ΚΕΦΑΛΑΙΟ $1^{ο}$: ΜΗΧΑΝΙΚΕΣ – ΗΛΕΚΤΡΙΚΕΣ ΤΑΛΑΝΤΩΣΕΙΣ

ΕΝΟΤΗΤΑ 1.1: ΠΕΡΙΟΔΙΚΟ ΦΑΙΝΟΜΕΝΟ – ΑΠΛΗ ΑΡΜΟΝΙΚΗ ΤΑΛΑΝΤΩΣΗ (ΚΙΝΗΜΑΤΙΚΗ ΚΑΙ ΔΥΝΑΜΙΚΗ ΠΡΟΣΕΓΓΙΣΗ)

ΘΕΜΑΤΑ ΠΡΟΣ ΕΠΙΛΥΣΗ

ΘΕΜΑ Β

Ερώτηση 1.

Σώμα εκτελεί Α.Α.Τ. με εξίσωση απομάκρυνσης της μορφής $x = A \cdot ημωt$. Να βρεθεί η σχέση που συνδέει την απομάκρυνση με την ταχύτητα του ταλαντούμενου σώματος.

Λύση

Η απόδειξη υπάρχει στη θεωρία.

Ερώτηση 2.

Σώμα εκτελεί Α.Α.Τ. με εξίσωση απομάκρυνσης της μορφής $x = A \cdot ημωt$. Να αποδείξετε ότι η σχέση που συνδέει την ταχύτητα με την επιτάχυνση της ταλάντωσης για κάθε χρονική στιγμή είναι η παρακάτω:

$$a = \pm\omega\sqrt{u_{max}^2 - u^2}$$

<u>Λύση</u>

Η απόδειξη υπάρχει στη θεωρία.

Ερώτηση 3.

Σώμα μάζας m εκτελεί Α.Α.Τ. Αν η σταθερά επαναφοράς της ταλάντωσης είναι D και η εξίσωση της απομάκρυνσης είναι της μορφής $x = A \cdot ημωt$, να αποδείξετε ότι η σχέση που συνδέει τη δύναμη επαναφοράς με την απομάκρυνση είναι $F = -D \cdot x$

Να γίνει η αντίστοιχη γραφική παράσταση $(F = f(x))$.

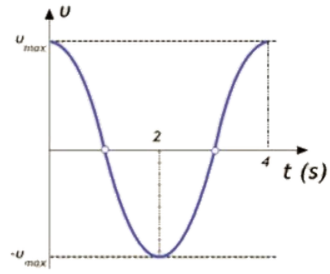
Ποιά φυσικά μεγέθη υπολογίζονται από την κλίση και το εμβαδόν της γραφικής παράστασης;

<u>Λύση</u>

Η απόδειξη και όλες οι απαντήσεις υπάρχουν στη θεωρία.

Ερώτηση 4.

Το διάγραμμα του σχήματος παριστάνει την ταχύτητα ενός σώματος, το οποίο εκτελεί απλή αρμονική ταλάντωση πλάτους Α, σε συνάρτηση με το χρόνο. Τη χρονική στιγμή $t_1 = 3\ s$ το σώμα βρίσκεται στη θέση:



α) $x_1 = 0$.

β) $x_1 = +A$.

γ) $x_1 = -A$.

Να επιλέξετε τις σωστή απάντηση και να αιτιολογήσετε την επιλογή σας.

Λύση

Σωστή απάντηση είναι η (γ).

Από το διάγραμμα φαίνεται ότι τη χρονική στιγμή $t_1 = 3\ s$, ο ταλαντωτής έχει ταχύτητα μηδενική, άρα βρίσκεται σ' ένα από τα ακρότατα της ταλάντωσης.

Παρατηρούμε επίσης απ' το διάγραμμα, ότι λίγο πριν τη χρονική στιγμή $t_1 = 3\ s$, η ταχύτητά του είναι αρνητική και αμέσως μετά γίνεται θετική. Αυτό σημαίνει λίγο πριν τα $3s$ κινείται στην αρνητική φορά και αμέσως μετά στην θετική. Άρα πρόκειται για το αρνητικό ακρότατο, δηλαδή $x_1 = -A$.

Ερώτηση 5.

Σώμα εκτελεί Α.Α.Τ. με περίοδο 4s. Όταν το σώμα διέρχεται από τη θέση ισορροπίας η ταχύτητά του είναι $1\ \text{m/s}$. Οι ακραίες θέσεις απέχουν απόσταση που είναι ίση με:

α) $\frac{2}{\pi}\text{m}$.

β) $\pi\ \text{m}$.

γ) $\frac{4}{\pi}\text{m}$.

Να επιλέξετε τη σωστή απάντηση και να αιτιολογήσετε την επιλογή σας.

<u>Λύση</u>

Σωστή απάντηση είναι η γ.

Από τη σχέση περιόδου - γωνιακής συχνότητας παίρνουμε:

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi}{4}\text{rad/s} \Rightarrow \omega = \frac{\pi}{2}\text{rad/s}$$

Όταν το σώμα διέρχεται από τη θέση ισορροπίας του έχει τη μέγιστη ταχύτητα. Από τη σχέση μέγιστης ταχύτητας-πλάτους ταλάντωσης παίρνουμε:

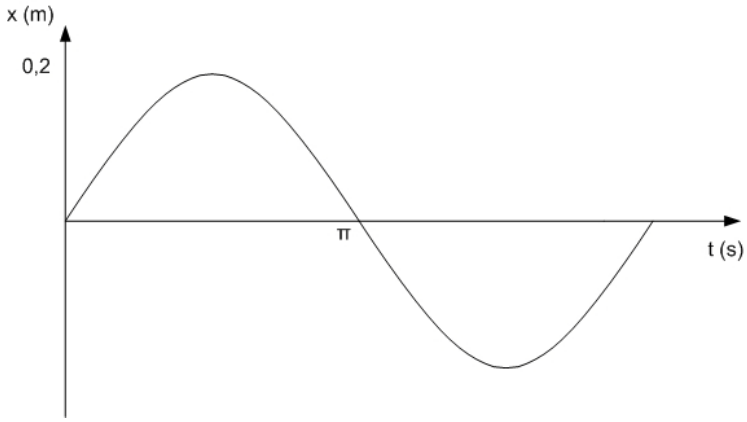
$$\upsilon_{max} = \omega A \Rightarrow A = \frac{\upsilon_{max}}{\omega} \Rightarrow A = \frac{1\ \text{m/s}}{\pi/2\ \text{rad/s}} \Rightarrow A = \frac{2}{\pi}\text{m}$$

Οι ακραίες θέσεις ενός σώματος που ταλαντώνεται απέχουν μεταξύ τους d=2A. Άρα

$$d = 2\frac{2}{\pi}\text{m} \Rightarrow d = \frac{4}{\pi}\text{m}$$

Ερώτηση 6.

Το διάγραμμα απομάκρυνσης-χρόνου φαίνεται στο παρακάτω σχήμα:



Η μέγιστη ταχύτητα ταλάντωσης είναι ίση με:

α) $0,2\ \mathrm{m/s}$.

β) $5\ \mathrm{m/s}$.

γ) $\pi\ \mathrm{m/s}$.

Να επιλέξετε τη σωστή απάντηση και να αιτιολογήσετε την επιλογή σας.

<u>Λύση</u>

Σωστή απάντηση είναι η α.

Από το διάγραμμα προκύπτει: $A = 0,2\mathrm{m}$ και $T = 2\pi\ \mathrm{s}$.

Από τη σχέση περιόδου - γωνιακής συχνότητας παίρνουμε:

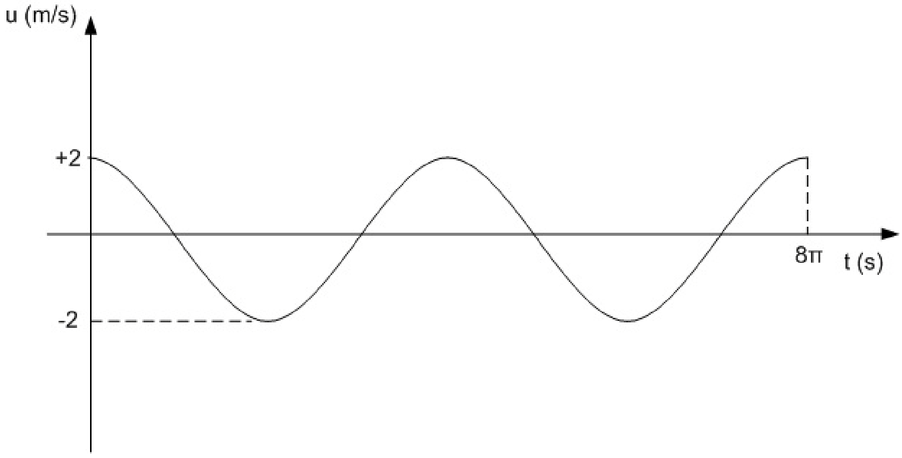
$$\omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi}{2\pi}\mathrm{rad/s} \Rightarrow \omega = 1\mathrm{rad/s}$$

Από τη σχέση μέγιστης ταχύτητας-πλάτους ταλάντωσης παίρνουμε:

$$\upsilon_{max} = \omega A = (1\mathrm{rad/s})\cdot 0,2\mathrm{m} \Rightarrow \upsilon_{max} = 0,2\mathrm{m/s}.$$

Ερώτηση 7.

Το διάγραμμα ταχύτητας-χρόνου φαίνεται στο παρακάτω σχήμα:



Το πλάτος της ταλάντωσης είναι:

α) 2m.

β) 4m.

γ) 8π m.

Να επιλέξετε τη σωστή απάντηση και να αιτιολογήσετε την επιλογή σας.

<u>Λύση</u>

Σωστή απάντηση είναι η β.

Από το διάγραμμα προκύπτει: $\upsilon_{max} = 2\text{m/s}$ και $2\text{T} = 8\pi\ \text{s} \Rightarrow \text{T} = 4\pi\ \text{s}$.

Από τη σχέση περιόδου - γωνιακής συχνότητας παίρνουμε:

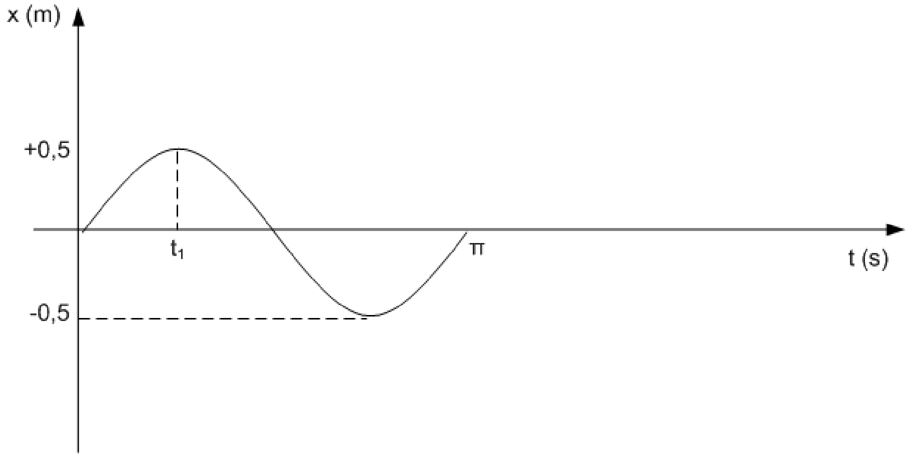
$$\omega = \frac{2\pi}{\text{T}} = \frac{2\pi}{4\pi}\text{rad/s} \Rightarrow \omega = 0,5\,\text{rad/s}$$

Από τη σχέση μέγιστης ταχύτητας-πλάτους ταλάντωσης παίρνουμε:

$$\upsilon_{max} = \omega\text{A} \Rightarrow \text{A} = \frac{\upsilon_{max}}{\omega} \Rightarrow \text{A} = \frac{2\ \text{m/s}}{0,5\ \text{rad/s}} \Rightarrow \text{A} = 4\text{m}.$$

Ερώτηση 8.

Το διάγραμμα απομάκρυνσης-χρόνου φαίνεται στο παρακάτω σχήμα.



Τη χρονική στιγμή t_1 η επιτάχυνση είναι:

α) $-2\frac{m}{s^2}$.

β) 0.

γ) $-0,5\frac{m}{s^2}$.

Να επιλέξετε τη σωστή απάντηση και να αιτιολογήσετε την επιλογή σας.

<u>Λύση</u>

Σωστή απάντηση είναι η α.

Από το διάγραμμα προκύπτει ότι $T = \pi$ s και ότι τη χρονική στιγμή t_1 το σώμα βρίσκεται σε απομάκρυνση $x = +0,5m$.

Από τη σχέση περιόδου - γωνιακής συχνότητας παίρνουμε:

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi}{\pi}\text{rad/s} \Rightarrow \omega = 2\,\text{rad/s}$$

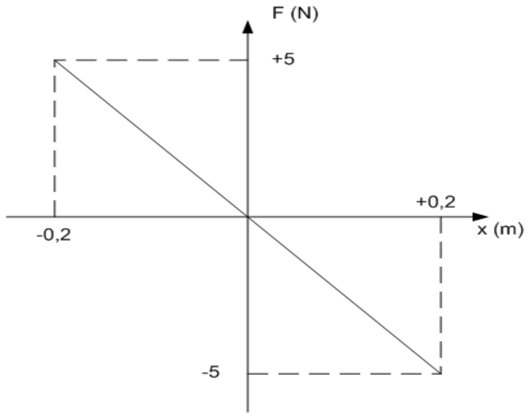
Από το συνδυασμό των σχέσεων $x = A\eta\mu\omega t$ και $\alpha = -\omega^2 A\ \eta\mu\omega t$, εύκολα προκύπτει ότι $\alpha = -\omega^2 x$.

Με αντικατάσταση προκύπτει $a = -(2\text{rad/s})^2 \cdot 0,5\text{m} \Rightarrow a = -2\text{m/s}^2$

.

Ερώτηση 9.

Σώμα εκτελεί Α.Α.Τ. Στο παρακάτω σχήμα φαίνεται το διάγραμμα δύναμης επαναφοράς-απομάκρυνσης.



Η σταθερά επαναφοράς D της ταλάντωσης είναι ίση με

α) $5\ N/m$.

β) $1\ N/m$.

γ) $25\ N/m$.

Να επιλέξετε τη σωστή απάντηση και να αιτιολογήσετε την επιλογή σας.

<u>Λύση</u>

Σωστή απάντηση είναι η γ.

Από το διάγραμμα προκύπτει ότι για $x = -0,2m$, η δύναμη επαναφοράς είναι $F = 5N$.

Η δύναμη επαναφοράς και η απομάκρυνση συνδέονται με τη σχέση $F = -Dx$.

Με αντικατάσταση στην τελευταία σχέση προκύπτει:

$$D = -\frac{F}{x} = -\frac{5N}{-0,2m} \Rightarrow D = 25\,N/m$$

Ερώτηση 10.

Σώμα εκτελεί Α.Α.Τ. Η μάζα του σώματος είναι $m = 4kg$ και η σταθερά επαναφοράς της ταλάντωσης είναι $D = 100\ N/m$.

Το σώμα για να εκτελέσει μια πλήρη ταλάντωση χρειάζεται χρόνο ίσο με:

α) $0,5\pi\ s$.

β) $0,4\pi\ s$.

γ) $2\pi\ s$.

Να επιλέξετε τη σωστή απάντηση και να αιτιολογήσετε την επιλογή σας.

<u>Λύση</u>

Σωστή απάντηση είναι η β.

Η σταθερά επαναφοράς και η μάζα συνδέονται με τη σχέση $D = m\omega^2$.

Με αντικατάσταση βρίσκουμε τη γωνιακή συχνότητα της ταλάντωσης

$$\omega = \sqrt{\frac{D}{m}} = \sqrt{\frac{100\,N/m}{4kg}} \Rightarrow \omega = 5\,rad/s$$

Από τη σχέση περιόδου - γωνιακής συχνότητας παίρνουμε:

$$\omega = \frac{2\pi}{T} \Rightarrow T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{5}s \Rightarrow T = 0,4\pi\ s$$

ΘΕΜΑ Γ

Άσκηση 1.

Σώμα εκτελεί Α.Α.Τ. με περίοδο $T = 2\,s$ και πλάτος ταλάντωσης $A = 0{,}1\,m$. Τη χρονική στιγμή $t = 0$ το σώμα διέρχεται από τη θέση ισορροπίας του με θετική ταχύτητα.

Να υπολογιστούν:

α) η συχνότητα και η γωνιακή συχνότητα ταλάντωσης.

β) το πλάτος της ταχύτητας και το πλάτος της επιτάχυνσης.

γ) να γραφούν οι εξισώσεις της απομάκρυνσης, της ταχύτητας και της επιτάχυνσης σε σχέση με το χρόνο $x = f(t)$, $u = f(t)$ και $a = f(t)$ αντίστοιχα.

<u>Λύση</u>

α) Γνωρίζουμε από τη θεωρία ότι:

$$f = \frac{1}{T} \Rightarrow f = \frac{1}{2} \Rightarrow f = 0{,}5\ \text{Hz}$$

$$\omega = \frac{2\pi}{T} \Rightarrow \omega = \frac{2\pi}{2} \Rightarrow \omega = \pi\ \frac{\text{rad}}{\text{s}}$$

β) Γνωρίζουμε από τη θεωρία ότι:

$$u_{max} = \omega \cdot A = 0{,}1\pi\ m/s$$

$$\alpha_{max} = \omega^2 \cdot A = 0{,}1\pi^2\ m/s^2$$

γ) Με αντικατάσταση των σταθερών μεγεθών στις εξισώσεις προκύπτει:

$x = A \cdot \eta\mu\omega t \Rightarrow x = 0{,}1 \cdot \eta\mu\pi t$ (S.I.)

$u = u_{max} \cdot \sigma\upsilon\nu\omega t \Rightarrow u = 0{,}1\pi \cdot \sigma\upsilon\nu\pi t$ (S.I)

$\alpha = -\alpha_{max} \cdot \eta\mu\omega t \Rightarrow \alpha = -0{,}1\pi^2 \cdot \eta\mu\pi t$ (S.I)

Άσκηση 2.

Σώμα εκτελεί Α.Α.Τ. και η εξίσωση της απομάκρυνσης σε σχέση με το χρόνο είναι $x = 0,2 \cdot ημ2t$ (S.I.). Να υπολογιστούν:

α) η γωνιακή συχνότητα, η περίοδος και η συχνότητα ταλάντωσης.

β) το πλάτος της ταλάντωσης, το πλάτος της ταχύτητας και το πλάτος της επιτάχυνσης.

γ) η απομάκρυνση τη χρονική στιγμή $t = \frac{\pi}{8} s$.

Δίνεται $ημ\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

<u>Λύση</u>

Συγκρίνουμε τη γενική μορφή της εξίσωσης της απομάκρυνσης για $\phi_0 = 0$ με την εξίσωση απομάκρυνσης που δίνεται στην άσκηση.

$$\left.\begin{aligned} x &= A \cdot ημωt \\ x &= 0,2 \cdot ημ2t \end{aligned}\right\} \text{ Άρα } \begin{aligned} A &= 0,2\ m \\ \omega &= 2\ \frac{rad}{s} \end{aligned}$$

(Επειδή η εξίσωση είναι στο S.I. προκύπτουν οι αντίστοιχες μονάδες μέτρησης)

α) $\omega = 2\ \frac{rad}{s}$

$$\omega = \frac{2\pi}{T} \Rightarrow T = \frac{2\pi}{\omega} \Rightarrow T = \frac{2\pi}{2\ \frac{rad}{s}} \Rightarrow T = \pi\ s$$

$$f = \frac{1}{T} \Rightarrow f = \frac{1}{\pi}\ Hz$$

β) $A = 0,2\ m$

$$u_{max} = \omega \cdot A \Rightarrow u_{max} = 2\frac{rad}{s} \cdot 0,2m = 0,4\ m/s$$

$$\alpha_{max} = \omega^2 \cdot A \Rightarrow \alpha_{max} = (2\frac{rad}{s})^2 \cdot 0,2m = 0,8\ \frac{m}{s^2}$$

γ) Τη στιγμή $t = \frac{\pi}{8}$ s η απομάκρυνση είναι:

$$x = 0,2 \cdot \eta\mu 2t$$

$$x = 0,2 \cdot \eta\mu 2 \cdot \frac{\pi}{8}$$

$$x = 0,2 \cdot \eta\mu \frac{\pi}{4}$$

$$x = 0,2 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$x = 0,1 \cdot \sqrt{2}\ \text{m}$$

Άσκηση 3.

Σώμα μάζας $m = 4\,kg$ εκτελεί Α.Α.Τ. με εξίσωση απομάκρυνσης της μορφής $x = A\cdot ημωt$ ενώ η σταθερά επαναφοράς του συστήματος είναι $400\,N/m$. Το σώμα μετά από 3 πλήρεις ταλαντώσεις έχει διαγράψει τροχιά μήκους $d = 0,6\,m$.

Να υπολογιστούν:

α) η συχνότητα ταλάντωσης.

β). το πλάτος της επιτάχυνσης.

γ) ο ρυθμός μεταβολής της ταχύτητας τη χρονική στιγμή $t = \frac{\pi}{40}s$.

δ) το έργο της δύναμης επαναφοράς καθώς το σώμα μεταβαίνει από τη θέση ισορροπίας στην ακραία αρνητική θέση.

Δίνεται $ημ\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

<u>Λύση</u>

Το σώμα μετά από 3 πλήρεις ταλαντώσεις έχει διανύσει τροχιά μήκους $12A$.

Άρα: $d = 12A \Rightarrow 0,6 = 12A \Rightarrow A = 0,05\,m$

Επίσης, $T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{D}} \Rightarrow T = 2\pi\sqrt{\frac{4kg}{400\frac{N}{m}}} \Rightarrow T = 2\pi\sqrt{\frac{1}{100}}s \Rightarrow T = \frac{\pi}{5}s$

α) $f = \frac{1}{T} = \frac{5}{\pi}Hz$

β) $\omega = 2\pi f = 2\pi\cdot\frac{5}{\pi}Hz = 10\,rad/s$

$a_{max} = \omega^2\cdot A = (10\frac{rad}{s})^2\cdot 0,05m = 5\,m/s^2$

γ) Ο ρυθμός μεταβολής της ταχύτητας είναι η επιτάχυνση

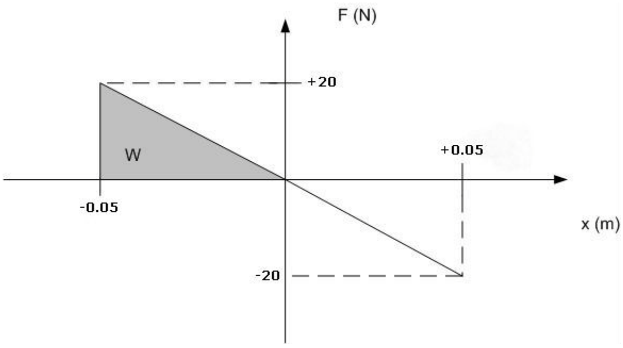
$\frac{du}{dt} = a = -a_{max}\cdot ημωt = -5\cdot ημ10\cdot\frac{\pi}{40} \Rightarrow$

$$\frac{du}{dt} = -5 \cdot \eta\mu \frac{\pi}{4} \Rightarrow$$

$$\frac{du}{dt} = -5 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \frac{du}{dt} = -2,5 \cdot \sqrt{2}\ m/s^2$$

δ) Το έργο της δύναμης επαναφοράς υπολογίζεται από το γραμμοσκιασμένο εμβαδόν του διαγράμματος δύναμης επαναφοράς-απομάκρυνσης

$$F_{max} = m \cdot a_{max} = 4kg \cdot 5\frac{m}{s^2} = 20\ N$$



Υπολογίζουμε το εμβαδόν του τριγώνου:

$$|W| = \frac{1}{2} \cdot 0,05m \cdot 20N = 0,5\ J$$

Επειδή κατά τη μετακίνηση του σώματος απο τη θέση $x = 0$ στη θέση $x = -A$, η δύναμη είναι αντίθετη της μετακίνησης, το έργο είναι αρνητικό, συνεπώς

$$W = -0,5\ J$$

Άσκηση 4.

Σώμα εκτελεί Α.Α.Τ. με εξίσωση απομάκρυνσης της μορφής $x = A \cdot ημωt$. Η συχνότητα διέλευσης του σώματος από τη Θέση Ισορροπίας είναι $2\,Hz$ ενώ η ακραία θέση ταλάντωσης απέχει από τη Θέση Ισορροπίας απόσταση $d = 0,4\,m$. Η σταθερά επαναφοράς της ταλάντωσης είναι $D = 100\,N/m$.

Να υπολογιστούν:

α) η περίοδος της ταλάντωσης.

β) η μάζα του ταλαντούμενου σώματος.

γ) οι χρονικές στιγμές κατά τη διάρκεια της πρώτης περίοδου στις οποίες η απομάκρυνση είναι $x = +0,2\,m$.

δ) η ταχύτητα τις ίδιες χρονικές στιγμές.

Δίνεται $\pi^2 \simeq 10$, $ημ\frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}$, $συν\frac{5\pi}{6} = συν\frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

Λύση

α) Το σώμα διέρχεται από τη Θέση Ισορροπίας κάθε $T' = \frac{T}{2}$.

Άρα η συχνότητα διέλευσης αντιστοιχεί στη μισή περίοδο.

$$f' = \frac{1}{T'} \Rightarrow \; f' = \frac{1}{\frac{T}{2}} \Rightarrow 2 = \frac{2}{T} \Rightarrow T = 1\,s$$

β) Η μάζα υπολογίζεται από τη σχέση:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{D}} \Rightarrow T^2 = 4\pi^2 \cdot \frac{m}{D} \Rightarrow m = \frac{D \cdot T^2}{4\pi^2} \Rightarrow$$

$$m = \frac{100\frac{N}{m} \cdot (1s)^2}{4 \cdot 10} = 2,5\,kg$$

γ) Από την εκφώνηση προκύπτει ότι το πλάτος της ταλάντωσης είναι $d = A = 0,4\,m$.

Το σώμα κατά τη διάρκεια μίας περιόδου διέρχεται από τη θέση $x = +0,2\,m$ δύο φορές. Μία με θετική και μία με αρνητική ταχύτητα.

$$(\omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi}{1} = 2\pi \text{ rad/s})$$

Από την εξίσωση της απομάκρυνσης έχουμε:

$$x = A \cdot \eta\mu\omega t$$

$$0,2 = 0,4 \cdot \eta\mu 2\pi t$$

$$\eta\mu 2\pi t = \frac{1}{2} \text{ (S.I.)}$$

Άρα: $2\pi t = 2k\pi + \frac{\pi}{6}$, $k = 0,1,2,...$

$$2\pi t = 2k\pi + (\pi - \frac{\pi}{6})$$

μας ενδιαφέρουν οι χρονικές στιγμές κατά τη διάρκεια της πρώτης περιόδου και αυτό συμβαίνει για $\kappa = 0$ και οι δύο λύσεις είναι:

$$2\pi t_1 = \frac{\pi}{6} \Rightarrow t_1 = \frac{1}{12} \text{ s}$$

$$2\pi t_2 = \pi - \frac{\pi}{6} \Rightarrow 2\pi t_2 = \frac{5\pi}{6} \Rightarrow t_2 = \frac{5}{12} \text{ s}$$

δ) Από την εξίσωση της ταχύτητας υπολογίζουμε την ταχύτητα τις αντίστοιχες χρονικές στιγμές:

$$u_{max} = \omega \cdot A = 2\pi \frac{\text{rad}}{\text{s}} \cdot 0,4\text{m} = 0,8\pi \text{ m/s}$$

$$u_1 = 0,8\pi \cdot \sigma\upsilon\nu 2\pi t_1 \Rightarrow$$

$$u_1 = 0,8\pi \sigma\upsilon\nu 2\pi \frac{1}{12} \Rightarrow$$

$$u_1 = 0,8\pi \sigma\upsilon\nu \frac{\pi}{6} \Rightarrow$$

$$u_1 = 0,8\pi \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow$$

$$u_1 = 0,4\sqrt{3}\pi \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

Ομοίως: $u_2 = 0,8\pi \cdot \sigma\upsilon\nu 2\pi \cdot t_2$

$$u_2 = 0,8\pi \cdot \text{συν}\, 2\pi \cdot \frac{5}{12} \Rightarrow$$

$$u_2 = 0,8\pi \cdot \text{συν}\, \frac{5\pi}{6} \Rightarrow$$

$$u_2 = 0,8\pi \cdot (-\sqrt{\frac{3}{2}}) \Rightarrow$$

$$u_2 = -0,4 \cdot \sqrt{3}\pi \, \frac{m}{s}$$

Άσκηση 5.

