ΦΥΣΙΚΗ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ Γ΄ ΛΥΚΕΙΟΥ

ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑ Β΄

ΘΕΜΑ 1^{ο}

Α. Να επιλέξετε τη σωστή πρόταση σε κάθε μία από τις παρακάτω ερωτήσεις πολλαπλής επιλογής.

1. Σ' ένα κύκλωμα που περιέχει πυκνωτή, πηνίο και αντιστάτη και εκτελεί ηλεκτρικές ταλαντώσεις

α) η μέγιστη ενέργεια του πυκνωτή διατηρείται σταθερή.

β) η ενέργεια του μαγνητικού πεδίου του πηνίου μεταβάλλεται αρμονικά με το χρόνο.

γ) η ενέργεια του κυκλώματος μειώνεται εκθετικά με το χρόνο.

δ) έχουμε περιοδική μετατροπή της ενέργειας του ηλεκτρικού πεδίου σε ενέργεια μαγνητικού πεδίου και αντίστροφα. **(Μονάδες 4)**

2. Σε γραμμικό ελαστικό μέσο διαδίδεται αρμονικό κύμα. Οι εξισώσεις της ταλάντωσης δύο σημείων Α και Β του ελαστικού μέσου είναι αντίστοιχα $y_A = 0{,}1 \cdot ημπ(2t-4)$ (S.I.) και $y_B = 0{,}1 \cdot ημπ(2t-7)$ (S.I.).

α) Το κύμα φθάνει στο Β πριν φθάσει στο Α.

β) Τα Α και Β ταλαντώνονται σε συμφωνία φάσης.

γ) Τα Α και Β ταλαντώνονται έχοντας την ίδια φάση.

δ) Η απόσταση των Α και Β είναι περιττό πολλαπλάσιο του μισού μήκους κύματος. **(Μονάδες 4)**

3. Μια κοίλη σφαίρα μάζας m και ακτίνας R κυλιέται χωρίς να ολισθαίνει. Η ροπή αδράνειας της σφαίρας ως προς άξονα που διέρχεται από το κέντρο μάζας της είναι $I = \frac{2}{3}mR^2$. Ο λόγος της κινητικής ενέργειας λόγω στροφικής κίνησης προς την κινητική ενέργεια λόγω μεταφορικής κίνησης της σφαίρας είναι

α) $\frac{4}{9}$ β) $\frac{9}{4}$ γ) $\frac{2}{3}$ δ) $\frac{3}{2}$

(Μονάδες 4)

4. Ένα περιπολικό εκπέμπει ήχο συχνότητας f και μήκους κύματος λ. Το περιπολικό πλησιάζει ακίνητο παρατηρητή κινούμενο με ταχύτητα $υ_s = υ/20$ όπου υ η ταχύτητα του ήχου. Η συχνότητα του ήχου f_A και το μήκος κύματος $λ_A$ που αντιλαμβάνεται ο παρατηρητής είναι

α) $f_A = \frac{20}{19}f$ και $λ_A = \frac{19}{20}λ$

β) $f_A = \frac{19}{20}f$ και $λ_A = \frac{20}{19}λ$

γ) $f_A = f$ και $λ_A = \frac{19}{20}λ$

δ) $f_A = \frac{19}{20}f$ και $λ_A = λ$ **(Μονάδες 4)**

Β. Οι παρακάτω προτάσεις να χαρακτηρισθούν σαν σωστές (Σ) ή λάθος (Λ).
Ένα σώμα εκτελεί απλή αρμονική ταλάντωση πλάτους Α και γωνιακής συχνότητας $\omega = 20\pi \ \text{rad/s}$.

α) Στη θέση όπου ο ρυθμός μεταβολής της ορμής του σώματος είναι μηδέν, το μέτρο της ταχύτητάς του είναι μέγιστο.

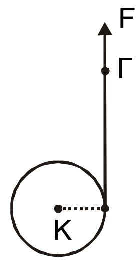
β) Αν διπλασιάσουμε το πλάτος της ταλάντωσης, διπλασιάζεται και η περίοδος της ταλάντωσης.

γ) Αν τη χρονική στιγμή $t = 2{,}5 \cdot 10^{-2} \ \text{s}$ το σώμα φθάνει στη θέση $x = -A$, η αρχική φάση της ταλάντωσης είναι $\varphi_0 = \pi/2$.

