# Ταλαντώσεις

## Άσκηση 1η

Ένα σώμα εκτελεί απλή αρμονική ταλάντωση και την χρονική στιγμή $t=0s$ βρίσκεται στην θέση $x = +\frac{A}{2}$ και έχει θετική ταχύτητα. Να γραφεί η εξίσωση κίνησης του.

## Απάντηση

$$x = A\eta\mu(\omega t + \varphi_0)$$

Για $t=0s$, $x = +\frac{A}{2}$, $\upsilon>0$

$$\frac{A}{2} = A\eta\mu\varphi_0$$

$$\eta\mu\varphi_0 = \frac{1}{2}$$

$$\eta\mu\varphi_0 = \eta\mu\frac{\pi}{6}$$

$$\begin{cases} \varphi_0 = 2\kappa\pi + \frac{\pi}{6} & ή \\ \varphi_0 = 2\kappa\pi + \pi - \frac{\pi}{6} \end{cases} \quad , \quad \kappa\epsilon\mathbb{Z}$$

Επειδή $0 \leq \varphi_0 < 2\pi$ πρέπει $k=0$ οπότε

$$\begin{cases} \varphi_0 = \frac{\pi}{6} & ή \\ \varphi_0 = \pi - \frac{\pi}{6} \end{cases}$$

Η ταχύτητα του σώματος σε κάθε χρονική στιγμή δίνεται από την εξίσωση

$$\upsilon = \omega A\sigma\upsilon\nu(\omega t + \varphi_0)$$

Από τα δεδομένα του προβλήματος όμως η ταχύτητα της χρονική στιγμή $t=0s$ πρέπει να είναι θετική έτσι

$$\upsilon(0) > 0$$

$$\omega A\sigma\upsilon\nu\varphi_0 > 0$$

$$\sigma\upsilon\nu\varphi_0 > 0$$

Αν $\varphi_0 = \pi - \frac{\pi}{6} = \frac{5\pi}{6}$ τότε $\sigma\upsilon\nu\varphi_0 = \sigma\upsilon\nu\frac{5\pi}{6} < 0$ απορρίπτετε

Αν $\varphi_0 = \frac{\pi}{6}$ τότε $\sigma\upsilon\nu\varphi_0 = \sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{6} > 0$ δεκτή

Τελικά

$$x = A\eta\mu\left(\omega t + \frac{\pi}{6}\right)$$

## Άσκηση 2η

Ένα σώμα εκτελεί απλή αρμονική ταλάντωση ποιο είναι το ελάχιστο χρονικό διάστημα που απαιτείται για να πάει το σώμα από την θέση $x = -\frac{A}{2}$ στην θέση $x = +\frac{A}{2}$.

## Απάντηση

Σαν πρώτο βήμα θα βρούμε την εξίσωση κίνησης με *t=0s* να βρίσκεται στην θέση $x = -\frac{A}{2}$ και επειδή θέλουμε να βρούμε το ελάχιστο χρονικό διάστημα το σώμα θα πρέπει να κατευθύνεται προς το $x = +\frac{A}{2}$ δηλαδή να έχει θετική ταχύτητα.

$$x = A\eta\mu(\omega t + \varphi_0)$$

Για $t=0s$, $x = -\frac{A}{2}$, $\upsilon>0$

$$-\frac{A}{2} = A\eta\mu\varphi_0$$

$$\eta\mu\varphi_0 = -\frac{1}{2}$$

$$\eta\mu\varphi_0 = \eta\mu\left(-\frac{\pi}{6}\right)$$

$$\begin{cases} \varphi_0 = 2\kappa\pi - \frac{\pi}{6} \quad \acute{\eta} \\ \varphi_0 = 2\kappa\pi + \pi + \frac{\pi}{6} \end{cases} , \quad \kappa \epsilon \mathbb{Z}$$

Για να είναι $0 \le \varphi_0 < 2\pi$ πρέπει

Από την πρώτη εξίσωση $\kappa=1$ προκύπτει $\varphi_0 = 2\pi - \frac{\pi}{6} = \frac{11\pi}{6}$