Σώμα εκτελεί Α.Α.Τ. με εξίσωση απομάκρυνσης $x = 20\eta\mu 10\pi t$ (x σε cm και t σε s).

Να υπολογιστούν:

α) ο ρυθμός μεταβολής της φάσης.

β) η ταχύτητα τη χρονική στιγμή $t = \frac{1}{60} s$.

γ) Να γίνει το διάγραμμα φάσης-χρόνου για τις τρεις πρώτες ταλαντώσεις.

Δίνεται $\sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

Λύση

Από την εξίσωση της απομάκρυνσης συγκρίνοντας με τη γενική μορφή της εξίσωσης της απομάκρυνσης προκύπτει:

$$\left.\begin{array}{r} x = A\cdot\eta\mu\omega t \\ x = 20\cdot\eta\mu 10\pi t \end{array}\right\} \begin{array}{l} A = 20\,cm = 0,2\ m \\ \omega = 10\pi\,\frac{rad}{s} \end{array}$$

α) Ο ρυθμός μεταβολής της φάσης είναι ίσος με τη γωνιακή συχνότητα.

Άρα: $\frac{d\phi}{dt} = \omega = 10\pi\,\frac{rad}{s}$

β) $u_{max} = \omega\cdot A = 10\pi\frac{rad}{s}\cdot 0,2m = 2\pi\,\frac{m}{s}$

$$u = u_{max}\cdot\sigma\upsilon\nu\omega t \Rightarrow$$

$$u = 2\pi\cdot\sigma\upsilon\nu 10\pi\frac{1}{60} \Rightarrow$$

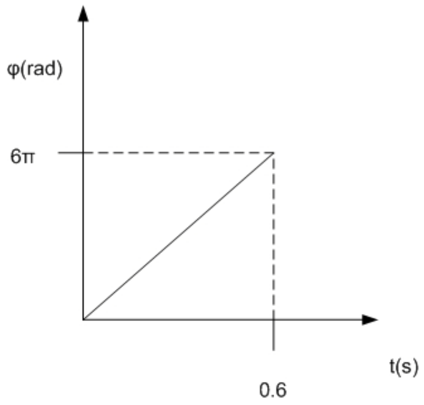
$$u = 2\pi\cdot\sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{6} \Rightarrow$$

$$u = 2\pi\frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow u = \pi\sqrt{3}\,\frac{m}{s}$$

γ) $\omega = \frac{2\pi}{T} \Rightarrow T = \frac{2\pi}{\omega} \Rightarrow$

$$T = \frac{2\pi}{10\pi \frac{rad}{s}} \Rightarrow T = 0,2\ s$$

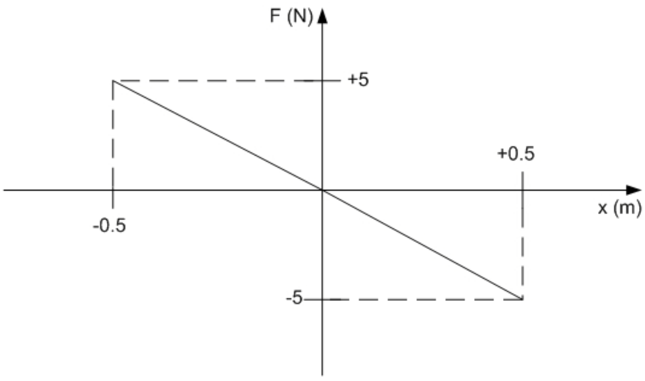
Άρα για $t = 0$ η φάση είναι $\phi = \omega \cdot t = 0$. Για $t = 3 \cdot T = 0,6\ s$ η φάση είναι $\phi = 10\pi \cdot 0,6 = 6\pi\ rad$ και το αντίστοιχο διάγραμμα είναι:



Άσκηση 6.

Σώμα εκτελεί Α.Α.Τ. με εξίσωση απομάκρυνσης της μορφής $x = A \cdot \eta\mu\omega t$. Το σώμα μετά από χρόνο 5 s έχει πραγματοποιήσει 50 πλήρεις ταλαντώσεις.

Στο παρακάτω σχήμα φαίνεται το διάγραμμα δύναμης επαναφοράς-απομάκρυνσης.



Να υπολογιστούν

α) η μάζα του ταλαντούμενου σώματος.

β) το πλάτος της ταχύτητας.

γ) η διαφοράς φάσης μεταξύ των χρονικών στιγμών $t_1 = 0,15\,s$ και $t_2 = 0,5\,s$.

δ) το μέτρο της απομάκρυνσης όταν η επιτάχυνση είναι $\frac{a_{max}}{4}$.

Δίνεται $\pi^2 \simeq 10$.

Λύση

α) Από την κλίση της γραφικής παράστασης υπολογίζω τη σταθερά επαναφοράς D:

$$D = \frac{F_{max}}{A} = \frac{5N}{0,5m} = 10\,\frac{N}{m}$$

Επίσης:

$$T = \frac{t}{N} = \frac{5}{50} = 0,1\,s$$

Άρα επειδή $T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{D}} \Rightarrow$

$$T^2 = 4\pi^2\frac{m}{D} \Rightarrow m = \frac{T^2 \cdot D}{4\pi^2} \Rightarrow$$

$$m = \frac{(0,1s)^2 \cdot 10\ \frac{N}{m}}{4 \cdot 10} = 2,5 \cdot 10^{-3}\ kg$$

β) $u_{max} = \omega \cdot A = \frac{2\pi}{T} \cdot A = \frac{2\pi}{0,1s} \cdot 0,5m = 10\pi\ \frac{m}{s}$

γ) $\Delta\phi = \phi_2 - \phi_1 = \omega \cdot t_2 - \omega \cdot t_1 = \omega \cdot (t_2 - t_1) \Rightarrow$

$$\Delta\phi = 20\pi \frac{rad}{s} \cdot 0,35s = 7\pi\ rad$$

δ) Από τη σχέση $|a| = \omega^2 \cdot |x| \Rightarrow$

$$\frac{a_{max}}{4} = \omega^2 \cdot |x| \Rightarrow$$

$$\frac{\omega^2 \cdot A}{4} = \omega^2 \cdot |x| \Rightarrow$$

$$|x| = \frac{A}{4} \Rightarrow$$

$$|x| = 0,125\ m$$

Ημερομηνία τροποποίησης: 20/07/2011

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1ο: ΜΗΧΑΝΙΚΕΣ – ΗΛΕΚΤΡΙΚΕΣ ΤΑΛΑΝΤΩΣΕΙΣ

ΕΝΟΤΗΤΑ 1.2: ΑΠΛΗ ΑΡΜΟΝΙΚΗ ΤΑΛΑΝΤΩΣΗ (ΕΝΕΡΓΕΙΑΚΗ ΠΡΟΣΕΓΓΙΣΗ, ΑΡΧΙΚΗ ΦΑΣΗ, ΣΥΣΤΗΜΑ ΕΛΑΤΗΡΙΟΥ ΣΩΜΑΤΟΣ, ΟΡΜΗ)

ΘΕΜΑΤΑ ΠΡΟΣ ΕΠΙΛΥΣΗ

ΘΕΜΑ Β

Ερώτηση 1.

Ένα σώμα, μάζας m, εκτελεί απλή αρμονική ταλάντωση έχοντας ολική ενέργεια Ε. Χωρίς να αλλάξουμε τα φυσικά χαρακτηριστικά του συστήματος, προσφέρουμε στο σώμα επιπλέον ενέργεια 3Ε. Τότε η μέγιστη ταχύτητα ταλάντωσης:

α) μένει σταθερή.

β) διπλασιάζεται.

γ) τετραπλασιάζεται.

Να επιλέξετε τη σωστή απάντηση και να αιτιολογήσετε την επιλογή σας.

Λύση

Σωστή απάντηση είναι η (β).

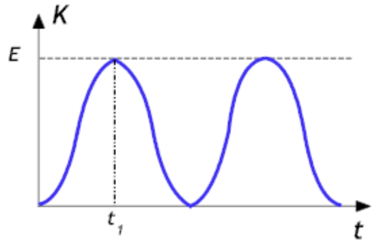
Η ενέργεια του ταλαντωτή είναι ίση με τη μέγιστη κινητική ενέργεια ταλάντωσης: $E = K_{max} = \frac{1}{2}m\upsilon_{max}^2$.

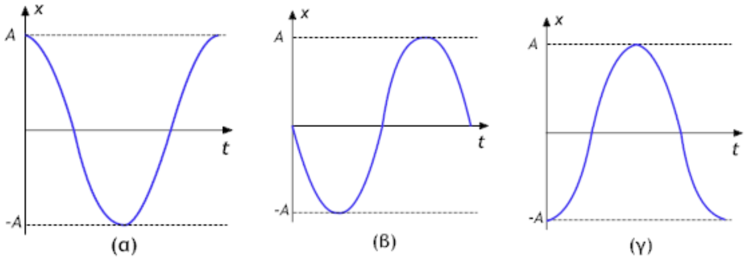
Η νέα ενέργεια του ταλαντωτή θα είναι: $E' = E + 3E = 4E$, ενώ δεν αλλάζει τη μάζα του. Αντικαθιστώντας τώρα έχουμε:

$$K'_{max} = 4K_{max} \Rightarrow \frac{1}{2}m\upsilon'^2_{max} = 4\frac{1}{2}m\upsilon_{max}^2 \Rightarrow \upsilon'^2_{max} = 4\upsilon_{max}^2 \Rightarrow \upsilon'_{max} = 2\upsilon_{max}.$$

Ερώτηση 2.

Η γραφική παράσταση της κινητικής ενέργειας ενός απλού αρμονικού ταλαντωτή σε συνάρτηση με το χρόνο φαίνεται στο παρακάτω σχήμα. Τη χρονική στιγμή t_1 η ταχύτητα του σώματος έχει θετικό πρόσημο. Η γραφική παράσταση της απομάκρυνσης σε συνάρτηση με το χρόνο είναι η:





Να επιλέξετε τη σωστή γραφική παράσταση και να αιτιολογήσετε την επιλογή σας.

Λύση

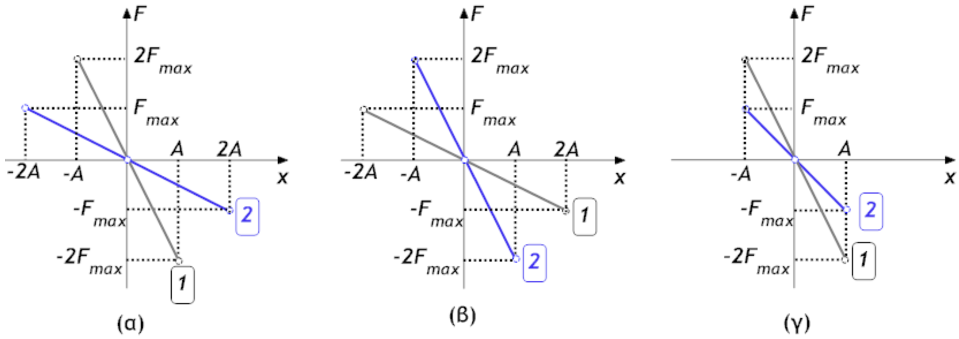
Σωστή απάντηση είναι η (γ).

Παρατηρούμε από το διάγραμμα K –t, ότι τη χρονική στιγμή t=0, η κινητική ενέργεια του ταλαντωτή είναι μηδέν. Αυτό συμβαίνει στα ακρότατα της τροχιάς του. Επίσης τη χρονική στιγμή t_1 η κινητική του ενέργεια είναι μέγιστη. Αυτό συμβαίνει όταν περνά από τη Θέση Ισορροπίας του.

Αν αρχικά (t=0) ήταν στο θετικό ακρότατο, σε χρόνο t_1, θα περνούσε απ’ τη Θ.Ι. του έχοντας αρνητική ταχύτητα. Όμως με βάση την εκφώνηση, τη χρονική στιγμή t_1, έχει θετική ταχύτητα. Άρα τη στιγμή της εκκίνησης ήταν στο αρνητικό ακρότατο, συνεπώς το σωστό διάγραμμα x-t είναι το (γ).

Ερώτηση 3.

Δύο αρμονικοί ταλαντωτές (1) και (2), είναι μικρά σώματα με μάζες m_1 και m_2 (m_1=4m_2) , που είναι δεμένα σε δύο διαφορετικά ελατήρια με σταθερές k_1 και k_2 αντίστοιχα. Οι δύο ταλαντωτές έχουν ίδια ενέργεια *E* και ίδια περίοδο *T*. Με βάση τα δεδομένα αυτά, το σωστό διάγραμμα συνισταμένης δύναμης *F* - απομάκρυνσης x είναι το:



<u>Λύση</u>

Σωστή απάντηση είναι το (α).

Εφόσον έχουν ίδια περίοδο:

$$T_1 = T_2 \Rightarrow 2\pi\sqrt{\frac{m_1}{k_1}} = 2\pi\sqrt{\frac{m_2}{k_2}} \Rightarrow \frac{m_1}{k_1} = \frac{m_2}{k_2} \Rightarrow k_1 = \frac{m_1}{m_2}k_2 = \frac{4m_2}{m_2}k_2 \Rightarrow k_1 = 4k_2 .$$

Εφόσον έχουν ίδια ενέργεια:

$$E_1 = E_2 \Rightarrow \frac{1}{2}k_1A_1^2 = \frac{1}{2}k_2A_2^2 \Rightarrow k_1A_1^2 = k_2A_2^2 \Rightarrow 4k_2A_1^2 = k_2A_2^2 \Rightarrow A_1^2 = \frac{A_2^2}{4} \Rightarrow A_1 = \frac{A_2}{2} .$$

Η μέγιστη δύναμη επαναφοράς του ταλαντωτή (1) είναι:

$$F_{1,max} = k_1A_1 = 4k_2\frac{A_2}{2} = 2k_2A_2 = 2F_{2,max} .$$

Συνεπώς ο ταλαντωτής (1) έχει το μισό πλάτος και τη διπλάσια μέγιστη δύναμη επαναφοράς απ’ τον ταλαντωτή (2).

Ερώτηση 4.

Σώμα Α είναι δεμένο σε κατακόρυφο ιδανικό ελατήριο, το άλλο άκρο του οποίου είναι στερεωμένο σε ακλόνητο σημείο στην οροφή. Εκτρέπουμε κατακόρυφα το σώμα Α από τη θέση ισορροπίας του κατά *d*, προσφέροντας ενέργεια E_1 και το αφήνουμε ελεύθερο να κινηθεί από τη θέση εκτροπής, οπότε αυτό εκτελεί απλή αρμονική ταλάντωση. Αντικαθιστούμε το σώμα Α με σώμα Β, που έχει μεγαλύτερη μάζα και εκτρέπουμε το σώμα Β από τη θέση ισορροπίας του κατά ίση απομάκρυνση *d* με τον ίδιο τρόπο. Η ενέργεια E_2 που προσφέραμε για να εκτρέψουμε το σώμα Β είναι:

α) ίση με την E_1.

β) μικρότερη από την E_1.

γ) μεγαλύτερη από την E_1.

Να επιλέξετε τη σωστή απάντηση και να αιτιολογήσετε την επιλογή σας.

<u>Λύση</u>

Σωστή απάντηση είναι η (α).

Όταν εκτρέψουμε το σώμα από τη Θ.Ι. του και το αφήσουμε ελεύθερο, στο σημείο αυτό έχει μηδενική ταχύτητα, άρα αποτελεί ακρότατο της ταλάντωσης και το μέτρο της απομάκρυνσής του είναι τότε ίσο με το πλάτος ταλάντωσης: $\mathrm{d} = \mathrm{A}$.

Όταν ένα σώμα είναι δεμένο σε κατακόρυφο ελατήριο και εκτελεί απλή αρμονική ταλάντωση, η σταθερά της ταλάντωσης είναι ίση με τη σταθερά του ελατηρίου: $\mathrm{D} = \mathrm{k}$.
(Σχολικό βιβλίο σελ. 12, παράδειγμα 1.1)

Με βάση τη <u>Διατήρηση της ενέργειας</u>, η ενέργεια, που προσφέρουμε στο σώμα για να το θέσουμε σε ταλάντωση είναι ίση με την ολική ενέργεια της ταλάντωσης: $\mathrm{E}_{\pi\rho o\sigma} = \mathrm{E} = \frac{1}{2}\mathrm{D}\mathrm{A}^2 = \frac{1}{2}\mathrm{k}\mathrm{A}^2$.

Οι ταλαντώσεις των σωμάτων Α και Β έχουν το ίδιο πλάτος, την ίδια σταθερά ταλάντωσης, ενώ η ενέργεια ταλάντωσης Ε είναι ανεξάρτητη της μάζας του ταλαντούμενου σώματος. Συνεπώς $\mathrm{E}_2 = \mathrm{E}_1$.

Ερώτηση 5.

Σώμα $Σ_1$ μάζας *m* είναι δεμένο σε κατακόρυφο ιδανικό ελατήριο και εκτελεί απλή αρμονική ταλάντωση πλάτους *A*. Η μέγιστη δύναμη επαναφοράς, που δέχεται στη διάρκεια της ταλάντωσης είναι F_{max} και η μέγιστη επιτάχυνση a_{max}. Αντικαθιστούμε το $Σ_1$ με άλλο σώμα $Σ_2$, που έχει μεγαλύτερη μάζα m_2 από το $Σ_1$ και διεγείρουμε το σύστημα ώστε να εκτελέσει ταλάντωση ίδιου πλάτους *A*. Τότε το σώμα $Σ_2$ θα ταλαντώνεται με απλή αρμονική ταλάντωση και:

Α) η μέγιστη δύναμη που θα δέχεται θα είναι :

α) μικρότερη απ' του $Σ_1$.

β) ίση με του $Σ_1$.

γ) μεγαλύτερη απ' του $Σ_1$.

Να επιλέξετε τη σωστή απάντηση και να αιτιολογήσετε την επιλογή σας.

Β) η μέγιστη επιτάχυνση του θα είναι:

α) μικρότερη απ' του $Σ_1$.

β) ίση με του $Σ_1$.

γ) μεγαλύτερη απ' του $Σ_1$.

Να επιλέξετε τη σωστή απάντηση και να αιτιολογήσετε την επιλογή σας.

Λύση

Α) Σωστή απάντηση είναι η (β).

Β) Σωστή απάντηση είναι η (α).

Α) Η μέγιστη δύναμη επαναφοράς της ταλάντωσης ενός σώματος δεμένου σε ελατήριο, με βάση τη Συνθήκη της αρμονικής ταλάντωσης, θα είναι: $F_{max} = k \cdot A$. Η σταθερά k του ελατηρίου δεν αλλάζει με την αλλαγή της μάζας, ενώ και το πλάτος ταλάντωσης, σύμφωνα με την εκφώνηση, είναι σταθερό. Συνεπώς η μέγιστη δύναμη επαναφοράς είναι η ίδια.

Β) Η μέγιστη επιτάχυνση, σύμφωνα με το Θεμελιώδη Νόμο της Μηχανικής, θα είναι: $a_{max} = \frac{F_{max}}{m}$. Απ' τη σχέση αυτή προκύπτει ότι, αφού η μέγιστη δύναμη επαναφοράς είναι σταθερή, η μέγιστη επιτάχυνση είναι αντιστρόφως ανάλογη της μάζας του ταλαντωτή. Σύμφωνα με την εκφώνηση, το σώμα $Σ_2$ έχει μεγαλύτερη μάζα απ' το $Σ_1$, συνεπώς η μέγιστη επιτάχυνσή του θα είναι μικρότερη απ' του $Σ_1$.

ΘΕΜΑ Γ

Άσκηση 1.

Ένα σώμα εκτελεί Α.Α.Τ. Η σταθερά επαναφοράς συστήματος είναι $D = 100\ N/m$. Η ενέργεια ταλάντωσης είναι $E = 2\ J$. Αν η μάζα του ταλαντευόμενου σώματος είναι $m = 1\ kg$, να υπολογιστούν:

α) Η γωνιακή συχνότητα ταλάντωσης.

β) Το πλάτος της επιτάχυνσης.

γ) Η απομάκρυνση του σώματος όταν η κινητική του ενέργεια είναι $K = 0.5\ J$.

δ) Η ταχύτητα u_1 του σώματος τη χρονική στιγμή t_1 όπου η απομάκρυνση είναι $x_1 = 0{,}1\cdot\sqrt{2}\ m$.

<u>Λύση</u>

Γνωρίζουμε ότι:

α) $T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{D}} \Rightarrow T = 2\pi\sqrt{\frac{1kg}{100\frac{N}{m}}} \Rightarrow T = \frac{2\pi}{10}s \Rightarrow T = \frac{\pi}{5}s$

Η γωνιακή συχνότητα υπολογίζεται ως εξής: $\omega = \frac{2\pi}{T} \Rightarrow \omega = \frac{2\pi}{\frac{\pi}{5}s} \Rightarrow \omega = 10\frac{rad}{s}$

β) Η ενέργεια ταλάντωσης υπολογίζεται από τη σχέση:

$$E = \frac{1}{2}DA^2 \Rightarrow A = \sqrt{\frac{2E}{D}} \Rightarrow A = \sqrt{\frac{2\cdot 2J}{100\frac{N}{m}}} \Rightarrow A = \pm 0{,}2\ m$$

Άρα το πλάτος της ταλάντωσης είναι: $A = 0{,}2\ m$

Το πλάτος της επιτάχυνσης υπολογίζεται εύκολα:

$$a_{max} = \omega^2\cdot A = (10\ \frac{rad}{s})^2\cdot 0{,}2m = 20\ \frac{m}{s^2}$$

γ) Εφαρμόζουμε Αρχή Διατήρησης Ενέργειας για την Α.Α.Τ.

$$E = K + U \Rightarrow 2 = 0,5 + \frac{1}{2}Dx^2 \Rightarrow 1,5 = \frac{1}{2}Dx^2 \Rightarrow$$

$$3J = 100\frac{N}{m}\cdot x^2 \Rightarrow \quad x^2 = \frac{3J}{100\frac{N}{m}} \Rightarrow$$

$$x = \pm\frac{\sqrt{3}}{10}\ m$$

δ) Εφαρμόζουμε Αρχή Διατήρησης της Ενέργειας για την Α.Α.Τ. τη χρονική στιγμή t_1 :

$$E = K_1 + U_1 \Rightarrow E = \frac{1}{2}\cdot mu_1^2 + \frac{1}{2}Dx_1^2 \Rightarrow$$

$$E - \frac{1}{2}D\cdot x_1^2 = \frac{1}{2}m\cdot u_1^2 \Rightarrow$$

$$u_1 = \sqrt{\frac{2E - D\cdot x_1^2}{m}} \Rightarrow$$

$$u_1 = \sqrt{\frac{2\cdot 2J - 100\frac{N}{m}(0,1\cdot\sqrt{2}m)^2}{1kg}} \Rightarrow$$

$$u_1 = \sqrt{4 - 100\cdot 0,01\cdot 2}\ \frac{m}{s} \Rightarrow$$

$$u_1 = \pm\sqrt{2}\ \frac{m}{s}$$

Άσκηση 2.

Ένα σώμα εκτελεί Α.Α.Τ. και τη χρονική στιγμή t_1 έχει απομάκρυνση $x_1 = 5\,\text{cm}$ και ταχύτητα $u_1 = 10\cdot\sqrt{3}\,\frac{m}{s}$ ενώ τη χρονική στιγμή t_2 έχει απομάκρυνση $x_2 = 5\cdot\sqrt{2}\,\text{cm}$ και ταχύτητα $u_2 = 10\cdot\sqrt{2}\,\frac{m}{s}$. Αν η μάζα του σώματος είναι $m = 0,5\,\text{kg}$ να υπολογιστούν:

α) Η σταθερά επαναφοράς του συστήματος.

β) Το πλάτος της ταλάντωσης.

γ) Ο ρυθμός μεταβολής της κινητικής ενέργειας τη χρονική στιγμή t_1.

Λύση

α) Η ενέργεια της ταλάντωσης παραμένει σταθερή άρα για τις χρονικές στιγμές t_1 και t_2 ισχύει:

$$K_1 + U_1 = K_2 + U_2 \Rightarrow \frac{1}{2}\cdot m\cdot u_1^2 + \frac{1}{2}\cdot Dx_1^2 = \frac{1}{2}\cdot m\cdot u_2^2 + \frac{1}{2}\cdot Dx_2^2 \Rightarrow$$

$$\frac{1}{2}D\left(x_1^2 - x_2^2\right) = \frac{1}{2}m\left(u_2^2 - u_1^2\right) \Rightarrow$$

$$D = \frac{m\left(u_2^2 - u_1^2\right)}{x_1^2 - x_2^2} \Rightarrow$$

$$D = \frac{0,5\text{kg}\left[\left(10\sqrt{2}\,\frac{m}{s}\right)^2 - \left(10\sqrt{3}\,\frac{m}{s}\right)^2\right]}{\left(5\cdot 10^{-2}\,m\right)^2 - \left(5\sqrt{2}\cdot 10^{-2}\,m\right)^2} \Rightarrow$$

$$D = \frac{0,5(200 - 300)}{25\cdot 10^{-4} - 50\cdot 10^{-4}}\,\frac{N}{m}$$

$$D = 2\cdot 10^{\,4}\,\frac{N}{m}$$

β) Το πλάτος της ταλάντωσης υπολογίζεται εφαρμόζοντας την αρχή διατήρησης της ενέργειας τη χρονική στιγμή t_1:

$$E = K_1 + U_1 \Rightarrow E = \frac{1}{2}\cdot m\cdot u_1^2 + \frac{1}{2}\cdot Dx_1^2$$

$$E = \frac{1}{2} \cdot 0,5\text{kg} \cdot \left(10 \cdot \sqrt{3}\,\frac{\text{m}}{\text{s}}\right)^2 + \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 10^4\,\frac{\text{N}}{\text{m}}(5 \cdot 10^{-2}\,\text{m})^2 \Rightarrow$$

$$E = (75 + 25)\text{J} \Rightarrow E = 100\ \text{J}$$

Όμως είναι:

$$E = \frac{1}{2} \cdot DA^2 \Rightarrow A = \pm\sqrt{\frac{2E}{D}} \Rightarrow A = \pm\sqrt{\frac{2 \cdot 100\ \text{J}}{2 \cdot 10^4\,\frac{\text{N}}{\text{m}}}} \Rightarrow A = \pm\sqrt{10^{-2}\,\text{m}} \Rightarrow A = \pm 10\ \text{cm}$$

γ) Ο ρυθμός μεταβολής της κινητικής ενέργειας είναι ίσος με την ισχύ της δύναμης επαναφοράς τη χρονική στιγμή t_1 :

$$\frac{dK_1}{dt} = P_1 = F_1 \cdot u_1 \Rightarrow$$

$$\frac{dK_1}{dt} = -D \cdot x_1 u_1 \Rightarrow$$

$$\frac{dK_1}{dt} = -2 \cdot 10^4\,\frac{\text{N}}{\text{m}} \cdot 5 \cdot 10^{-2}\,\text{m} \cdot 10\sqrt{3}\,\frac{\text{m}}{\text{s}} \Rightarrow$$

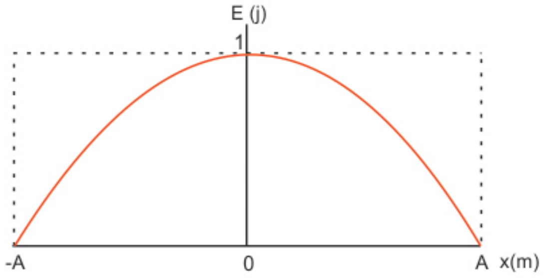
$$\frac{dK_1}{dt} = -\sqrt{3} \cdot 10^4\,\frac{\text{J}}{\text{s}}$$

Άσκηση 3.

Σώμα μάζας $m = 0,2\ \text{kg}$ εκτελεί Α.Α.Τ. Η συχνότητα μεταβολής της δυναμικής ενέργειας είναι $f' = 2\ \text{Hz}$.

Στο παρακάτω σχήμα φαίνεται η μεταβολή της κινητικής ενέργειας ταλάντωσης σε σχέση με την απομάκρυνση. Για $t = 0$ το σώμα κινείται προς τη θετική κατεύθυνση του άξονα $x'x$.