δ) Τη χρονική στιγμή $t = 0{,}5 \ \text{s}$ το σώμα έχει εκτελέσει 5 πλήρεις ταλαντώσεις.

ε) Όταν το σώμα διέρχεται από τη θέση ισορροπίας του, ο ρυθμός μεταβολής της κινητικής του ενέργειας είναι μέγιστος. **(Μονάδες 5)**

ΘΕΜΑ 2^{0}



Α. Ο κύλινδρος του σχήματος είναι ομογενής, έχει μάζα m και ακτίνα R, ενώ το αβαρές νήμα που είναι τυλιγμένο γύρω του μπορεί να ξετυλίγεται ελεύθερα. Στο ελεύθερο άκρο Γ του νήματος ασκείται σταθερή κατακόρυφη δύναμη F, με φορά προς τα πάνω. Η ροπή αδράνειας του κυλίνδρου ως προς τον άξονα συμμετρίας του είναι $I = \frac{1}{2} mR^2$ και η επιτάχυνση της βαρύτητας g.
Αν ο άξονας περιστροφής του κυλίνδρου παραμένει ακίνητος, να χαρακτηριστούν οι παρακάτω προτάσεις ως «Σωστό» ή «Λάθος». Οι απαντήσεις να συνοδεύονται από σύντομη αιτιολόγηση.

1. Ο ρυθμός μεταβολής της στροφορμής του κυλίνδρου είναι σταθερός. **(Μονάδες 4)**

2. Ο ρυθμός μεταβολής της κινητικής ενέργειας του κυλίνδρου είναι σταθερός. **(Μονάδες 4)**

3. Το ελεύθερο άκρο Γ του νήματος κινείται προς τα πάνω με επιτάχυνση g. **(Μονάδες 4)**

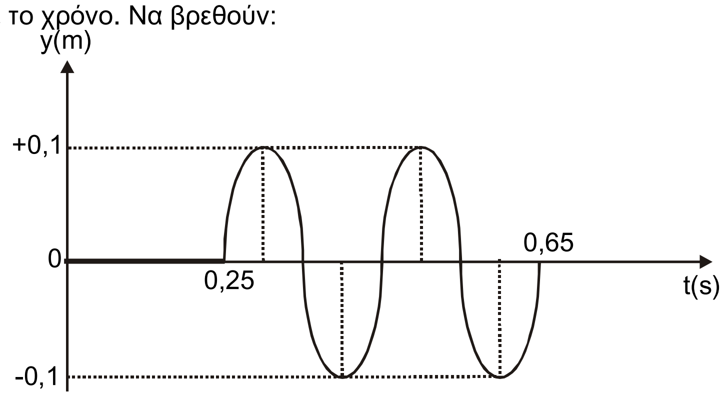
Β. Μικρή σφαίρα μάζας m_1 κινείται με ταχύτητα μέτρου υ_0 και συγκρούεται ελαστικά με άλλη σφαίρα μάζας m_2, η οποία είναι αρχικά ακίνητη. Οι ταχύτητες των σφαιρών μετά την κρούση έχουν αντίστοιχα μέτρα υ_1 και υ_2 και σχηματίζουν με τη διεύθυνση της υ_0 γωνίες θ_1 και θ_2. Να αποδειχθούν τα παρακάτω:

α) $\upsilon_2 = \dfrac{2m_1\upsilon_0 \cdot \sigma\upsilon\nu\theta_2}{m_1 + m_2}$. **(Μονάδες 8)**

β) Όταν η κρούση είναι κεντρική, η ενέργεια που μεταβιβάζεται από την m_1 στην m_2 είναι μέγιστη. **(Μονάδες 5)**