Από την δεύτερη εξίσωση για $\kappa=0$ προκύπτει $\varphi_0 = \pi + \frac{\pi}{6} = \frac{7\pi}{6}$

Πρέπει όμως την $t=0s$ η ταχύτητα να είναι θετική επομένως

$$\omega A\sigma\upsilon\nu\varphi_0 > 0$$

Από τις δύο λύσεις εκείνη που δίνει θετική ταχύτητα είναι η

$$\varphi_0 = \frac{11\pi}{6}$$

Έτσι

$$x = A\eta\mu\left(\omega t + \frac{11\pi}{6}\right)$$

Θα βρούμε τώρα ποια χρονική στιγμή το σώμα βρίσκεται στην θέση $x = +\frac{A}{2}$

$$\frac{A}{2} = A\eta\mu\left(\omega t + \frac{11\pi}{6}\right)$$

$$\eta\mu\left(\omega t + \frac{11\pi}{6}\right) = \frac{1}{2}$$

$$\eta\mu\left(\omega t + \frac{11\pi}{6}\right) = \eta\mu\frac{\pi}{6}$$

$$\begin{cases} \omega t + \frac{11\pi}{6} = 2\kappa\pi + \frac{\pi}{6} \\ \omega t + \frac{11\pi}{6} = 2\kappa\pi + \pi - \frac{\pi}{6} \end{cases} , \quad \kappa \epsilon \mathbb{Z}$$

$$\begin{cases} \omega t = 2\kappa\pi + \frac{\pi}{6} - \frac{11\pi}{6} \\ \omega t = 2\kappa\pi + \pi - \frac{\pi}{6} - \frac{11\pi}{6} \end{cases} , \ \kappa\epsilon\mathbb{Z}$$

$$\begin{cases} \omega t = 2\kappa\pi - \frac{5\pi}{3} \\ \omega t = 2\kappa\pi - \pi \end{cases} , \ \kappa\epsilon\mathbb{Z}$$

Από τις παραπάνω λύσεις θα κρατήσουμε την μικρότερη θετική. Από την πρώτη εξίσωση για *κ=1* προκύπτει :

$$\omega t = 2\pi - \frac{5\pi}{3}$$

$$\omega t = \frac{\pi}{3}$$

$$\frac{2\pi}{T} t = \frac{\pi}{3}$$

$$t = \frac{T}{6}$$

Ενώ από την δεύτερη επίσης για *k=1* προκύπτει :

$$\omega t = \pi$$

$$\frac{2\pi}{T} t = \pi$$

$$t = \frac{T}{2}$$

Μικρότερη είναι η φυσικά η $t = \frac{T}{6}$

Άρα ο χρόνος που απαιτείται για να μεταβεί ένα σώμα που κάνει απλή αρμονική ταλάντωση από την θέση $x = -\frac{A}{2}$ στην θέση $x = +\frac{A}{2}$ είναι $t = \frac{T}{6}$.

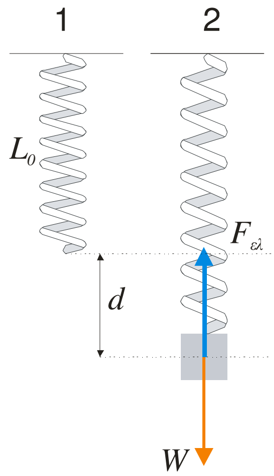
## Άσκηση 3η

Σώμα δένεται σε κατακόρυφο ελατήριο. Εκτρέπουμε το σώμα από την θέση ισορροπίας και το αφήνουμε ελεύθερο να κινηθεί. Να αποδειχθεί ότι το σώμα θα εκτελέσει απλή αρμονική ταλάντωση.