α) Αφού ξανασχεδιάσετε το διάγραμμα να συμπληρώσετε τις αριθμητικές τιμές που λείπουν και να φτιάξετε και τη γραφική παράσταση της δυναμικής ενέργειας της ταλάντωσης, σε σχέση με την απομάκρυνση.



β) Να υπολογίσετε την ταχύτητα του σώματος την χρονική στιγμή όπου η απομάκρυνση είναι $x = 0,25\ \text{m}$.

γ) Να υπολογίσετε το ρυθμό μεταβολής της δυναμικής ενέργειας τη χρονική στιγμή όπου η ταχύτητα του σώματος είναι $u = \frac{\pi}{2}\frac{\text{m}}{\text{s}}$ και η επιτάχυνση του σώματος είναι θετική $a > 0$.

Δίνεται $\pi^2 = 10$.

<u>Λύση</u>

α) Η συχνότητα ταλάντωσης είναι το μισό της συχνότητας μεταβολής της δυναμικής ενέργειας.

Άρα: $f = \frac{f'}{2} \Rightarrow f = 1\ \text{Hz}$

Επομένως: $\omega = 2\pi f \Rightarrow \omega = 2\pi \frac{\text{rad}}{\text{s}}$

Στη συνέχεια υπολογίζουμε τη σταθερά επαναφοράς:

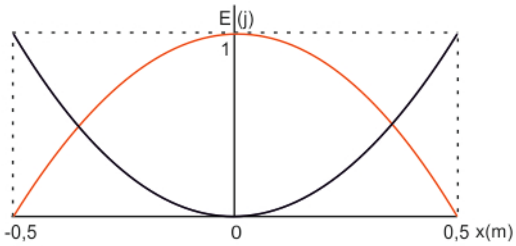
$$D = m \cdot \omega^2 = 0,2 \cdot \left(2 \cdot \pi \frac{\text{rad}}{\text{s}}\right)^2 = 8\frac{\text{N}}{\text{m}}$$

Επειδή η ενέργεια ταλάντωσης είναι ίση με τη μέγιστη κινητική ενέργεια, από το διάγραμμα προκύπτει:

$$K_{max} = E \Rightarrow 1\,J = \frac{1}{2} \cdot D \cdot A^2 \Rightarrow \frac{1}{2} 8 \frac{N}{m} \cdot A^2 = 1J \Rightarrow$$

$A^2 = \frac{1}{4} m^2 \Rightarrow A = \pm 0,5\,m$ άρα το πλάτος είναι $A = 0,5\,m$

Έτσι το διάγραμμα είναι:



β) Από την αρχή διατήρησης της ενέργειας ταλάντωσης έχουμε:

$$E = K + U \Rightarrow \frac{1}{2} \cdot DA^2 = \frac{1}{2} m \cdot u^2 + \frac{1}{2} \cdot D \cdot x^2 \Rightarrow$$

$$u = \pm \sqrt{\frac{D\left(A^2 - x^2\right)}{m}} \Rightarrow$$

$$u = \pm \sqrt{\frac{8 \frac{N}{m} [(0,5m)^2 - (0,25m)^2]}{0,2kg}} \Rightarrow$$

$$u = \pm \sqrt{7,5} \frac{m}{s}$$

γ) Επειδή η ενέργεια της ταλάντωσης είναι σταθερή και ίση με το άθροισμα της κινητικής και της δυναμικής ενέργειας ταλάντωσης προκύπτει ότι ο ρυθμός μεταβολής της δυναμικής ενέργειας είναι αντίθετου ρυθμού μεταβολής της κινητικής ενέργειας.

Άρα:

$$\frac{dU}{dt} = -\frac{dK}{dt} = -\frac{dW}{dt} = -\frac{F \cdot dx}{dt} = -F \cdot u \Rightarrow$$

$$\frac{dU}{dt} = -(-D \cdot x) \cdot u = D \cdot x \cdot u \ (1)$$

Από την αρχή διατήρησης της ενέργειας ταλάντωσης (βλ. απάντηση ερωτήματος β) υπολογίζουμε την απομάκρυνση:

$$E = K + U \Rightarrow$$

$$x = \pm\sqrt{\frac{D \cdot A^2 - m \cdot u^2}{D}} \Rightarrow$$

$$x = \pm\sqrt{A^2 - \frac{m \cdot u^2}{D}} \Rightarrow$$

$$x = \pm\sqrt{(0,5m)^2 - \frac{0,2kg \cdot (\frac{\pi}{2}\frac{m}{s})^2}{8\frac{N}{m}}} \Rightarrow$$

$$x = \pm\sqrt{0,25 - \frac{0,2 \cdot \frac{10}{4}}{8}}\ m \Rightarrow$$

$$x = \pm\sqrt{\frac{1}{4} - \frac{1}{16}}\ m \Rightarrow$$

$$x = \pm\frac{\sqrt{3}}{4}\ m$$

Επειδή όμως $a > 0$ προκύπτει: $x = -\frac{\sqrt{3}}{4}\ m$

Άρα από τη σχέση (1) με αντικατάσταση:

$$\frac{\Delta U}{\Delta t} = D \cdot x \cdot u = 8\frac{N}{m} \cdot (-\frac{\sqrt{3}}{4}m) \cdot \frac{\pi}{2}\frac{m}{s} \Rightarrow \frac{\Delta U}{\Delta t} = -\sqrt{3} \cdot \pi\ \frac{J}{s}$$

Άσκηση 4.

Σώμα εκτελεί Α.Α.Τ. και τη χρονική στιγμή $t=0$ έχει απομάκρυνση $x=+\sqrt{2}\ m$ και ταχύτητα $u=-\sqrt{2}\ \frac{m}{s}$. Το σώμα μετά από μία πλήρη ταλάντωση έχει διαγράψει τροχιά μήκους $d=8\ m$

Να υπολογιστούν:

α) Η περίοδος της ταλάντωσης.

β) Η αρχική φάση της ταλάντωσης.

γ) Να βρεθεί η εξίσωση της επιτάχυνσης σε σχέση με το χρόνο.

δ) Να υπολογιστεί ο λόγος της κινητικής προς τη δυναμική ενέργεια ταλάντωσης τη χρονική στιγμή $t=0$.

<u>Λύση</u>

α) Εφαρμόζουμε την αρχή διατήρησης της ενέργειας ταλάντωσης τη χρονική στιγμή t=0:

$$E=K+U\Rightarrow$$

$$\frac{1}{2}\cdot DA^2=\frac{1}{2}\cdot mu^2+\frac{1}{2}\cdot Dx^2 \quad (D=m\omega^2)\Rightarrow$$

$$m\omega^2A^2=mu^2+m\omega^2x^2\Rightarrow$$

$$u^2=\omega^2\cdot(A^2-x^2) \quad (1)$$

Σε μια πλήρη ταλάντωση το σώμα έχει διαγράψει τροχιά μήκους $4A$ άρα:

$$d=4A\Rightarrow 8=4A\Rightarrow A=2\ m$$

Έτσι με αντικατάσταση η (1) γίνεται:

$$\left(-\sqrt{2}\frac{m}{s}\right)^2=\omega^2(4-2)m^2\Rightarrow$$

$$\omega^2=\left(1\frac{rad}{s}\right)^2\Rightarrow$$

$$\omega=1\frac{rad}{s} \quad (\omega>0)$$ άρα

$$\omega=\frac{2\pi}{T}\Rightarrow$$

$$1\frac{rad}{s} = \frac{2\pi}{T} \Rightarrow T = 2\pi\ s$$

β) Για τον υπολογισμό της αρχικής φάσης από την εξίσωση της απομάκρυνσης προκύπτει για $t = 0$ και $x = +\sqrt{2}\ m$:

$$x = A \cdot \eta\mu(\omega \cdot t + \varphi_0) \Rightarrow$$

$$\sqrt{2}m = 2m \cdot \eta\mu\varphi_0 \Rightarrow$$

$\eta\mu\varphi_0 = \frac{\sqrt{2}}{2}$ άρα $\varphi_0 = 2k\pi + \frac{\pi}{4}$ ή $\varphi_0 = 2k\pi + (\pi - \frac{\pi}{4}) = 2k\pi + \frac{3\pi}{4}$

για την πρώτη 1^{η} λύση επειδή $0 \le \varphi_0 < 2\pi \Rightarrow$

$0 \le 2k\pi + \frac{\pi}{4} < 2\pi$ άρα $k = 0$ και $\varphi_0 = \frac{\pi}{4}$

για την 2^{η} λύση επειδή $0 \le \phi_0 < 2\pi \Rightarrow$

$0 \le 2k\pi + \frac{3\pi}{4} < 2\pi$ άρα $k = 0$ και $\varphi_0 = \frac{3\pi}{4}$

Από την εξίσωση της ταχύτητας για $t = 0$ και $\varphi_0 = \frac{\pi}{4} \Rightarrow$

$u = u_{max}\sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{4}$ άρα $u > 0$

Ομοίως για $t = 0$ και $\varphi_0 = \frac{3\pi}{4} \Rightarrow$

$u = u_{max}\sigma\upsilon\nu\frac{3\pi}{4}$ άρα $u < 0$

Επειδή λοιπόν τη χρονική στιγμή $t = 0$ η ταχύτητα είναι αρνητική η αρχική φάση είναι $\varphi_0 = \frac{3\pi}{4}$

γ) Το πλάτος της επιτάχυνσης υπολογίζεται από τη σχέση:

$$a_{max} = \omega^2 \cdot A$$

$$a = 2\frac{m}{s^2}$$

Η εξίσωση της επιτάχυνσης είναι:

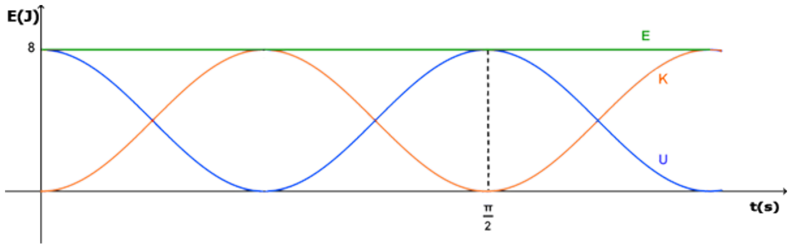
$$a = -a_{max}\eta\mu(\omega t + \varphi_0)$$

$$a = -2\eta\mu(t + \frac{3\pi}{4})\ \text{S.I}$$

δ) $\frac{K}{U} = \frac{E-U}{U} = \frac{\frac{1}{2}DA^2 - \frac{1}{2}Dx^2}{\frac{1}{2}Dx^2} = \frac{4-2}{2} = 1$

Άσκηση 5.

Στο παρακάτω σχήμα φαίνεται η γραφική παράσταση της κινητικής και της δυναμικής ενέργειας ταλάντωσης σε σχέση με το χρόνο.



Τη χρονική στιγμή $t=0$ η επιτάχυνση είναι $a=+a_{max}$. Αν η σταθερά επαναφοράς είναι $D=100\frac{N}{m}$ να υπολογιστούν:

α) Το πλάτος της ταλάντωσης.

β) Η μάζα του ταλαντευόμενου σώματος.

γ) Η χρονική στιγμή t στην οποία η κινητική και η δυναμική ενέργεια ταλάντωσης γίνονται ίσες για 1^{η} φορά μετά τη στιγμή $t=0$.

δ) Η μέγιστη δύναμη επαναφοράς και να γραφεί η συνάρτηση δύναμης επαναφοράς-χρόνου.

Από το διάγραμμα προκύπτει ότι: $E=8\,J$, και $\frac{T}{2}=\frac{\pi}{2}\Rightarrow T=\pi\,s$

Λύση

α) $E=\frac{1}{2}\cdot DA^2 \Rightarrow A=\sqrt{\frac{2E}{D}}\Rightarrow$

$A=\sqrt{\frac{2\cdot 8J}{100\frac{N}{m}}}\Rightarrow A=\pm\frac{4}{10}m\Rightarrow A=\pm 0,4\,m$ άρα το πλάτος της ταλάντωσης είναι $A=0,4\,m$.

β) $D=m\cdot\omega^2 \Rightarrow$ $(\omega=\frac{2\pi}{T}=\frac{2\pi}{\pi}=2\frac{rad}{s})$

$100\frac{N}{m}=m\cdot\left(2\frac{rad}{s}\right)^2 \Rightarrow m=25\,kg$

γ) Από το διάγραμμα παρατηρούμε ότι τη χρονική στιγμη $t = 0$ η δυναμική ενέργεια είναι μέγιστη και επομένως το σώμα είναι σε ακραία θέση.

Επειδή όμως $a = +a_{max}$ βρίσκεται στο $x = -A$

Έτσι από την εξίσωση της απομάκρυνσης για $t = 0$ και $x = -A$ προκύπτει:

$$x = A \cdot \eta\mu(\omega t + \varphi_0)$$

$$-A = A\eta\mu\varphi_0 \Rightarrow$$

$$\eta\mu\varphi_0 = -1 \Rightarrow \varphi_0 = 2k\pi + \frac{3\pi}{2}$$

Επειδή $0 \le \varphi_0 < 2\pi \Rightarrow 0 \le 2k\pi + \frac{3\pi}{2} < 2\pi$ άρα

$k = 0$ και $\varphi_0 = \frac{3\pi}{2}$

Ισχύει $K = U$ άρα εφαρμόζουμε αρχή διατήρησης της ενέργειας ταλάντωσης για να βρούμε την απομάκρυνση

$$E = K + U \Rightarrow$$

$$E = U + U \Rightarrow$$

$$E = 2U \Rightarrow$$

$$\frac{1}{2} \cdot DA^2 = 2 \cdot \frac{1}{2} Dx^2 \Rightarrow$$

$$x^2 = \frac{A^2}{2} \Rightarrow$$

$$x = \pm\frac{A}{\sqrt{2}} = \pm\frac{A\sqrt{2}}{2}$$

Όμως επειδή τη χρονική στιγμή $t = 0$ το σώμα βρίσκεται στο $x = -A$, προκύπτει ότι η κινητική και η δυναμική ενέργεια γίνονται ίσες για 1^{η} φορά όταν $x = -\frac{A\sqrt{2}}{2}$.

Από την εξίσωση της απομάκρυνσης

$$x = A \cdot \eta\mu(\omega t + \varphi_0) \Rightarrow$$

$$-\frac{A\sqrt{2}}{2} = A \cdot \eta\mu(2t + \frac{3\pi}{2}) \Rightarrow$$

$$\eta\mu(2t+\frac{3\pi}{2})=-\frac{\sqrt{2}}{2}\ (S.I.)$$

Άρα

$$2\cdot t+\frac{3\pi}{2}=2\cdot k\cdot\pi+\frac{7\pi}{4}\quad (1)$$

ή

$$2\cdot t+\frac{3\pi}{2}=2\cdot k\cdot\pi+\pi-\frac{7\pi}{4}\quad (2)$$

Πρέπει: $0<t<\frac{T}{4}$, $T=\pi\ s$

$$(1)\Rightarrow 2\cdot t=2\cdot k\cdot\pi+\frac{7\pi}{4}-\frac{3\pi}{2}=2\cdot k\cdot\pi+\frac{\pi}{4}\Rightarrow$$

$$t=k\cdot\pi+\frac{\pi}{8}$$

$$0<k\cdot\pi+\frac{\pi}{8}<\frac{\pi}{4}\Rightarrow$$

$$-\frac{\pi}{8}<k\cdot\pi<\frac{\pi}{8}\Rightarrow$$

$-\frac{1}{8}<k<\frac{1}{8}\Rightarrow k=0$ άρα $t=\frac{\pi}{8}s$

$$(2)\Rightarrow 2\cdot t+\frac{3\pi}{2}=2\cdot k\cdot\pi+\pi-\frac{7\pi}{4}=2\cdot k\cdot\pi-\frac{3\pi}{4}=2\cdot k\cdot\pi+2\pi-\frac{3\pi}{4}\Rightarrow$$

$$2\cdot t+\frac{3\pi}{2}=2\cdot k\cdot\pi+\frac{5\pi}{4}\Rightarrow$$

$$2\cdot t=2\cdot k\cdot\pi+\frac{5\pi}{4}-\frac{3\pi}{2}=2\cdot k\cdot\pi-\frac{\pi}{4}\Rightarrow$$

$$t=k\cdot\pi-\frac{\pi}{8}$$

$$0<k\cdot\pi-\frac{\pi}{8}<\frac{\pi}{4}\Rightarrow\ \frac{\pi}{8}<k\cdot\pi<\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{8}\Rightarrow\frac{\pi}{8}<k\cdot\pi<\frac{3\pi}{8}\Rightarrow$$

$\frac{1}{8}<k<\frac{3}{8}$, επειδή k ακέραιος, δεν υπάρχει λύση.

Τελικά έχουμε μόνο μία λύση την $t = \frac{\pi}{8}s$

δ) $F_{max} = m \cdot a_{max} \Rightarrow$

$$F_{max} = m \cdot \omega^2 \cdot A \Rightarrow$$

$$F_{max} = 25kg \cdot \left(2\frac{rad}{s}\right)^2 \cdot 0,4m \Rightarrow$$

$$F_{max} = 40 \text{ N}$$

Η εξίσωση δύναμης επαναφοράς-χρόνου είναι:

$$F = -F_{max} \cdot \eta\mu(\omega \cdot t + \varphi_0) \Rightarrow$$

$$F = -40 \cdot \eta\mu(2 \cdot t + \frac{3\pi}{2}) \text{ (S.I.)}$$

Άσκηση 6.

Μια σφαίρα μάζας m=2 kg εκτελεί απλή αρμονική ταλάντωση γωνιακής συχνότητας $\omega = 10\ {}^{rad}\!/_{s}$. Τη χρονική στιγμή t=0 βρίσκεται στη θέση όπου έχει τη μέγιστη τιμή της δύναμης επαναφοράς της ταλάντωσης F_{max}=+20 N.

α) Να υπολογίσετε τη περίοδο και το πλάτος της ταλάντωσης.

β) Να γράψετε τη συνάρτηση απομάκρυνσης – χρόνου και να την παραστήσετε γραφικά σε κατάλληλα βαθμολογημένους άξονες. Η αρχική φάση έχει πεδίο τιμών [0,2π).

γ) Να βρείτε την ταχύτητα της σφαίρας τη στιγμή $t_1 = \frac{\pi}{4} s$.

δ) Να βρείτε τη δυναμική και την κινητική ενέργεια ταλάντωσης της σφαίρας τη στιγμή t_1.

<u>Λύση</u>

α) Η περίοδος Τ της αρμονικής ταλάντωσης, υπολογίζεται απ' τη γωνιακή συχνότητα:

$$\omega = \frac{2\pi}{T} \Rightarrow T = \frac{2\pi}{\omega} = 0,2\pi\ s .$$

Γνωρίζουμε ότι η σταθερά επαναφοράς της ταλάντωσης δίνεται από τη σχέση:

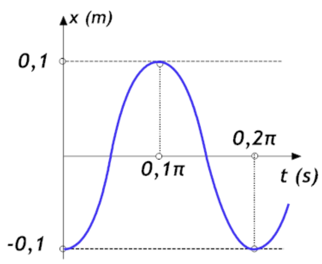
$$D = m\omega^2 = 2 \cdot 10^2 = 200\ {}^{N}\!/_{m} .$$

Από τη συνθήκη της απλής αρμονικής ταλάντωσης (ΑΑΤ) $F = -D \cdot x$, καταλαβαίνουμε ότι τη χρονική στιγμή t=0, η σφαίρα δέχεται τη μέγιστη δύναμη επαναφοράς όταν βρίσκεται στο αρνητικό ακρότατο. Έτσι: $F_{max} = -D \cdot (-A) \Rightarrow A = \frac{F_{max}}{D} = \frac{20N}{200N/m} = 0,1\ m$.

β) Για να βρω την αρχική φάση φ_0, θέτω στη χρονική εξίσωση απομάκρυνσης – χρόνου, t=0 και $x_{αρχ}$=-A, οπότε: $-A = A\eta\mu\varphi_0 \Rightarrow \eta\mu\varphi_0 = \frac{-A}{A} = -1 \Rightarrow \varphi_0 = 2k\pi + \frac{3\pi}{2}$. Επειδή όμως η αρχική φάση βρίσκεται μεταξύ 0 και 2π, θέτουμε k=0, οπότε:

Συνεπώς η χρονική εξίσωση x – t είναι η: $x = 0,1\eta\mu(10t + \frac{3\pi}{2})$ (S.I.).

Η γραφική παράσταση φαίνεται στο παρακάτω σχήμα.



γ) Η χρονική εξίσωση ταχύτητας – χρόνου t είναι η: $\upsilon = \upsilon_{max}\sigma\upsilon\nu(\omega t + \varphi_0)$, με $\upsilon_{max} = \omega A = 10 \cdot 0{,}1 = 1\,{}^{m}\!/\!_{s}$.

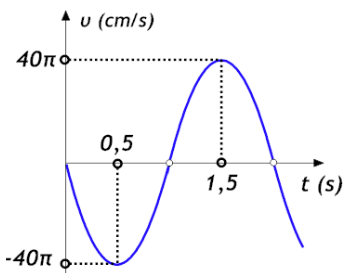
Έτσι την $t_1 = \frac{\pi}{4}s$, η ταχύτητα είναι: $\upsilon_1 = \sigma\upsilon\nu(10\frac{\pi}{4} + \frac{3\pi}{2}) = \sigma\upsilon\nu(4\pi) \Rightarrow \upsilon_1 = 1\,{}^{m}\!/\!_{s}$.

δ) Η κινητική ενέργεια τη χρονική στιγμή t_1 είναι: $K_1 = \frac{1}{2}m\upsilon_1^2 = \frac{1}{2}2kg \cdot 1^2 m^2/s^2 \Rightarrow$ $K_1 = 1\,J$.

Η δυναμική ενέργεια θα υπολογιστεί από τη Διατήρηση της Ενέργειας: $K_1 + U_1 = E \Rightarrow U_1 = E - K_1 = \frac{1}{2}m\upsilon_{\mu\alpha\chi}^2 - K_1 = 1 - 1 \Rightarrow U_1 = 0\,J$.

Άσκηση 7.

Το διάγραμμα του σχήματος παριστάνει την ταχύτητα σε συνάρτηση με το χρόνο ενός σώματος μάζας *m*=0,5 kg, που εκτελεί απλή αρμονική ταλάντωση.



α) Να υπολογίσετε τη γωνιακή συχνότητα *ω* και το πλάτος *A* της ταλάντωσης.

β) Να βρείτε την αρχική φάση της ταλάντωσης. Η αρχική φάση έχει πεδίο τιμών [0,2π).

γ) Να γράψετε τη χρονική εξίσωση της συνισταμένης δύναμης, που δέχεται το σώμα.

δ) Να βρείτε το μέτρο της επιτάχυνσης στις θέσεις όπου η κινητική ενέργεια της ταλάντωσης είναι το 75% της ολικής ενέργειας.

Δίνεται: $\pi^2 \simeq 10$.

<u>Λύση</u>

α) Από το διάγραμμα ταχύτητας υ – χρόνου t, που δίνεται, παρατηρούμε (απ' τον οριζόντιο άξονα των t), ότι $\frac{T}{4} = 0,5\text{ s} \Rightarrow T{=}2\text{ s}$.

Η γωνιακή συχνότητα υπολογίζεται απ' τη σχέση: $\omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi}{2} \Rightarrow \omega = \pi\ \frac{\text{rad}}{\text{s}}$.

Γνωρίζουμε ότι η μέγιστη ταχύτητα ταλάντωσης υπολογίζεται από τη σχέση: $\upsilon_{max} = \omega \cdot A$.

Από το διάγραμμα ταχύτητας υ – χρόνου t, που δίνεται, παρατηρούμε (απ' τον κατακόρυφο άξονα των υ), ότι η μέγιστη ταχύτητα ταλάντωσης είναι: $\upsilon_{max} = 40\pi\frac{\text{cm}}{\text{s}} = 0,4\pi\frac{\text{m}}{\text{s}}$.

Άρα: $A = \frac{\upsilon_{max}}{\omega} = \frac{0,4\pi\ \text{m/s}}{\pi\ \text{rad/s}} \Rightarrow A = 0,4\ \text{m}$.

β) Γνωρίζουμε από τη θεωρία, ότι όταν ο αρμονικός ταλαντωτής βρίσκεται στα δύο ακραία σημεία της ταλάντωσης, έχει μηδενική ταχύτητα. Πιο συγκεκριμένα αν βρίσκεται στο θετικό ακρότατο, αμέσως μετά κινείται προς τη Θ.Ι. κινούμενος στην αρνητική φορά (άρα έχει αρνητική ταχύτητα), ενώ αν βρίσκεται στο αρνητικό ακρότατο, κινείται προς τη Θ.Ι. έχοντας θετική φορά κίνησης, δηλαδή θετική ταχύτητα.

Από το διάγραμμα παρατηρούμε ότι τη χρονική στιγμή t=0, το σώμα έχει μηδενική ταχύτητα και αμέσως μετά το σώμα έχει αρνητική τιμή ταχύτητας.

Συνεπώς με βάση τα παραπάνω το σώμα θα βρίσκεται στο θετικό ακρότατο, δηλαδή $x_0 = +A$.

Αντικαθιστώντας τώρα στη χρονική εξίσωση απομάκρυνσης, βρίσκουμε την αρχική φάση ως εξής: $A = A \cdot \eta\mu(\omega \cdot 0 + \varphi_0) \Rightarrow \eta\mu\varphi_0 = 1 = \eta\mu\frac{\pi}{2} \Rightarrow \varphi_0 = 2k\pi + \frac{\pi}{2}$ και για k=0, προκύπτει: $\varphi_0 = \frac{\pi}{2}$.

γ) Γνωρίζουμε ότι η συνισταμένη δύναμη επαναφοράς βρίσκεται από τη <u>Συνθήκη της απλής αρμονικής ταλάντωσης</u>: $F = -D \cdot x = -m\omega^2 \cdot A\eta\mu(\omega t + \varphi_0)$. Αντικαθιστώντας στο S.I. έχουμε:

$$F = -0,5 \cdot \pi^2 \cdot 0,4 \cdot \eta\mu(\pi t + \frac{\pi}{2}) = -0,5 \cdot 10 \cdot 0,4 \cdot \eta\mu(\pi t + \frac{\pi}{2}) \Rightarrow F = -2 \cdot \eta\mu(\pi t + \frac{\pi}{2}) \text{ (S.I.)}.$$

δ) Γνωρίζουμε ότι, σε μια απλή αρμονική ταλάντωση, η επιτάχυνση υπολογίζεται από τη σχέση: $a = -\omega^2 \cdot x$ και το μέτρο της: $|a| = \omega^2 \cdot |x|$.

Με βάση το γεγονός ότι σε μια αμείωτη απλή αρμονική ταλάντωση, η <u>ολική ενέργεια διατηρείται</u>: $K + U = E$, αφού η κινητική ενέργεια είναι το 75% της ολικής ενέργειας Ε, συμπεραίνουμε ότι η δυναμική ενέργεια θα είναι το 25% της Ε. Άρα:

$U = \frac{25}{100}E = \frac{1}{4}E \Rightarrow \frac{1}{2}D \cdot x^2 = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{2}D \cdot A^2 \Rightarrow x^2 = \frac{1}{4}A^2 \Rightarrow x = \pm\frac{A}{2}$ ή το μέτρο της $|x| = \frac{A}{2}$.

Έτσι: $|\alpha| = \omega^2 \frac{A}{2} = \pi^2 \frac{0,4}{2} \Rightarrow |\alpha| = 2\frac{m}{s^2}$.

Άσκηση 8.

Ένα σώμα με μάζα *m=0,1 kg* εκτελεί απλή αρμονική ταλάντωση, μεταξύ δύο ακραίων θέσεων που απέχουν *d=40 cm*. Ο ελάχιστος χρόνος μετάβασης του σώματος από τη μια ακραία θέση στην άλλη είναι *Δt=0,1π s*. Τη χρονική στιγμή $t_0=0$ το σώμα διέρχεται από τη θέση $x_0 = 0,1\sqrt{2}\ \mathrm{m}$ και το μέτρο της ταχύτητάς του μειώνεται.

α) Να βρείτε το πλάτος *A* και τη γωνιακή συχνότητα *ω* της ταλάντωσης.
β) Πόση ενέργεια *E* προσφέραμε στο σώμα για να το θέσουμε σε ταλάντωση;
γ) Να υπολογίσετε τη δυναμική ενέργεια του σώματος, κάποια χρονική στιγμή, όταν έχει μέτρο ταχύτητας $\upsilon_1 = \sqrt{3}\ \mathrm{m/s}$.

