^\circ$.



Διανύσματα

Εστω ότι ο κύκλος έχει ακτίνα ρ.



Είναι $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{A\Gamma}=\left(\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}\right)\left(\overrightarrow{O\Gamma}-\overrightarrow{OA}\right)=\overrightarrow{OB}\cdot\overrightarrow{O\Gamma}-\overrightarrow{OB}\cdot\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{O\Gamma}+\overrightarrow{OA}^2 \Leftrightarrow$

$$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{A\Gamma}=\left|\overrightarrow{OB}\right|\cdot\left|\overrightarrow{O\Gamma}\right|\sigma\upsilon\nu 180^\circ-\left|\overrightarrow{OB}\right|\cdot\left|\overrightarrow{OA}\right|\sigma\upsilon\nu AOB-\left|\overrightarrow{OA}\right|\cdot\left|\overrightarrow{O\Gamma}\right|\sigma\upsilon\nu AO\Gamma+\left|\overrightarrow{OA}\right|^2 \Leftrightarrow$$

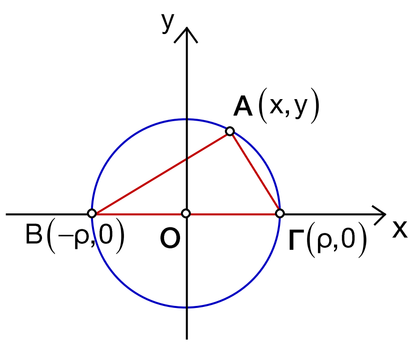
$$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{A\Gamma}=\rho\cdot\rho(-1)-\rho\cdot\rho\sigma\upsilon\nu AOB-\rho\cdot\rho\sigma\upsilon\nu\left(180^\circ-AOB\right)+\rho^2 \Leftrightarrow$$

$$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{A\Gamma}=-\rho^2-\rho^2\sigma\upsilon\nu AOB+\rho^2\sigma\upsilon\nu AOB+\rho^2=0 \Leftrightarrow \overrightarrow{AB}\perp\overrightarrow{A\Gamma}$$

Συντεταγμένες

Εστω ότι ο κύκλος έχει ακτίνα ρ.

Εστω ορθοκανονικό σύστημα αξόνων όπου η αρχή Ο είναι το κέντρο του κύκλου. Έστω διάμετρος ΒΓ με $B(-\rho,0)$ και $\Gamma(\rho,0)$. Έστω σημείο $A(x,y)$ του κύκλου. Τότε:



$(OA)=\rho \Leftrightarrow \sqrt{x^2+y^2}=\rho \Leftrightarrow x^2+y^2=\rho^2 \Leftrightarrow y^2=\rho^2-x^2$ (1)

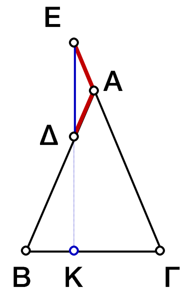
Είναι $\lambda_{AB}=\frac{y}{x+\rho}$, $\lambda_{A\Gamma}=\frac{y}{x-\rho}$ και

$$\lambda_{AB}\lambda_{A\Gamma}=\frac{y}{x+\rho}\cdot\frac{y}{x-\rho}=\frac{y^2}{x^2-\rho^2}\overset{(1)}{=}\frac{y^2}{-y^2}=-1\Leftrightarrow AB\perp A\Gamma\Leftrightarrow BA\Gamma=90^\circ.$$

14. Εστω Δ τυχαίο σημείο της πλευράς ΑΒ ισοσκελούς τριγώνου ΑΒΓ $(AB=A\Gamma)$.Στην προέκταση της ΓΑ προς το Α θεωρούμε σημείο Ε τέτοιο, ώστε $AE=A\Delta$.Να αποδείξετε ότι $\Delta E\perp B\Gamma$.

Λύση

Ευκλείδεια



Επειδή $AE=A\Delta$, το τρίγωνο ΑΔΕ είναι ισοσκελές, άρα $E=A\Delta E$.
Η γωνία Α του τριγώνου ΑΒΓ είναι εξωτερική στο τρίγωνο ΑΔΕ, άρα

$$A=E+A\Delta E=2A\Delta E\Leftrightarrow A\Delta E=\frac{A}{2}=\frac{180^\circ-B-\hat{\Gamma}}{2}=\frac{180^\circ-2B}{2}=90^\circ-B\Leftrightarrow$$

$A\Delta E+B=90^\circ$.

Όμως $A\Delta E=B\Delta K$, ως κατακορυφήν, άρα $B\Delta K+B=90^\circ$,
οπότε στο τρίγωνο ΔΒΚ είναι και $K=90^\circ$.

Διανύσματα

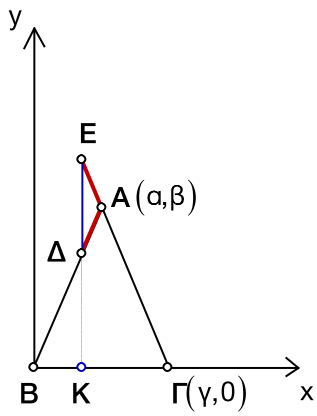
$$\overrightarrow{\Delta E}\cdot\overrightarrow{B\Gamma}=\left(\overrightarrow{AE}-\overrightarrow{A\Delta}\right)\left(\overrightarrow{A\Gamma}-\overrightarrow{AB}\right)=\overrightarrow{AE}\cdot\overrightarrow{A\Gamma}-\overrightarrow{AE}\cdot\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{A\Delta}\cdot\overrightarrow{A\Gamma}+\overrightarrow{A\Delta}\cdot\overrightarrow{AB}\Leftrightarrow$$

$$\overrightarrow{\Delta E}\cdot\overrightarrow{B\Gamma}=\left|\overrightarrow{AE}\right|\cdot\left|\overrightarrow{A\Gamma}\right|\sigma\upsilon\nu180^\circ-\left|\overrightarrow{AE}\right|\cdot\left|\overrightarrow{AB}\right|\sigma\upsilon\nu\Delta AE-\left|\overrightarrow{A\Delta}\right|\cdot\left|\overrightarrow{A\Gamma}\right|\sigma\upsilon\nu A+\left|\overrightarrow{A\Delta}\right|\cdot\left|\overrightarrow{AB}\right|\sigma\upsilon\nu0^\circ$$