## Απάντηση

Τα βήματα που εκτελούμε όταν για να αποδείξουμε ότι ένα σώμα εκτελεί απλή αρμονική ταλάντωση είναι

1ο : Βρίσκουμε την θέση ισορροπίας του σώματος. Δηλαδή βρίσκουμε την συνθήκη που ισχύει για να έχουμε ισορροπία (διπλανό σχήμα)



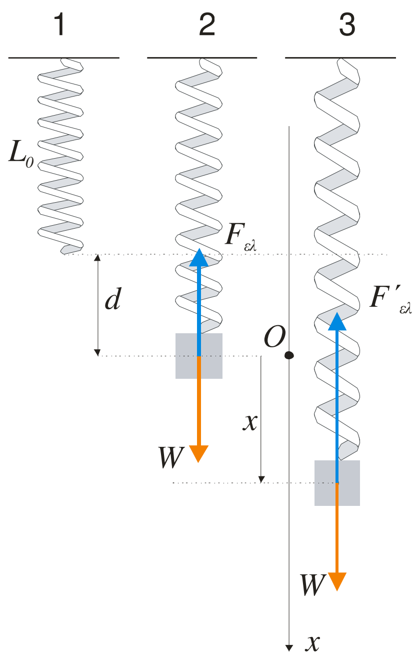

Όποτε έχουμε ελατήριο θα το σχεδιάζουμε πάντα στο φυσικό του μήκος (θέση 1). Στην θέση (2) το σώμα ισορροπεί άρα

$$\Sigma F = 0$$

$$mg = kd \quad (1)$$

2ο : Θεωρούμε το σώμα σε μία τυχαία θέση.
Σε αυτήν την τυχαία θέση θα επιλέγουμε την θετική φορά του άξονα προς την κατεύθυνση που είναι μετατοπισμένο το σώμα από την θέση ισορροπίας του.

3ο : Στην τυχαία θέση υπολογίζουμε την συνισταμένη δύναμη. Η δύναμη του ελατηρίου είναι ανάλογη της παραμόρφωσής του δηλαδή ανάλογη της διαφοράς του μήκους του ελατηρίου. Στην θέση (3) το ελατήριο είναι παραμορφωμένο κατά $(d+x)$




$$\Sigma F = F'_{\varepsilon\lambda} + W$$

$$\Sigma F = -k(d + x) + mg$$

$$\Sigma F = -kd - kx + mg$$

Λόγω της εξίσωσης (1) έχουμε

$$\Sigma F = -kx$$

Δηλαδή η συνισταμένη δύναμη είναι της μορφής

$$\Sigma F = -Dx$$

Με $D=k$

*Παρατήρηση :* Η παραπάνω εξίσωση μοιάζει με την δύναμη ελατηρίου αλλά ΔΕΝ είναι η δύναμη του ελατηρίου. Είναι η συνισταμένη του βάρους και της δύναμης του ελατηρίου. Το μέτρο της δύναμης του ελατηρίου δίνεται από την εξίσωση είναι $|F_{\varepsilon\lambda}| = k\,|\Delta L|$ και αναφέρεται πάντα στην μεταβολή του μήκους του ελατηρίου $\Delta L$ (μήκος ελατηρίου – φυσικό μήκος) ενώ το *x* στην εξίσωση $\Sigma F = -kx$ αναφέρεται από την θέση ισορροπίας του σώματος.

** Αν η θετική φορά είχε επιλεγεί προς τα πάνω και όλα τα άλλα είναι όπως στο σχήμα τότε*

$$\Sigma F = F'_{\varepsilon\lambda} + W = k(d + |x|) - mg = k|x| = -kx\,, \qquad (\gamma\iota\alpha\tau\acute{\iota}\ x < 0)$$

*Να θυμόμαστε*

*δύναμη ελατηρίου : από το φυσικό μήκος*

*Συνισταμένη δύναμη στην ταλάντωση : από την θέση ισορροπίας*

## Άσκηση 4η

Σώμα εκτελεί απλή αρμονική ταλάντωση.

α) Να υπολογιστεί η ταχύτητα του σώματος αν είναι γνωστή η θέση του.

β) Να υπολογιστεί η θέση για την οποία η δυναμική ενέργεια είναι τριπλάσια της κινητικής.