δ) Να υπολογίσετε την αρχική φάση φ_0 ταλάντωσης. Η αρχική φάση έχει πεδίο τιμών [0,2π).

ε) Να υπολογίσετε την απομάκρυνση και τη δυναμική ενέργεια του σώματος, τη χρονική στιγμή $t_2 = \frac{3T}{4}$.

Δίνεται: $\eta\mu\frac{5\pi}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$.

Λύση

α) Γνωρίζουμε ότι η απόσταση μεταξύ των δύο ακραίων θέσεων μιας απλής αρμονικής ταλάντωσης είναι 2Α, οπότε: $d = 2A = 0,4\mathrm{m} \Rightarrow A = 0,2\ \mathrm{m}$. Επίσης γνωρίζουμε ότι ο ελάχιστος χρόνος μετάβασης από τη μια ακραία θέση στην άλλη είναι $\frac{T}{2}$. Άρα $\Delta t = \frac{T}{2} = 0,1\pi\ \mathrm{s} \Rightarrow T = 0,2\pi\ \mathrm{s}$.

Η σχέση γωνιακής συχνότητας – περιόδου είναι: $T = \frac{2\pi}{\omega} \Rightarrow \omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi}{0,2\pi}\frac{\mathrm{rad}}{\mathrm{s}} = 10\frac{\mathrm{rad}}{\mathrm{s}}$.

β) Γνωρίζουμε ότι η ενέργεια που προσφέρουμε για να το θέσουμε σε ταλάντωση είναι ίση με την ολική ενέργεια Ε της ταλάντωσης, η οποία θα υπολογιστεί από τη σχέση:

$$E = \frac{1}{2}DA^2 = \frac{1}{2}m\omega^2A^2 \Rightarrow E = \frac{1}{2}0,1\mathrm{kg}\cdot 10^2\mathrm{rad}^2/\mathrm{s}^2 \cdot 0,2^2\mathrm{m}^2 \Rightarrow E = 0,2\ \mathrm{J}\ .$$

γ) Η δυναμική ενέργεια του σώματος σε συνάρτηση της ταχύτητας θα προκύψει από τη Διατήρηση της Ενέργειας: $K + U = E \Rightarrow U = E - K = E - \frac{1}{2}m\upsilon^2$.

Αντικαθιστώντας στο S.I. έχουμε: $U_1 = 0,2J - \frac{1}{2}0,1kg \cdot (\sqrt{3})^2 m/s^2 = (0,2-0,15)J \Rightarrow$

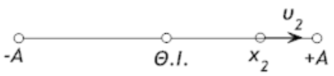
$U_1 = 0,05$ J .

δ) Στη χρονική εξίσωση της απομάκρυνσης, επειδή για t=0 s έχω $x_0 = 0,1\sqrt{2}$ m , αντικαθιστώ και βρίσκω την αρχική φάση:

$$0,1\sqrt{2} = 0,2\eta\mu(10 \cdot 0 + \varphi_o) \Rightarrow \eta\mu\varphi_0 = \frac{\sqrt{2}}{2} = \eta\mu\frac{\pi}{4} \Rightarrow$$

$\varphi_0 = 2k\pi + \frac{\pi}{4}$ ή $\varphi_0 = 2k\pi + \pi - \frac{\pi}{4} \Rightarrow \varphi_0 = 2k\pi + \frac{3\pi}{4}$ και για k=0, $\varphi_0 = \frac{\pi}{4}$ ή $\varphi_0 = \frac{3\pi}{4}$.

Η $1^η$ λύση δίνει $\upsilon_1 = \upsilon_{max}\sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{4} > 0$, ενώ η $2^η$ $\upsilon_1 = \upsilon_{max}\sigma\upsilon\nu\frac{3\pi}{4} < 0$. Επειδή το μέτρο της ταχύτητάς του μειώνεται, το σώμα κινείται προς το ακραίο σημείο, δηλαδή έχει φορά (και συνεπώς ταχύτητα) θετική. Έτσι δεχόμαστε την $1^η$ λύση, δηλαδή $\varphi_0 = \frac{\pi}{4}$.



ε) Η χρονική εξίσωση της απομάκρυνσης είναι της μορφής: $x = A\eta\mu(\omega t + \varphi_0)$ και αντικαθιστώντας τις τιμές των A, ω, φ_0, που ήδη έχουμε βρει: $x = 0,2\eta\mu(10t + \frac{\pi}{4})$ (S.I).

Τη χρονική στιγμή $t_2 = \frac{3T}{4} = \frac{3 \cdot 0,2\pi}{4} = \frac{0,3\pi}{2}$s η απομάκρυνση είναι: $x_2 = 0,2\eta\mu(10\frac{0,3\pi}{2} + \frac{\pi}{4}) = 0,2\eta\mu\frac{5\pi}{4} = -0,1\sqrt{2}$ m .

Γνωρίζουμε ότι η δυναμική ενέργεια του σώματος είναι ίση με: $U = \frac{1}{2}Dx^2$ **και αντικαθιστώντας βρίσκουμε:**

$$U_2 = \frac{1}{2}Dx_2^2 = \frac{1}{2}0,1 \cdot 100 \cdot (-0,1\sqrt{2})^2 \Rightarrow U_2 = 0,1 \text{ J} .$$

Άσκηση 9.

Ένα σώμα, μάζας *m*=0,5 kg, εκτελεί απλή αρμονική ταλάντωση με συχνότητα $f=\frac{5}{\pi}$ Hz, ενώ διανύει σε κάθε περίοδο της ταλάντωσής του διάστημα *d*=2 m. Το σώμα δέχεται κατά τη διάρκεια της ταλάντωσής του, και στη διεύθυνση της κίνησής του, δύο δυνάμεις F_1 και F_2, εκ των οποίων η F_2 είναι σταθερή με μέτρο F_2=10 N και φορά αρνητική. Τη χρονική στιγμή *t*=0 το σημείο διέρχεται επιταχυνόμενο από τη θέση $x_1=-\frac{\sqrt{3}}{4}\mathrm{m}$.

α) Να υπολογίσετε το πλάτος και τη σταθερά επαναφοράς *D* της ταλάντωσης.

β) Να υπολογίσετε την αρχική φάση φ_0 της ταλάντωσης. Η αρχική φάση έχει πεδίο τιμών [0,2π).

γ) Να υπολογίσετε το ποσοστό % της κινητικής ενέργειας του σώματος ως προς την ολική ενέργεια ταλάντωσης, τη χρονική στιγμή *t*=0.

δ) Να γράψετε την εξίσωση της δύναμης F_1 σε συνάρτηση με το χρόνο.

Λύση

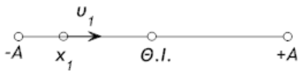
α) Επειδή σε κάθε πλήρη ταλάντωση το σώμα διανύει διάστημα $d=4A\Rightarrow A=\frac{d}{4}\Rightarrow$ $A=0,5\ \mathrm{m}$.

Η γωνιακή συχνότητα ω ισούται με: $\omega=2\pi f=2\pi\frac{5}{\pi}\frac{\mathrm{rad}}{\mathrm{s}}=10\frac{\mathrm{rad}}{\mathrm{s}}$. Γνωρίζουμε ότι η σταθερά επαναφοράς της ταλάντωσης, δίνεται από τη σχέση: $D=m\cdot\omega^2\overset{\mathrm{S.I.}}{\Rightarrow}D=0,5\cdot100\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{m}}\Rightarrow D=50\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{m}}$.

β) Στην απλή αρμονική ταλάντωση, η χρονική εξίσωση της απομάκρυνσης έχει τη μορφή: $x=A\eta\mu(\omega t+\varphi_0)$**. Επειδή για t=0 s έχω** $x_1=-\frac{\sqrt{3}}{4}\mathrm{m}$**, αντικαθιστώ τα δεδομένα αυτά και:** $-\frac{\sqrt{3}}{4}=0,5\eta\mu\left(10\cdot0+\varphi_o\right)\Rightarrow\eta\mu\varphi_0=-\frac{\sqrt{3}}{2}=\eta\mu(-\frac{\pi}{3})\Rightarrow$ $\varphi_0=2k\pi-\frac{\pi}{3}$ **ή** $\varphi_0=2k\pi+\pi+\frac{\pi}{3}\Rightarrow\varphi_0=2k\pi+\frac{4\pi}{3}$**. Για k=1, η 1η δίνει** $\varphi_0=\frac{5\pi}{3}$ **και για k=0 η 2η δίνει** $\varphi_0=\frac{4\pi}{3}$ **.**

Η 1η λύση δίνει $\upsilon_1=\upsilon_{max}\sigma\upsilon\nu\frac{5\pi}{3}>0$ ενώ η 2η $\upsilon_1=\upsilon_{max}\sigma\upsilon\nu\frac{4\pi}{3}<0$.

Επειδή το σώμα βρίσκεται στον αρνητικό ημιάξονα (απομάκρυνση αρνητική) και επιταχύνεται, άρα κινείται προς τη θέση ισορροπίας του, οπότε απ’ το σχήμα φαίνεται ότι έχει φορά κίνησης (και συνεπώς ταχύτητα) θετική. Έτσι δεχόμαστε την 1η λύση, δηλαδή $\varphi_0 = \frac{5\pi}{3}$.



γ) Το ζητούμενο ποσοστό είναι: $\frac{K_1}{E}100\%$.

Η κινητική ενέργεια θα υπολογιστεί από τη <u>Διατήρηση της Ενέργειας</u>: $K_1 = E - U_1 = \frac{1}{2}DA^2 - \frac{1}{2}Dx_1^2 = \frac{1}{2}D(A^2 - x_1^2)$, οπότε:

$$\frac{K_1}{E}100\% = \frac{\frac{1}{2}D(A^2 - x_1^2)}{\frac{1}{2}DA^2}100\% = \frac{A^2 - x_1^2}{A^2}100\% = \frac{0,5^2 - (-\frac{\sqrt{3}}{4})^2}{0,5^2}100\% = \frac{1}{4}100\% \Rightarrow$$

$$\frac{K_1}{E}100\% = 25\% .$$

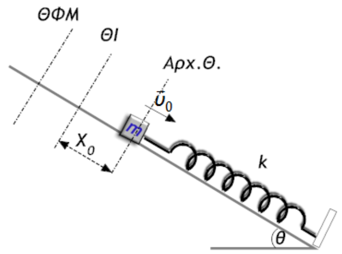
δ) Γνωρίζουμε ότι η συνισταμένη των δυνάμεων $\Sigma F = F_1 + F_2$ (όπου F_1, F_2 είναι οι αλγεβρικές τιμές των δυνάμεων) είναι η δύναμη επαναφοράς της ταλάντωσης. Άρα:

$\Sigma F = F_1 + F_2 = -D \cdot x \Rightarrow F_1 + F_2 = -D \cdot A \cdot \eta\mu(\omega t + \varphi_0)$ και αντικαθιστώντας στο S.I. έχουμε:

$$F_1 + (-10) = -50 \cdot 0,5 \cdot \eta\mu(10t + \frac{5\pi}{3}) \Rightarrow F_1 = 10 - 25\eta\mu(10t + \frac{5\pi}{3}) \text{ (S.I.)}.$$

Άσκηση 10.

Το κάτω άκρο ενός ιδανικού ελατηρίου, σταθεράς *k*=100 N/m, είναι ακλόνητα στερεωμένο στη βάση λείου κεκλιμένου επιπέδου, γωνίας κλίσης *θ*=30°. Στο πάνω άκρο του ισορροπεί δεμένο σώμα, αμελητέων διαστάσεων, μάζας *m*=1 kg. Συμπιέζουμε το ελατήριο επιπλέον κατά x_0=0,1 m και τη χρονική στιγμή *t*=0, εκτοξεύουμε το σώμα με ταχύτητα μέτρου $\upsilon_0 = \sqrt{3}$ m/s με φορά προς τα κάτω παράλληλη προς το κεκλιμένο επίπεδο, όπως φαίνεται στο σχήμα.



α) Να αποδείξετε ότι το σύστημα εκτελεί γραμμική αρμονική ταλάντωση και να βρείτε τη συχνότητά της.
β) Να υπολογίσετε το πλάτος ταλάντωσης *A*.
γ) Να γράψετε την εξίσωση της απομάκρυνσης του σώματος σε συνάρτηση με το χρόνο. Θεωρήστε θετική φορά την προς τα κάτω. Η αρχική φάση έχει πεδίο τιμών [0,2π).
δ) Να υπολογίσετε τη δύναμη του ελατηρίου στις θέσεις όπου μηδενίζεται η κινητική ενέργεια του σώματος.
Δίνεται η επιτάχυνση της βαρύτητας $g = 10 m/s^2$.

<u>Λύση</u>

α) Σημειώνουμε τις δυνάμεις στη θέση ισορροπίας (ΘΙ), αναλύουμε το βάρος w σε συνιστώσες w_x και w_y και εφαρμόζουμε τη συνθήκη ισορροπίας στον x-άξονα: $\Sigma F_x = 0 \Rightarrow w_x = F_{\varepsilon\lambda} \Rightarrow w_x = k \cdot d$.

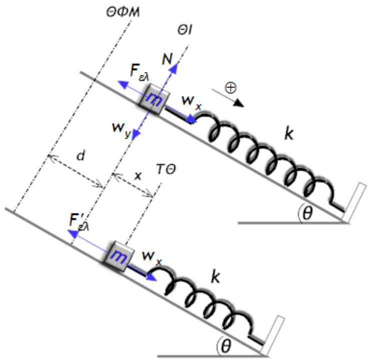
Θεωρούμε θετική φορά την προς τα κάτω και τοποθετούμε το σώμα σε μια τυχαία θέση (ΤΘ) θετικής απομάκρυνσης x απ' τη ΘΙ του. Υπολογίζομε τώρα τη συνισταμένη δύναμη: $\Sigma F_x = w_x - F'_{\varepsilon\lambda} = k \cdot d - k(x+d) = k \cdot d - k \cdot x - k \cdot d = -k \cdot x$.

Συγκρίνοντάς την με τη <u>Συνθήκη της απλής αρμονικής ταλάντωσης</u>: $\Sigma F = -D \cdot x$, προκύπτει ότι το σώμα θα εκτελέσει γραμμική αρμονική ταλάντωση με $D = k$, και συχνότητα: $f = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k}{m}} \overset{S.I.}{\Rightarrow} f = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{100 N/m}{1 kg}} \Rightarrow f = \frac{5}{\pi} Hz$.

β) Το πλάτος ταλάντωσης θα υπολογιστεί με εφαρμογή της <u>Διατήρησης της ενέργειας</u> στην αρχική θέση και στη θέση μέγιστης απομάκρυνσης:

$$K_0 + U_0 = E \Rightarrow \frac{1}{2}m\upsilon_0^2 + \frac{1}{2}kx_0^2 = \frac{1}{2}kA^2 \Rightarrow A^2 = \frac{m\upsilon_0^2 + kx_0^2}{k} \Rightarrow A = \sqrt{\frac{m\upsilon_0^2 + kx_0^2}{k}} \Rightarrow$$

$$A = \sqrt{\frac{1kg \cdot 3m^2/s^2 + 10^2 N/m \cdot 10^{-2} m^2}{10^2 N/m}} \Rightarrow A = 0,2\ m\,.$$



γ) Η εξίσωση απομάκρυνσης είναι της μορφής: $x = A\eta\mu(\omega t + \varphi_0)$, οπότε πρέπει να βρούμε επιπλέον τη γωνιακή συχνότητα και την αρχική φάση.

Η γωνιακή συχνότητα είναι: $\omega = 2\pi f = 2\pi \frac{5}{\pi}\frac{rad}{s} \Rightarrow \omega = 10\frac{rad}{s}$.

Επειδή για t=0 s έχω x_0=0,1 m, αντικαθιστώ και βρίσκω την αρχική φάση:

$$0,1 = 0,2\eta\mu\left(10 \cdot 0 + \varphi_o\right) \Rightarrow \eta\mu\varphi_0 = \frac{1}{2} = \eta\mu\frac{\pi}{6} \Rightarrow$$

$\varphi_0 = 2k\pi + \frac{\pi}{6}$ ή $\varphi_0 = 2k\pi + \pi - \frac{\pi}{6} \Rightarrow \varphi_0 = 2k\pi + \frac{5\pi}{6}$ και για να είναι $0 \le \varphi_0 < 2\pi$ θέτω k=0, δηλαδή: $\varphi_0 = \frac{\pi}{6}$ ή $\varphi_0 = \frac{5\pi}{6}$.

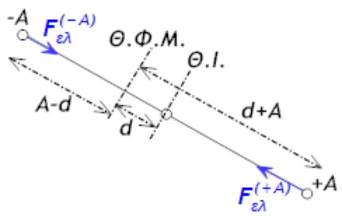
Η $1^η$ λύση δίνει $\upsilon_1 = \upsilon_{max}\sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{6} > 0$ ενώ η $2^η$ $\upsilon_1 = \upsilon_{max}\sigma\upsilon\nu\frac{5\pi}{6} < 0$. Επειδή η αρχική ταχύτητα έχει θετική φορά, δεχόμαστε την $1^η$ λύση, δηλαδή $\varphi_0 = \frac{\pi}{6}$.

Άρα η χρονική εξίσωση της απομάκρυνσης είναι: $x = 0,2\eta\mu(10t + \frac{\pi}{6})$ (S.I.).

δ) Οι θέσεις όπου μηδενίζεται η κινητική ενέργεια του σώματος είναι τα δύο ακρότατα της ταλάντωσης. Γνωρίζουμε ότι το μέτρο της δύναμης του ελατηρίου, σύμφωνα με το Νόμο του Hooke, υπολογίζεται από τη σχέση: $F_{ελ} = k\Delta\ell$, όπου $\Delta\ell$ είναι η απόσταση από τη Θέση Φυσικού Μήκους (ΘΦΜ) του ελατηρίου.

Η Θέση Ισορροπίας (Θ.Ι.) απέχει d από τη ΘΦΜ, που μπορεί να υπολογιστεί από τη

<u>Συνθήκη Ισορροπίας</u>: $w_x = k \cdot d \Rightarrow d = \dfrac{m \cdot g \cdot \eta\mu\theta}{k} \Rightarrow d = \dfrac{10kg\frac{1}{2}m/s^2}{100N/m} \Rightarrow d = 0,05\ m$.



Απ' το σχήμα φαίνεται ότι:

✓ το πάνω (αρνητικό) ακρότατο απέχει $A - d = 0,2 - 0,05 = 0,15\ m$ από τη Θ.Φ.Μ., και η δύναμη ελατηρίου έχει φορά προς τα κάτω (θετική), άρα: $F_{\varepsilon\lambda}^{(-A)} = k(A-d) \Rightarrow F_{\varepsilon\lambda}^{(-A)} = 100N/m \cdot 0,15m \Rightarrow F_{\varepsilon\lambda}^{(-A)} = 15\ N$.

✓ το κάτω (θετικό) ακρότατο απέχει $A + d = 0,2 + 0,05 = 0,25\ m$ από τη Θ.Φ.Μ., και η δύναμη ελατηρίου έχει φορά προς τα πάνω (αρνητική), άρα: $F_{\varepsilon\lambda}^{(+A)} = -k(A+d) \Rightarrow F_{\varepsilon\lambda}^{(+A)} = 100N/m \cdot 0,25m \Rightarrow F_{\varepsilon\lambda}^{(+A)} = 25\ N$.

ΘΕΜΑ Δ

Πρόβλημα 1.

Ένα σώμα, μάζας *m*=2 kg, εκτελεί απλή αρμονική ταλάντωση. Η απόσταση των ακραίων θέσεων του υλικού σημείου είναι *d*=0,4 m και τη χρονική στιγμή t_0=0 διέρχεται απ' τη θέση x_1=0,1 m, έχοντας ταχύτητα μέτρου $\upsilon_1 = 2\sqrt{3}\ \mathrm{m/s}$ με φορά προς τη θέση ισορροπίας του.

α) Να υπολογίσετε το πλάτος *A* και τη σταθερά επαναφοράς *D* της ταλάντωσης.

β) Να παραστήσετε γραφικά την Κινητική του ενέργεια σε συνάρτηση με την απομάκρυνση *x* από τη θέση ισορροπίας του, σε κατάλληλα βαθμολογημένους άξονες στο S.I.

γ) Να υπολογίσετε την γωνιακή συχνότητα *ω* και την αρχική φάση της φ_0 ταλάντωσης. Η αρχική φάση έχει πεδίο τιμών [0,2π).

δ) Να βρείτε ποια χρονική στιγμή περνά, για πρώτη φορά, από την ακραία θετική θέση.

<u>Λύση</u>

α) Γνωρίζομε ότι η απόσταση μεταξύ των δύο ακραίων θέσεων της ταλάντωσης είναι 2Α,

άρα: $\mathrm{d} = 2\mathrm{A} \Rightarrow \mathrm{A} = \dfrac{\mathrm{d}}{2} \Rightarrow \ \mathrm{A} = 0,2\ \mathrm{m}$.

Με βάση τη <u>Διατήρηση της Ενέργειας</u>, εξισώνουμε την ενέργεια ταλάντωσης στην αρχική θέση x_1 και στη θέση μέγιστη απομάκρυνσης, έχουμε:

$$\mathrm{K} + \mathrm{U} = \mathrm{E} \Rightarrow \frac{1}{2}\mathrm{m}\upsilon_1^2 + \frac{1}{2}\mathrm{D}\mathrm{x}_1^2 = \frac{1}{2}\mathrm{D}\mathrm{A}^2 \Rightarrow \mathrm{m}\upsilon_1^2 = \mathrm{D}(\mathrm{A}^2 - \mathrm{x}_1^2) \Rightarrow \mathrm{D} = \frac{\mathrm{m}\upsilon_1^2}{\mathrm{A}^2 - \mathrm{x}_1^2} \Rightarrow \mathrm{D} = \frac{2\mathrm{kg}\cdot(4\cdot 3)\mathrm{m}^2/\mathrm{s}^2}{(0,04 - 0,01)\mathrm{m}^2} \Rightarrow$$

$$\mathrm{D} = 800\ \mathrm{N/m}\ .$$

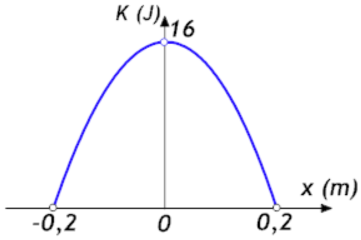
β) Βρίσκουμε πρώτα τη συνάρτηση Κινητικής ενέργειας Κ – απομάκρυνσης x, σε μια τυχαία θέση της απλής αρμονικής ταλάντωσης, εφαρμόζοντας τη <u>Διατήρηση της Ενέργειας</u>:

$$\mathrm{K} + \mathrm{U} = \mathrm{E} \Rightarrow \mathrm{K} + \frac{1}{2}\mathrm{D}\mathrm{x}^2 = \frac{1}{2}\mathrm{D}\mathrm{A}^2 \Rightarrow \mathrm{K} = \frac{1}{2}\mathrm{D}\mathrm{A}^2 - \frac{1}{2}\mathrm{D}\mathrm{x}^2 \Rightarrow \mathrm{K} = 400\cdot 0,04 - 400\mathrm{x}^2 \Rightarrow$$

$\mathrm{K} = 16 - 400\mathrm{x}^2$ (S.I.).

Αυτή είναι μια εξίσωση παραβολής με «τα κοίλα» προς τα κάτω, που φαίνεται στο διπλανό σχήμα.

γ) Γνωρίζουμε ότι χρονική εξίσωση της απομάκρυνσης είναι της μορφής: $x = A\eta\mu(\omega t + \varphi_0)$, οπότε χρειαζόμαστε ακόμη την γωνιακή συχνότητα ω και την αρχική φάση φ_0.



Από τη σχέση ορισμού της σταθεράς επαναφοράς, έχουμε:

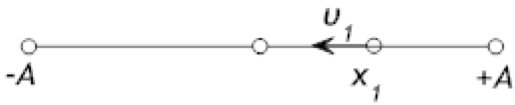
$$D = m\omega^2 \Rightarrow \omega = \sqrt{\frac{D}{m}} = \sqrt{\frac{800}{2}} = 20\,{}^{rad}\!/_{s}\,.$$

Από την εκφώνηση προκύπτει ότι τη χρονική στιγμή t=0, το υλικό σημείο έχει απομάκρυνση x_1=0,1 m και εφόσον έχει φορά προς τη θέση ισορροπίας του, θα έχει αρνητική φορά κίνησης, άρα αρνητική ταχύτητα. Έτσι:

$$0{,}1 = 0{,}2\eta\mu(20\cdot 0+\varphi_0) \Rightarrow \eta\mu\varphi_0 = \frac{1}{2} = \eta\mu\frac{\pi}{6} \Rightarrow \varphi_0 = 2k\pi+\frac{\pi}{6} \text{ ή } \varphi_0 = 2k\pi+\pi-\frac{\pi}{6} \Rightarrow \varphi_0 = 2k\pi+\frac{5\pi}{6}$$

και για k=0, $\varphi_0 = \frac{\pi}{6}$ ή $\varphi_0 = \frac{5\pi}{6}$.

Η $1^η$ λύση δίνει $\upsilon_1 = \upsilon_{max}\sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{6} > 0$ ενώ η $2^η$ $\upsilon_1 = \upsilon_{max}\sigma\upsilon\nu\frac{5\pi}{6} < 0$, οπότε δεχόμαστε τη $2^η$ λύση, δηλαδή $\varphi_0 = \frac{5\pi}{6}$.



δ) Η εξίσωση της απομάκρυνσης από τη θέση ισορροπίας σε συνάρτηση με το χρόνο t είναι της μορφής: $x = A\eta\mu(\omega t + \varphi_0)$. Αντικαθιστώντας τις τιμές των Α, ω και φ_0, που υπολογίσαμε προηγουμένως, έχουμε $x = 0{,}2\eta\mu(20t + \frac{5\pi}{6})$ (S.I.).

Όταν περνά από το θετικό ακρότατο, θα έχει $x = +0{,}2m$. Αντικαθιστούμε στην εξίσωση x- t και λύνουμε την τριγωνομετρική εξίσωση ως προς το χρόνο t:

$$0{,}2 = 0{,}2\eta\mu(20t+\frac{5\pi}{6}) \Rightarrow \eta\mu(20t+\frac{5\pi}{6}) = 1 = \eta\mu\frac{\pi}{2} \Rightarrow$$

$20t+\frac{5\pi}{6} = 2k\pi+\frac{\pi}{2} \Rightarrow 20t = 2k\pi+\frac{\pi}{2}-\frac{5\pi}{6} = 2k\pi-\frac{\pi}{3}$, με $k = 1, 2, \ldots$ (το $k = 0$ δεν είναι δεκτό διότι «δίνει» αρνητικό χρόνο).

Η $1^η$ φορά που περνά από το +0,2 m αντιστοιχεί στην $1^η$ δεκτή τιμή του k, που είναι η $k=1$, άρα: $20t = 2\pi - \frac{\pi}{3} = \frac{5\pi}{3} \Rightarrow t = \frac{\pi}{12} s$.

Πρόβλημα 2.

Ένα σώμα, αμελητέων διαστάσεων, μάζας *m* ισορροπεί δεμένο στο κάτω άκρο κατακόρυφου ιδανικού ελατηρίου σταθεράς *k*, το πάνω άκρο του οποίου είναι ακλόνητα στερεωμένο. Στη Θέση Ισορροπίας το ελατήριο ασκεί στο μικρό σώμα δύναμη μέτρου F_0=1 N. Ανεβάζουμε το σώμα από τη Θέση Ισορροπίας του κατακόρυφα προς τα πάνω έως τη Θέση Φυσικού Μήκους του ελατηρίου και τη χρονική στιγμή *t*=0, το εκτοξεύουμε με κατακόρυφη προς τα κάτω ταχύτητα μέτρου υ_0. Το σώμα μετά την εκτόξευσή του εκτελεί απλή αρμονική ταλάντωση. Το διάστημα που διανύει μεταξύ δύο διαδοχικών διελεύσεων απ' τη Θέση Ισορροπίας του είναι s=0,4 m σε χρόνο $\Delta t=\frac{\pi}{10}$ s.

α) Να υπολογίσετε το πλάτος *A* και τη σταθερά *k* του ελατηρίου. Δίνεται η επιτάχυνση της βαρύτητας *g*=10 m/s^2.

β) Να βρείτε τη δυναμική ενέργεια του ελατηρίου στη θέση, που η δυναμική ενέργεια της ταλάντωσης είναι μηδέν.

