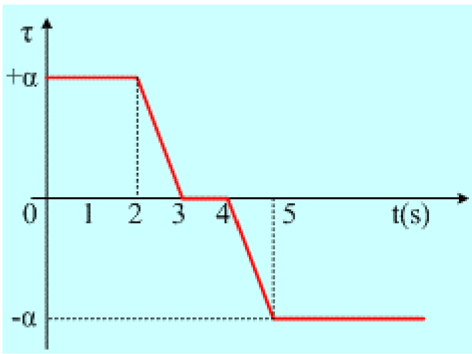
Ονοματεπώνυμο: Διάρκεια: (3×45)+15=150 min

Τμήμα:

ΓΡΑΠΤΗ ΕΞΕΤΑΣΗ ΣΤΗ ΜΗΧΑΝΙΚΗ ΣΤΕΡΕΟΥ

Ζήτημα 1ο

Ένα στερεό μπορεί να στρέφεται γύρω από σταθερό άξονα και αρχικά ηρεμεί. Σε μια στιγμή δέχεται (ολική) ροπή ως προς τον άξονα, η οποία μεταβάλλεται όπως στο διάγραμμα, όπου α μια ορισμένη τιμή.



Ποιες προτάσεις είναι σωστές και ποιες λάθος:

1) Για το διάστημα 0-2s:
   α) Το στερεό έχει σταθερή γωνιακή επιτάχυνση
   β) Το στερεό έχει σταθερή γωνιακή ταχύτητα.
   γ) Η στροφορμή του στερεού αυξάνεται.
   δ) Η κινητική ενέργεια αυξάνεται γραμμικά με το χρόνο.

2) Από 2s-3s:
   α) Το στερεό επιβραδύνεται.
   β) Η στροφορμή του στερεού μειώνεται.
   γ) Η κινητική ενέργεια αυξάνεται.

3) Από 3s-4s το στερεό ηρεμεί.

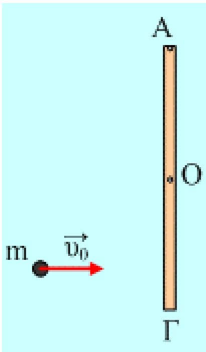
4) Αν το εμβαδό στο παραπάνω διάγραμμα ισούται αριθμητικά με τη μεταβολή της στροφορμής, η γωνιακή ταχύτητα τη στιγμή t=2s είναι ίση με τη γωνιακή ταχύτητα τη στιγμή t=5s.

5) Ποια χρονική στιγμή αλλάζει η φορά περιστροφής του στερεού; Να αιτιολογηθεί η απάντησή σας.

Μονάδες $(2\times 8)+4+5=25$

Ζήτημα 2ο

Α) Μια ομογενής ράβδος μάζας m και μήκους l μπορεί να στρέφεται γύρω από οριζόντιο άξονα ο οποίος περνά από το άκρο της Α και ηρεμεί σε κατακόρυφη θέση. Ένα σώμα Σ μάζας επίσης m που θεωρείται υλικό σημείο κινείται με ταχύτητα $\mathbf{υ_0}$ σε διεύθυνση κάθετη στη ράβδο και συγκρούεται ελαστικά με την ράβδο.



Ποιες προτάσεις είναι σωστές και ποιες λάθος:

1) Για την σύγκρουση μεταξύ των δύο σωμάτων ισχύει η αρχή διατήρησης της ορμής.
2) Για την σύγκρουση μεταξύ των δύο σωμάτων ισχύει η αρχή διατήρησης της στροφορμής.
3) Αφού η κρούση είναι ελαστική ισχύει:

$$\tfrac{1}{2}\, mυ_0^{2} = \tfrac{1}{2}\, mυ'^{2}_{1} + \tfrac{1}{2}\, mυ'^{2}_{2}$$

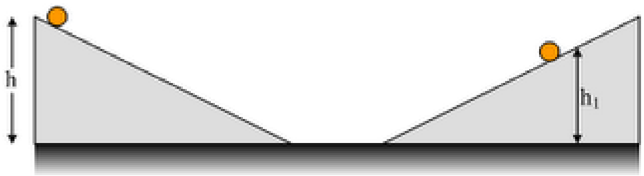
όπου $υ_1'$ η ταχύτητα της σφαίρας μετά την κρούση και $υ_2'$ η ταχύτητα του κέντρου μάζας Ο της ράβδου.