Όμως $\left|\overrightarrow{AE}\right|=\left|\overrightarrow{A\Delta}\right|=\alpha$ και $\left|\overrightarrow{AB}\right|=\left|\overrightarrow{A\Gamma}\right|=\beta$, άρα

$$\overrightarrow{\Delta E}\cdot\overrightarrow{B\Gamma}=-\cancel{\alpha\beta}-\alpha\beta\sigma\upsilon\nu\left(180^\circ-\widehat{A}\right)-\alpha\beta\sigma\upsilon\nu\widehat{A}+\cancel{\alpha\beta}=\alpha\beta\sigma\upsilon\nu\widehat{A}-\alpha\beta\sigma\upsilon\nu\widehat{A}=0\Leftrightarrow\ \overrightarrow{\Delta E}\perp\overrightarrow{B\Gamma}$$

Συντεταγμένες



Εστω ορθοκανονικό σύστημα αξόνων και έστω ότι η αρχή Ο των αξόνων ταυτίζεται με τη κορυφή Β και η πλευρά ΒΓ βρίσκεται στον άξονα x΄x.
Εστω ότι η κορυφή Α έχει συντεταγμένες (α,β) και η κορυφή $\Gamma(\gamma,0)$.
Επειδή το τρίγωνο είναι ισοσκελές, έχουμε:

$$(AB)=(A\Gamma)\Leftrightarrow\sqrt{\alpha^2+\beta^2}=\sqrt{(\alpha-\gamma)^2+\beta^2}\Leftrightarrow$$

$$\alpha^2+\beta^2=\alpha^2-2\alpha\gamma+\gamma^2+\beta^2\Leftrightarrow$$

$\gamma^2-2\alpha\gamma=0\Leftrightarrow\gamma(\gamma-2\alpha)=0\Leftrightarrow\gamma=0$ που είναι αδύνατο ή $\gamma=2\alpha$. Τότε $\Gamma(2\alpha,0)$.

Η ευθεία ΑΒ έχει συντελεστή διεύθυνσης $\lambda_{AB}=\frac{\beta}{\alpha}$ και εξίσωση $y=\frac{\beta}{\alpha}x$.

Εστω ότι το σημείο Δ έχει συντεταγμένες (x_1,y_1), τότε: $y_1=\frac{\beta}{\alpha}x_1$ και $\Delta\left(x_1,\frac{\beta}{\alpha}x_1\right)$.

Η ευθεία ΑΓ έχει εξίσωση: $y-0=\frac{\beta-0}{\alpha-2\alpha}(x-2\alpha)\Leftrightarrow y=-\frac{\beta}{\alpha}x+2\beta$.

Εστω ότι το Ε έχει συντεταγμένες (x_2,y_2), τότε: $y_2=-\frac{\beta}{\alpha}x_2+2\beta$.

Επειδή $x_E<x_A$ και $x_\Delta<x_A$, είναι $x_1,x_2\in(0,\alpha)$.

$$(\text{ΑΔ})=(\text{ΑΕ})\Leftrightarrow\sqrt{(x_1-\alpha)^2+\left(\frac{\beta}{\alpha}x_1-\beta\right)^2}=\sqrt{(x_2-\alpha)^2+\left(-\frac{\beta}{\alpha}x_2+2\beta-\beta\right)^2}\Leftrightarrow$$

$$(x_1-\alpha)^2+\frac{\beta^2}{\alpha^2}(x_1-\alpha)^2=(x_2-\alpha)^2+\left(-\frac{\beta}{\alpha}x_2+\beta\right)^2\Leftrightarrow$$

$$\alpha^2(x_1-\alpha)^2+\beta^2(x_1-\alpha)^2=\alpha^2(x_2-\alpha)^2+\beta^2(x_2-\alpha)^2\Leftrightarrow$$

$$(\alpha^2+\beta^2)(x_1-\alpha)^2=(\alpha^2+\beta^2)(x_2-\alpha)^2\Leftrightarrow$$

$$(x_1-\alpha)^2=(x_2-\alpha)^2\Leftrightarrow$$

$$x_1-\alpha=x_2-\alpha\Leftrightarrow x_1=x_2 \quad \text{ή}$$

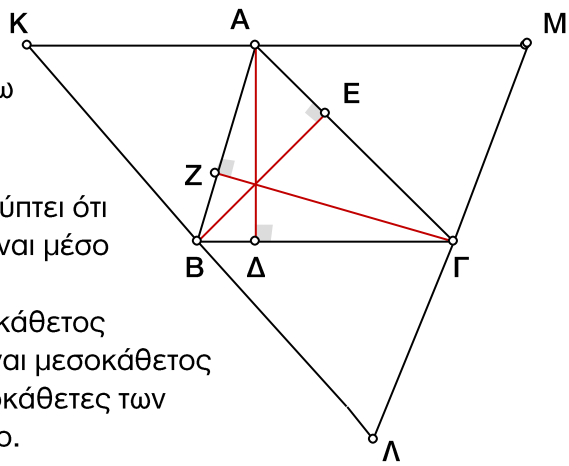
$$x_1-\alpha=-x_2+\alpha\Leftrightarrow x_1+x_2=2\alpha \text{ που είναι αδύνατο αφού } x_1,x_2\in(0,\alpha)$$

Επειδή $x_1=x_2$, η ευθεία ΔΕ έχει εξίσωση $x=x_1$ και είναι κάθετη στον άξονα x΄x, άρα και στη ΒΓ.