γ) Να υπολογίσετε το μέτρο της αρχικής ταχύτητας υ_0.

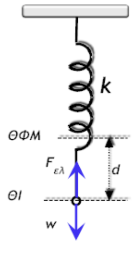
δ) Να υπολογίσετε το ρυθμό μεταβολής της κινητικής ενέργειας του σώματος τη χρονική στιγμή *t*=0. Θεωρήστε θετική φορά την προς τα πάνω.

Λύση

α) Επειδή το διάστημα, που διανύει το σώμα, μεταξύ δύο διαδοχικών διελεύσεων απ' τη Θ.Ι. του είναι: $\mathrm{s}=2\mathrm{A}\Rightarrow \mathrm{A}=\frac{\mathrm{s}}{2}\Rightarrow \mathrm{A}=0,2\ \mathrm{m}$.

Η χρονική διάρκεια μεταξύ δύο διαδοχικών διελεύσεων απ' τη Θ.Ι. του σώματος είναι: $\Delta \mathrm{t}=\frac{\mathrm{T}}{2}\Rightarrow \mathrm{T}=2\Delta \mathrm{t}\Rightarrow \mathrm{T}=\frac{\pi}{5}\mathrm{s}$ και η γωνιακή συχνότητα ω ισούται με: $\omega=\frac{2\pi}{\mathrm{T}}=\frac{2\pi}{\frac{\pi}{5}}\frac{\mathrm{rad}}{\mathrm{s}}=10\frac{\mathrm{rad}}{\mathrm{s}}$.

Γνωρίζουμε ότι όταν ένα σώμα εκτελεί απλή αρμονική ταλάντωση δεμένο στο άκρο ελατηρίου, η σταθερά επαναφοράς της ταλάντωσης ισούται με τη σταθερά του ελατηρίου: $\mathrm{k}=\mathrm{D}=\mathrm{m}\omega^2$. (Σχολικό βιβλίο, παράδειγμα 1.1, σελ. 12).



Υπολογίζουμε τη μάζα του σώματος από τη <u>Συνθήκη Ισορροπίας</u>:
$$\Sigma F = 0 \Rightarrow F_{\varepsilon\lambda} - mg = 0 \Rightarrow m = \frac{F_0}{g} = 0{,}1\,k$$

Άρα: $k = D = m\cdot\omega^2 = 0{,}1\cdot 100\frac{N}{m} \Rightarrow k = 10\frac{N}{m}$.

β) Γνωρίζουμε ότι η δυναμική ενέργεια του ελατηρίου υπολογίζεται από τη σχέση: $U_{\varepsilon\lambda} = \frac{1}{2}k\Delta\ell^2$, όπου $\Delta\ell$ είναι η απόσταση από τη Θέση Φυσικού Μήκους (ΘΦΜ) του ελατηρίου.

Η θέση, που η δυναμική ενέργεια της ταλάντωσης είναι μηδέν, είναι η θέση ισορροπίας της ταλάντωσης. Άρα ζητείται η δυναμική ενέργεια του ελατηρίου στη ΘΙ, που φαίνεται απ' το σχήμα, απέχει d από τη Θέση Φυσικού Μήκους, οπότε αρκεί να υπολογίσουμε την d, απ' το <u>Νόμο του Hooke</u> στη Θ.Ι. της ταλάντωσης: $F_0 = kd \Rightarrow d = \frac{F_0}{k} = \frac{1N}{10N/m} = 0{,}1\,m$.

Συνεπώς η ζητούμενη δυναμική ενέργεια ελατηρίου θα είναι:
$$U_{\varepsilon\lambda} = \frac{1}{2}kd^2 = \frac{1}{2}10N/m\cdot 0{,}1^2 m^2 \Rightarrow U_{\varepsilon\lambda} = 0{,}05\ J.$$

γ) Για να υπολογίσουμε την αρχική ταχύτητα, θα εφαρμόσουμε τη <u>Διατήρηση της Ενέργειας</u> στην αρχική θέση και στη θέση μέγιστης απομάκρυνσης:
$$K_0 + U_0 = E \Rightarrow \frac{1}{2}m\upsilon_0^2 + \frac{1}{2}kd^2 = \frac{1}{2}kA^2 \Rightarrow \upsilon_0^2 = \frac{k(A^2-d^2)}{m} \Rightarrow \upsilon_0 = \sqrt{\frac{k(A^2-d^2)}{m}} \Rightarrow$$
$$\upsilon_0 = \sqrt{\frac{10(0{,}04-0{,}01)}{0{,}1}}\frac{m}{s} \Rightarrow \upsilon_0 = \sqrt{3}\,m/s.$$

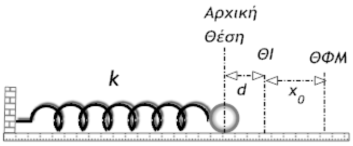
δ) Ο ρυθμός μεταβολής της κινητικής ενέργειας του σώματος υπολογίζεται ως εξής:
$$\frac{dK}{dt} = \frac{W_{\Sigma F}}{dt} = \frac{\Sigma F\cdot dx}{dt} = \Sigma F\cdot\frac{dx}{dt} = \Sigma F\cdot\upsilon = -D\cdot x\cdot\upsilon.$$

Τη χρονική στιγμή t=0, το σώμα βρίσκεται σε απομάκρυνση $x = d = 0{,}1\,m$ και έχει ταχύτητα μέτρου $\sqrt{3}\,m/s$ με φορά αρνητική, άρα: $\upsilon = -\sqrt{3}\,m/s$.

Αντικαθιστούμε και βρίσκουμε: $\frac{dK}{dt} = -10N/m\cdot 0{,}1m\cdot(-\sqrt{3})m/s \Rightarrow \frac{dK}{dt} = \sqrt{3}\frac{J}{s}$.

Πρόβλημα 3.

Μικρή μεταλλική σφαίρα μάζας *m=100 g* είναι δεμένη στο δεξιό ελεύθερο άκρο ενός οριζόντιου ελατηρίου σταθεράς *k=10 N/cm*, του οποίου το αριστερό άκρο είναι ακλόνητα στερεωμένο. Η σφαίρα δέχεται σταθερή δύναμη μέτρου $F=2\cdot 10^2\ N$, της οποίας η διεύθυνση είναι παράλληλη με τον άξονα του ελατηρίου και η φορά προς τ' αριστερά, οπότε η σφαίρα ισορροπεί με το ελατήριο συσπειρωμένο. Εκτρέπουμε τη σφαίρα από τη θέση ισορροπίας της κατά *d=0,1 m* προς τ' αριστερά και τη χρονική στιγμή *t=0* την αφήνουμε ελεύθερη να κινηθεί.



α) Να υπολογίσετε την απόσταση x_0 της θέσης ισορροπίας της σφαίρας από τη θέση φυσικού μήκους του ελατηρίου.

β) Να αποδείξετε ότι η σφαίρα θα εκτελέσει γραμμική αρμονική ταλάντωση και να υπολογίσετε τη γωνιακή συχνότητα καθώς και την ολική ενέργεια της ταλάντωσης.

γ) Σε ποιο σημείο της τροχιάς έχει ταυτόχρονα μέγιστο μέτρο δύναμης επαναφοράς και δύναμης ελατηρίου; Βρείτε τότε το λόγο των μέτρων της μέγιστης δύναμης επαναφοράς προς τη μέγιστη δύναμη ελατηρίου.

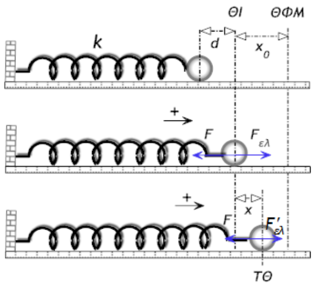
δ) Τη στιγμή που η σφαίρα διέρχεται από τη θέση ισορροπίας της και κινείται κατά τη θετική φορά, καταργείται ακαριαία η δύναμη *F*. Βρείτε το λόγο της ολικής ενέργειας E' της νέας ταλάντωσης προς την ολική ενέργεια *E* της αρχικής ταλάντωσης.

<u>Λύση</u>

α) Η σφαίρα θα ισορροπήσει σε απόσταση x_0 αριστερά της Θέσης φυσικού μήκους (ΘΦΜ) του ελατηρίου, δεχόμενη τη σταθερή δύναμη F και την δύναμη ελατηρίου, που έχει φορά προς τη ΘΦΜ, δηλαδή προς τα δεξιά.

<u>Στη Θέση Ισορροπίας</u>: $\Sigma F_x = 0 \Rightarrow F_{\varepsilon\lambda} - F = 0 \Rightarrow F = k\cdot x_0$ (1), οπότε: $x_0 = \dfrac{F}{k}$.

Μετατρέπουμε τη σταθερά ελατηρίου στο S.I.: $k = 10\dfrac{N}{cm} = 10\dfrac{N}{10^{-2}m} = 10^3\dfrac{N}{m}$, οπότε στο S.I.: $x_0 = \dfrac{200}{1000}m \Rightarrow x_0 = 0,2m$.



β) Τοποθετούμε τη σφαίρα σε μια τυχαία θέση (ΤΘ) θετικής απομάκρυνσης x απ' τη θέση ισορροπίας της (ΘΙ) και υπολογίζομε τη συνισταμένη δύναμη στον x-άξονα: $\Sigma F = F'_{\varepsilon\lambda} - F = k(x_0 - x) - F$ και με βάση την (1), $\Sigma F = F_{\varepsilon\lambda} - F = k(x_0 - x) - kx_0 = -k \cdot x$.

Συγκρίνοντάς την με τη <u>Συνθήκη της απλής αρμονικής ταλάντωσης</u>: $\Sigma F = -D \cdot x$, προκύπτει ότι η σφαίρα θα εκτελέσει απλή αρμονική ταλάντωση με $D = k$, με γωνιακή συχνότητα: $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}} = \sqrt{\frac{10^3}{10^{-1}}}\frac{rad}{s} = 100\frac{rad}{s}$.

Το σημείο, που την αφήνουμε ελεύθερη είναι το αρνητικό ακρότατο της ταλάντωσης (διότι υ_0=0), άρα το πλάτος είναι: $A = d = 0{,}1m$.

Η ολική ενέργεια της ταλάντωσης δίνεται από τη σχέση: $E = \frac{1}{2}DA^2 = \frac{1}{2}kA^2 = \frac{1}{2}10^3 N/m(10^{-1})^2 m^2 = \frac{1}{2}10^3 10^{-2} J \Rightarrow E = 5\ J$.

γ) Η δύναμη επαναφοράς της ταλάντωσης μεγιστοποιείται όταν μεγιστοποιείται η απόσταση από τη ΘΙ, ενώ η δύναμη ελατηρίου μεγιστοποιείται όταν μεγιστοποιείται η απόσταση από τη ΘΦΜ. Οι δύο συνθήκες, με βάση το σχήμα, επαληθεύονται ταυτόχρονα όταν το σώμα βρίσκεται στο αρνητικό ακρότατο.

Η απόσταση, με βάση το σχήμα, από τη ΘΦΜ είναι $x_0 + A$, οπότε:

$$F_{\varepsilon\lambda} = k(x_0 + A) = 1000N/m\left(0{,}2 + 0{,}1\right)m = 300\ N$$

Η απόσταση από τη ΘΙ είναι A, οπότε: $F_{\varepsilon\pi} = k \cdot A = k \cdot 0{,}1 = 100\ N$. Άρα: $\frac{F_{\varepsilon\pi}}{F_{\varepsilon\lambda}} = \frac{100}{300} \Rightarrow$

$\frac{F_{\varepsilon\pi}}{F_{\varepsilon\lambda}} = \frac{1}{3}$.

δ) Αν καταργηθεί δύναμη F, τότε <u>ΘΙ του σώματος γίνεται τώρα η ΘΦΜ</u> και η αρχική ΘΙ γίνεται ένα τυχαίο σημείο της ταλάντωσης. Οπότε στο σημείο αυτό υπάρχει και δυναμική ενέργεια με $x' = 0{,}2m$ και κινητική ενέργεια με ταχύτητα αυτήν, που είχε όταν καταργήθηκε η F στην αρχική ΘΙ, δηλαδή της μέγιστης ταχύτητας της προηγούμενης ταλάντωσης: $\upsilon' = \omega \cdot A = 100 rad/s \cdot 0{,}1m = 10 m/s$.

Έτσι,

$$E' = K' + U' = \frac{1}{2}m\upsilon'^2 + \frac{1}{2}kx'^2 = \frac{1}{2}\cdot 10^{-1}kg\cdot 10^2 m^2/s^2 + \frac{1}{2}\cdot 10^3 N/m\cdot 4\cdot 10^{-2}m^2 = (5+20)J \Rightarrow$$

$E' = 25\ J$.

Συνεπώς ο λόγος των ενεργειών είναι: $\frac{E'}{E} = \frac{25}{5} \Rightarrow \frac{E'}{E} = 5$.

Πρόβλημα 4.

Μικρό σώμα, μάζας *m*=0,5 kg, είναι δεμένο στο ελεύθερο άκρο οριζόντιου ελατηρίου σταθεράς *k*=200 N/m και μπορεί να κινείται σε λείο οριζόντιο επίπεδο. Το σώμα εκτελεί γραμμική αρμονική ταλάντωση δεχόμενο σταθερή οριζόντια δύναμη μέτρου *F*=50 N προς τα δεξιά, μέσω νήματος. Όταν το σώμα βρίσκεται στη θέση, που μηδενίζεται η δυναμική ενέργεια του ελατηρίου, μεγιστοποιείται η δυναμική ενέργεια ταλάντωσης.

α) Να προσδιορίσετε τη θέση ισορροπίας του σώματος και στη συνέχεια να αποδείξετε ότι η σταθερά επαναφοράς της ταλάντωσης είναι ίση με τη σταθερά *k* του ελατηρίου.

β) Να υπολογίσετε την ενέργεια ταλάντωσης *E* του σώματος.

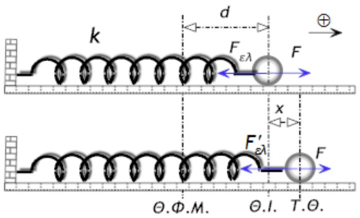
Κάποια στιγμή, που τη θεωρούμε ως *t*=0, κόβεται το νήμα, στη θέση όπου η δυναμική ενέργεια του ελατηρίου είναι μέγιστη. Το σύστημα εκτελεί νέα απλή αρμονική ταλάντωση με πλάτος A'.

γ) Θεωρώντας θετική τη φορά προς τα δεξιά, γράψτε την εξίσωση της απομάκρυνσης σε συνάρτηση με το χρόνο. Η αρχική φάση έχει πεδίο τιμών [0,2π).

δ) Να υπολογίσετε το λόγο των ενεργειών ταλάντωσης του σώματος $\frac{\mathrm{E}}{\mathrm{E}'}$, πριν και μετά την κατάργηση της δύναμης *F*.

<u>Λύση</u>

α) Οι δυνάμεις που δέχεται το σώμα είναι η σταθερή οριζόντια δύναμη F και η δύναμη ελατηρίου, που έχει πάντα φορά προς τη Θέση Φυσικού Μήκους του.



Στη θέση Ισορροπίας, που βρίσκεται στη θετική φορά και απόσταση d από τη Θ.Φ.Μ., εφαρμόζω τη <u>Συνθήκη Ισορροπίας</u> στον οριζόντιο άξονα:

$$\Sigma\mathrm{F}_{\chi}=0\Rightarrow \mathrm{F}-\mathrm{F}_{\varepsilon\lambda}=0\Rightarrow \mathrm{F}_{\varepsilon\lambda}=\mathrm{k}\cdot \mathrm{d}\Rightarrow \mathrm{d}=\frac{\mathrm{F}_0}{\mathrm{k}}=\frac{50}{200}\Rightarrow \mathrm{d}=0,25\ \mathrm{m}\ .$$

Τοποθετούμε κατόπιν τη σφαίρα σε μια τυχαία θέση θετικής απομάκρυνσης x απ' τη Θ.Ι. της και υπολογίζουμε τη συνισταμένη δύναμη:

$$\Sigma\mathrm{F}_{\mathrm{x}}=\mathrm{F}\text{-}\mathrm{F}'_{\varepsilon\lambda}=\mathrm{kd}-\mathrm{k}(\mathrm{d}+\mathrm{x})=\mathrm{kd}-\mathrm{kd}-\mathrm{k}\cdot\mathrm{x}=-\mathrm{k}\cdot\mathrm{x}\ .$$

Συγκρίνοντάς την με τη <u>Συνθήκη της απλής αρμονικής ταλάντωσης</u>: $\Sigma\mathrm{F}_{\mathrm{x}}=-\mathrm{D}\cdot\mathrm{x}$, προκύπτει ότι η σφαίρα θα εκτελέσει απλή αρμονική ταλάντωση με $\mathrm{D}=\mathrm{k}$.

β) Η θέση, που μηδενίζεται η δυναμική ενέργεια του ελατηρίου, είναι η Θ.Φ.Μ., ενώ η δυναμική ενέργεια ταλάντωσης μεγιστοποιείται στα ακρότατα. Συνεπώς, με βάση την εκφώνηση, το (αριστερό) ακρότατο θα είναι η Θ.Φ.Μ., δηλαδή $A = d = 0,25 \text{ m}$.

Η ενέργεια ταλάντωσης υπολογίζεται απ' τη σχέση: $E = \frac{1}{2}DA^2 = \frac{1}{2}200 \text{N}/\text{m} \cdot (\frac{1}{4})^2 \text{m}^2 \Rightarrow$

$E = 6,25 \text{ J}$.

γ) Η δυναμική ενέργεια του ελατηρίου μεγιστοποιείται στη θέση μέγιστης απόστασης από τη Θ.Φ.Μ., δηλαδή στη δεξιά ακραία θέση της ταλάντωσης. Εκεί το σώμα έχει ταχύτητα $υ_0$=0 και απέχει d από τη Θ.Ι. και 2d από τη Θ.Φ.Μ.

Μετά την κοπή του νήματος, η μόνη δύναμη του σώματος είναι η δύναμη ελατηρίου, οπότε έχουμε «μετατόπιση» της Θ.Ι. στη Θ.Φ.Μ. του ελατηρίου.

Έτσι τη χρονική στιγμή t=0, το σώμα θα απέχει 2d από τη Νέα Θ.Ι. και θα έχει ταχύτητα μηδενική, δηλαδή η θέση εκκίνησης της Νέας απλής αρμονικής ταλάντωσης, θα είναι το θετικό ακρότατο, με νέο πλάτος: $A' = 2d = 0,5 \text{ m}$.

Η γωνιακή συχνότητα θα είναι ίδια με την αρχική, δηλαδή:

$$\omega' = \omega = \sqrt{\frac{k}{m}} = \sqrt{\frac{200}{0,5}}\frac{\text{rad}}{\text{s}} = 20\frac{\text{rad}}{\text{s}}.$$

Η αρχική φάση θα υπολογιστεί με βάση το ότι για t=0, $x = +A'$, άρα: $+A' = A'ημφ_0 \Rightarrow ημφ_0 = 1 \Rightarrow φ_0 = 2kπ + \frac{π}{2}$ και για να είναι $0 \le φ_0 < 2π$, θέτουμε k=0, οπότε $φ_0 = \frac{π}{2}$.

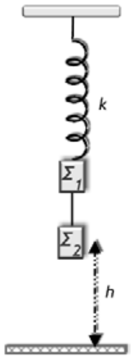
Συνεπώς η χρονική εξίσωση της απομάκρυνσης για τη νέα αρμονική ταλάντωση θα είναι:

$x = 0,5ημ(20t + \frac{π}{2})$ (S.I.).

δ) Η ενέργεια της νέας ταλάντωσης είναι: $E' = \frac{1}{2}kA'^2$, ενώ της αρχικής ήταν: $E = \frac{1}{2}kA^2$, έτσι ο λόγος τους θα είναι: $\frac{E}{E'} = \frac{\frac{1}{2}kA^2}{\frac{1}{2}kA'^2} = (\frac{A}{A'})^2 = (\frac{A}{2A})^2 \Rightarrow \frac{E}{E'} = \frac{1}{4}$.

Πρόβλημα 5.

Το σύστημα των δύο σωμάτων Σ_1 και Σ_2, ίσων μαζών m_1=m_2=10 kg, ισορροπεί δεμένο στο κάτω άκρο κατακόρυφου ιδανικού ελατηρίου σταθεράς $k = 100\,N/m$.Τα σώματα έχουν αμελητέες διαστάσεις. Το Σ_1 είναι δεμένο στο ελατήριο, ενώ αβαρές νήμα μικρού μήκους συνδέει τα Σ_1 και Σ_2. Τη χρονική στιγμή t=0 κόβουμε το νήμα που συνδέει τα δύο σώματα, οπότε το Σ_1 αρχίζει να εκτελεί απλή αρμονική ταλάντωση.



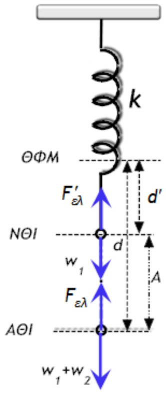
α) Να προσδιορίσετε τη θέση ισορροπίας του συστήματος των Σ_1-Σ_2 και στη συνέχεια τη θέση ισορροπίας της ταλάντωσης του Σ_1 μετά το κόψιμο του νήματος.
β) Να υπολογίσετε το πλάτος ταλάντωσης A καθώς και την ολική της ενέργεια E.
γ) Θεωρώντας θετική φορά την προς τα πάνω, να γράψετε την εξίσωση απομάκρυνσης x – χρόνου t. Στη συνέχεια να την παραστήσετε γραφικά σε κατάλληλα βαθμολογημένους άξονες, στη διάρκεια της 1ης περιόδου. Θεωρήστε ότι: $\sqrt{10} \simeq \pi$.
δ) Αν το σώμα Σ_2 έχει ως προς το δάπεδο, που βρίσκεται κάτω του, στη θέση ισορροπίας του συστήματος, βαρυτική δυναμική ενέργεια $U_{\beta\alpha\rho} = 180J$, να βρείτε ποιο απ’ τα δύο θα φτάσει πρώτο: το Σ_2 στο έδαφος ή το Σ_1 στο ανώτερο σημείο της τροχιάς του.

Δίνεται $g = 10m/s^2$.

Λύση

α) Για την Αρχική Θέση Ισορροπίας (ΑΘΙ) των m_1 – m_2, εφαρμόζω τη Συνθήκη Ισορροπίας:

$$\Sigma F = 0 \Rightarrow F_{\varepsilon\lambda} = w_1 + w_2 \Rightarrow k \cdot d = (m_1 + m_2)g \Rightarrow d = \frac{(m_1 + m_2)g}{k} \Rightarrow \ d = 2\ m\ .$$



Για την Νέα Θέση Ισορροπίας (ΝΘΙ) του m_1, εφαρμόζω πάλι τη <u>Συνθήκη Ισορροπίας</u>:

$$\Sigma F = 0 \Rightarrow F'_{\varepsilon\lambda} = w_1 \Rightarrow k \cdot d' = m_1 g \Rightarrow d' = \frac{m_1 g}{k} \Rightarrow d' = 1\ \mathrm{m}.$$

β) Η εκκίνηση της ταλάντωσης είναι από την Αρχική Θέση Ισορροπίας (ΑΘΙ) με ταχύτητα μηδέν (άρα αποτελεί ακρότατο της ταλάντωση του m_1), ενώ η Θέση Ισορροπίας της ταλάντωσης του Σ_1 είναι η Νέα Θέση Ισορροπίας (ΝΘΙ). Συνεπώς η απόσταση των δύο θέσεων ισορροπίας αποτελεί το πλάτος ταλάντωσης και ισούται με: $A = d - d' = 2 - 1 \Rightarrow$ $A = 1\ \mathrm{m}$.

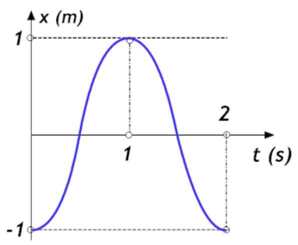
Το m_1 εκτελεί αρμονική ταλάντωση δεμένο στο κάτω άκρο του ελατηρίου, με σταθερά ταλάντωσης: $D = k = 100\frac{N}{m}$ και η ενέργεια ταλάντωσης θα υπολογιστεί από τη σχέση:

$$E = \frac{1}{2}DA^2 = \frac{1}{2}100\mathrm{N/m} \cdot 1^2\mathrm{m}^2 \Rightarrow E = 50\ \mathrm{J}.$$

γ) Η γωνιακή συχνότητα θα είναι: $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}} = \sqrt{\frac{100}{10}} = \sqrt{10}\frac{\mathrm{rad}}{\mathrm{s}} \Rightarrow \omega \simeq \pi\frac{\mathrm{rad}}{\mathrm{s}}$ και η περίοδος

$$T = \frac{2\pi}{\omega} \Rightarrow T = \frac{2\pi}{\pi} \Rightarrow T = 2\ \mathrm{s}.$$

Η αρχική φάση θα υπολογιστεί με βάση το ότι για t=0, $x = -A$, άρα: $-A = A\eta\mu\varphi_0 \Rightarrow \eta\mu\varphi_0 = -1 \Rightarrow \varphi_0 = 2k\pi - \frac{\pi}{2}$ και για να είναι $0 \le \varphi_0 < 2\pi$, θέτουμε k=1, οπότε: $\varphi_0 = \frac{3\pi}{2}$.



Συνεπώς η χρονική εξίσωση της απομάκρυνσης θα είναι: $x = \eta\mu(\pi t + \frac{3\pi}{2})$ (S.I.). Με βάση τον πίνακα τιμών:

t (s)	0	1	2
x (m)	-1	1	-1

και το ότι η συνάρτηση είναι ημιτονική, σχεδιάζουμε τη γραφική παράσταση του διαγράμματος.

δ) Γνωρίζουμε ότι η βαρυτική δυναμική ενέργεια ενός σώματος δίνεται από τη σχέση: $U_{\beta\alpha\rho} = mgh$, όπου h είναι η κατακόρυφη απόσταση του σώματος από το επίπεδο αναφοράς. Στην περίπτωσή μας, από τη βαρυτική δυναμική ενέργεια του Σ_2 ως προς το έδαφος, μπορούμε να υπολογίσουμε το ύψος h:

$$U_{\beta\alpha\rho} = m_2 g \cdot h \Rightarrow h = \frac{U_{\beta\alpha\rho}}{m_2 g} = \frac{180}{10 \cdot 10} \Rightarrow h = 1{,}8 \text{ m} .$$

Το σώμα Σ_2 εκτελεί ελεύθερη πτώση ως το έδαφος, οπότε μπορούμε να βρούμε το χρόνο πτώσης t_2 ως εξής: $h = \frac{1}{2} g t_2^2 \Rightarrow t_2 = \sqrt{\frac{2h}{g}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 1{,}8}{10}} \Rightarrow t_2 = 0{,}6 \text{ s}$.

Ο χρόνος t_1 για να φτάσει το Σ_1 στο ανώτερο σημείο της τροχιάς του, ξεκινώντας από το κάτω ακρότατο, είναι: $t_1 = \frac{T}{2} = \frac{2}{2} \Rightarrow t_1 = 1 \text{ s}$.

Άρα το Σ_2 θα φτάσει πρώτο στο έδαφος.

Πρόβλημα 6.

Το κάτω άκρο κατακόρυφου ιδανικού ελατηρίου σταθεράς *k*=100 N/m είναι στερεωμένο σε οριζόντιο δάπεδο. Στο πάνω άκρο του είναι δεμένος δίσκος $Σ_1$ μάζας m_1=0,8 kg. Πάνω στο δίσκο είναι τοποθετημένος κύβος $Σ_2$ μάζας m_2=0,2 kg. Το σύστημα αρχικά ισορροπεί. Πιέζουμε το σύστημα κατακόρυφα προς τα κάτω μεταφέροντας ενέργεια στο σύστημα ίση με *E*=2 J και το αφήνουμε ελεύθερο.

α) Να βρείτε το πλάτος ταλάντωσης *A* του συστήματος, τη γωνιακή συχνότητα *ω* καθώς και το χρόνο Δ*t* στον οποίο θα περάσει για 1η φορά απ’ τη θέση ισορροπίας του.

β) Να γράψετε τη συνάρτηση της δύναμης επαφής *N*, που δέχεται ο κύβος από το δίσκο $Σ_1$, σε συνάρτηση με την απομάκρυνση *x* από τη θέση ισορροπίας του.