Να δικαιολογήσετε την απάντησή σας.

Β) Μια μικρή σφαίρα αφήνεται να κινηθεί από ύψος h=1,75m κατά μήκος ενός κεκλιμένου επιπέδου με γωνία κλίσης θ, οπότε κυλίεται χωρίς να ολισθαίνει και φτάνει στο οριζόντιο επίπεδο όπου συνεχίζει να κυλίεται χωρίς να ολισθαίνει. Αν η σφαίρα στη συνέχεια της κίνησής της συναντήσει ένα δεύτερο λείο κεκλιμένο επίπεδο με την ίδια γωνία κλίσης θ, θα φτάσει κατά την άνοδό της στο επίπεδο αυτό σε ύψος h_1 όπου;

1) $h_1=h$ 2) $h_1=(5/7)h$ 3) $h_1=(7/5)h$ 4) $h_1=(2/3)h$

Να δικαιολογήσετε αναλυτικά την απάντησή σας.

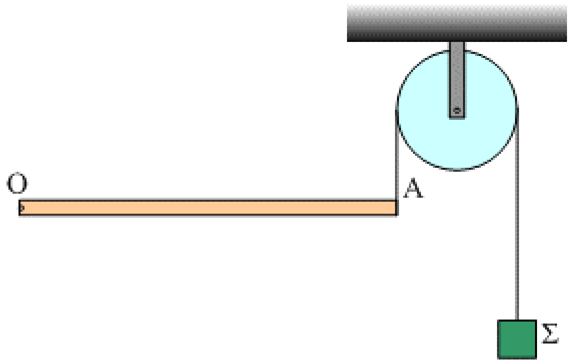


Κατά τα πέρασμα από το κεκλιμένο στο οριζόντιο επίπεδο και από το οριζόντιο στο κεκλιμένο επίπεδο το μέτρο της ταχύτητας του κέντρου μάζας της σφαίρας δε μεταβάλλεται. Δίνεται ότι η ακτίνα της σφαίρας είναι αμελητέα σε σχέση με το ύψος h, ενώ η ροπή αδράνειάς της ως προς μια διάμετρό της δίνεται από τη σχέση $I=(2/5)MR^2$

Μονάδες $(3\times4)+(3+10)=25$

Ζήτημα 3ο

Η ομογενής ράβδος ΟΑ μήκους L και μάζας m_1=3kg μπορεί να στρέφεται γύρω από οριζόντιο άξονα που περνά από το άκρο του Ο. Το άλλο άκρο της Α, δένεται στο ένα άκρο αβαρούς νήματος. Το νήμα αφού περάσει από το αυλάκι μιας τροχαλίας μάζας Μ=6kg καταλήγει σε ένα σώμα Σ μάζας m_2=1kg. Το σύστημα συγκρατείται έτσι ώστε η ράβδος να είναι οριζόντια, όπως στο σχήμα.



Α) Να δειχθεί ότι η τάση του νήματος στο άκρο Α και στο σώμα Σ έχει το ίδιο μέτρο. Να βρεθεί η δύναμη που πρέπει να ασκείται στο σώμα Σ ώστε το σύστημα να ισορροπεί.

Β) Να βρεθεί η δύναμη που δέχεται η ράβδος από τον οριζόντιο άξονα Ο.

Γ) Αν αφήσουμε το σύστημα ελεύθερο να κινηθεί, το σώμα Σ θα κινηθεί προς τα πάνω ή προς τα κάτω; Με δεδομένο ότι όλα τα σημεία του νήματος έχουν ίσες κατά μέτρο επιταχύνσεις α, να δείξετε ότι $\frac{a_{\gamma\omega\nu(1)}}{a_{\gamma\omega\nu(2)}}=\frac{R}{L}$, όπου $a_{\gamma\omega\nu(1)}$ η αρχική γωνιακή επιτάχυνση της ράβδου, $a_{\gamma\omega\nu(2)}$ η αρχική γωνιακή επιτάχυνση της τροχαλίας, L το μήκος της ράβδου και R η ακτίνα της τροχαλίας. Να βρείτε επίσης την αρχική επιτάχυνση του σώματος Σ.