15. Να αποδείξετε ότι σε κάθε τρίγωνο τα ύψη του διέρχονται από το ίδιο σημείο.

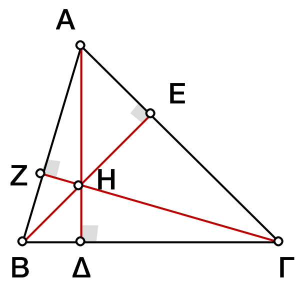
Λύση

Ευκλείδεια



Εστω ΑΔ,ΒΕ,ΓΖ τα ύψη τριγώνου ΑΒΓ.
Θεωρούμε ευθείες κάθετες στα ύψη που διέρχονται από τις κορυφές του τριγώνου και έστω Κ,Λ,Μ τα σημεία τομής τους. Τότε $\text{ΚΜ}\parallel\text{ΒΓ},\text{ΚΛ}\parallel\text{ΑΓ}$ και $\text{ΛΜ}\parallel\text{ΑΒ}$.
Από τα παραλληλόγραμμα ΚΒΓΑ και ΑΒΓΜ, προκύπτει ότι $\text{ΚΑ}=\text{ΒΓ}$ και $\text{ΑΜ}=\text{ΒΓ}$, άρα $\text{ΚΑ}=\text{ΑΜ}$, οπότε το Α είναι μέσο του ΚΜ και η ΑΔ είναι μεσοκάθετος της ΚΜ.
Όμοια το Β είναι μέσο του ΚΛ και η ΒΕ είναι μεσοκάθετος του ΚΛ. Όμοια το Γ είναι μέσο του ΛΜ και η ΓΖ είναι μεσοκάθετος του ΛΜ. Στο τρίγωνο ΚΛΜ οι ΑΔ,ΒΕ,ΓΖ είναι μεσοκάθετες των πλευρών του, οπότε διέρχονται από το ίδιο σημείο.

Διανύσματα



Εστω ότι τα ύψη ΑΔ και ΒΕ τέμνονται στο Η. Θα δείξουμε ότι και το ΓΖ είναι ύψος του τριγώνου.

Είναι $\overrightarrow{\text{ΗΑ}}\perp\overrightarrow{\text{ΒΓ}}\Leftrightarrow\overrightarrow{\text{ΗΑ}}\cdot\overrightarrow{\text{ΒΓ}}=0\Leftrightarrow\overrightarrow{\text{ΗΑ}}\cdot\left(\overrightarrow{\text{ΗΓ}}-\overrightarrow{\text{ΗΒ}}\right)=0\Leftrightarrow$

$\overrightarrow{\text{ΗΑ}}\cdot\overrightarrow{\text{ΗΓ}}-\overrightarrow{\text{ΗΑ}}\cdot\overrightarrow{\text{ΗΒ}}=0\Leftrightarrow\overrightarrow{\text{ΗΑ}}\cdot\overrightarrow{\text{ΗΓ}}=\overrightarrow{\text{ΗΑ}}\cdot\overrightarrow{\text{ΗΒ}}\,(1)$

$\overrightarrow{\text{ΗΒ}}\perp\overrightarrow{\text{ΑΓ}}\Leftrightarrow\overrightarrow{\text{ΗΒ}}\cdot\overrightarrow{\text{ΑΓ}}=0\Leftrightarrow\overrightarrow{\text{ΗΒ}}\cdot\left(\overrightarrow{\text{ΗΓ}}-\overrightarrow{\text{ΗΑ}}\right)=0\Leftrightarrow$

$\overrightarrow{\text{ΗΒ}}\cdot\overrightarrow{\text{ΗΓ}}-\overrightarrow{\text{ΗΒ}}\cdot\overrightarrow{\text{ΗΑ}}=0\Leftrightarrow\overrightarrow{\text{ΗΒ}}\cdot\overrightarrow{\text{ΗΓ}}=\overrightarrow{\text{ΗΒ}}\cdot\overrightarrow{\text{ΗΑ}}$ (2)

Από τις σχέσεις (1),(2), προκύπτει ότι:

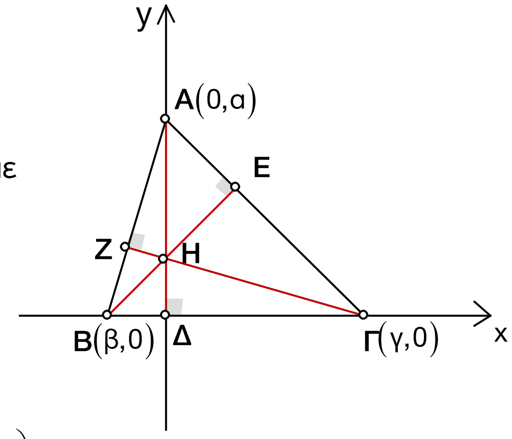
$\overrightarrow{\text{ΗΑ}}\cdot\overrightarrow{\text{ΗΓ}}=\overrightarrow{\text{ΗΒ}}\cdot\overrightarrow{\text{ΗΓ}}\Leftrightarrow\overrightarrow{\text{ΗΑ}}\cdot\overrightarrow{\text{ΗΓ}}-\overrightarrow{\text{ΗΒ}}\cdot\overrightarrow{\text{ΗΓ}}=0\Leftrightarrow\overrightarrow{\text{ΗΓ}}\left(\overrightarrow{\text{ΗΑ}}-\overrightarrow{\text{ΗΒ}}\right)=0\Leftrightarrow\overrightarrow{\text{ΗΓ}}\cdot\overrightarrow{\text{ΒΑ}}=0\Leftrightarrow\overrightarrow{\text{ΗΓ}}\perp\overrightarrow{\text{ΒΑ}}$, άρα και

$\overrightarrow{\Gamma Z} \perp \overrightarrow{BA}$

Συντεταγμένες

Εστω ορθοκανονικό σύστημα αξόνων και έστω ότι η αρχή Ο των αξόνων ταυτίζεται με το Δ, ο άξονας x΄x με τη πλευρά ΒΓ και ο άξονας y΄y με το ύψος ΑΔ.