γ) Να υπολογίσετε την απόσταση *y* από τη Θέση ισορροπίας του, στην οποία ο κύβος θα χάσει την επαφή με το δίσκο.

δ) Να υπολογίσετε την ταχύτητα του κύβου τη χρονική στιγμή, που εγκαταλείπει το δίσκο και το ύψος στο οποίο θα φθάσει πάνω από τη θέση που εγκαταλείπει το δίσκο.

Η αντίσταση του αέρα θεωρείται αμελητέα και $g = 10 m/s^2$.

<u>Λύση</u>

α) Το σύστημα των $Σ_1$ και $Σ_2$, εφόσον είναι δεμένο στο κατακόρυφο ελατήριο θα ταλαντώνεται αρμονικά με σταθερά ταλάντωσης: $D_{ολ} = k = 100 \frac{N}{m}$.

Το πλάτος ταλάντωσης του συστήματος, θα υπολογιστεί από τη σχέση, που δίνει την <u>ολική ενέργεια</u> Ε: $E = \frac{1}{2} D_{ολ} A^2 \Rightarrow A = \sqrt{\frac{2E}{k}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 2}{100}} m \Rightarrow A = 0,2\ m$.

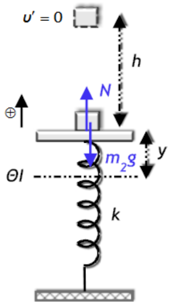
Η περίοδος ταλάντωσης υπολογίζεται από τη σχέση: $T = 2\pi \sqrt{\frac{m_{ολ}}{k}} = 2\pi \sqrt{\frac{1}{100}} s \Rightarrow T = \frac{\pi}{5}\ s$

.

Η γωνιακή συχνότητα του συστήματος είναι: $\omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi}{\frac{\pi}{5}} \frac{rad}{s} \Rightarrow \omega = 10 \frac{rad}{s}$.

Η θέση εκκίνησης είναι το κάτω ακρότατο της ταλάντωσης και ο χρόνος που απαιτείται για να φτάσει για 1η φορά στη θέση ισορροπίας του είναι: $\Delta t = \frac{T}{4} \Rightarrow \Delta t = 0,05\pi\ s$.

β) Για να βρούμε μια έκφραση για την αλγεβρική τιμή της δύναμης επαφής Ν, που ασκεί ο δίσκος στον κύβο, εργαζόμαστε ως εξής: Τοποθετούμε τον κύβο σε μια Τυχαία Θέση x του θετικού ημιάξονα και σχεδιάζουμε τις δυνάμεις $m_2 g$ και N που δέχεται.



Εφαρμόζουμε για τον κύβο Σ_2 τη <u>συνθήκη της ταλάντωσης</u>:
$\Sigma F_2 = -D_2 \cdot x \Rightarrow N - m_2 g = -m_2\omega^2 \cdot x \Rightarrow N = m_2 g - m_2\omega^2 \cdot x \Rightarrow N = 2 - 20 \cdot x$, με
$-A \le x \le A \Rightarrow -0,2 \le x \le 0,2$ (στο S.I.).

γ) Όταν χάνεται η επαφή των δύο σωμάτων, τότε μηδενίζεται η δύναμη N. Ας δούμε σε ποιες θέσεις μπορεί να χαθεί η επαφή των δύο σωμάτων.

✓ Όταν το σύστημα βρίσκεται στη θέση ισορροπίας (x=0): $N_{\Theta.I.} = (2 - 20 \cdot 0) N = 2\ N\ >\ 0$. Άρα, στη θέση ισορροπίας δεν χάνεται η επαφή των δύο σωμάτων.

✓ Όταν το σύστημα βρίσκεται κάτω από τη θέση ισορροπίας (x<0 ή x=-|x|): $N = 2 - 20 \cdot (-|x|) = 2 + 20|x| > 0$. Άρα, και κάτω από τη θέση ισορροπίας δεν χάνεται η επαφή των δύο σωμάτων.

✓ Όταν το σώμα βρίσκεται πάνω από τη θέση ισορροπίας (x>0), έχουμε: $N = 2 - 20 \cdot x = 2 - 20 \cdot x$, που είναι μια φθίνουσα πρωτοβάθμια συνάρτηση του x. Έτσι μπορεί σε κάποια θέση y (όπου $0 < y \le +A$) πάνω απ' τη Θ.Ι. να χαθεί η επαφή του κύβου με το δίσκο. Στη θέση αυτή θα είναι:

$$N = 0 \Rightarrow 2 - 20 \cdot y = 0 \Rightarrow y = \frac{2}{20} m \Rightarrow y = 0,1\ m.$$

δ) Έστω υ το μέτρο της ταχύτητας του κύβου στη θέση y, που χάνεται η επαφή με το δίσκο. Από τη <u>Διατήρηση της Ενέργειας</u> της ταλάντωσης του συστήματος, στη θέση απώλειας επαφής y και στη μέγιστη απομάκρυνση, έχουμε:

$$\frac{1}{2} m_{o\lambda} \upsilon^2 + \frac{1}{2} k y^2 = \frac{1}{2} k A^2 \Rightarrow \upsilon^2 = \frac{k(A^2 - y^2)}{m_{o\lambda}} \Rightarrow \upsilon = \sqrt{\frac{k(A^2 - y^2)}{m_{o\lambda}}} = \sqrt{\frac{100 N/m (0,2^2 - 0,1^2) m}{1 kg}} \Rightarrow$$
$$\upsilon = \sqrt{3} \frac{m}{s}.$$

Το ζητούμενο μέγιστο ύψος θα προκύψει με εφαρμογή της <u>Διατήρησης της Μηχανικής Ενέργειας</u> του κύβου (η μόνη ασκούμενη δύναμη είναι το βάρος – συντηρητική δύναμη), από τη θέση εκτόξευσης (όπου $h = 0$) έως το μέγιστο ύψος (όπου $\upsilon' = 0$):

$$K+U_{\beta\alpha\rho}=K'+U'_{\beta\alpha\rho}\Rightarrow\frac{1}{2}m_2\upsilon^2+0=0+m_2gh_{max}\Rightarrow h_{max}=\frac{\upsilon^2}{2g}\Rightarrow h_{max}=\frac{(\sqrt{3})^2m^2/s^2}{2\cdot 10m/s^2}\Rightarrow$$

$h_{max}=0{,}15\text{ m}$.

Πρόβλημα 7.

Το αριστερό άκρο οριζόντιου ιδανικού ελατηρίου σταθεράς k=400 N/m στερεώνεται ακλόνητα και στο δεξιό άκρο του προσδένεται σώμα $Σ_1$ μάζας m_1=3 kg, το οποίο μπορεί να κινείται σε λείο οριζόντιο δάπεδο. Πάνω στο $Σ_1$ τοποθετείται δεύτερο σώμα $Σ_2$ μάζας m_2=1 kg. Εκτοξεύουμε προς τα δεξιά το σύστημα από τη θέση ισορροπίας του, με ταχύτητα μέτρου V και παράλληλη με το οριζόντιο επίπεδο, όπως στο σχήμα, οπότε το σύστημα εκτελεί γραμμική αρμονική ταλάντωση. Τα δυο σώματα διατηρούν την επαφή στη διάρκεια της ταλάντωσης.

α) Να υπολογίσετε τη γωνιακή συχνότητα της ταλάντωσης καθώς και τις σταθερές ταλάντωσης $D_{ολ}$, D_1 και D_2 του συστήματος και των σωμάτων $Σ_1$ και $Σ_2$ αντίστοιχα.
β) Να τοποθετήσετε το σύστημα σε μια τυχαία θέση της ταλάντωσής του, να σχεδιάσετε και να περιγράψετε σε τρία κατάλληλα σχήματα τις δυνάμεις, που δέχονται: i) το σύστημα $Σ_1$ – $Σ_2$, ii) το $Σ_1$ και iii) το $Σ_2$.
γ) Να παραστήσετε γραφικά την αλγεβρική τιμή της στατικής τριβής από το $Σ_1$ στο $Σ_2$ σε συνάρτηση με την απομάκρυνση x από τη θέση ισορροπίας του, για πλάτος ταλάντωσης A=3 cm.
δ) Να υπολογίσετε τη μέγιστη τιμή της αρχικής ταχύτητας εκτόξευσης V_{max}, του συστήματος των $Σ_1$, $Σ_2$ ώστε το σώμα $Σ_2$ να μην ολισθήσει πάνω στο σώμα $Σ_1$. Δίνεται η επιτάχυνση της βαρύτητας g=10 m/s^2 και ο συντελεστής στατικής τριβής μεταξύ των δύο σωμάτων $Σ_1$ και $Σ_2$ είναι $μ_σ$=0,5.

Λύση

α) Τα δύο σώματα του συστήματος, έχουν κοινή γωνιακή συχνότητα ω, αλλά έχουν διαφορετική σταθερά Ταλάντωσης ($D_1 \neq D_2 \neq D_{ολ}$).

Το σύστημα έχει σταθερά ταλάντωσης: $D_{ολ} = k = 400\dfrac{N}{m}$ και ολική μάζα $m_{ολ} = m_1 + m_2$.

Η γωνιακή συχνότητα του συστήματος είναι: $\omega = \sqrt{\dfrac{k}{m_1+m_2}} = \sqrt{\dfrac{400}{4}}\dfrac{rad}{s} \Rightarrow \omega = 10\dfrac{rad}{s}$.

Εξισώνουμε τις γωνιακές συχνότητες:

$$\omega_1 = \omega_{ολ} \Rightarrow \sqrt{\frac{D_1}{m_1}} = \sqrt{\frac{D_{ολ}}{m_{ολ}}} \Rightarrow \frac{D_1}{m_1} = \frac{D_{ολ}}{m_{ολ}} = \frac{k}{m_1+m_2} \Rightarrow D_1 = \frac{m_1}{m_1+m_2}k \Rightarrow D_1 = 300\frac{N}{m}$$

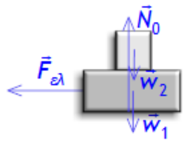
$$\omega_2 = \omega_{ολ} \Rightarrow \sqrt{\frac{D_2}{m_2}} = \sqrt{\frac{D_{ολ}}{m_{ολ}}} \Rightarrow \frac{D_2}{m_2} = \frac{D_{ολ}}{m_{ολ}} = \frac{k}{m_1+m_2} \Rightarrow D_2 = \frac{m_2}{m_1+m_2}k \Rightarrow D_2 = 100\frac{N}{m}.$$

β) Οι ασκούμενες δυνάμεις είναι:

i) στο σύστημα $Σ_1$ – $Σ_2$:

Στον x-άξονα: Η δύναμη από το ελατήριο $F_{ελ}$.

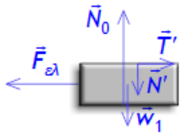
Στον y-άξονα: Το βάρος $w_{ολ} = w_1 + w_2$, η δύναμη επαφής N_0 από το λείο οριζόντιο δάπεδο.



ii) στο $Σ_1$:

Στον x-άξονα: Η δύναμη από το ελατήριο $F_{ελ}$ και η δύναμη της στατικής τριβής T' από το $Σ_2$.

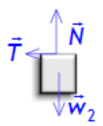
Στον y-άξονα: Το βάρος w_1, η δύναμη επαφής N_0 από το λείο οριζόντιο δάπεδο και η δύναμη επαφής N' από το $Σ_2$.



iii) στο $Σ_2$:

Στον x-άξονα: Η δύναμη της στατικής τριβής T από το $Σ_1$.

Στον y-άξονα: Το βάρος w_2 και η δύναμη επαφής N από το $Σ_1$.



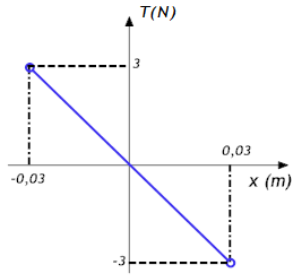
γ) Εφαρμόζουμε τη Συνθήκη ταλάντωσης για το $Σ_2$ και λαμβάνουμε υπόψη ότι η μοναδική δύναμη, που δέχεται στον οριζόντιο άξονα είναι η στατική τριβή Τα, άρα αποτελεί τη δύναμη επαναφοράς του $Σ_2$:

$ΣF_x^{(2)} = -D_2 \cdot x \Rightarrow T = -D_2 \cdot x$.

Άρα η αλγεβρική τιμή της στατικής τριβής δίνεται από τη συνάρτηση:

$T = -100 \cdot x$, με $-A \le x \le A \Rightarrow -0,03 \le x \le 0,03$, οπότε και $-3 \le T \le 3$ (όλες οι τιμές στο S.I.).

Η γραφική παράσταση φαίνεται στο παρακάτω σχήμα.



δ) Εφαρμόζουμε τη <u>Συνθήκη ταλάντωσης</u> για το $Σ_2$: $\Sigma F_x^{(2)} = -D_2 \cdot x$. Θεωρώντας θετική φορά την προς τα δεξιά, έχουμε: $-T = -D_2 \cdot x \Rightarrow T = D_2 \cdot x$.

Παρατηρούμε ότι το μέτρο της στατικής τριβής είναι ανάλογο της απομάκρυνσης x, άρα η στατική τριβή μεγιστοποιείται στα ακρότατα, δηλαδή: $T_{max} = D_2 \cdot A$.

Γνωρίζουμε ότι η μέγιστη τιμή της στατικής, δηλαδή η <u>οριακή τριβή</u> είναι ίση με: $T_{ορ} = \mu_σ \cdot N$, όπου $\mu_σ$ είναι ο συντελεστής στατικής τριβής μεταξύ των δύο σωμάτων και N είναι η κάθετη αντίδραση στο $Σ_2$, η οποία υπολογίζεται από τη <u>Συνθήκη Ισορροπίας</u> στον y-άξονα: $\Sigma F_y^{(2)} = 0 \Rightarrow N = m_2 g$.

Τελικά, η οριακή τριβή είναι ίση με: $T_{ορ} = \mu_σ \cdot m_2 g = 0,5 \cdot 10 \Rightarrow T_{ορ} = 5\ N$.

<u>Για να μην ολισθήσει το $Σ_2$ πάνω στο $Σ_1$</u> πρέπει:

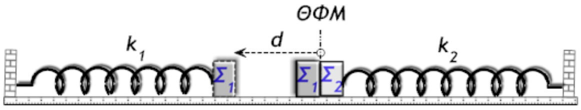
$$T_{max} \le T_{ορ} \Rightarrow D_2 \cdot A \le T_{ορ} \Rightarrow A \le \frac{T_{ορ}}{D_2} \Rightarrow A \le \frac{5}{100} \Rightarrow A \le 0,05\ m.$$

Η μέγιστη ταχύτητα ταλάντωσης υπολογίζεται από τη σχέση: $u_{max} = \omega \cdot A \Rightarrow A = \frac{u_{max}}{\omega}$, οπότε με βάση την προηγούμενη ανισότητα θα ισχύει: $\frac{u_{max}}{\omega} \le 0,05 \Rightarrow u_{max} \le \omega \cdot 0,05 \Rightarrow$

$$u_{max} \le 0,5 \frac{m}{s}.$$

Πρόβλημα 8.

Τα ιδανικά ελατήρια του σχήματος έχουν σταθερές k_1=300 N/m και k_2=600 N/m και τα σώματα $Σ_1$ και $Σ_2$, αμελητέων διαστάσεων, που είναι δεμένα στα άκρα των ελατηρίων, έχουν μάζες m_1=3 kg και m_2=1 kg. Τα δύο ελατήρια βρίσκονται αρχικά στο φυσικό τους μήκος και τα σώματα σε επαφή. Εκτρέπουμε από τη θέση ισορροπίας του το σώμα $Σ_1$ κατά d=0,4 m συμπιέζοντας το ελατήριο k_1 και το αφήνουμε ελεύθερο. Κάποια στιγμή συγκρούεται με το $Σ_2$ και κολλά σ' αυτό. Τα σώματα κινούνται σε λείο οριζόντιο επίπεδο και η διάρκεια της κρούσης θεωρείται αμελητέα.



α) Να υπολογίσετε σε πόσο χρόνο και με τι ταχύτητα το σώμα $Σ_1$ θα συγκρουστεί με το σώμα $Σ_2$.

β) Να δείξετε ότι το συσσωμάτωμα $Σ_1$ – $Σ_2$ θα εκτελέσει απλή αρμονική ταλάντωση και να υπολογίσετε την σταθερά της.

γ) Να υπολογίσετε το πλάτος της ταλάντωσης του συσσωματώματος.

δ) Να γράψετε την εξίσωση της απομάκρυνσης του συσσωματώματος σε συνάρτηση με το χρόνο, θεωρώντας ως αρχή του χρόνου τη στιγμή αμέσως μετά την κρούση.

ε) Σε πόσο χρόνο από τη στιγμή που αφήσαμε το σώμα m_1 θα μηδενιστεί η ταχύτητα του συσσωματώματος για $2^η$ φορά και πόση απόσταση θα έχει διανύσει το m_1 μέχρι τότε;

Λύση

α) Εφόσον το $Σ_1$ αφήνεται στην αρχική του θέση, αυτό σημαίνει ότι είναι ακρότατο της ταλάντωσής του, συνεπώς: $A_1 = d = 0,4\ \mathrm{m}$.

Επειδή D_1=k_1, για την ταλάντωση του $Σ_1$, η γωνιακή συχνότητα της ταλάντωσης του $Σ_1$ είναι: $\omega_1 = \sqrt{\frac{k_1}{m_1}} = \sqrt{\frac{300}{3}}\frac{\mathrm{rad}}{\mathrm{s}} \Rightarrow \omega_1 = 10\frac{\mathrm{rad}}{\mathrm{s}}$ και η περίοδός της είναι: $T_1 = \frac{2\pi}{\omega_1} = \frac{\pi}{5}\mathrm{s}$.

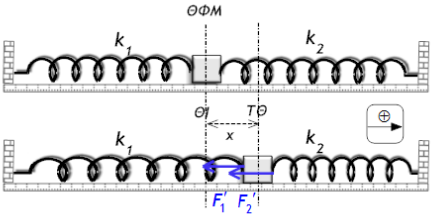
Το $Σ_1$ θα φτάσει από την ακραία θέση στη Θέση Ισορροπίας σε χρόνο: $\Delta t = \frac{T_1}{4} \Rightarrow$

$\Delta t = \frac{\pi}{20}\mathrm{s}$.

Η ταχύτητα του $Σ_1$ στη Θέση Ισορροπίας θα είναι η μέγιστη ταχύτητα ταλάντωσης, άρα:

$\upsilon_1 = \upsilon_{max} = \omega_1 \cdot A_1 = 10\frac{\mathrm{rad}}{\mathrm{s}} \cdot 0,4\mathrm{m} \Rightarrow \upsilon_1 = 4\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$.

β) Όταν το συσσωμάτωμα είναι στη Θ.Ι. του, τα ελατήρια είναι στη Θέση Φυσικού Μήκους τους, οπότε δεν ασκούν δυνάμεις.



Σημειώνουμε κατόπιν το συσσωμάτωμα σε μια Τυχαία Θέση (ΤΘ) θετικής απομάκρυνσης x απ' τη ΘΙ του, οπότε οι ασκούμενες δυνάμεις ελατηρίου είναι F_1' και F_2', των οποίων η φορά, όπως φαίνεται στο σχήμα, είναι αριστερά προς τη θέση φυσικού μήκους (ΘΦΜ) τους.

Θεωρούμε θετική φορά την προς τα δεξιά και υπολογίζουμε τη συνισταμένη δύναμη: $\Sigma F = -F_1' - F_2' = -k_1 x - k_2 x = -(k_1 + k_2)x$.

Συγκρίνοντάς την με τη <u>γενική συνθήκη της αρμονικής ταλάντωσης</u>: $\Sigma F = -D \cdot x$, προκύπτει ότι το συσσωμάτωμα εκτελεί αρμονική ταλάντωση με σταθερά της ταλάντωσης: $D = k_1 + k_2 \Rightarrow D = 900\dfrac{N}{m}$.

γ) Για την πλαστική κρούση εφαρμόζουμε την <u>Αρχή Διατήρησης της Ορμής</u> και βρίσκουμε την ταχύτητα του συσσωματώματος αμέσως μετά την κρούση:

$$p_1 + p_2 = p'_{ολ} \Rightarrow m_1 \upsilon_1 + 0 = (m_1 + m_2)V \Rightarrow V = \frac{m_1 \upsilon_1}{(m_1 + m_2)} \Rightarrow V = \frac{3 \cdot 4}{4}\frac{m}{s} \Rightarrow V = 3\frac{m}{s}.$$

Η ταχύτητα αυτή είναι η μέγιστη ταχύτητα ταλάντωσης, γιατί η κρούση έγινε στη Θ.Ι. (η οποία δεν μετατοπίστηκε λόγω της κρούση, γιατί η διάρκεια κρούσης θεωρείται αμελητέα), άρα: $V = \upsilon_{max} = \omega' A'$.

Η νέα γωνιακή συχνότητα της ταλάντωσης του συσσωματώματος είναι:
$$\omega' = \sqrt{\frac{k_1 + k_2}{m_1 + m_2}} \Rightarrow \omega' = \sqrt{\frac{900}{4}} \Rightarrow \omega' = 15\frac{rad}{s}.$$

Άρα το νέο πλάτος ταλάντωσης θα είναι: $A' = \dfrac{V}{\omega'} \Rightarrow A' = \dfrac{3m/s}{15rad/s} \Rightarrow A' = 0,2\ m$.

δ) Η χρονική εξίσωση της απομάκρυνσης του συσσωματώματος είναι της μορφής: $x' = A'\eta\mu(\omega t + \varphi_0)$, οπότε χρειαζόμαστε επιπλέον την αρχική φάση. Αυτή θα υπολογιστεί με βάση το γεγονός ότι για t=0, $x' = 0$, άρα: $0 = A'\eta\mu\varphi_0 \Rightarrow \eta\mu\varphi_0 = 0$ και επειδή πρέπει: $0 \le \varphi_0 < 2\pi$ θα είναι: $\varphi_0 = 0$ ή $\varphi_0 = \pi$.

Παρατηρούμε ότι το συσσωμάτωμα, αμέσως μετά την κρούση κινείται στη θετική φορά. Έτσι θα δεχτούμε τη λύση $\varphi_0 = 0$, η οποία δίνει θετική ταχύτητα ($\upsilon = \upsilon_{max}\sigma\upsilon\nu 0 > 0$).

Συνεπώς η χρονική εξίσωση της απομάκρυνσης θα είναι: $x' = 0,2\eta\mu(15t)$ (S.I.).

ε) Η περίοδος της ταλάντωσης του συσσωματώματος είναι: $T' = \frac{2\pi}{\omega'} = \frac{2\pi}{15}s$.

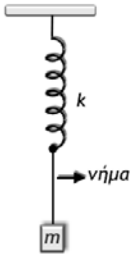
Ο χρόνος και το αντίστοιχο διάστημα, από τη στιγμή που αφήσαμε το σώμα m_1, μέχρι να μηδενιστεί η ταχύτητα του συσσωματώματος για 2η φορά φαίνονται στον πίνακα.

	Χρονική διάρκεια	Διάστημα κίνησης
Το $Σ_1$ από το αρνητικό ακρότατο έως τη Θ.Ι.:	$\frac{T_1}{4} = \frac{\pi}{20}s$	$A = 0,4\ m$
Το $Σ_1$-$Σ_2$ από τη Θ.Ι. έως το θετικό ακρότατο:	$\frac{T'}{4} = \frac{\pi}{30}s$	$A' = 0,2\ m$
Το $Σ_1$-$Σ_2$ από το θετικό ακρότατο έως το αρνητικό ακρότατο:	$\frac{T'}{2} = \frac{2\pi}{30}s$	$2A' = 0,4\ m$

Άρα ο ολικός χρόνος είναι: $t_{\text{ολ}} = \frac{T_1}{4} + \frac{3T'}{4} = \frac{\pi}{20}s + \frac{\pi}{10}s \Rightarrow t_{\text{ολ}} = \frac{3\pi}{20}s$ και το ολικό διάστημα κίνησης είναι: $s_{\text{ολ}} = A + 3A' \Rightarrow s_{\text{ολ}} = (0,4 + 0,6)m \Rightarrow s_{\text{ολ}} = 1\ m$.

Πρόβλημα 9.

Στο παρακάτω σχήμα το σώμα μάζας m=10 kg ισορροπεί δεμένο στο κάτω άκρο του αβαρούς νήματος το πάνω άκρο του οποίου είναι δεμένο στο κάτω άκρο του κατακόρυφου ιδανικού ελατηρίου σταθεράς k=10 N/cm.



α) Σχεδιάστε τις δυνάμεις, που ασκούνται στο σώμα και αιτιολογήστε γιατί η δύναμη ελατηρίου στο νήμα είναι ίση με την τάση του νήματος στο σώμα.

β) Υπολογίστε την επιμήκυνση $\Delta\ell$ του ελατηρίου. Θεωρήστε ότι $g = 10\ m/s^2$.

Τραβάμε το σώμα κατακόρυφα προς τα κάτω από τη Θ.Ι. του, μεταφέροντας ενέργεια στο σύστημα $E_{μετ}$=5 J και το αφήνουμε να ταλαντωθεί.

γ) Να αποδείξετε ότι θα εκτελέσει γραμμική αρμονική ταλάντωση και να βρείτε το πλάτος ταλάντωσης.

δ) Γράψτε την εξίσωση της τάσης του νήματος στο σώμα σε συνάρτηση με την απομάκρυνση x απ’ τη Θέση Ισορροπίας και σχεδιάστε τη γραφική παράσταση της τάσης του νήματος T σε συνάρτηση με την απομάκρυνση x, σε κατάλληλα βαθμολογημένους άξονες.

ε) Να βρείτε το σημείο της ταλάντωσης στο οποίο η τάση του νήματος θα μηδενισθεί.

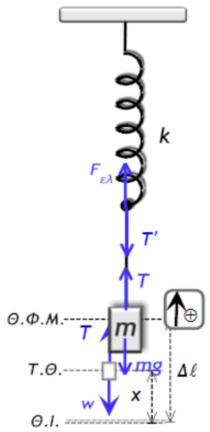
Λύση

α) Στο σημείο επαφής ελατηρίου – νήματος ασκούνται η $F_{ελ}$ από το ελατήριο στο νήμα και η τάση του νήματος T' στο ελατήριο. Επειδή το σημείο αυτό έχει αμελητέα μάζα, οι δυνάμεις αυτές είναι αντίθετες, άρα κατά μέτρο ίσες: $F_{ελ} = T'$.

Το νήμα, εφόσον είναι τεντωμένο, ασκεί τάσεις κατά μέτρο ίσες στο ελατήριο και στο σώμα: $T' = T$.

Απ’ τις σχέσεις αυτές προκύπτει ότι η δύναμη ελατηρίου $F_{ελ}$ στο νήμα είναι ίση με την τάση T του νήματος στο σώμα: $F_{ελ} = T$.

β) Η σταθερά του ελατηρίου στο S.I. είναι: $k = 10\dfrac{N}{cm} = 10^3\dfrac{N}{m}$.



Εφαρμόζω τη <u>Συνθήκη Ισορροπίας</u> για το σώμα: $\Sigma F = 0 \Rightarrow T = mg$, και επειδή $F_{\varepsilon\lambda} = T$,

έχουμε: $k\Delta\ell = mg \Rightarrow \Delta\ell = \dfrac{mg}{k} = \dfrac{100}{1000}m \Rightarrow \Delta\ell = 0{,}1\,m$.

γ) Θεωρούμε θετική φορά την προς τα πάνω και τοποθετούμε το σώμα σε μια τυχαία θέση θετικής απομάκρυνσης x κάτω απ' τη Θ.Ι. του. Υπολογίζομε τώρα τη συνισταμένη δύναμη: $\Sigma F = T - w = F'_{\varepsilon\lambda} - w = k(\Delta\ell - x) - k\cdot\Delta\ell = k\cdot\Delta\ell - k\cdot x - k\cdot\Delta\ell = -k\cdot x$.

Με βάση την <u>Αρχή διατήρησης της ενέργειας</u>, η μεταφερόμενη ενέργεια είναι ίση με την ενέργεια της ταλάντωσης: $E_{\mu\varepsilon\tau} = E$, ενώ το σημείο που αφήνουμε ελεύθερο το σώμα είναι η κάτω ακραία θέση της ταλάντωσης.