γ) Να βρεθεί ο ρυθμός μεταβολής της κινητικής ενέργειας στην θέση $x = +\frac{A}{2}$

## Απάντηση

α) Από την διατήρηση της ενέργειας

$$K + U = E$$

$$\frac{1}{2}m\upsilon^2 + \frac{1}{2}Dx^2 = \frac{1}{2}DA^2$$

$$\frac{1}{2}m\upsilon^2 + \frac{1}{2}\underbrace{m\omega^2}_{D}x^2 = \frac{1}{2}m\omega^2 A^2$$

$$\upsilon^2 + \omega^2 x^2 = \omega^2 A^2$$

$$\upsilon^2 = \omega^2 A^2 - \omega^2 x^2$$

$$|\upsilon| = \omega\sqrt{A^2 - x^2}$$

*Παρατήρηση : Σε τυχαία θέση βλέπουμε ότι ταχύτητα έχει το ίδιο μέτρο όπως και στην θέση –x. Σε συμμετρικές δηλαδή θέσεις γύρω από την θέση ισορροπίας το μέτρο της ταχύτητας είναι το ίδιο.*

β) Από την διατήρηση της ενέργειας

$$K + U = E$$

Από τα δεδομένα η δυναμική είναι τριπλάσια της κινητικής $U = 3K$. Όμως επειδή ζητάμε την θέση στην οποία συμβαίνει αυτό θέλουμε να κρατήσουμε την μεταβλητή $x$. Η μεταβλητή αυτή βρίσκεται στην δυναμική ενέργεια. Έτσι απαλείφουμε την κινητική ενέργεια

$$K = \frac{U}{3}$$

$$\frac{U}{3} + U = E$$

$$\frac{4}{3}U = E$$

$$\frac{4}{3}\frac{1}{2}Dx^2 = \frac{1}{2}DA^2$$

$$\frac{4}{3}x^2 = A^2$$

$$x = \pm\frac{\sqrt{3}}{2}A$$

γ) Ο ρυθμός μεταβολής της κινητικής ενέργειας υπολογίζεται :

$$\frac{dK}{dt} = \frac{dW_{o\lambda}}{dt} = \frac{F_{o\lambda}dx}{dt} = F_{o\lambda}\frac{dx}{dt} = (-Dx)\upsilon$$

Στην θέση $x = +\frac{A}{2}$ από το (α) έχουμε

$$\upsilon = \pm\omega\sqrt{A^2 - \left(\frac{A}{2}\right)^2} \Leftrightarrow \upsilon = \pm\frac{\sqrt{3}}{2}\omega A$$

$$\frac{dK}{dt} = \mp D\frac{A}{2}\frac{\sqrt{3}}{2}\omega A \ \Leftrightarrow\ \frac{dK}{dt} = \mp\frac{\sqrt{3}}{4}m\omega^3 A^2$$

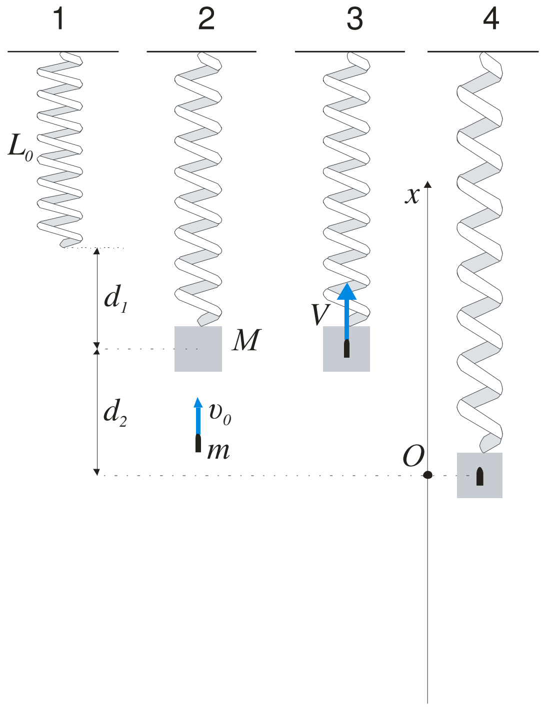
*Στην θέση $x = +\frac{A}{2}$ μπορεί η κινητική ενέργεια να ελαττώνεται ($dK/dt<0$ επιβραδυνόμενη) ή και να αυξάνεται ($dK/dt>0$ επιταχυνόμενη).*