Εστω $A(0,\alpha), B(\beta,0)$ και $\Gamma(\gamma,0)$.



Εστω ότι τα ύψη ΑΔ και ΓΖ τέμνονται στο Η. Θα αποδείξουμε ότι το Η ανήκει και στη ΒΕ.

Αρχικά θα βρούμε τις συντεταγμένες του Η. Είναι:

$\lambda_{AB} = \dfrac{0-\alpha}{\beta-0} = -\dfrac{\alpha}{\beta}$ και $\Gamma Z \perp AB \Leftrightarrow \lambda_{\Gamma Z} \cdot \lambda_{AB} = -1 \Leftrightarrow \lambda_{\Gamma Z} = \dfrac{\beta}{\alpha}$

Η ευθεία ΓΖ έχει εξίσωση: $y-0 = \dfrac{\beta}{\alpha}(x-\gamma) \Leftrightarrow y = \dfrac{\beta}{\alpha}x - \dfrac{\beta\gamma}{\alpha}$.

Για $x=0$ είναι $y = -\dfrac{\beta\gamma}{\alpha}$, άρα το Η έχει συντεταγμένες $\left(0, -\dfrac{\beta\gamma}{\alpha}\right)$.

$\lambda_{A\Gamma} = \dfrac{0-\alpha}{\gamma-0} = -\dfrac{\alpha}{\gamma}$ και $BE \perp A\Gamma \Leftrightarrow \lambda_{BE} \cdot \lambda_{A\Gamma} = -1 \Leftrightarrow \lambda_{BE} = \dfrac{\gamma}{\alpha}$. Η ΒΕ έχει εξίσωση:

$y-0 = \dfrac{\gamma}{\alpha}(x-\beta) \Leftrightarrow y = \dfrac{\gamma}{\alpha}x - \dfrac{\beta\gamma}{\alpha}$.

Επειδή $-\dfrac{\beta\gamma}{\alpha} = \dfrac{\gamma}{\alpha} \cdot 0 - \dfrac{\beta\gamma}{\alpha}$, οι συντεταγμένες του Η επαληθεύουν τη ΒΕ, άρα και η ΒΕ διέρχεται από το Η.

16. Στις προεκτάσεις των πλευρών ΒΑ,ΓΑ τριγώνου ΑΒΓ θεωρούμε τα σημεία Δ,Ε αντίστοιχα, έτσι ώστε $A\Delta = AB$ και $AE = A\Gamma$. Να αποδείξετε ότι $\Delta E =\parallel B\Gamma$.

Λύση

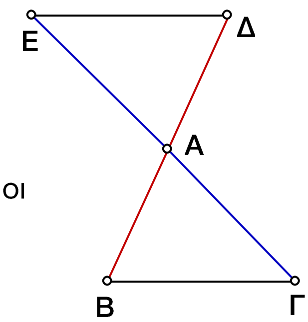
Ευκλείδεια

Τα τρίγωνα ΑΒΓ και ΑΔΕ, έχουν:

$AB = A\Delta$

$A\Gamma = AE$ και

$\widehat{BA\Gamma} = \widehat{\Delta AE}$



Άρα τα τρίγωνα είναι ίσα, οπότε και $\Delta E = B\Gamma$, $\widehat{\Delta EA} = \widehat{A\Gamma B}$ και επειδή οι γωνίες αυτές είναι και εντός εναλλάξ, είναι $\Delta E \parallel B\Gamma$

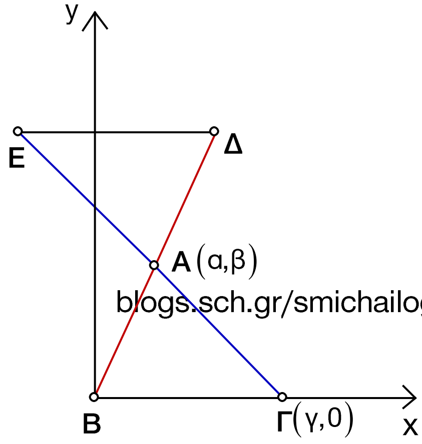
Διανύσματα

Αρκεί να αποδείξουμε ότι: $\overrightarrow{E\Delta} = \overrightarrow{B\Gamma}$.

Είναι $\overrightarrow{E\Delta} = \overrightarrow{A\Delta} - \overrightarrow{AE} = \overrightarrow{BA} - \overrightarrow{\Gamma A} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{A\Gamma} = \overrightarrow{B\Gamma}$

Συντεταγμένες

Εστω ορθοκανονικό σύστημα αξόνων, στο οποίο η αρχή Ο ταυτίζεται με την κορυφή Β του τριγώνου και η πλευρά ΒΓ βρίσκεται στον άξονα x΄x.



Εστω $A(\alpha,\beta)$ και $\Gamma(\gamma,0)$.

Επειδή $AB = A\Delta$, το Α είναι μέσο του ΒΔ, οπότε;

$x_A = \dfrac{x_B + x_\Delta}{2} \Leftrightarrow x_\Delta = 2\alpha$ και $y_A = \dfrac{y_B + y_\Delta}{2} \Leftrightarrow y_\Delta = 2\beta$,

άρα $\Delta(2\alpha, 2\beta)$.