ΘΕΜΑ 3^{0}

Το αριστερό άκρο Ο μιας χορδής (το οποίο θεωρείται ως αρχή μέτρησης των αποστάσεων) ξεκινά τη χρονική στιγμή $t = 0$ να εκτελεί απλή αρμονική ταλάντωση. Έτσι κατά μήκος της χορδής διαδίδεται με ταχύτητα $\upsilon = 10\ m/s$ εγκάρσιο αρμονικό κύμα. Το κύμα αυτό ανακλάται στο άλλο άκρο της χορδής Ν που είναι ακλόνητα στερεωμένο, δημιουργώντας ένα δεύτερο αρμονικό κύμα ίσου πλάτους που διαδίδεται κατά την αντίθετη φορά. Τα δύο κύματα συμβάλλουν και κατά μήκος της χορδής ΟΝ εμφανίζεται στάσιμο κύμα. Στο διάγραμμα φαίνεται η γραφική παράσταση της απομάκρυνσης ενός σημείου Σ της χορδής σε συνάρτηση με το χρόνο. Να βρεθούν:



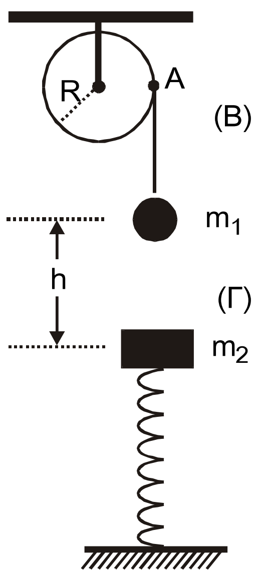
α) Η αρχική φάση φ_0 του προσπίπτοντος κύματος και το μήκος κύματος των κυμάτων από τα οποία δημιουργείται το στάσιμο. **(Μονάδες 6)**

β) Η απόσταση x_Σ του Σ από το Ο και το μήκος ℓ της χορδής. **(Μονάδες 6)**

γ) Η εξίσωση του στάσιμου κύματος αν ως αρχή μέτρησης του χρόνου θεωρηθεί τώρα κάποια στιγμή κατά την οποία το άκρο Ο διέρχεται από τη θέση ισορροπίας του κινούμενο με θετική ταχύτητα. **(Μονάδες 6)**

δ) Η αρχική φάση της ταλάντωσης και η εξίσωση της ταχύτητας του σημείου Ρ που βρίσκεται στο μέσο της απόστασης ανάμεσα στο Σ και την επόμενη απ' το Σ κοιλία. **(Μονάδες 7)**

ΘΕΜΑ 4^{ο}



Η τροχαλία του σχήματος έχει μάζα $M = 3\ kg$, ακτίνα R και μπορεί να στρέφεται χωρίς τριβές γύρω από οριζόντιο άξονα που διέρχεται από το κέντρο της και είναι κάθετος στο επίπεδό της. Το σώμα μάζας $m_1 = 1{,}5\ kg$ είναι δεμένο σε αβαρές νήμα το οποίο είναι τυλιγμένο γύρω από την τροχαλία. Η απόσταση του σώματος αυτού από τη θέση ισορροπίας του σώματος μάζας $m_2 = 1{,}5\ kg$ είναι αρχικά $h = 1{,}6\ m$.

Τη χρονική στιγμή $t = 0$ αφήνουμε ελεύθερη τη μάζα m_1 και ταυτόχρονα δίνουμε μια κατακόρυφη ταχύτητα στην m_2 ώστε αυτή να εκτελέσει απλή αρμονική ταλάντωση πλάτους $A = \frac{1}{2\pi}\ m$. Τα δύο σώματα συγκρούονται κεντρικά και ελαστικά όταν η m_2 διέρχεται από τη θέση ισορροπίας της και αφού αυτή έχει εκτελέσει 4 πλήρεις ταλαντώσεις. Να υπολογιστούν:

α) Η ταχύτητα της m_1 ελάχιστα πριν τη σύγκρουσή της με την m_2.

β) Η ταχύτητα της m_2 ελάχιστα πριν τη σύγκρουσή της με την m_1, καθώς και η ταχύτητά της τη στιγμή που τέθηκε σε ταλάντωση. **(Μονάδες 9)**

γ) Οι ταχύτητες των δύο σωμάτων αμέσως μετά την κρούση. **(Μονάδες 4)**

δ) Το νέο πλάτος ταλάντωσης της μάζας m_2 καθώς και ο χρόνος που απαιτείται για να βρεθεί αυτή για πρώτη φορά μετά την κρούση στην κατώτατη θέση της ταλάντωσής της. **(Μονάδες 6)**

Δίνονται: η ροπή αδράνειας της τροχαλίας ως προς άξονα που διέρχεται από το κέντρο μάζας της $I = \frac{1}{2}MR^2$ και $g = 10\ m/s^2$