Το πλάτος ταλάντωσης Α θα υπολογιστεί από τη σχέση, που δίνει την ενέργεια ταλάντωσης:

$$E = \frac{1}{2}kA^2 \Rightarrow A = \sqrt{\frac{2E}{k}} = \sqrt{\frac{2\cdot 5J}{1000N/m}} \Rightarrow A = 0{,}1\,m.$$

δ) Τοποθετούμε το σώμα σε μια τυχαία θέση x του θετικού ημιάξονα και σχεδιάζουμε τις δυνάμεις mg και T που δέχεται. Εφαρμόζουμε τη <u>Συνθήκη της ταλάντωσης</u>:

$\Sigma F = -D\cdot x \Rightarrow T - mg = -k\cdot x \Rightarrow T = mg - k\cdot x \Rightarrow T = 100 - 1000\cdot x$ (S.I.).

ε) Παρατηρούμε ότι όταν το σώμα είναι κάτω από τη Θ.Ι. του (x<0) ή στη ΘΙ (x=0), η τάση είναι θετική. Αντίθετα όταν είναι πάνω από τη Θ.Ι. του και πλησιάζει στην πάνω ακραία θέση, τότε η τάση μειώνεται και μπορεί να μηδενιστεί.

Έστω ότι η τάση του νήματος θα μηδενιστεί σε κάποιο σημείο x_0 της τροχιάς, οπότε:

$0 = 100 - 1000\cdot x_0 \Rightarrow x_0 = 0{,}1\,m$.

<u>Σχόλιο</u>:

Όταν η τάση μηδενίζεται, το νήμα χαλαρώνει. Επειδή το πλάτος ταλάντωσης είναι επίσης A=0,1 m, το νήμα θα χαλαρώσει οριακά στην θέση μέγιστης απομάκρυνσης της τροχιάς, συνεπώς το σώμα θα συνεχίσει την αρμονική ταλάντωσή του έστω και οριακά.

Ημερομηνία τροποποίησης: 20/07/2011

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1°: ΜΗΧΑΝΙΚΗ ΣΤΕΡΕΟΥ ΣΩΜΑΤΟΣ

ΕΝΟΤΗΤΑ 2: ΗΛΕΚΤΡΙΚΕΣ ΤΑΛΑΝΤΩΣΕΙΣ

ΘΕΜΑΤΑ ΠΡΟΣ ΕΠΙΛΥΣΗ

ΘΕΜΑ Β

Ερώτηση 1.

Ιδανικό κύκλωμα *LC* εκτελεί αμείωτες ηλεκτρικές ταλαντώσεις. Να αποδείξετε ότι η στιγμιαία τιμή i της έντασης του ρεύματος στο κύκλωμα δίνεται σε συνάρτηση με το στιγμιαίο φορτίο q του πυκνωτή από τη σχέση: $i = \pm\omega\sqrt{Q^2 - q^2}$.

<u>Λύση</u>

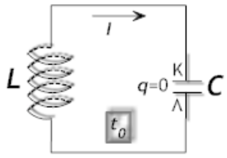
Εφαρμόζουμε τη διατήρηση της ενέργειας για την ηλεκτρική ταλάντωση:

$$E = U_E + U_B \Rightarrow \frac{Q^2}{2C} = \frac{q^2}{2C} + \frac{Li^2}{2} \Rightarrow \frac{Q^2 - q^2}{2C} = \frac{Li^2}{2} \Rightarrow$$

$$i^2 = \frac{Q^2 - q^2}{LC} \Rightarrow i^2 = \omega^2\left(Q^2 - q^2\right) \Rightarrow i = \pm\omega\sqrt{Q^2 - q^2}$$

Ερώτηση 2.

Το ιδανικό κύκλωμα *LC* του σχήματος εκτελεί αμείωτες ηλεκτρικές ταλαντώσεις, με περίοδο *T*. Τη χρονική στιγμή t_0 ο πυκνωτής είναι αφόρτιστος και το κύκλωμα διαρρέεται από ρεύμα με τη φορά που έχει σχεδιαστεί στο σχήμα.



Το φορτίο του οπλισμού Λ του πυκνωτή, τη χρονική στιγμή $t_1 = t_0 + \frac{3T}{4}$, θα είναι:

α) μέγιστο θετικό.
β) μηδέν.
γ) μέγιστο αρνητικό.

Να επιλέξετε τη σωστή πρόταση. Να αιτιολογήσετε την επιλογή σας.

<u>Λύση</u>

Σωστή απάντηση είναι η (α).

Επειδή τη χρονική στιγμή t_0, ο πυκνωτής είναι αφόρτιστος, το φορτίο και των δύο οπλισμών του είναι μηδέν. Γνωρίζουμε όμως ότι η συμβατική φορά του ρεύματος είναι η φορά κίνησης θετικών φορτίων. Αυτό σημαίνει ότι το φορτίο του οπλισμού Κ τη στιγμή $t_0 + \frac{T}{4}$ θα είναι μέγιστο θετικό, τη στιγμή $t_0 + \frac{2T}{4}$ θα είναι μηδέν και τη στιγμή $t_0 + \frac{3T}{4}$ θα είναι μέγιστο αρνητικό.

Όμως οι δύο οπλισμοί του πυκνωτή έχουν κάθε στιγμή αντίθετο φορτίο: $q_Λ = -q_K$. Άρα τη χρονική στιγμή $t_2 = t_0 + \frac{3T}{4}$, το φορτίο του οπλισμού Λ, θα είναι μέγιστο θετικό.

Συνεπώς, σωστή απάντηση είναι η (α).

Ερώτηση 3.

Ένα ιδανικό κύκλωμα *LC* (1) έχει πυκνωτή με χωρητικότητα *C* και πηνίο με συντελεστή αυτεπαγωγής *L*, ενώ ένα άλλο ιδανικό κύκλωμα *LC* (2) έχει τον ίδιο πυκνωτή, αλλά πηνίο με συντελεστή αυτεπαγωγής 4*L*. Φορτίζουμε τον πυκνωτή του κυκλώματος (1) με πηγή τάσης *V* και τον πυκνωτή του κυκλώματος (2) με πηγή τάσης 2*V* και τα διεγείρουμε ώστε να εκτελούν αμείωτες ηλεκτρικές ταλαντώσεις.

Ο λόγος των ολικών ενεργειών στα δύο κυκλώματα $\frac{E_2}{E_1}$ ισούται με:

α) 1.

β) 2.

γ) 4.

Να επιλέξετε τη σωστή πρόταση. Να αιτιολογήσετε την επιλογή σας.

<u>Λύση</u>

Σωστή απάντηση είναι η (γ).

Η ολική ενέργεια μιας ηλεκτρικής ταλάντωσης ισούται με τη μέγιστη ενέργεια ηλεκτρικού πεδίου και μπορεί να υπολογιστεί από τις σχέσεις: $E = \frac{Q^2}{2C}$ ή $E = \frac{1}{2}CV^2$.

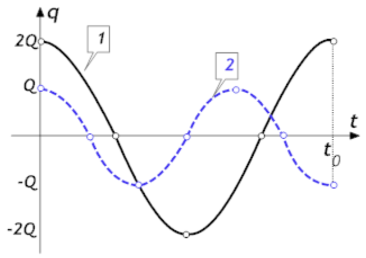
Επιλέγοντας τη 2η μορφή, αντικαθιστούμε στο ζητούμενο λόγο και έχουμε:

$$\frac{E_2}{E_1} = \frac{\frac{1}{2}C(2V)^2}{\frac{1}{2}CV^2} = \frac{4\cdot\frac{1}{2}CV^2}{\frac{1}{2}CV^2} \Rightarrow \frac{E_2}{E_1} = 4$$

Συνεπώς, σωστή απάντηση είναι η (γ).

Ερώτηση 4.

Στο σχήμα φαίνονται οι γραφικές παραστάσεις των χρονικών εξισώσεων φορτίου q - t , στη χρονική διάρκεια 0 έως t_0, για δύο ιδανικά κυκλώματα LC.



Ο λόγος των μεγίστων εντάσεων ρεύματος στα δύο κυκλώματα $\frac{I_2}{I_1}$ ισούται με:

α) $\frac{3}{4}$

β) $\frac{4}{3}$

γ) $\frac{4}{9}$

Να επιλέξετε τη σωστή πρόταση. Να αιτιολογήσετε την επιλογή σας.

<u>Λύση</u>

Σωστή απάντηση είναι η (α).

Η μέγιστη ένταση ρεύματος υπολογίζεται απ' τη σχέση: $I = \omega \cdot Q$. Η γωνιακή συχνότητα είναι: $\omega = \frac{2\pi}{T}$

Απ' το διάγραμμα φαίνεται (εστιάζοντας στον οριζόντιο άξονα των *χρόνων)* ότι:

$$T_1 = \frac{3}{2}T_2 \quad \text{η} \quad \frac{T_1}{T_2} = \frac{3}{2}$$

Απ' το διάγραμμα φαίνεται (εστιάζοντας στον κατακόρυφο άξονα των *q)* ότι: $Q_1 = 2Q$ και $Q_2 = Q$.

Σχηματίζουμε τώρα το ζητούμενο λόγο:

$$\frac{I_2}{I_1} = \frac{\omega_2 Q_2}{\omega_1 Q_1} = \frac{\frac{\cancel{2\pi}}{T_2}\cancel{Q}}{\frac{\cancel{2\pi}}{T_1}2\cancel{Q}} = \frac{T_1}{2T_2} = \frac{1}{2}\cdot\frac{T_1}{T_2} = \frac{1}{2}\cdot\frac{3}{2} \Rightarrow \frac{I_2}{I_1} = \frac{3}{4}.$$

Συνεπώς, Σωστή απάντηση είναι η (α).

ΘΕΜΑ Γ

Άσκηση 1.

Ιδανικό κύκλωμα περιλαμβάνει πυκνωτή χωρητικότητας *C*, ιδανικό πηνίο με συντελεστή αυτεπαγωγής *L* και διακόπτη, που είναι αρχικά ανοικτός. Φορτίζουμε τον πυκνωτή με φορτίο *Q*=100μC και κλείνουμε το διακόπτη, οπότε το κύκλωμα εκτελεί αμείωτες ηλεκτρικές ταλαντώσεις. Κάποια χρονική στιγμή t το φορτίο του αρχικά θετικά φορτισμένου οπλισμού του πυκνωτή είναι q= 60μC και συνεχίζει να αυξάνεται. Την ίδια στιγμή η ένταση του ρεύματος στο κύκλωμα είναι i=80mA. Να υπολογίσετε:

α) τη γωνιακή συχνότητα της ηλεκτρικής ταλάντωσης.

β) το ρυθμό με τον οποίο το φορτίο αποθηκεύεται στον θετικό οπλισμό του πυκνωτή τη χρονική στιγμή t.

γ) το ρυθμό μεταβολής της έντασης του ρεύματος $\frac{di}{dt}$ στο κύκλωμα τη χρονική στιγμή t.

<u>Λύση</u>

α) Θα εφαρμόσουμε τη διατήρηση της ενέργειας για την ταλάντωση:

$$E = U_E + U_B \Rightarrow \frac{Q^2}{2C} = \frac{q^2}{2C} + \frac{Li^2}{2} \Rightarrow \frac{Q^2 - q^2}{2C} = \frac{Li^2}{2} \Rightarrow$$

$$i^2 = \frac{Q^2 - q^2}{LC} \Rightarrow i^2 = \omega^2\left(Q^2 - q^2\right) \Rightarrow \omega^2 = \left(\frac{i}{Q^2 - q^2}\right)^2 \Rightarrow \omega = \pm\frac{i}{\sqrt{Q^2 - q^2}} \Rightarrow$$

$$\omega = \pm\frac{80\cdot 10^{-3}\,A}{\sqrt{(100\cdot 10^{-6}C)^2 - (60\cdot 10^{-6}C)^2}} \Rightarrow \omega = \pm\frac{80\cdot 10^{-3}}{\sqrt{100\cdot 10^{-10} - 36\cdot 10^{-10}}}\,rad/s \Rightarrow$$

$$\omega = \pm\frac{80\cdot 10^{-3}}{\sqrt{64\cdot 10^{-10}}}\,rad/s \Rightarrow \omega = \pm\frac{80\cdot 10^{-3}}{8\cdot 10^{-5}}\,rad/s \Rightarrow \omega = \pm 1000\,rad/s$$

Άρα $\omega = 1000\,rad/s$

β) Ο ρυθμός με τον οποίο το φορτίο αποθηκεύεται στον θετικό οπλισμό του πυκνωτή τη χρονική στιγμή t ισούται με την τιμή της έντασης του ρεύματος εκείνη τη στιγμή, ισχύει δηλαδή:

$$\frac{\Delta q}{\Delta t} = i = 80mA$$

γ) Ο ρυθμός μεταβολής της έντασης του ρεύματος (di/dt) υπάρχει μόνο στη σχέση που υπολογίζει την τάση από αυτεπαγωγή στα άκρα ενός πηνίου, $V_L = -L\frac{di}{dt}$ (και την οποία έχουμε διδαχτεί στη Β' τάξη). Λύνοντας ως προς $\frac{di}{dt}$ και αντικαθιστώντας βρίσκουμε:

$$\frac{di}{dt} = \frac{-V_L}{L} = \frac{-V_C}{L} \Rightarrow \frac{di}{dt} = \frac{-\frac{q}{C}}{L} = \frac{-q}{LC} = -\omega^2 q = -(1000 rad/s)^2 \cdot 60 \cdot 10^{-6} C \Rightarrow \frac{di}{dt} = -60\frac{A}{s}$$

Άσκηση 2.

Πυκνωτής χωρητικότητας *C* φορτίζεται από ηλεκτρική πηγή συνεχούς τάσης. Στη συνέχεια αποσυνδέουμε την πηγή φόρτισης και συνδέουμε τα άκρα του με αγωγούς μηδενικής αντίστασης σε ιδανικό πηνίο, που έχει συντελεστή αντεπαγωγής *L*=0,4 H, μέσω διακόπτη. Τη χρονική στιγμή *t*=0 κλείνουμε το διακόπτη, οπότε το κύκλωμα αρχίζει να εκτελεί ηλεκτρικές ταλαντώσεις. Η εξίσωση του φορτίου του πυκνωτή δίνεται από τη σχέση: $q = 0,4\sigma\upsilon\nu 1000t$ μC.

α) Να υπολογίσετε τη χωρητικότητα *C* του πυκνωτή.

β) Να γράψετε την εξίσωση της έντασης του ρεύματος που διαρρέει το κύκλωμα σε συνάρτηση με το χρόνο.

γ) Να υπολογίσετε την τιμή της ενέργειας του ηλεκτρικού πεδίου του πυκνωτή όταν η τιμή της έντασης του ρεύματος είναι 0,2 10^{-3} A.

<u>Λύση</u>

α) Συγκρίνοντας τη σχέση που δίνει το φορτίο του πυκνωτή $q = 0,4\sigma\upsilon\nu 1000t$ με τη γενική μορφή $q = Q\sigma\upsilon\nu\omega t$

παίρνουμε τα εξής:

Q=0,4μC και ω=1000rad/s

Ισχύει:

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi}{2\pi\sqrt{LC}} \Rightarrow \omega = \frac{1}{\sqrt{LC}} \Rightarrow \omega^2 = \frac{1}{LC} \Rightarrow C = \frac{1}{L\omega^2} = \frac{1}{0,4H \cdot (1000rad/s)^2} \Rightarrow C = 2,5\mu F$$

β) Η εξίσωση της έντασης του ρεύματος στη γενική της μορφή γράφεται: $i = -I\eta\mu\omega t$

Για το μέγιστο ρεύμα στο κύκλωμα ισχύει:

$$I = \omega Q = 10^3 rad/s \cdot 0,4 \cdot 10^{-6} C \Rightarrow I = 0,4mA$$

Άρα $i = -0,4\eta\mu 1000t$ mA

γ) Θα εφαρμόσουμε τη διατήρηση της ενέργειας για την ταλάντωση:

$$E = U_E + U_B \Rightarrow \frac{Q^2}{2C} = U_E + \frac{Li^2}{2} \Leftrightarrow U_E = \frac{Q^2}{2C} - \frac{Li^2}{2} \Rightarrow$$

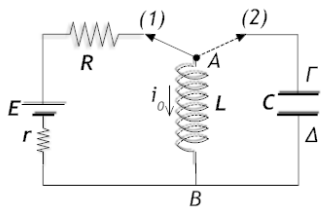
$$U_E = \frac{Q^2 - LCi^2}{2C} \Rightarrow U_E = \frac{(0,4 \cdot 10^{-6}C)^2 - 0,4H \cdot 2,5 \cdot 10^{-6}F \cdot (0,2 \cdot 10^{-3}A)^2}{2 \cdot 2,5 \cdot 10^{-6}F} \Leftrightarrow$$

$$U_E = 24 \cdot 10^{-9} J$$

ΘΕΜΑ Δ

Πρόβλημα 1.

Στο κύκλωμα του παρακάτω σχήματος η ηλεκτρική πηγή έχει ΗΕΔ *E*=20 V και εσωτερική αντίσταση *r*=1 Ω, ο αντιστάτης έχει αντίσταση *R=9* Ω, ο πυκνωτής έχει χωρητικότητα *C*=10 μF και το πηνίο έχει συντελεστή αυτεπαγωγής *L*=16 mH. Ο μεταγωγός διακόπτης είναι αρχικά στη θέση (1) και το πηνίο διαρρέεται από ηλεκτρικό ρεύμα σταθερής έντασης. Τη χρονική στιγμή t=0, μεταφέρουμε απότομα το διακόπτη στη θέση (2) χωρίς να δημιουργηθεί σπινθήρας, οπότε στο ιδανικό κύκλωμα *L-C* διεγείρεται αμείωτη ηλεκτρική ταλάντωση.



α) Να βρείτε τη σταθερή ένταση του ρεύματος που διαρρέει το πηνίο καθώς και την αποθηκευμένη ενέργεια μαγνητικού πεδίου όταν ο διακόπτης βρίσκεται στη θέση (1).

β) Ποιος οπλισμός του πυκνωτή θα φορτιστεί πρώτος θετικά και γιατί; Ποιά χρονική στιγμή ο οπλισμός Δ του πυκνωτή θα αποκτήσει για πρώτη φορά μέγιστο φορτίο με αρνητική πολικότητα; Ποιά χρονική στιγμή το πηνίο για πρώτη φορά θα διαρρέεται από ρεύμα μέγιστης τιμής και φοράς από το Β προς το Α;

γ) Να γράψετε τις εξισώσεις που περιγράφουν πως μεταβάλλονται σε σχέση με το χρόνο στο S.I. το φορτίο του οπλισμού Δ του πυκνωτή και η ένταση του ρεύματος.

δ) Να βρείτε το μέτρο του ρυθμού μεταβολής της έντασης του ρεύματος τη στιγμή που η ένταση του ρεύματος στο κύκλωμα είναι μηδέν.

<u>Λύση</u>

α) Από το νόμο του Ohm για κλειστό κύκλωμα παίρνουμε:

$$i_0 = \frac{E}{R+r} = \frac{20}{9+1}\text{A} \Rightarrow i_0 = 2\text{A}$$

Η αποθηκευμένη ενέργεια μαγνητικού πεδίου είναι:

$$U_B = \frac{Li_0^2}{2} = \frac{16 \cdot 10^{-3}\text{H} \cdot (2\text{A})^2}{2} \Rightarrow U_B = 32 \cdot 10^{-3}\text{J}$$

β) Το ρεύμα (συμβατική φορά – κίνηση των θετικών φορτίων) θα διατηρήσει την αρχική φορά του, αυτήν δηλαδή που είχε πριν την μετακίνηση του διακόπτη, κινούμενο από το Α προς το Β. Άρα, θα φορτίσει αρχικά θετικά τον οπλισμό Δ του πυκνωτή.

Τη χρονική στιγμή t=0 ο οπλισμός Δ είναι χωρίς φορτίο. Θα φορτιστεί για 1η φορά με μέγιστο θετικό φορτίο τη χρονική στιγμή t_1=T/4 και μετά ακόμη από μισή περίοδο (T/2) θα φορτιστεί για 1η φορά με μέγιστο αρνητικό φορτίο. Άρα ο οπλισμός Δ του πυκνωτή θα αποκτήσει για 1η φορά μέγιστο αρνητικό φορτίο τη χρονική στιγμή $t_2 = \frac{T}{4} + \frac{T}{2} = \frac{3T}{4}$.

Η περίοδος της ηλεκτρικής ταλάντωσης υπολογίζεται ως εξής:

$$T = 2\pi\sqrt{LC} = 2\pi\sqrt{16\cdot 10^{-3}H\cdot 10\cdot 10^{-6}F} \Rightarrow T = 2\pi\sqrt{16\cdot 10^{-8}}s = 2\pi\cdot 4\cdot 10^{-4}s \Rightarrow$$
$$T = 8\pi\cdot 10^{-4}s$$

Άρα ο οπλισμός Δ του πυκνωτή θα αποκτήσει για 1η φορά μέγιστο αρνητικό φορτίο τη χρονική στιγμή $t_2 = \frac{3T}{4} \Rightarrow t_2 = 6\pi\cdot 10^{-4}s$.

Σε μία ηλεκτρική ταλάντωση για να γίνει η ένταση του ρεύματος από μέγιστη μηδέν απαιτείται χρονικό διάστημα T/4 και χρειάζεται επίσης T/4 για να ξαναγίνει από μηδέν μέγιστο με φορά αντίθετη της αρχικής. Τη χρονική στιγμή t=0 η ένταση του ρεύματος έχει μέγιστη τιμή και φορά από το Α προς το Β. Άρα το πηνίο θα διαρρέεται για πρώτη φορά με ρεύμα μέγιστης έντασης και φοράς από το Β προς το Α τη χρονική στιγμή $t = \frac{T}{4} + \frac{T}{4} = \frac{T}{2} \Rightarrow t = 4\pi\cdot 10^{-4}s$

γ) Η ταλάντωση θα έχει αρχική φάση διότι για t=0 ο πυκνωτής είναι αφόρτιστος και το κύκλωμα διαρρέεται από μέγιστο ρεύμα. Έτσι, για t=0 ισχύει:

$q = Q\sigma\upsilon\nu(\omega t + \varphi) \Rightarrow 0 = Q\sigma\upsilon\nu\varphi$ από όπου προκύπτει (με λύση της τριγωνομετρικής) ότι η αρχική φάση θα είναι $\varphi = \frac{\pi}{2}$ ή $\varphi = \frac{3\pi}{2}$.

Δεκτή είναι η τιμή $\varphi = \frac{3\pi}{2}$ γιατί τη χρονική στιγμή t=0 το ρεύμα έχει φορά προς τον οπλισμό Δ δηλαδή είναι i>0, πρέπει:

$-I\eta\mu\varphi > 0$, άρα $\varphi = \frac{3\pi}{2}$.

Έτσι, οι εξισώσεις του φορτίου και του ρεύματος γράφονται αντίστοιχα:

$$q = Q\sigma\upsilon\nu(\omega t + \frac{3\pi}{2}) = Q\eta\mu\omega t$$
$$i = -I\eta\mu(\omega t + \frac{3\pi}{2}) = I\sigma\upsilon\nu\omega t$$

Είναι $\omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi}{2\pi\sqrt{LC}} \Rightarrow \omega = \frac{1}{\sqrt{LC}} = \frac{1}{\sqrt{16\cdot 10^{-3}H\cdot 10\cdot 10^{-6}F}} \Rightarrow \omega = 2500 rad/s$

και $I = i_0 = \omega Q$ άρα,

$Q = \dfrac{I}{\omega} = 8 \cdot 10^{-4} C$. Έτσι οι παραπάνω εξισώσεις γράφονται:

$$q = 8 \cdot 10^{-4} \eta\mu 2500t \ (SI)$$
$$i = 2\sigma\upsilon\nu 2500t \ (SI)$$

δ) Το $\dfrac{di}{dt}$ θα βρεθεί από τη σχέση $V_L = -L\dfrac{di}{dt}$. Γνωρίζουμε επίσης ότι κάθε στιγμή ισχύει, $V_L = V_C$, αφού τα δύο στοιχεία έχουν κοινά άκρα. Έτσι μπορούμε να γράψουμε:

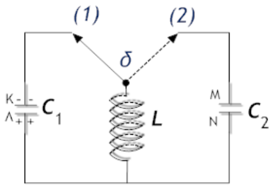
$$\left|\frac{di}{dt}\right| = \frac{V_L}{L} = \frac{V_c}{L} = \frac{q}{LC} \quad \text{ή} \quad \left|\frac{di}{dt}\right| = q\omega^2$$

Όμως όταν η ένταση του ρεύματος είναι μηδέν, τότε q=Q, έτσι η τελευταία σχέση με αντικατάσταση δίνει

$$\left|\frac{di}{dt}\right| = 8 \cdot 10^{-4} C \cdot \left(2500\frac{rad}{s}\right)^2 \quad \text{ή} \quad \left|\frac{di}{dt}\right| = 5000 A/s$$

Πρόβλημα 2.

Στο κύκλωμα του σχήματος, ο πυκνωτής C_1 έχει χωρητικότητα C_1=16 μF και είναι φορτισμένος από πηγή με ΗΕΔ E=50 V, και πολικότητα όπως στο σχήμα. Το πηνίο έχει συντελεστή αυτεπαγωγής L=10 mH, ενώ ο πυκνωτής C_2, με χωρητικότητα C_2=4 μF, είναι αρχικά αφόρτιστος.



1) Τη χρονική στιγμή t=0 ο διακόπτης μεταφέρεται στη θέση (1) και το κύκλωμα L-C_1 αρχίζει να εκτελεί αμείωτη ηλεκτρική ταλάντωση.

α) Να γράψετε την εξίσωση του φορτίου του πυκνωτή σε συνάρτηση με τον χρόνο για το κύκλωμα L-C_1.

β) Να βρείτε τη χρονική στιγμή $t_1=3\pi\cdot 10^{-4}$ s, την ένταση του ρεύματος στο κύκλωμα L-C_1 καθώς και την ενέργεια του μαγνητικού πεδίου του πηνίου.

2)Τη χρονική στιγμή t_1 ο διακόπτης μεταφέρεται ακαριαία στη θέση (2) χωρίς να ξεσπάσει σπινθήρας και ταυτόχρονα μηδενίζουμε το χρονόμετρο. Το κύκλωμα L-C_2 αρχίζει να εκτελεί αμείωτη ηλεκτρική ταλάντωση. Θεωρώντας πάλι ως $t=0$ τη χρονική στιγμή που αλλάζει θέση ο διακόπτης:

α) να βρείτε σε πόσο χρονικό διάστημα θα φορτιστεί πλήρως ο πυκνωτής C_2 καθώς και ποιος οπλισμός του, ο Μ ή ο Ν, θα αποκτήσει πρώτος θετικό φορτίο

β) για το κύκλωμα L-C_2, να γράψετε τις εξισώσεις που δίνουν σε σχέση με το χρόνο το φορτίο του οπλισμού Μ καθώς και την ενέργεια ηλεκτρικού πεδίου του πυκνωτή C_2.

<u>Λύση</u>

1)

α) Ο πυκνωτής C_1 τη στιγμή t=0 είναι πλήρως φορτισμένος, οπότε η ταλάντωση δεν έχει αρχική φάση, άρα η εξίσωση του φορτίου είναι της μορφής $q_1 = Q_1 συνω_1 t$.

Είναι $\omega_1 = \dfrac{2\pi}{T_1} = \dfrac{2\pi}{2\pi\sqrt{LC_1}} \Rightarrow \omega_1 = \dfrac{1}{\sqrt{LC_1}} = \dfrac{1}{\sqrt{10\cdot 10^{-3}\,H\cdot 16\cdot 10^{-6}\,F}} \Rightarrow \omega_1 = 2500\,rad/s$,

$V_1 = E = 50V$ και $Q_1 = V_1\cdot C_1 = E\cdot C_1 \Rightarrow Q_1 = 50V\cdot 16\cdot 10^{-6}F \Rightarrow Q_1 = 8\cdot 10^{-4}C$

άρα η εξίσωση του φορτίου γράφεται:

$q_1 = Q_1 συνω_1 t = 8 \cdot 10^{-4} συν2500t$ (SI)

β) Είναι $I = ω_1 Q = 2500\frac{rad}{s} \cdot 8 \cdot 10^{-4} C = 2A$. Η ένταση του ρεύματος, γράφεται:

$$i = -Iημωt\ A \Rightarrow i = -2ημ2500t \Rightarrow i = -2ημ2500 \cdot 3π \cdot 10^{-4}\ A = -2ημ(\frac{3π}{4})\ A \Rightarrow$$

$$i = -2\frac{\sqrt{2}}{2} A \Rightarrow i = -\sqrt{2} A$$

Η ενέργεια του μαγνητικού πεδίου του πηνίου θα είναι τότε:

$$U_B = \frac{Li^2}{2} = \frac{10 \cdot 10^{-3} H \cdot (\sqrt{2}A)^2}{2} \Rightarrow U_B = 10^{-2} J$$

2)

α) Ο πυκνωτής θα φορτιστεί πλήρως σε χρόνο $t=T_2/4$, όπου T_2 η περίοδος του κυκλώματος LC_2. Ισχύει $T_2 = 2π\sqrt{LC_2} = 2π\sqrt{10 \cdot 10^{-3} H \cdot 4 \cdot 10^{-6} F} \Rightarrow T_2 = 4π10^{-4} s$

Δηλαδή θα φορτιστεί σε χρόνο $t = π \cdot 10^{-4} s$.