Επειδή $A\Gamma = AE$, το Α είναι μέσο του ΓΕ, άρα:

$x_A = \dfrac{x_\Gamma + x_E}{2} \Leftrightarrow x_E = 2\alpha - \gamma$ και $y_A = \dfrac{y_\Gamma + y_E}{2} \Leftrightarrow y_E = 2\beta$,

άρα $E(2\alpha - \gamma, 2\beta)$.

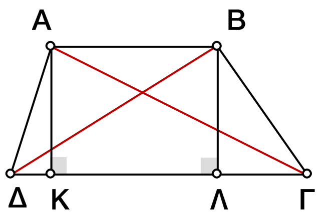
Επειδή $y_\Delta = y_E = 2\beta$, η ΔΕ είναι παράλληλη στον άξονα x΄x, άρα $\Delta E \parallel B\Gamma$.

Είναι $(\Delta E) = |2\alpha - (2\alpha - \gamma)| = \gamma = (B\Gamma)$.

17. Να αποδείξετε ότι σε κάθε τραπέζιο ΑΒΓΔ με βάσεις ΑΒ και ΓΔ ισχύει:
$A\Gamma^2 + B\Delta^2 = A\Delta^2 + B\Gamma^2 + 2AB\cdot\Gamma\Delta$.

Λύση

Ευκλείδεια



Εστω ΑΒ η μικρή βάση του τραπεζίου. Τότε $\Delta < 90^\circ$ και $\hat{\Gamma} < 90^\circ$

Από το θεώρημα οξείας γωνίας στο τρίγωνο ΑΔΓ, έχουμε:

$A\Gamma^2 = A\Delta^2 + \Delta\Gamma^2 - 2\Delta\Gamma\cdot\Delta K$ (1)

Από το θεώρημα οξείας γωνίας στο τρίγωνο ΒΔΓ, έχουμε:

$B\Delta^2 = B\Gamma^2 + \Delta\Gamma^2 - 2\Delta\Gamma\cdot\Gamma\Lambda$ (2)

Με πρόσθεση κατά μέλη των σχέσεων (1),(2), προκύπτει:

$A\Gamma^2 + B\Delta^2 = A\Delta^2 + B\Gamma^2 + 2\Delta\Gamma^2 - 2\Delta\Gamma\cdot\Delta K - 2\Delta\Gamma\cdot\Gamma\Lambda \Leftrightarrow$

$A\Gamma^2 + B\Delta^2 = A\Delta^2 + B\Gamma^2 + 2\Delta\Gamma(\Delta\Gamma - \Delta K - \Gamma\Lambda) \Leftrightarrow$

$A\Gamma^2 + B\Delta^2 = A\Delta^2 + B\Gamma^2 + 2\Delta\Gamma\cdot K\Lambda$ (3)

Επειδή $AK \perp \Delta\Gamma$ και $\Delta\Gamma \parallel AB$, θα είναι και $AK \perp AB$, άρα το τετράπλευρο ΑΚΛΒ είναι ορθογώνιο, οπότε $K\Lambda = AB$ και η σχέση (3) γίνεται: $A\Gamma^2 + B\Delta^2 = A\Delta^2 + B\Gamma^2 + 2AB\cdot\Gamma\Delta$

Διανύσματα

Θα αποδείξουμε ότι $\overrightarrow{A\Gamma}^2 + \overrightarrow{B\Delta}^2 = \overrightarrow{A\Delta}^2 + \overrightarrow{B\Gamma}^2 + 2\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{\Delta\Gamma}$

Είναι $\overrightarrow{A\Gamma}^2 + \overrightarrow{B\Delta}^2 = \left(\overrightarrow{\Delta\Gamma} - \overrightarrow{\Delta A}\right)^2 + \left(\overrightarrow{\Gamma\Delta} - \overrightarrow{\Gamma B}\right)^2 \Leftrightarrow$

$\overrightarrow{A\Gamma}^2 + \overrightarrow{B\Delta}^2 = \overrightarrow{\Delta\Gamma}^2 - 2\overrightarrow{\Delta\Gamma}\cdot\overrightarrow{\Delta A} + \overrightarrow{\Delta A}^2 + \overrightarrow{\Gamma\Delta}^2 - 2\overrightarrow{\Gamma\Delta}\cdot\overrightarrow{\Gamma B} + \overrightarrow{\Gamma B}^2 \Leftrightarrow$

$\overrightarrow{A\Gamma}^2 + \overrightarrow{B\Delta}^2 = \overrightarrow{\Delta A}^2 + \overrightarrow{\Gamma B}^2 + 2\overrightarrow{\Delta\Gamma}^2 - 2\overrightarrow{\Delta\Gamma}\cdot\overrightarrow{\Delta A} + 2\overrightarrow{\Delta\Gamma}\cdot\overrightarrow{\Gamma B} + \overrightarrow{\Gamma B}^2 \Leftrightarrow$

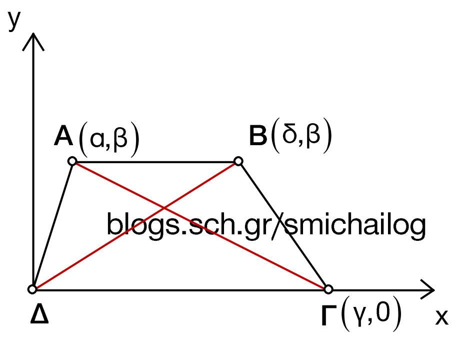
$\overrightarrow{A\Gamma}^2 + \overrightarrow{B\Delta}^2 = \overrightarrow{A\Delta}^2 + \overrightarrow{B\Gamma}^2 + 2\overrightarrow{\Delta\Gamma}\left(\overrightarrow{\Delta\Gamma} - \overrightarrow{\Delta A} + \overrightarrow{\Gamma B}\right) \Leftrightarrow$