## Άσκηση 5η

Σώμα μάζας Μ είναι δεμένο σε κατακόρυφο ελατήριο. Το σώμα είναι ακίνητο και βρίσκεται στην θέση ισορροπίας του. Δεύτερο σώμα μάζας m κινείται με ταχύτητα μέτρου $\upsilon_0$ λίγο πριν συγκρουστεί με το πρώτο. Αν κρούση είναι πλαστική και διαρκεί ελάχιστα υπολογίστε το πλάτος της ταλάντωσης που θα εκτελέσει το συσσωμάτωμα.

## Απάντηση

Σε ασκήσεις που έχουμε πλαστική κρούση πρέπει να ξεκαθαρίσουμε ποιο σώμα εκτελεί ταλάντωση. Σε αυτό το πρόβλημα το σώμα που εκτελεί ταλάντωση είναι το συσσωμάτωμα. Πρέπει λοιπόν να βρούμε την θέση ισορροπίας του συσσωματώματος. Ακόμη και στην περίπτωση που το πρόβλημα μας λέει ότι έχουμε απλή αρμονική ταλάντωση πρέπει να αποδείξουμε ότι έχουμε απλή αρμονική ταλάντωση για να υπολογίσουμε την σταθερά της ταλάντωσης. (Άσκηση 3). Η σταθερά ταλάντωσης για το συσσωμάτωμα είναι *D=K*.




Στην θέση (2) το σώμα μάζας Μ ισορροπεί (προσοχή όμως δεν είναι η θέση ισορροπίας του συσσωματώματος)

$$Kd_1 = Mg \quad (1)$$

Επειδή ταλάντωση κάνει το συσσωμάτωμα η θέση ισορροπίας του είναι η θέση (4). Η προσθήκη ενός ακόμη σώματος μάζας m στο άκρο του ελατηρίου έχει σαν αποτέλεσμα το ελατήριο να επιμηκυνθεί επιπλέον κατά $d_2$

Έτσι για το συσσωμάτωμα στην θέση ισορροπίας του ισχύει

$$K(d_1 + d_2) = (M + m)g$$
$$Kd_1 + Kd_2 = Mg + mg$$

και λόγω της σχέσης (1) έχουμε

$$Kd_2 = mg \Leftrightarrow d_2 = \frac{mg}{K}$$

Η ορμή του συστήματος πριν την κρούση είναι ίση με την ορμή του συστήματος μετά την κρούση

$$p_{ολ}^{πριν} = p_{ολ}^{μετά}$$
$$m\upsilon_0 = (m + M)V$$

Όπου $V$ η ταχύτητα του συσσωματώματος μετά την κρούση

$$V = \frac{m}{m + M}\upsilon_0$$

Επειδή το συσσωμάτωμα εκτελεί απλή αρμονική ταλάντωση από την διατήρηση της ενέργειας αμέσως μετά την κρούση έχουμε

$$K + U = E$$
$$\frac{1}{2}(m + M)V^2 + \frac{1}{2}Dd_2^2 = \frac{1}{2}DA^2$$

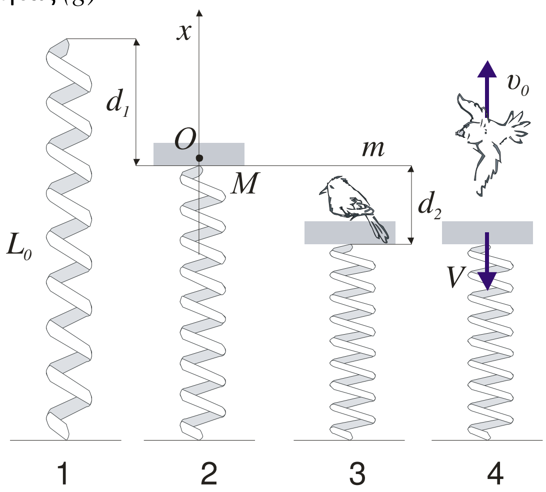
στο σημείο που έγινε η κρούση το συσσωμάτωμα βρίσκεται στην θέση $x = +d_2$ επομένως η δυναμική ενέργεια της ταλάντωσης είναι $U = \frac{1}{2}Dd_2^2$

$$(m + M)V^2 + Kd_2^2 = KA^2$$
$$A^2 = \frac{(m + M)V^2}{K} + d_2^2$$
$$A = \sqrt{\frac{(m + M)V^2}{K} + d_2^2}$$