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

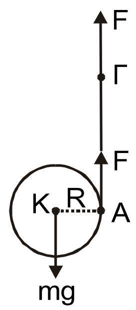
ΘΕΜΑ 1^{o}

Α. 1. $\rightarrow$ γ 2. $\rightarrow$ δ 3. $\rightarrow$ γ 4. $\rightarrow$ α

Β. α $\rightarrow$ Σωστό β $\rightarrow$ Λάθος γ $\rightarrow$ Λάθος δ $\rightarrow$ Σωστό ε $\rightarrow$ Λάθος

ΘΕΜΑ 2^{o}

Α. **1)** Στον κύλινδρο ασκούνται το βάρος του mg και η τάση του νήματος η οποία είναι ίση με τη δύναμη F που ασκείται στο ελεύθερο άκρο του νήματος. Το αλγεβρικό άθροισμα των ροπών αυτών των δυνάμεων ως προς το κέντρο Κ είναι $\Sigma\tau = F \cdot R$. Επειδή $F = σταθ.$, είναι και $\Sigma\tau = σταθ.$. Όμως $\Sigma\tau = \frac{dL}{dt}$. Άρα και ο ρυθμός μεταβολής της στροφορμής $\frac{dL}{dt}$ είναι σταθερός. Η πρόταση είναι **Σωστή**.



2) Επειδή $\Sigma\tau = I \cdot \alpha_{γων}$ με $\Sigma\tau = σταθ.$ και $\Sigma\tau \neq 0$, ο κύλινδρος εκτελεί ομαλά επιταχυνόμενη στροφική κίνηση. Ο ρυθμός μεταβολής της κινητικής του ενέργειας είναι η ισχύς της F, οπότε έχουμε: $\frac{dK}{dt} = \Sigma\tau \cdot \omega$. Αφού $\Sigma\tau = σταθ.$, ενώ η ω συνεχώς αυξάνεται, θα αυξάνεται και ο ρυθμός $\frac{dK}{dt}$. Η πρόταση είναι **Λάθος**.

3) Το σημείο επαφής Α έχει συνεχώς γραμμική ταχύτητα υ_A ίδια με την ταχύτητα του Γ. Συνεπώς και η επιτάχυνση του Γ (α_Γ) θα είναι συνεχώς ίση με την επιτρόχιο επιτάχυνση α_E του Α. Ισχύει $\alpha_E = \frac{d\upsilon_A}{dt} = \frac{d(\omega R)}{dt} = R\frac{d\omega}{dt} = R \cdot \alpha_{γων}$.

Άρα και $\alpha_\Gamma = R \cdot \alpha_{γων}$ (1).

Ο κύλινδρος δεν εκτελεί μεταφορική κίνηση, άρα $\Sigma F = 0 \rightarrow F = mg$.

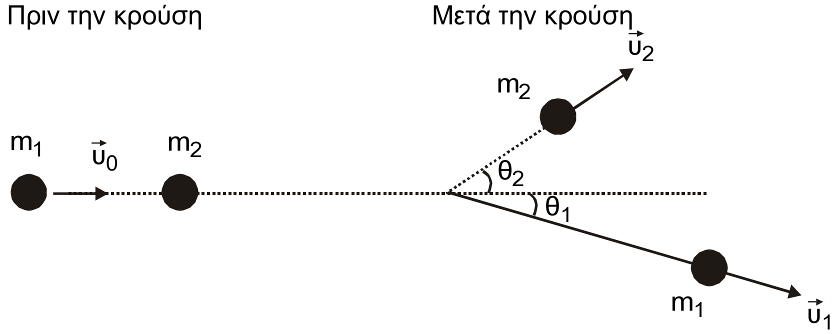
Επίσης $\Sigma\tau = I \cdot \alpha_{\gamma\omega\nu} \to F \cdot R = \frac{1}{2}mR^2 \cdot \alpha_{\gamma\omega\nu} \to$

$F = \frac{1}{2}mR\alpha_{\gamma\omega\nu} \to mg = \frac{1}{2}mR\alpha_{\gamma\omega\nu} \to \alpha_{\gamma\omega\nu} = \frac{2g}{R}$ (2).