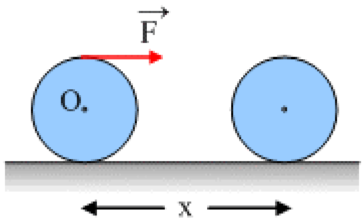
Δίνεται ότι το νήμα δεν γλιστρά στο αυλάκι της τροχαλίας και δεν εμφανίζονται τριβές ούτε στον άξονα της τροχαλίας, ούτε στον άξονα περιστροφής της ράβδου.

Δίνονται ακόμη οι ροπές αδράνειας ως προς τους άξονες περιστροφής, για τη ράβδο $I_1= 1/3\ m_1 \cdot \ell^2$ και για την τροχαλία $I_2= \frac{1}{2}\ MR^2$ ενώ $g=10m/s^2$.

Μονάδες (4+6)+4+(3+3+5)=25

Ζήτημα 4ο

Γύρω από έναν ομογενή κύλινδρο μάζας m και ακτίνας R, τυλίγουμε ένα αβαρές νήμα και τον αφήνουμε να κινηθεί σε λείο οριζόντιο επίπεδο, τραβώντας το νήμα με σταθερή οριζόντια δύναμη F, όπως στο σχήμα. Δίνεται η ροπή αδράνειας του κυλίνδρου ως προς τον άξονά του: $I= 1/2\ mR^2$.



Α) Να αποδείξετε ότι ο κύλινδρος θα εκτελέσει και μεταφορική και περιστροφική κίνηση και να βρείτε τη σχέση που συνδέει τη γωνιακή επιτάχυνση με την επιτάχυνση του κέντρου μάζας του κυλίνδρου. Είναι η κίνηση του κυλίνδρου κύλιση χωρίς ολίσθηση;

Β) Να βρείτε την επιτάχυνση του σημείου εφαρμογής Α της δύναμης F. Να δείξετε ότι η μετατόπιση του σημείου αυτού είναι τριπλάσια από τη μετατόπιση του κέντρου μάζας του κυλίνδρου.

Γ) Να δείξετε ότι για μια οριζόντια μετατόπιση του κυλίνδρου κατά x η ενέργεια που μεταφέρθηκε στον κύλινδρο είναι ίση με W=3Fx.
Να βρεθεί ο λόγος της μεταφορικής προς την περιστροφική κινητική ενέργεια του κυλίνδρου.

Μονάδες (2+2+2+2)+(3+3)+(5+6)=25

Καλή επιτυχία

<u>Θοδωρής Παπασγουρίδης</u>

ΣΥΝΤΟΜΕΣ ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

Ζήτημα 1ο

1) Για το διάστημα 0-2s εκτελεί ομαλά επιταχυνόμενη περιστροφική κίνηση, αφού δέχεται σταθερή ροπή. Οπότε:

α) Σ β) Λ γ) Σ δ) Λ

2) Για το διάστημα 2-3s δέχεται ροπή ομόρροπη της φοράς περιστροφής, άρα συνεχίζει να επιταχύνεται μη ομαλά. Οπότε:

α) Λ β) Λ γ) Σ

3) Για το διάστημα 3-4s ,Στ=0, άρα εκτελεί ομαλή περιστροφική κίνηση. Οπότε: Λ

4) Από τα εμβαδά των ορθογωνίων τριγώνων μεταξύ των χρονικών διαστημάτων 2-3s και 4-5s προκύπτει:

$$\Delta L_{2\to 3} = -\Delta L_{4\to 5} \Leftrightarrow L_3 - L_2 = -(L_5 - L_4) \Leftrightarrow L_3 - L_2 = L_4 - L_5 \Leftrightarrow L_2 = L_5 \Leftrightarrow I\omega_2 = I\omega_5 \Leftrightarrow \omega_2 = \omega_5$$

αφού $L_3 = L_4$. Οπότε: Σ

5) Η φορά περιστροφής του στερεού αλλάζει μετά το μηδενισμό της γωνιακής ταχύτητας. Αφού ξεκινά από την ηρεμία και $\omega_2 = \omega_5$ πρέπει:

$$\Delta L_{0\to 2} = -\Delta L_{5\to t} \Leftrightarrow 2a = -(t-5)(-a) \Leftrightarrow t = 7s$$

Ζήτημα 2ο

Α) 1) Λ: Το σύστημα δεν είναι μονωμένο, αφού η ράβδος δέχεται δύναμη από τον άξονα περιστροφής στο άκρο Α: $\Sigma F_{\varepsilon\xi} \neq 0$. Η ράβδος δε μπορεί να εκτελέσει μεταφορική κίνηση.