*Παρατήρηση : με πολλά σώματα και κατακόρυφο ελατήριο πρέπει να έχουμε ξεκαθαρίσει πιο σώμα κάνει ταλάντωση και ποια είναι η θέση ισορροπίας του.*

## Άσκηση 6$^{η}$

Στο παρακάτω σχήμα το πουλί φεύγει από το δίσκο με ταχύτητα $\upsilon_0$ ποιο είναι το πλάτος ταλάντωσης του δίσκου; Δίνονται η μάζα του πουλιού $(m)$ η μάζα του δίσκου $(M)$ η σταθερά $(K)$ του ελατηρίου και η επιτάχυνση της βαρύτητας $(g)$




## Απάντηση

Υπάρχουν τρεις τρόποι να φύγει το πουλί από τον δίσκο.

α) Πετώντας. Κάνοντας χρήση μόνο των φτερών του ΧΩΡΙΣ ΝΑ ΣΠΡΩΞΕΙ με τα πόδια του τον δίσκο.

β) Να σπρώξει τα πόδια του τον δίσκο και να φύγει από αυτόν όπως θα έκανε π.χ. και ένας βάτραχος.

γ) Να κάνει και τα δύο δηλαδή και να σπρώξει αλλά και να πετάξει.

Στην θέση (3) σε κάθε περίπτωση το σύστημα πουλί - δίσκος ισορροπεί.

$$\Sigma F = 0$$
$$K(d_1 + d_2) = (M + m)g$$
$$Kd_1 + Kd_2 = Mg + mg$$

Όταν το πουλί φύγει από τον δίσκο τότε ο δίσκος μόνος του θα ισορροπεί στην θέση (2)

$$Kd_1 = Mg$$

Από τις δύο τελευταίες σχέσεις προκύπτει ότι

$$Kd_2 = mg \Leftrightarrow d_2 = \frac{mg}{K}$$

α) όταν το πουλί φύγει από τον δίσκο χρησιμοποιώντας τα φτερά του (δηλαδή σπρώχνει τον αέρα και σπρώχνεται απ' αυτόν χωρίς να αλληλεπιδράσει με τον δίσκο) ο δίσκος έχει ταχύτητα μηδέν επομένως βρίσκεται στην θέση μέγιστης απομάκρυνσης άρα το πλάτος της ταλάντωσης που θα εκτελέσει θα είναι

$$A = d_2$$

β) Στην περίπτωση τώρα που το πουλί σπρώξει με τα πόδια του χωρίς να χρησιμοποιήσει τα φτερά του τότε ο δίσκος θα αποκτήσει ταχύτητα η οποία υπολογίζεται με εφαρμογή της αρχής διατήρησης της ορμής

$$p_{ολ}^{πριν} = p_{ολ}^{μετά}$$
$$0 = m\upsilon_0 + MV$$
$$V = -\frac{m}{M}\upsilon_0$$

Μετά την αποχώρηση του πουλιού, ταλάντωση κάνει μόνο ο δίσκος και την στιγμή αμέσως μετά την αποχώρηση του πουλιού βρίσκεται στην θέση $x = -d_2$. Από την διατήρηση της ενέργειας προκύπτει ότι

$$K + U = E \Leftrightarrow \frac{1}{2}MV^2 + \frac{1}{2}Kd_2^2 = \frac{1}{2}KA^2$$
$$A = \sqrt{\frac{M}{K}V^2 + d_2^2}$$

γ) Σε αυτήν την περίπτωση πρέπει να ξέρουμε την ταχύτητα που απέκτησε ο δίσκος και το πλάτος υπολογίζεται από την τελευταία σχέση.