$\overrightarrow{A\Gamma}^2 + \overrightarrow{B\Delta}^2 = \overrightarrow{A\Delta}^2 + \overrightarrow{B\Gamma}^2 + 2\overrightarrow{\Delta\Gamma}\left(\overrightarrow{A\Gamma} + \overrightarrow{\Gamma B}\right) \Leftrightarrow$

$\overrightarrow{A\Gamma}^2 + \overrightarrow{B\Delta}^2 = \overrightarrow{A\Delta}^2 + \overrightarrow{B\Gamma}^2 + 2\overrightarrow{\Delta\Gamma}\cdot\overrightarrow{AB}$

Συντεταγμένες

Εστω ορθοκανονικό σύστημα αξόνων, στο οποίο η αρχή Ο ταυτίζεται με την κορυφή Δ του τραπεζίου και η πλευρά ΔΓ να βρίσκεται στον άξονα x΄x.



Εστω $A(\alpha,\beta)$, $\Gamma(\gamma,0)$ και επειδή $AB \parallel \Delta\Gamma$, $B(\delta,\beta)$.

Είναι $(A\Gamma)^2+(B\Delta)^2=\left(\sqrt{(\gamma-\alpha)^2+(0-\beta)^2}\right)^2+\left(\sqrt{\delta^2+\beta^2}\right)^2 \Leftrightarrow$

$(A\Gamma)^2+(B\Delta)^2=\gamma^2-2\alpha\gamma+\alpha^2+\beta^2+\delta^2+\beta^2 \Leftrightarrow$

$(A\Gamma)^2+(B\Delta)^2=\gamma^2+2\beta^2+\delta^2+\alpha^2-2\alpha\gamma$ (1)

$(A\Delta)^2+(B\Gamma)^2+2(AB)\cdot(\Gamma\Delta)=\left(\sqrt{\alpha^2+\beta^2}\right)^2+\left(\sqrt{(\gamma-\delta)^2+\beta^2}\right)^2+2(\delta-\alpha)\gamma \Leftrightarrow$

$(A\Delta)^2+(B\Gamma)^2+2(AB)\cdot(\Gamma\Delta)=\alpha^2+\beta^2+\gamma^2-2\gamma\delta+\delta^2+\beta^2+2\delta\gamma-2\alpha\gamma \Leftrightarrow$

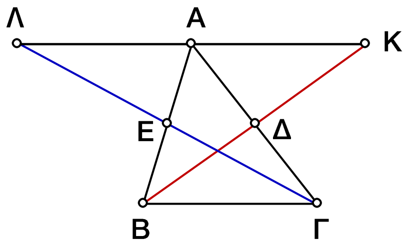
$(A\Delta)^2+(B\Gamma)^2+2(AB)\cdot(\Gamma\Delta)=\alpha^2+2\beta^2+\gamma^2+\delta^2-2\alpha\gamma$ (2).

Από τις σχέσεις (1),(2), προκύπτει ότι: $(A\Gamma)^2+(B\Delta)^2=(A\Delta)^2+(B\Gamma)^2+2(AB)\cdot(\Gamma\Delta)$.

18. Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ. Στις προεκτάσεις των διαμέσων ΒΔ και ΓΕ θεωρούμε σημεία Κ και Λ αντίστοιχα, τέτοια ώστε $\Delta K = B\Delta$ και $E\Lambda = \Gamma E$. Να αποδείξετε ότι τα σημεία Κ,Α,Λ είναι συνευθειακά και το Α είναι μέσο του ΚΛ..

Λύση

Ευκλείδεια



Τα τετράπλευρα ΑΒΓΚ και ΑΛΒΓ είναι παραλληλόγραμμα γιατί οι διαγώνιές τους διχοτομούνται.
Οπότε $A\Lambda =\parallel B\Gamma$ και $AK =\parallel B\Gamma$, άρα $A\Lambda =\parallel AK$.
Επειδή $A\Lambda \parallel AK$, τα σημεία Α,Κ,Λ είναι συνευθειακά.

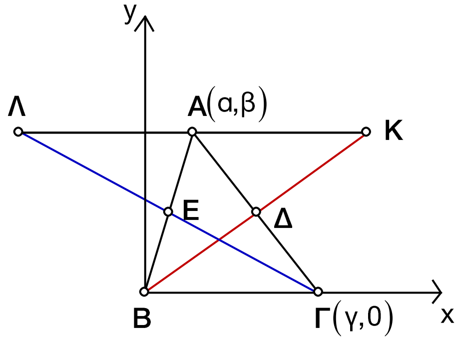
Διανύσματα

$\overrightarrow{AK}=\overrightarrow{BK}-\overrightarrow{BA}=2\overrightarrow{B\Delta}-\overrightarrow{BA}=2\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{B\Gamma}\right)-\overrightarrow{BA}=\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{B\Gamma}-\overrightarrow{BA}=\overrightarrow{B\Gamma}$ και

$\overrightarrow{\Lambda A}=\overrightarrow{\Gamma A}-\overrightarrow{\Gamma\Lambda}=\overrightarrow{\Gamma A}-2\overrightarrow{\Gamma E}=\overrightarrow{\Gamma A}-2\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{\Gamma A}+\overrightarrow{\Gamma B}\right)=\overrightarrow{\Gamma A}-\overrightarrow{\Gamma A}-\overrightarrow{\Gamma B}=\overrightarrow{B\Gamma}$.