2) Σ: Αφού Στ(εξ)=0 ως προς τον άξονα περιστροφής Α.

3) Λ: $K_{o\lambda(\pi\rho\iota\nu)} = K_{o\lambda(\mu\varepsilon\tau\acute{\alpha})} \Leftrightarrow \frac{1}{2}m\upsilon_o^2 = \frac{1}{2}m\upsilon_1'^2 + \frac{1}{2}I_A\omega^2$

Β) Κατά την κύλιση χωρίς ολίσθηση στο πρώτο πλάγιο επίπεδο, η στατική τριβή που δέχεται η σφαίρα, δεν προκαλεί θερμικές απώλειες ενέργειας, άρα η μηχανική ενέργεια διατηρείται σταθερή. Τη στιγμή που φθάνει στο οριζόντιο επίπεδο η αρχική δυναμική έχει μετατραπεί πλήρως σε κινητική:

$$mgh = \frac{1}{2}m\upsilon_{cm}^2 + \frac{1}{2}I\omega^2 \Leftrightarrow .... \Leftrightarrow \omega^2 = \frac{10gh}{7R^2} \quad (1)$$

Καθώς ανεβαίνει στο δεύτερο πλάγιο επίπεδο, το οποίο είναι λείο, δεν αναπτύσσεται τριβή, άρα δε δημιουργείται ροπή. Έτσι εκτελεί σύνθετη κίνηση, όπου η περιστροφική είναι ομαλή και η μεταφορική ομαλά επιβραδυνόμενη. Στη θέση μέγιστου ύψους έχει υ=0, αλλά γωνιακή ίση με αυτή που είχε στο οριζόντιο επίπεδο. Σε όλη τη διάρκεια της κίνησης, η μηχανική ενέργεια διατηρείται σταθερή. Άρα:

$$mgh = mgh_1 + \frac{1}{2}I\omega^2 \Leftrightarrow ... \Leftrightarrow mgh_1 = \frac{5}{7}mgh \Leftrightarrow h_1 = \frac{5}{7}h$$

Ζήτημα 3ο

Α) Για την τροχαλία: $\Sigma\tau = 0 \Leftrightarrow T_1R - T_2R = 0 \Leftrightarrow T_1 = T_2$

Για τη ράβδο: $\Sigma\tau_{(o)} = 0 \Leftrightarrow W_1\frac{L}{2} = T_1L \Leftrightarrow T_1 = 15N$

Για το (Σ): $\Sigma F = 0 \Leftrightarrow T_2 = W_2 + F \Leftrightarrow F = 5N$, με φορά προς τα κάτω.

Β) Μεταφορική ισορροπία ράβδου: $\Sigma F = 0 \Leftrightarrow F_1 = W_1 - T_1 \Leftrightarrow F_1 = 15N$.

Γ) Αφού παύει να ασκείται η $\vec{F}$ στο (Σ), αυτό θα κινηθεί προς τα πάνω.
Όλα τα σημεία του νήματος έχουν ίσες κατά μέτρο επιταχύνσεις. Η επιτρόχια επιτάχυνση του άκρου Α: $a_{\varepsilon(1)} = a_{\gamma\omega\nu(1)}L$, όπου $a_{\gamma\omega\nu(1)}$ η αρχική γωνιακή επιτάχυνση της ράβδου, θα είναι ίση κατά μέτρο με την επιτρόχια επιτάχυνση των σημείων της περιφέρειας της τροχαλίας: $a_{\varepsilon(2)} = a_{\gamma\omega\nu(2)}R$ όπου $a_{\gamma\omega\nu(2)}$ η αρχική γωνιακή επιτάχυνση της τροχαλίας. Άρα:

$$a_{\varepsilon(1)} = a_{\varepsilon(2)} \Leftrightarrow a_{\gamma\omega\nu(1)}L = a_{\gamma\omega\nu(2)}R \Leftrightarrow \frac{a_{\gamma\omega\nu(1)}}{a_{\gamma\omega\nu(2)}} = \frac{R}{L}$$