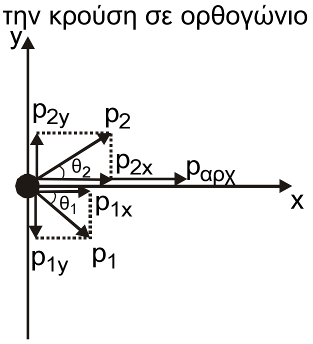
Από τις σχέσεις (1) και (2) προκύπτει $\alpha_\Gamma = R \cdot \frac{2g}{R} \to \alpha_\Gamma = 2g$.

Η πρόταση είναι **Λάθος**.

Β. 1. Πριν την κρούση Μετά την κρούση



Επειδή η κρούση είναι πλάγια, θα αναλύσουμε τις ορμές που έχουν τα σώματα πριν και μετά την κρούση σε ορθογώνιο σύστημα αξόνων x και y.



Εφαρμογή Α.Δ.Ο. στον άξονα x:

$p_{x,\tau\varepsilon\lambda} = p_{x,\tau\varepsilon\lambda} \to p_{\alpha\rho\chi} = p_{1x} + p_{2x} \to m_1\upsilon_0 = m_1\upsilon_1\sigma\upsilon\nu\theta_1 + m_2\upsilon_2\sigma\upsilon\nu\theta_2 \to$

$m_1\upsilon_1\sigma\upsilon\nu\theta_1 = m_1\upsilon_0 - m_2\upsilon_2\sigma\upsilon\nu\theta_2 \to m_1^2\upsilon_1^2\sigma\upsilon\nu^2\theta_1 = \left(m_1\upsilon_0 - m_2\upsilon_2\sigma\upsilon\nu\theta_2\right)^2$ (1)

Εφαρμογή Α.Δ.Ο. στον άξονα y: $p_{y,\tau\varepsilon\lambda} = p_{y,\tau\varepsilon\lambda} \to$

$\to 0 = p_{1y} + p_{2y} \to 0 = m_2\upsilon_2\eta\mu\theta_2 - m_1\upsilon_1\eta\mu\theta_1 \to$

$m_1\upsilon_1\eta\mu\theta_1 = m_2\upsilon_2\eta\mu\theta_2 \to m_1^2\upsilon_1^2\eta\mu^2\theta_1 = m_2^2\upsilon_2^2\eta\mu^2\theta_2$ (2)

Προσθέτουμε κατά μέλη τις (1) και (2):

$m_1^2\upsilon_1^2\sigma\upsilon\nu^2\theta_1 + m_1^2\upsilon_1^2\eta\mu^2\theta_1 = \left(m_1\upsilon_0 - m_2\upsilon_2\sigma\upsilon\nu\theta_2\right)^2 + m_2^2\upsilon_2^2\eta\mu^2\theta_2 \to$

$m_1^2\upsilon_1^2 = m_1^2\upsilon_0^2 - 2m_1m_2\upsilon_0\upsilon_2\sigma\upsilon\nu\theta_2 + m_2^2\upsilon_2^2$ (3)

(Εφαρμόσαμε την: $\eta\mu^2\theta + \sigma\upsilon\nu^2\theta = 1$)

Η κρούση είναι ελαστική, άρα: $K_{\alpha\rho\chi} = K_{\tau\varepsilon\lambda} \to$

$\frac{1}{2}m_1\upsilon_0^2 = \frac{1}{2}m_1\upsilon_1^2 + \frac{1}{2}m_2\upsilon_2^2 \to m_1^2\upsilon_0^2 = m_1^2\upsilon_1^2 + m_1m_2\upsilon_2^2 \to$

$m_1^2\upsilon_1^2 = m_1^2\upsilon_0^2 - m_1m_2\upsilon_2^2$ (4).

Από (3) και (4) έχουμε: $m_1^2\upsilon_0^2 - m_1 m_2 \upsilon_2^2 = m_1^2\upsilon_0^2 - 2m_1 m_2 \upsilon_0 \upsilon_2 συνθ_2 + m_2^2 \upsilon_2^2$,

απ' όπου μετά τις πράξεις: $\boxed{\upsilon_2 = \dfrac{2m_1\upsilon_0 συνθ_2}{m_1 + m_2}}$.