Είναι $\overrightarrow{\Lambda A}=\overrightarrow{AK}$, άρα τα σημεία Α,Λ,Κ είναι συνευθειακά και το Α είναι μέσο του ΚΛ.

Συντεταγμένες



Εστω ορθοκανονικό σύστημα αξόνων, στο οποίο η αρχή Ο ταυτίζεται με την κορυφή Β του τριγώνου και η πλευρά ΒΓ βρίσκεται στον άξονα x΄x.
Αν $A(\alpha,\beta)$, $\Gamma(\gamma,0)$, τότε το μέσο Δ του ΑΓ έχει συντεταγμένες $\left(\frac{\alpha+\gamma}{2},\frac{\beta}{2}\right)$ και το μέσο Ε του ΑΒ έχει συντεταγμένες $\left(\frac{\alpha}{2},\frac{\beta}{2}\right)$.

Επειδή το Δ είναι μέσο του ΒΚ, έχουμε:

$x_\Delta=\frac{x_B+x_K}{2} \Leftrightarrow x_K=2x_\Delta=2\frac{\alpha+\gamma}{2}=\alpha+\gamma$ και $y_\Delta=\frac{y_B+y_K}{2} \Leftrightarrow y_K=2y_\Delta=2\frac{\beta}{2}=\beta$, άρα $K(\alpha+\gamma,\beta)$.

Επειδή το Ε είναι μέσο του ΓΛ, έχουμε:

$x_E = \frac{x_\Gamma + x_\Lambda}{2} \Leftrightarrow x_\Lambda = 2x_E - x_\Gamma = 2\frac{\alpha}{2} - \gamma = \alpha - \gamma$ και $y_E = \frac{y_\Gamma + y_\Lambda}{2} \Leftrightarrow y_\Lambda = 2y_E = 2\frac{\beta}{2} = \beta$,

άρα $\Lambda(\alpha-\gamma,\beta)$.

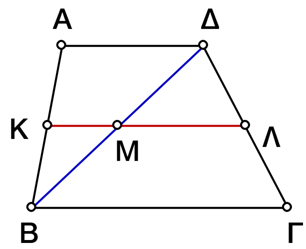
Επειδή $y_\Lambda = y_A = y_K$, τα σημεία Α,Κ,Λ είναι σε ευθεία παράλληλη στον άξονα x΄x, οπότε είναι συνευθειακά.

Επειδή $\frac{x_K + x_\Lambda}{2} = \frac{\alpha+\gamma+\alpha-\gamma}{2} = \alpha = x_A$, το Α είναι μέσο του ΚΛ.

19. Να αποδείξετε ότι η διάμεσος τραπεζίου ισούται με το ημιάθροισμα των βάσεών του.

Λύση

Ευκλείδεια



Εστω Κ το μέσο της ΑΒ και $ΚΛ \| ΒΓ \| ΑΔ$. Τότε στο τρίγωνο ΑΒΔ το Μ είναι μέσο της ΒΔ και $ΚΜ = \frac{ΑΔ}{2}$.

Επειδή στο τρίγωνο ΒΓΔ, το Μ είναι μέσο της ΒΔ και η ΜΛ είναι παράλληλη στη ΒΓ, το Λ είναι μέσο της ΓΔ και $ΜΛ = \frac{ΒΓ}{2}$.

Άρα η ΚΛ είναι η διάμεσος του τραπεζίου και $ΚΛ \| ΒΓ \| ΑΔ$.

Επίσης $ΚΛ = ΚΜ + ΜΛ = \frac{ΑΔ}{2} + \frac{ΒΓ}{2} = \frac{ΑΔ+ΒΓ}{2}$.

Διανύσματα

Θα αποδείξουμε ότι $|\overrightarrow{ΚΛ}| = \frac{|\overrightarrow{ΒΓ}| + |\overrightarrow{ΑΔ}|}{2}$.

$\overrightarrow{ΚΛ} = \overrightarrow{ΚΑ} + \overrightarrow{ΑΔ} + \overrightarrow{ΔΛ} = \frac{1}{2}\overrightarrow{ΒΑ} + \overrightarrow{ΔΛ} + \frac{1}{2}\overrightarrow{ΔΓ} = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{ΒΑ} + 2\overrightarrow{ΔΑ} + \overrightarrow{ΔΓ}\right) \Leftrightarrow$

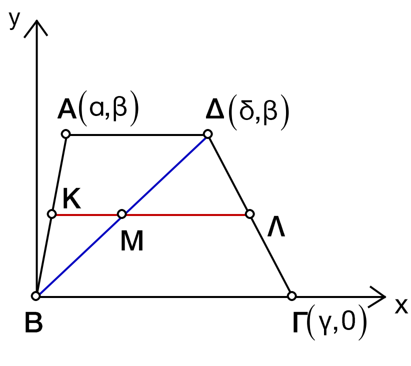
$\overrightarrow{ΚΛ} = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{ΒΑ} + \overrightarrow{ΑΔ} + \overrightarrow{ΔΓ} + \overrightarrow{ΑΔ}\right) = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{ΒΓ} + \overrightarrow{ΑΔ}\right)$

Είναι $|\overrightarrow{ΚΛ}| = \frac{1}{2}|\overrightarrow{ΒΓ} + \overrightarrow{ΑΔ}|$.

Επειδή τα διανύσματα $\overrightarrow{ΒΓ}$ και $\overrightarrow{ΑΔ}$ είναι ομόρροπα, ισχύει ότι: $|\overrightarrow{ΒΓ} + \overrightarrow{ΑΔ}| = |\overrightarrow{ΒΓ}| + |\overrightarrow{ΑΔ}|$, άρα

$|\overrightarrow{ΚΛ}| = \frac{|\overrightarrow{ΒΓ}| + |\overrightarrow{ΑΔ}|}{2}$.