Δηλαδή ισχύει: $a_{\gamma\omega\nu(1)}L = a_{\gamma\omega\nu(2)}R = a$
Εφαρμόζοντας το θεμελιώδη νόμο της μηχανικής έχουμε:

Για το (Σ): $T_2 - m_2g = m_2a$ (1)

Για την τροχαλία: $T_1R - T_2R = \frac{1}{2}MR^2a_{\gamma\omega\nu(2)} \Leftrightarrow T_1 - T_2 = \frac{1}{2}Ma$ (2)

Για τη ράβδο: $W_1\frac{L}{2} - T_1 L = \frac{1}{3}m_1 L^2 a_{\gamma\omega\nu(1)} \Leftrightarrow ... \Leftrightarrow \frac{W_1}{2} - T_1 = \frac{1}{3}m_1 a$ (3)

Προσθέτοντας κατά μέλη τις (1), (2), (3) βρίσκουμε: $a = 1\frac{m}{s^2}$

Ζήτημα 4ο

Α) Το σχοινί ξετυλίγεται παραμένοντας οριζόντιο, ενώ «μεταφέρει» τη δύναμη F από το άκρο Α στο ανώτερο σημείο της εκάστοτε κατακόρυφης διαμέτρου του κυλίνδρου.
Ισχύει:

$$\Sigma F = F = ma_{cm} \Leftrightarrow a_{cm} = \frac{F}{m}$$

$\Sigma\tau = FR = \frac{1}{2}mR^2 a_{\gamma\omega\nu} \Leftrightarrow a_{\gamma\omega\nu} = \frac{2F}{mR}$, διαιρώντας κατά μέλη: $a_{cm} = \frac{1}{2}a_{\gamma\omega\nu}R$

Επειδή $a_{cm} \neq a_{\gamma\omega\nu}R$, η σύνθετη κίνηση δεν είναι κύλιση χωρίς ολίσθηση, αλλά κύλιση με ολίσθηση προς τα πίσω.

Β) Όλα τα σημεία του οριζόντιου τμήματος του σχοινιού έχουν ίσες επιταχύνσεις:

$$\overrightarrow{a_A} = \overrightarrow{a_{cm}} + \overrightarrow{a_\varepsilon} \Leftrightarrow a_A = a_{cm} + a_{\gamma\omega\nu}R \Leftrightarrow a_A = \frac{F}{m} + \frac{2F}{mR}R \Leftrightarrow a_A = \frac{3F}{m} = 3a_{cm}$$

Για το άκρο Α του νήματος: $x_A = \frac{1}{2}a_A t^2$

Για το κέντρο μάζας: $x = \frac{1}{2}a_{cm}t^2$

Διαιρώντας κατά μέλη:

$$\frac{x_A}{x} = \frac{a_A}{a_{cm}} = 3 \Leftrightarrow x_A = 3x$$

Γ) Η ενέργεια που μεταφέρθηκε στον κύλινδρο είναι ίση με το έργο της F: $W_F = Fx_A = F3x \Leftrightarrow W_F = 3Fx$

Θεωρώντας ότι η F ασκείται στο κέντρο μάζας του κυλίνδρου, έχουμε:

ΘΜΚΕ για τη μεταφορική: $K_{\mu\varepsilon\tau} - 0 = W_F \Leftrightarrow K_{\mu\varepsilon\tau} = Fx$

ΘΜΚΕ για την περιστροφική:

$$K_{\pi\varepsilon\rho} = FR\cdot\theta = FR\cdot\frac{1}{2}\frac{2F}{mR}t^2 = F2(\frac{1}{2}\frac{F}{m}t^2) \Leftrightarrow K_{\pi\varepsilon\rho} = F2(\frac{1}{2}a_{cm}t^2) = F2x$$

ή $K_{\pi\varepsilon\rho} = W_F - K_{\mu\varepsilon\tau} \Leftrightarrow K_{\pi\varepsilon\rho} = 3Fx - Fx = 2Fx$

Άρα: $\frac{K_{\mu\varepsilon\tau}}{K_{\pi\varepsilon\rho}} = \frac{1}{2}$

Θοδωρής Παπασγουρίδης

papasgou@gmail.com