2. Η ενέργεια που μεταβιβάζεται από την m_1 στην m_2 είναι μέγιστη όταν η κινητική ενέργεια της m_2 μετά την κρούση είναι μέγιστη ή ισοδύναμα η ταχύτητα υ_2 είναι μέγιστη. Αυτό θα συμβεί όταν $συνθ_2 = 1 \rightarrow θ_2 = 0$, οπότε $ημθ_2 = 0$. Από τη σχέση $m_1\upsilon_1 ημθ_1 = m_2\upsilon_2 ημθ_2$ προκύπτει ότι και $\upsilon_1 ημθ_1 = 0$. Τότε είτε $ημθ_1 = 0$, άρα $θ_1 = 0$ ή $θ_1 = π$, οπότε και οι δύο σφαίρες κινούνται μετά την κρούση πάνω στον άξονα x, είτε $\upsilon_1 = 0$. Στην περίπτωση αυτή η m_1 παραμένει ακίνητη και η m_2 κινείται στον άξονα x. Δηλ. σε κάθε περίπτωση έχουμε κεντρική (μετωπική) κρούση.

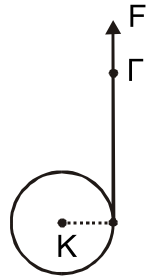
ΘΕΜΑ 3^{ο}

α) Από τη δοσμένη γραφική παράσταση φαίνεται ότι το Σ ξεκινά να ταλαντώνεται έχοντας $y = 0$ και κινούμενο προς τη θετική κατεύθυνση, δηλ. με $v > 0$. Το ίδιο θα συμβαίνει και για οποιοδήποτε σημείο του ελαστικού μέσου, άρα $\boxed{φ_0 = 0}$.

Αφού στο χρονικό διάστημα $Δt = (0,65 - 0,25)\ s = 0,4\ s$ το Σ εκτελεί $N = 2$ ταλαντώσεις, η περίοδος της ταλάντωσης θα είναι $T = {Δt}/{N} = 0,2\ s$ και με εφαρμογή της θεμελιώδους εξίσωσης της κυματικής έχουμε:

$\upsilon = λf \rightarrow \upsilon = \dfrac{λ}{T} \rightarrow λ = \upsilon T = 10\dfrac{m}{s}\cdot 0,2\ s \rightarrow \boxed{λ = 2\ m}$.

β) Το Σ ξεκινά την ταλάντωσή του τη χρονική στιγμή $t_1 = 0,25\ s$. Άρα η απόστασή του $x_Σ$ από το Ο θα είναι $x_Σ = \upsilon t_1 \rightarrow x_Σ = 10\dfrac{m}{s}\cdot 0,25\ s \rightarrow \boxed{x_Σ = 2,5\ m}$.



Παρατηρούμε ότι τη στιγμή $t_2 = 0,65\ s$ το Σ σταματά την ταλάντωσή του. Αυτό σημαίνει ότι: i) Τη στιγμή αυτή φθάνει και το ανακλώμενο κύμα στο Σ και ii) στο Σ δημιουργείται δεσμός του στάσιμου κύματος. Η απόσταση που έχουν συνολικά διανύσει το προσπίπτον και το ανακλώμενο κύμα μέχρι και το ανακλώμενο κύμα να φθάσει στο Σ είναι $\ell + (\ell - x_Σ) = 2\ell - x_Σ$ και επειδή τα δύο αυτά κύματα έχουν την ίδια ταχύτητα διάδοσης, θα ισχύει:

$2\ell - x_Σ = \upsilon t_2 \rightarrow \ell = \dfrac{\upsilon t_2 + x_Σ}{2}$.

Με αντικατάσταση: $\boxed{\ell = 4,5\ m}$.

γ) Η απόσταση του Σ από το Ο είναι $x_Σ = 2,5\ m = 5\cdot 0,5\ m = 5\cdot\dfrac{λ}{4}$, δηλ. περιττό πλήθος του ${λ}/{4}$. Δεδομένου ότι το Σ είναι δεσμός, συμπεραίνουμε ότι στο Ο δημιουργείται κοιλία, η οποία μάλιστα ταλαντώνεται χωρίς αρχική φάση. Επομένως η εξίσωση του στάσιμου κύματος θα είναι της μορφής: $y = 2A \cdot συν2π\frac{x}{λ} \cdot ημ2π\frac{t}{T}$, με $A = 0{,}1\,m$. Αντικαθιστώντας έχουμε: $y = 2 \cdot 0{,}1 \cdot συν2π\frac{x}{2} \cdot ημ2π\frac{t}{0{,}2} \to$

$\boxed{y = 0{,}2 \cdot συν(πx) \cdot ημ(10πt)}$ (S.I.)