Συντεταγμένες



Εστω ορθοκανονικό σύστημα αξόνων, στο οποίο η αρχή Ο ταυτίζεται με την κορυφή Β και η πλευρά ΒΓ βρίσκεται στον άξονα x΄x.

Εστω $Α(\alpha,\beta)$, $Δ(\delta,\beta)$ $(ΑΒ \| x΄x)$ και $Γ(\gamma,0)$.

Επειδή το Κ είναι μέσο του ΑΒ, είναι $Κ\left(\frac{\alpha}{2},\frac{\beta}{2}\right)$.

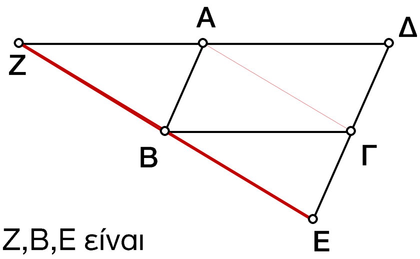
Επειδή το Λ είναι μέσο ΓΔ, είναι $Λ\left(\frac{\gamma+\delta}{2},\frac{\beta}{2}\right)$.

Είναι $(ΒΓ) = \gamma$, $(ΑΔ) = \delta - \alpha$ και $(ΚΛ) = \frac{\gamma+\delta}{2} - \frac{\alpha}{2} = \frac{\delta-\alpha+\gamma}{2} = \frac{(ΑΔ)+(ΒΓ)}{2}$.

20. Δίνεται παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ. Προεκτείνουμε τη ΔΓ κατά τμήμα $ΓΕ = ΔΓ$ και τη ΔΑ κατά τμήμα $ΑΖ = ΔΑ$. Να αποδείξετε ότι τα σημεία Ζ,Β,Ε είναι συνευθειακά.

Λύση

Ευκλείδεια



Είναι $ΑΖ = ΑΔ$ και $ΑΔ =\parallel ΒΓ$, άρα και $ΑΖ =\parallel ΒΓ$, οπότε το τετράπλευρο ΑΓΒΖ είναι παραλληλόγραμμο, άρα $ΖΒ \parallel ΑΓ$ (1).

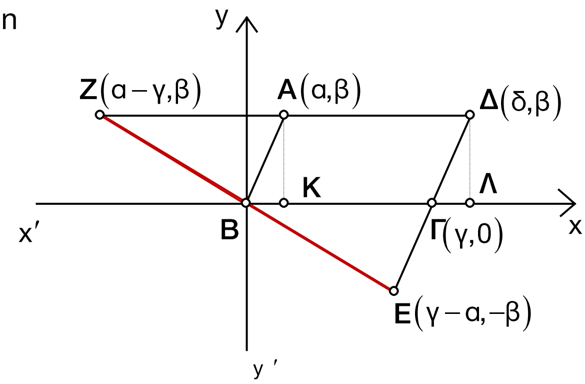
$ΓΕ = ΔΓ$ και $ΔΓ =\parallel ΑΒ$, άρα $ΓΕ =\parallel ΑΒ$, οπότε το τετράπλευρο ΑΓΕΒ είναι παραλληλόγραμμο, άρα $ΒΕ \parallel ΑΓ$ (2).

Από τις σχέσεις (1),(2), προκύπτει ότι $ΖΒ \parallel ΒΕ$, άρα τα σημεία Ζ,Β,Ε είναι συνευθειακά.

Διανύσματα

$\overrightarrow{ΖΒ} = \overrightarrow{ΑΒ} - \overrightarrow{ΑΖ} = \overrightarrow{ΑΒ} - \overrightarrow{ΔΑ}$ και $\overrightarrow{ΒΕ} = \overrightarrow{ΓΕ} - \overrightarrow{ΓΒ} = \overrightarrow{ΑΒ} - \overrightarrow{ΔΑ}$, άρα $\overrightarrow{ΖΒ} = \overrightarrow{ΒΕ}$ οπότε τα σημεία Ζ,Β,Ε είναι συνευθειακά.

Συντεταγμένες



Εστω ορθοκανονικό σύστημα αξόνων, στο οποίο η αρχή Ο ταυτίζεται με την κορυφή Β και η πλευρά ΒΓ βρίσκεται στον άξονα x΄x.

Εστω $Α(α,β)$, $Δ(δ,β)$ $(ΑΒ \parallel x΄x)$ και $Γ(γ,0)$.

Είναι $(ΑΔ) = (ΒΓ) \Leftrightarrow δ - α = γ \Leftrightarrow δ = α + γ$,

Επειδή $ΑΖ = ΔΑ = δ - α = γ$ και $ΑΖ \parallel x΄x$, είναι $x_Ζ = α - γ$ και $y_Ζ = β$, δηλαδή $Ζ(α - γ, β)$.

Επειδή $ΓΕ = ΔΓ$, το Γ είναι μέσο του ΔΕ, άρα

$\frac{x_Δ + x_Ε}{2} = x_Γ \Leftrightarrow δ + x_Ε = 2γ \Leftrightarrow α + γ + x_Ε = 2γ \Leftrightarrow x_Ε = γ - α$ και

$\frac{y_Δ + y_Ε}{2} = y_Γ \Leftrightarrow β + y_Ε = 0 \Leftrightarrow y_Ε = -β$, άρα $Ε(γ - α, -β)$.

Παρατηρούμε ότι $\frac{x_Ζ + x_Ε}{2} = \frac{α - γ + γ - α}{2} = 0 = x_Β$ και $\frac{y_Ζ + y_Ε}{2} = \frac{β - β}{2} = 0 = x_Β$, δηλαδή το Β είναι το μέσο του ΕΖ, άρα τα σημεία Ζ,Β,Ε είναι συνευθειακά.