

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ Γ' ΛΥΚΕΙΟΥ

ΖΗΤΗΜΑ 1^ο

A. Ερωτήσεις Σωστού – Λάθους (μονάδες 10)

- i. Αν f περιττή στο \mathbb{R} , τότε η C_f διέρχεται από την αρχή των αξόνων. Σ Λ
- ii. Κάθε συνάρτηση, που είναι 1-1 στο πεδίο ορισμού της, είναι γνησίως μονότονη. Σ Λ
- iii. Αν f γνησίως αύξουσα στο \mathbb{R} και g γνησίως φθίνουσα στο \mathbb{R} τότε η $g \circ f$ είναι γνησίως αύξουσα στο \mathbb{R} . Σ Λ
- iv. Αν μια συνάρτηση είναι άρτια, τότε υπάρχει η αντίστροφή της. Σ Λ
- v. Αν το σύνολο τιμών της f είναι το διάστημα (α, β) , τότε η f δεν έχει ελάχιστο ούτε μέγιστο. Σ Λ

B. Ερωτήσεις πολλαπλής επιλογής

I. Το πεδίο ορισμού της συνάρτησης $f(x) = \sqrt{|x|-2} + \frac{1}{|x|}$ είναι το :

- A. $(-\infty, -2] \cup [2, +\infty)$ B. $\mathbb{R} - \{-2, 0, 2\}$ Γ. $[-2, 2]$ Δ. $[-2, 0) \cup (0, 2]$ E. \mathbb{R}^*
(μονάδες 4)

II. Η τιμή του ακέραιου λ για την οποία η $f(x) = \begin{cases} x^2 & , x \geq -2\lambda^2 \\ x & , x \leq -\lambda \end{cases}$ είναι συνάρτηση είναι :

- A. $\lambda = 2$ B. $\lambda = 1$ Γ. $\lambda = 3$ Δ. $\lambda = 0$ E. $\lambda = 4$
(μονάδες 5)

Γ. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} x^2 - 2x + \alpha, & x < 1 \\ x^2 + \alpha x + \beta, & x \geq 1 \end{cases}$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Να βρείτε τα $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, ώστε

η C_f να διέρχεται από τα σημεία A(-2,2) και B(3,6). (μονάδες 6)

ΖΗΤΗΜΑ 2^ο

A. Δίνονται οι μιγαδικοί $f(v) = i^v \cdot (2\alpha + \alpha i)$, $\alpha \in \mathbb{R}$, $v \in \mathbb{N}^*$.

i. Να αποδείξετε ότι $f(2006) + f(2007) + f(2008) + f(2009) = 0$.

ii. Αν ο v διαιρούμενος με το 4 αφήνει υπόλοιπο 2, να αποδείξετε ότι η εικόνα του $f(v)$ ανήκει στην ευθεία $y = \frac{1}{2}x$. (μονάδες 6)

B. Αν z_1, z_2 διαφορετικές ρίζες της εξίσωσης $z^2 = 2 + i$, να βρεθεί το πραγματικό και το

φανταστικό μέρος του μιγαδικού $w = \frac{z_1}{z_2} + \frac{z_2}{z_1}$. (μονάδες 8)

Γ. Δίνεται η συνάρτηση $f : [-4, 4] \rightarrow \mathbb{R}$. Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης $f(2x-6)$.
(μονάδες 6)

Δ. Δίνονται οι συναρτήσεις $f, g: A = (-\alpha, \alpha) \rightarrow \mathbb{R}, A \subseteq \mathbb{R}, \alpha > 0$

α) Αν f, g άρτιες, να δείξετε ότι : οι συναρτήσεις $f+g, f \cdot g, f/g$ είναι άρτιες ($g(x) \neq 0$ για κάθε $x \in A$)

β) Αν f, g περιττές, να δείξετε ότι η συνάρτηση $f+g$ είναι περιττή, ενώ η $f \cdot g$ είναι άρτια.
(μονάδες 5)

ZHTHMA 3^o

A. Αν $z = (3+4i)^{2004} + (4+3i)^{2004}$, να αποδειχθεί ότι $z \in \mathbb{R}$.
(μονάδες 9)

B. i. Να βρεθεί ο γ.τ. των εικόνων των μιγαδικών z που ικανοποιούν τη σχέση $3|z| = |z+4|$.
(μονάδες 6)

ii. Έστω οι μιγαδικοί w_1, w_2 , με $w_1, w_2 \neq -2$, για τους οποίους ισχύει ότι:

$$\left| \frac{w_1}{w_1+4} \right| = \left| \frac{w_2}{w_2+4} \right| = \frac{1}{3}. \text{ Να βρεθεί η μέγιστη τιμή του } |w_1 - w_2|. \quad (\text{μονάδες } 10)$$

ZHTHMA 4^o

A. Δίνεται συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ γνησίως μονότονη που η γραφική της παράσταση διέρχεται από τα σημεία $A(3,4)$ και $B(6,-2)$.

α) Να λυθεί η εξίσωση $f(-3 + f^{-1}(x^2 - 3x)) = 4$ (μονάδες 5)

β) Να λυθεί η ανίσωση $f^{-1}(x-5) < 3$ (μονάδες 7)

B. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = 2e^{x-1} + x - 2$

α) Να λύσετε την εξίσωση $f(x) = f^{-1}(x)$ (μονάδες 6)

β) Να λύσετε την ανίσωση $f^{-1}(x^2 - 3x + 3) < 1$. (μονάδες 7)

Καλή επιτυχία !!!

Στέλιος Μιχαήλογλου