δ) Η επόμενη από το Σ κοιλία απέχει από το Σ απόσταση $λ/4$. Άρα το Ρ βρίσκεται στη θέση $x_P = x_Σ + \frac{λ}{8} = \left(2{,}5 + \frac{2}{8}\right) m = 2{,}75\,m$. Η εξίσωση ταλάντωσης του Ρ είναι:

$y_P = 0{,}2 \cdot συν(2{,}75x) \cdot ημ(10πt) \to$

$y_P = 0{,}2 \cdot συν\frac{11π}{4} \cdot ημ(10πt) \to y_P = 0{,}2 \cdot συν\left(2π + \frac{3π}{4}\right) \cdot ημ(10πt) \to$

$y_P = 0{,}2 \cdot συν\frac{3π}{4} \cdot ημ(10πt) \to y_P = 0{,}2 \cdot \left(-συν\frac{π}{4}\right) \cdot ημ(10πt) \to$

$y_P = -0{,}2 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot ημ(10πt) \to y_P = 0{,}1\sqrt{2} \cdot ημ(10πt + π)$ (S.I.)

Άρα η αρχική φάση της ταλάντωσης του Ρ είναι $\boxed{φ'_0 = π\ rad}$. Η εξίσωση της ταχύτητάς του είναι της μορφής $v_P = v_{max} \cdot συν(ωt + φ'_0)$, όπου

$v_{max} = 10π \cdot 0{,}1\sqrt{2}\ m/s = π\sqrt{2}\ m/s$. Άρα $\boxed{v_P = π\sqrt{2} \cdot συν(10πt + π)}$ (S.I.)

ΘΕΜΑ 4[ο]

α) Για το σύστημα της τροχαλίας Μ και του σώματος μάζας m_1 θα εφαρμόσουμε την αρχή διατήρησης της μηχανικής ενέργειας, από τη στιγμή που η m_1 αφέθηκε ελεύθερη (θέση Β) μέχρι τη στιγμή που έχει κατέλθει κατά h και συγκρούεται με την m_2 (θέση Γ) οπότε η m_1 έχει ταχύτητα $υ_1$ και η τροχαλία γωνιακή ταχύτητα $ω_1$.

$E_A = E_B \to m_1gh = \frac{1}{2}Iω_1^2 + \frac{1}{2}m_1υ_1^2 \to m_1gh = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}MR^2ω_1^2 + \frac{1}{2}m_1υ_1^2$ (1)

Κάθε χρονική στιγμή η γραμμική ταχύτητα του σημείου Α της τροχαλίας είναι ίση με την ταχύτητα υ της m_1.

$υ_A = υ$. Όμως $υ_A = ωR$, οπότε $υ = ωR$ (2)

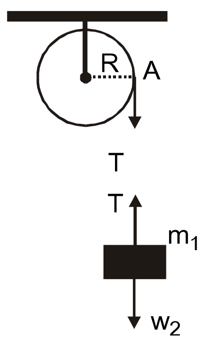
Στην κατώτατη θέση θα ισχύει $υ_1 = ω_1R$, οπότε η (1) γίνεται

$m_1gh = \frac{1}{4}MR^2\frac{υ_1^2}{R^2} + \frac{1}{2}m_1υ_1^2$.

Λύνοντας ως προς $υ_1$ βρίσκουμε $υ_1 = 2\sqrt{\frac{m_1gh}{M + 2m_1}}$ και με αντικατάσταση:

$\boxed{υ_1 = 4\ m/s}$, με φορά προς τα κάτω.

β) Θεωρούμε το σύστημα τροχαλία-μάζα m_1, σε μία τυχαία θέση.



Εφαρμογή του 2ου Νόμου του Newton για την m_1:

$\Sigma F_1 = m_1\alpha \rightarrow m_1 g - T = m_1\alpha$ (3)

(όπου α η επιτάχυνση της m_1)

Εφαρμογή Θεμελιώδους Νόμου της Στροφικής Κίνησης για την Μ: $\Sigma\tau = I\alpha_{\gamma\omega\nu} \rightarrow TR = \frac{1}{2}MR^2\alpha_{\gamma\omega\nu}$ (4) (όπου $\alpha_{\gamma\omega\nu}$ η γωνιακή επιτάχυνση της τροχαλίας).

Όμως $2) \rightarrow \frac{du}{dt} = R\frac{d\omega}{dt} \rightarrow \alpha = R\alpha_{\gamma\omega\nu} \rightarrow \alpha_{\gamma\omega\nu} = \frac{\alpha}{R}$ (5)

Έτσι $4) \xrightarrow{(5)} TR = \frac{1}{2}MR^2\frac{\alpha}{R} \rightarrow T = \frac{1}{2}M\alpha$ (6)

Τότε $3) \xrightarrow{(6)} m_1 g - \frac{1}{2}M\alpha = m_1\alpha \rightarrow m_1 g = \alpha\left(m_1 + \frac{M}{2}\right) \rightarrow \alpha = \frac{2m_1 g}{2m_1 + M}$.

Αντικαθιστώντας βρίσκουμε $\alpha = 5\ m/s^2$.

Αν είναι t ο χρόνος καθόδου της m_1, ισχύει: $h = \frac{1}{2}\alpha t^2 \rightarrow t = \sqrt{\frac{2h}{\alpha}} \rightarrow t = 0{,}8\ s$.

Στο χρόνο t η m_2 έχει εκτελέσει 4 πλήρεις ταλαντώσεις, οπότε

$t = 4T \rightarrow T = t/4 \rightarrow T = 0{,}2\ s$.

Η γωνιακή συχνότητα της ταλάντωσης της m_2 είναι $\omega_2 = \frac{2\pi}{T} = 10\pi\ \frac{rad}{s}$. Τη στιγμή της κρούσης η m_2 διέρχεται από τη θέση της ισορροπίας της, οπότε έχει τη μέγιστη ταχύτητα της ταλάντωσής της μέτρου $\upsilon_2 = \omega_2 \cdot A \rightarrow \boxed{\upsilon_2 = 5\ m/s}$.

Για τα μέτρα των υ_1 και υ_2 ισχύει $\upsilon_1 < \upsilon_2$, οπότε η κρούση θα ήταν αδύνατη αν η m_2 εκινείτο προς τα κάτω. Άρα η υ_2 έχει φορά προς τα πάνω.

Αφού τη στιγμή της κρούσης η m_2 έχει εκτελέσει ακέραιο πλήθος ταλαντώσεων η αρχική της ταχύτητα θα είναι διανυσματικά ίση με την υ_2. Δηλ. $\boxed{\upsilon_{\alpha\rho\chi} = 5\ m/s}$ με φορά προς τα πάνω.

γ) Επειδή η κρούση είναι κεντρική και ελαστική και $m_1 = m_2$, τα σώματα θα ανταλλάξουν ταχύτητες. Έτσι η m_1 μετά την κρούση θα έχει ταχύτητα $\boxed{\upsilon_1' = 5\ m/s}$ με φορά προς τα πάνω και η m_2 θα έχει ταχύτητα $\boxed{\upsilon_2' = 4\ m/s}$ με φορά προς τα κάτω.

δ) Η μάζα m_2 θα κάνει νέα ταλάντωση με την ίδια όμως γωνιακή συχνότητα ω_2, ίδια περίοδο Τ και χωρίς ν' αλλάξει η θέση ισορροπίας της. Έτσι η ταχύτητα υ_2' είναι πάλι η μέγιστη της ταλάντωσης. Αν Α΄ είναι το νέο πλάτος, έχουμε:

$\upsilon_2' = \omega_2 \cdot A' \rightarrow A' = \frac{\upsilon_2'}{\omega} \rightarrow \boxed{A' = \frac{2}{5\pi}\ m}$.

Ο χρόνος t΄ που απαιτείται για να βρεθεί η m_2 στην κατώτατη θέση είναι

$$t' = \frac{T}{4} \rightarrow \boxed{t' = 0{,}05\ \mathrm{s}}.$$

Επιμέλεια: ***Δημάρατος Δημήτρης***