Το ρεύμα (συμβατική φορά – κίνηση των θετικών φορτίων) θα διατηρήσει την αρχική του φορά, αυτήν δηλαδή που είχε τη χρονική στιγμή $t_1=3π \cdot 10^{-4}$ s, πριν την μετακίνηση του διακόπτη, προς τη θέση 2. Όπως βρήκαμε στο ερώτημα 1β τη χρονική στιγμή $t_1 = 3π \cdot 10^{-4}$ s η ένταση του ρεύματος είναι αρνητική. Αυτό σημαίνει ότι το ρεύμα κατευθύνεται προς τον οπλισμό που τη χρονική στιγμή t=0 έχει αρνητικό φορτίο, δηλαδή προς τον οπλισμό Κ του πυκνωτή C_1. Έτσι, το ξεκίνημα της νέας ταλάντωσης βρίσκει το πηνίο να διαρρέεται από ρεύμα που έχει φορά από κάτω προς τα πάνω, με συνέπεια να φορτίζεται πρώτος θετικά ο οπλισμός Μ του πυκνωτή C_2.

β) Ο πυκνωτής C_2 τη στιγμή t=0 είναι αφόρτιστος και το κύκλωμα διαρρέεται από μέγιστο ρεύμα, οπότε η ταλάντωση έχει αρχική φάση και η εξίσωση του φορτίου του οπλισμού Μ είναι της μορφής $q_M=Q_2 \cdot συν(ω_2 t+φ)$.

Είναι:

$$ω_2 = \frac{2π}{T_2} = \frac{2π}{2π\sqrt{LC_2}} \Rightarrow ω_2 = \frac{1}{\sqrt{LC_2}} = \frac{1}{\sqrt{10 \cdot 10^{-3} H \cdot 4 \cdot 10^{-6} F}} \Rightarrow ω_2 = 5000 rad/s$$

Το Q_2 θα το βρούμε από τη σχέση $I = ω_2 Q_2 \Leftrightarrow Q_2 = \frac{I}{ω_2} = \frac{\sqrt{2}A}{5000 rad/s} \Rightarrow Q_2 = 2\sqrt{2} \cdot 10^{-4} C$

Για t=0 ισχύει:

$q = Q_2 συν(ωt + φ) \Rightarrow 0 = Q_2 συνφ$ από όπου προκύπτει (με λύση της τριγωνομετρικής) ότι η αρχική φάση θα είναι φ=π/2 ή φ=3π/2.

Τη χρονική στιγμή t=0 το ρεύμα κατευθύνεται προς τον οπλισμό Μ, άρα i>0. Έτσι δεκτή είναι η τιμή φ=3π/2 γιατί μόνο για αυτήν ισχύει:

–Ιημφ>0, άρα φ=3π/2.

Η εξίσωση του φορτίου με το χρόνο θα είναι:

$$q_M = Qσυν(ω_2 t + φ) \Rightarrow q_M = 2\sqrt{2}10^{-4} συν(5000t + \frac{3π}{2})(SI) \Rightarrow q_M = 2\sqrt{2}10^{-4} ημ(5000t)\ (SI)$$

Η εξίσωση της ενέργειας του ηλεκτρικού πεδίου σε σχέση με το χρόνο θα είναι:

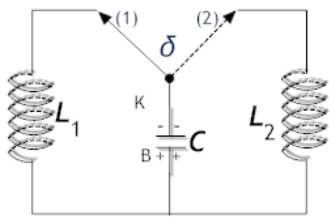
$$U_E = E\, συν^2(ω_2 t + 3π/2) \Rightarrow U_E = E\, ημ^2 ω_2 t ,$$

όπου Ε η ενέργεια της ταλάντωσης η οποία συμπίπτει με την ενέργεια που είχε το πηνίο τη χρονική στιγμή t_1, δηλαδή 10^{-2}J . Με αντικατάσταση παίρνουμε:

$$U_E = 10^{-2} ημ^2 5000t\,(SI)$$

Πρόβλημα 3.

Στο κύκλωμα του σχήματος, ο πυκνωτής *C* έχει χωρητικότητα *C*=20 μF και είναι φορτισμένος από πηγή με ΗΕΔ Ε=10 V, και πολικότητα όπως στο σχήμα. Τα πηνία έχουν συντελεστή αυτεπαγωγής L_1=8 mH και L_2=2 mH.



1)Τη χρονική στιγμή *t*=0 ο μεταγωγός διακόπτης δ μεταβαίνει στη θέση (1) και το κύκλωμα L_1C αρχίζει να εκτελεί αμείωτη ηλεκτρική ταλάντωση.

α) Να γράψετε τις χρονικές εξισώσεις, που δίνουν το φορτίο του πυκνωτή και την ένταση του ρεύματος, στο S.I. Πόση είναι η ολική ενέργεια E_1 της ηλεκτρικής ταλάντωσης του κυκλώματος L_1C;

β) Να υπολογίσετε τη χρονική στιγμή $t_1=\frac{16\pi}{3}\cdot 10^{-4}$ s:

(i) Την ένταση του ρεύματος που διαρρέει το 1° πηνίο.

(ii) Το φορτίο κάθε οπλισμού του πυκνωτή.

2)Τη χρονική στιγμή t_1 ο διακόπτης μεταβαίνει ακαριαία στη θέση (2), χωρίς να ξεσπάσει ηλεκτρικός σπινθήρας.

α) Θεωρώντας πάλι ως *t*=0 τη χρονική στιγμή που αλλάζει θέση ο διακόπτης, να γράψετε τη σχέση έντασης ρεύματος-χρόνου για το κύκλωμα L_2C. Πόση είναι τώρα η ολική ενέργεια E_2 του κυκλώματος L_2C ;

β) Να υπολογίσετε τον ρυθμό μεταβολής της ενέργειας μαγνητικού πεδίου του πηνίου L_2, τη χρονική στιγμή $t_2=\frac{5\pi}{4}\cdot 10^{-4}$ s.

Δίνεται $\eta\mu 2\varphi = 2\eta\mu\varphi\cdot\sigma\upsilon\nu\varphi$

<u>Λύση</u>

1)

α) Είναι $\omega_1=\frac{2\pi}{T_1}=\frac{2\pi}{2\pi\sqrt{L_1C}}\Rightarrow \omega_1=\frac{1}{\sqrt{L_1C}}=\frac{1}{\sqrt{8\cdot 10^{-3}\mathrm{H}\cdot 20\cdot 10^{-6}\mathrm{F}}}\Rightarrow \omega_1=2500\mathrm{rad/s}$,

$V_1 = E = 10V$ και $Q_1 = V_1C \Rightarrow Q_1 = 10V \cdot 20 \cdot 10^{-6} F \Rightarrow Q_1 = 2 \cdot 10^{-4} C$

Αφού ο πυκνωτής C είναι πλήρως φορτισμένος τη στιγμή t=0, η ταλάντωση δεν θα έχει αρχική φάση, άρα η εξίσωση του φορτίου γράφεται:

$q_1 = Q_1 \sigma\upsilon\nu\omega_1 t = 2 \cdot 10^{-4} \sigma\upsilon\nu 2500t$ (SI)

Το μέγιστο ρεύμα είναι: $I_1 = \omega_1 Q_1 = 2500 rad/s \cdot 2 \cdot 10^{-4} C \Rightarrow I_1 = 0,5A$.

Η εξίσωση της έντασης του ρεύματος, γράφεται:

$i_1 = -I_1 \eta\mu\omega t \Rightarrow i_1 = -0,5\eta\mu 2500t$ (SI).

Η ολική ενέργεια του κυκλώματος (1) είναι:

$$E_1 = \frac{L_1 I_1^2}{2} = \frac{8 \cdot 10^{-3} H \cdot (0,5A)^2}{2} \Rightarrow E_1 = 10^{-3} J$$

β) (i) Με αντικατάσταση στην εξίσωση του ρεύματος παίρνουμε:

$$i_1 = -I_1 \eta\mu\omega t = -0,5\eta\mu 2500t \;\; A = -0,5\eta\mu 2500 \cdot \frac{16\pi}{3} \cdot 10^{-4} \;\; A = -0,5\eta\mu \frac{4}{3}\pi \;\; A = -0,5\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) A \Rightarrow$$

$$i_1 = -0,5(\frac{\sqrt{3}}{2}) \Rightarrow i_1 = \frac{\sqrt{3}}{4} A$$

(ii) Το φορτίο γράφεται:

$$q_1 = Q_1 \sigma\upsilon\nu\omega_1 t = 2 \cdot 10^{-4} \sigma\upsilon\nu 2500 \cdot \frac{16\pi}{3} \cdot 10^{-4} \;\; C \Rightarrow$$

$$q_1 = 2 \cdot 10^{-4} \sigma\upsilon\nu \frac{4}{3}\pi \;\; C = 2 \cdot 10^{-4} (-\frac{1}{2}) C \Rightarrow q_1 = -10^{-4} C$$

Η παραπάνω εξίσωση αφορά το φορτίο του οπλισμού Β του πυκνωτή. Το φορτίο του οπλισμού Κ θα είναι το ίδιο με αντίθετο όμως πρόσημο: $q_K = +10^{-4} C$.

2)

α) Είναι $\omega_2 = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi}{2\pi\sqrt{L_2C}} \Rightarrow \omega_2 = \frac{1}{\sqrt{L_2C}} = \frac{1}{\sqrt{2 \cdot 10^{-3} H \cdot 20 \cdot 10^{-6} F}} \Rightarrow \omega_2 = 5000 rad/s$

Το μέγιστο φορτίο Q_2 της νέας ταλάντωσης είναι ίσο με το φορτίο που είχε ο πυκνωτής τη στιγμή t_1, δηλαδή $Q_2 = 10^{-4} C$.

Αφού ο πυκνωτής C είναι και πάλι πλήρως φορτισμένος τη στιγμή t=0, η ταλάντωση δεν θα έχει αρχική φάση, άρα η εξίσωση του φορτίου γράφεται:

$q_2 = Q_2 συν ω_2 t = 10^{-4} συν 5000t$ (SI)

Το μέγιστο ρεύμα είναι: $I_2 = ω_2 Q_2 = 5000 \cdot 10^{-4} A \Rightarrow I_2 = 0,5A$.

Η εξίσωση της έντασης του ρεύματος, γράφεται:

$i_2 = -I_2 ημωt = -0,5 ημ5000t$ (SI).

Η ολική ενέργεια του κυκλώματος (2) είναι:

$$E_2 = \frac{L_2 I_2^2}{2} = \frac{2 \cdot 10^{-3} H \cdot (0,5A)^2}{2} J \Rightarrow E_2 = 0,25 \cdot 10^{-3} J$$

β) Είναι : $U_B + U_E = E_2 \Rightarrow \frac{dU_B}{dt} + \frac{dU_E}{dt} = 0 \Rightarrow \frac{dU_B}{dt} = -\frac{dU_E}{dt} = -V_c \cdot i$

Οπότε έχουμε:

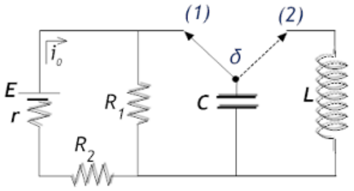
$$\frac{dU_B}{dt} = -V_C i = -\frac{q}{C} i = -\frac{10^{-4} συν5000t}{20 \cdot 10^{-6}} (-0,5ημ5000t) J/s \Rightarrow$$

$$\frac{dU_B}{dt} = 5 \cdot \frac{συν5000t \cdot ημ5000t}{2} J/s = 1,25 ημ(2 \cdot 5000t) J/s = 1,25 ημ(10000 \frac{5π}{4} 10^{-4})\ J/s \Rightarrow$$

$$\frac{dU_B}{dt} = 1,25\, ημ \frac{5π}{4} J/s = 1,25(-\frac{\sqrt{2}}{2}) J/s \Rightarrow \quad \frac{dU_B}{dt} = -\frac{1,25}{2}\sqrt{2} J/s$$

Πρόβλημα 4.

Στο παρακάτω κύκλωμα η ηλεκτρική πηγή έχει ΗΕΔ *E*=50 V και εσωτερική αντίσταση *r*=1 Ω, οι αντιστάτες έχουν αντίσταση R_1=4 Ω και R_2=5 Ω, ο πυκνωτής έχει χωρητικότητα *C*=10 μF και το πηνίο έχει συντελεστή αυτεπαγωγής *L*=4 mH. Αρχικά ο μεταγωγός διακόπτης δ είναι στη θέση (1) και οι αντιστάτες διαρρέονται από ρεύμα σταθερής έντασης.



Τη χρονική στιγμή *t*=0 μετακινούμε το διακόπτη στη θέση (2), χωρίς να δημιουργηθεί σπινθήρας, οπότε το ιδανικό κύκλωμα *L*-*C* αρχίζει να εκτελεί αμείωτες ηλεκτρικές ταλαντώσεις.

α) Να βρείτε την ένταση i_0 του ρεύματος, που διαρρέει την πηγή καθώς και το φορτίο, που έχει αποθηκευτεί στον πυκνωτή όταν οι αντιστάτες διαρρέονται από σταθερό ρεύμα.

β) Να βρείτε το λόγο της έντασης του ρεύματος i_0, που διέρρεε αρχικά την πηγή προς τη μέγιστη ένταση *I* του ρεύματος, που διαρρέει το κύκλωμα L-C της ηλεκτρικής ταλάντωσης.

γ) Να γράψετε τις εξισώσεις, που δίνουν τις ενέργειες του ηλεκτρικού πεδίου του πυκνωτή και του μαγνητικού πεδίου του πηνίου σε συνάρτηση με το χρόνο.

δ) Να βρείτε τις χρονικές στιγμές στις οποίες οι ενέργειες ηλεκτρικού και μαγνητικού πεδίου είναι ίσες στη διάρκεια της πρώτης περιόδου της ταλάντωσης.

Λύση

α) Από το νόμο του Ohm για κλειστό κύκλωμα παίρνουμε:

$$i_0 = \frac{E}{R_1 + R_2 + r} = \frac{50}{4+5+1}\mathrm{A} \Rightarrow i_0 = 5\mathrm{A}$$

Η τάση στους οπλισμούς του πυκνωτή είναι ίση με την τάση στα άκρα της αντίστασης R_1. Ισχύει δηλαδή: $V = i_0 R_1 = 5\mathrm{A}\cdot 4\Omega \Rightarrow V = 20\mathrm{V}$

Έτσι το φορτίο του πυκνωτή θα είναι: $Q = VC = 20\mathrm{V}\cdot 10^{-5}\mathrm{F} \Rightarrow Q = 2\cdot 10^{-4}\mathrm{C}$

Αυτό είναι και το μέγιστο φορτίο που θα έχει ο πυκνωτής στην ηλεκτρική ταλάντωση που θα ακολουθήσει.

β) Είναι $\omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi}{2\pi\sqrt{LC}} \Rightarrow \omega = \frac{1}{\sqrt{LC}} = \frac{1}{\sqrt{4\cdot 10^{-3}\mathrm{H}\cdot 10\cdot 10^{-6}\mathrm{F}}} \Rightarrow \omega = 5000\mathrm{rad/s}$

και $I = \omega Q = 5000\mathrm{rad/s}\cdot 2\cdot 10^{-4}\mathrm{C} \Rightarrow I = 1\mathrm{A}$, άρα $\frac{i_0}{I} = \frac{5}{1} = 5$

γ) Οι εξισώσεις των ενεργειών σε συνάρτηση με το χρόνο είναι: $U_E = E\sigma\upsilon\nu^2\omega t$ και $U_B = E\eta\mu^2\omega t$

όπου $E = \frac{Q^2}{2C} = \frac{4\cdot 10^{-3}}{2\cdot 10^{-5}} = 2\cdot 10^{-3}\,J$. Έτσι, οι εξισώσεις γράφονται:

$U_E = 2\cdot 10^{-3}\sigma\upsilon\nu^2 5000t$ (S.I.) και

$U_E = 2\cdot 10^{-3}\eta\mu^2 5000t$ (S.I.)

δ) Οι ενέργειες είναι ίσες μεταξύ τους όταν ισχύει:

$$E = U_E + U_B \Rightarrow E = 2\cdot U_E \Rightarrow 2\cdot 10^{-3} = 4\cdot 10^{-3}\sigma\upsilon\nu^2 5000t \Rightarrow$$

$$\sigma\upsilon\nu^2 5000t = \frac{1}{2} \Rightarrow \sigma\upsilon\nu 5000t = \pm\frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \sigma\upsilon\nu 5000t = \pm\sigma\upsilon\nu(\pi/4)$$

Λύνοντας την τριγωνομετρική εξίσωση παίρνουμε τέσσερεις λύσεις για την πρώτη περίοδο: $\frac{T}{8}$, $\frac{3T}{8}$, $\frac{5T}{8}$ και $\frac{7T}{8}$, δηλαδή, $t_1 = 0,5\pi\cdot 10^{-4}s$, $t_2 = 1,5\pi\cdot 10^{-4}s$, $t_3 = 2,5\pi\cdot 10^{-4}s$, $t_4 = 3,5\pi\cdot 10^{-4}s$.

Ημερομηνία τροποποίησης: 14/7/2011

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1ο: ΜΗΧΑΝΙΚΕΣ ΚΑΙ ΗΛΕΚΤΡΙΚΕΣ ΤΑΛΑΝΤΩΣΕΙΣ

ΕΝΟΤΗΤΑ 3: ΦΘΙΝΟΥΣΕΣ ΤΑΛΑΝΤΩΣΕΙΣ

ΘΕΜΑΤΑ ΠΡΟΣ ΕΠΙΛΥΣΗ

ΘΕΜΑ Β

Ερώτηση 1.

Το πλάτος μιας φθίνουσας ταλάντωσης δίνεται από τη σχέση $A = A_0 e^{-\Lambda t}$. Ο χρόνος που απαιτείται ώστε η ολική ενέργεια της ταλάντωσης να γίνει η μισή της αρχικής $\left(E = \frac{E_0}{2}\right)$ είναι:

α) $t = \frac{\ln 2}{\Lambda}$.

β) $t = \frac{\ln 2}{2\Lambda}$.

γ) $t = \frac{\Lambda}{\ln 2}$.

Ποιά είναι η σωστή πρόταση; Να δικαιολογήσετε την απάντησή σας.

<u>Λύση</u>

Από το συνδυασμό των σχέσεων $E = \frac{1}{2}DA^2$ και $A = A_0 e^{-\Lambda t}$ προκύπτει

$E = \frac{1}{2}DA_0^2 \cdot e^{-2\Lambda t} \Rightarrow E = E_0 \cdot e^{-2\Lambda t}$ οπότε παίρνουμε:

$$E = E_0 e^{-2\Lambda t} \Rightarrow \frac{E_0}{2} = E_0 e^{-2\Lambda t} \Rightarrow \frac{1}{2} = \frac{1}{e^{2\Lambda t}} \Rightarrow 2 = e^{2\Lambda t} \Rightarrow \ln 2 = \ln e^{2\Lambda t} \Rightarrow$$

$$2\Lambda t = \ln 2 \Rightarrow t = \frac{\ln 2}{2\Lambda}$$

Σωστή απάντηση η (β).

Ερώτηση 2.

Το πλάτος μιας φθίνουσας ταλάντωσης δίνεται από τη σχέση $A = A_0 e^{-\Lambda t}$. Ο χρόνος που απαιτείται ώστε το πλάτος της ταλάντωσης να γίνει το μισό του αρχικού $\left(A = \dfrac{A_0}{2}\right)$ είναι:

α) $t = \dfrac{\ln 2}{\Lambda}$.

β) $t = \dfrac{\ln 4}{\Lambda}$.

γ) $t = \dfrac{\Lambda}{\ln 2}$.

Ποια είναι η σωστή πρόταση; Να δικαιολογήσετε την απάντησή σας.

<u>Λύση</u>

$$A = A_0 e^{-\Lambda t} \Rightarrow \frac{A_0}{2} = A_0 e^{-\Lambda t} \Rightarrow \frac{1}{2} = e^{-\Lambda t} \Rightarrow \frac{1}{2} = \frac{1}{e^{\Lambda t}} \Rightarrow 2 = e^{\Lambda t} \Rightarrow \ln 2 = \ln e^{\Lambda t} \Rightarrow$$

$$\Lambda t = \ln 2 \Rightarrow t = \frac{\ln 2}{\Lambda}$$

Σωστή απάντηση η (α).

Ερώτηση 3.

Σε μια φθίνουσα ταλάντωση, οι μονάδες της σταθεράς απόσβεσης b στο S.I. είναι:

α) kg s.

β) s/kg.

γ) kg/s.

Ποια είναι η σωστή πρόταση; Να δικαιολογήσετε την απάντησή σας.

<u>Λύση</u>

$$|F| = bu \Leftrightarrow b = \frac{|F|}{u}$$

Άρα οι μονάδες θα είναι:

$$\frac{N}{\frac{m}{s}} = \frac{N \cdot s}{m} = \frac{kg\frac{m}{s^2}s}{m} = \frac{kg \cdot m \cdot s}{m \cdot s^2} = \frac{kg}{s}$$

Άρα σωστή πρόταση είναι η (γ).

ΘΕΜΑ Γ

Άσκηση 1.

Το πλάτος μιας φθίνουσας αρμονικής ταλάντωσης μειώνεται εκθετικά με το χρόνο σύμφωνα με τη σχέση $A = A_0 e^{-\Lambda t}$. Το πλάτος της ταλάντωσης τη χρονική στιγμή t=0 είναι A_0=8cm και τη χρονική στιγμή $t = 20s$ είναι $A_1 = 2cm$.

α) Ποια είναι η τιμή της σταθεράς Λ της ταλάντωσης;

β) Πόσος χρόνος χρειάζεται ώστε το πλάτος της ταλάντωσης να μείνει το 1/2 του αρχικού;

γ) Ποιο είναι το πλάτος της ταλάντωσης τη χρονική στιγμή $t = 30s$;

Δίνεται $\ln 2 = 0,7$.

<u>Λύση</u>

α)

$$A = A_0 e^{-\Lambda t} \Rightarrow 2 = 8e^{-\Lambda t} \Rightarrow \frac{2}{8} = e^{-\Lambda 20} \Rightarrow \frac{1}{4} = \frac{1}{e^{20\Lambda}} \Rightarrow 4 = e^{20\Lambda} \Rightarrow$$

$$\ln 4 = \ln e^{20\Lambda} \Rightarrow \ln 2^2 = \Lambda 20 \Rightarrow \Lambda = \frac{2\ln 2}{20} s^{-1} = \frac{\ln 2}{10} s^{-1} = \frac{0,7}{10} s^{-1} \Rightarrow \Lambda = 0,07 s^{-1}$$

β)

$$A = A_0 e^{-\Lambda t} \Rightarrow \frac{A_0}{2} = A_0 e^{-\Lambda t} \Rightarrow \frac{1}{2} = e^{-\Lambda t} \Rightarrow \frac{1}{2} = \frac{1}{e^{\Lambda t}} \Rightarrow 2 = e^{\Lambda t} \Rightarrow \ln 2 = \ln e^{\Lambda t} \Rightarrow \ln 2 = \Lambda t \Rightarrow$$
$$\ln 2 = \frac{\ln 2}{10} t \Rightarrow t = 10s$$

γ)

$$A = A_0 e^{-\Lambda t} \Rightarrow A = 8e^{-\Lambda 30} \Rightarrow A = 8e^{-\frac{\ln 2}{10}30} \Rightarrow A = 8\frac{1}{e^{3\ln 2}} \Rightarrow A = 8\frac{1}{e^{\ln 2^3}} \Rightarrow$$

$$A = \frac{8}{e^{\ln 8}} \Rightarrow A = \frac{8}{8} \Rightarrow A = 1cm$$

<u>Μεθοδολογία:</u>

Στην εύρεση του πλάτους συνήθως κάνουμε χρήση της ιδιότητας λογαρίθμων $e^{\ln x} = x$.

Άσκηση 2.

Το πλάτος μιας φθίνουσας αρμονικής ταλάντωσης μειώνεται εκθετικά με το χρόνο σύμφωνα με τη σχέση $A = A_0 e^{-\Lambda t}$. Η σταθερά Λ της ταλάντωσης ισούται με $\Lambda = 0,014 s^{-1}$.

α) Να βρείτε μετά από πόσο χρονικό διάστημα το σύστημα θα έχει χάσει τα $3/4$ της αρχικής του ενέργειας .

β) Να υπολογιστεί ο αριθμός των ταλαντώσεων Ν που πραγματοποιεί το σύστημα μέχρι να υποτετραπλασιαστεί η αρχική του ενέργεια.

γ) Αν τη χρονική στιγμή $t = 0$ η ενέργεια της ταλάντωσης είναι E_0 και μετά από χρόνο $\Delta t = t_1$ η % ελάττωση της ενέργειας ταλάντωσης είναι 36%, να βρείτε την % ελάττωση του πλάτους της ταλάντωσης.

Δίνεται ότι η περίοδος των ταλαντώσεων είναι $T = 0,5 s$ και $\ln 2 = 0,7$.

<u>Λύση</u>

α) Το σύστημα θα έχει χάσει τα $\frac{3}{4}$ της αρχικής του ενέργειας. Αυτό σημαίνει ότι η ενέργεια που του έχει απομείνει είναι το $\frac{1}{4}$ της αρχικής. Άρα:

$$E = \frac{1}{4} E_0 \Rightarrow \frac{1}{2} DA^2 = \frac{1}{4}\frac{1}{2} DA_0^2 \Rightarrow A = \frac{A_0}{2}$$

Έτσι,

$$A = A_0 e^{-\Lambda t} \Rightarrow \frac{A_0}{2} = A_0 e^{-\Lambda t} \Rightarrow \frac{1}{2} = e^{-\Lambda t} \Rightarrow \frac{1}{2} = \frac{1}{e^{\Lambda t}} \Rightarrow 2 = e^{\Lambda t} \Rightarrow \ln 2 = \ln e^{\Lambda t} \Rightarrow \ln 2 = \Lambda t \Rightarrow$$

$$0,7 = 0,014 t \Rightarrow t = 50 s$$

β) Όταν ζητείται ο αριθμός των ταλαντώσεων που πραγματοποιούνται σε χρόνο t, θα χρησιμοποιούμε τη σχέση t=NT , γιατί γνωρίζουμε ότι σε μια φθίνουσα ταλάντωση η περίοδος διατηρείται σταθερή σε σχέση με το χρόνο.

Έτσι, $t = NT \Rightarrow 50 = N \cdot 0,5 \Rightarrow N = 100$ ταλαντώσεις .

γ) Έστω Ε η ενέργεια ταλάντωσης και Α το πλάτος της ταλάντωσης τη χρονική στιγμή t_1. Ισχύει:

$$\frac{E_0 - E}{E_0} = 36\% \Rightarrow 1 - \frac{E}{E_0} = 0,36 \Rightarrow \frac{E}{E_0} = 0,64 \Rightarrow \frac{\frac{1}{2} DA^2}{\frac{1}{2} DA_0^2} = 0,64 \Rightarrow \frac{A^2}{A_0^2} = 0,64 \Rightarrow$$

$$\frac{A}{A_0} = 0,8 \Rightarrow A = 0,8 A_0$$

Η % ελάττωση του πλάτους της ταλάντωσης είναι:

$$\frac{A_0 - A}{A_0} = \frac{A_0 - 0,8A_0}{A_0} = \frac{0,2A_0}{A_0} = 0,2 \quad ή \quad \frac{A_0 - A}{A_0}\% = 20\%$$

Άσκηση 3.

Το πλάτος μιας φθίνουσας αρμονικής ταλάντωσης μειώνεται εκθετικά με το χρόνο σύμφωνα με τη σχέση $A = A_0 e^{-\ln 4 \cdot t}$. Σε χρονικό διάστημα 10T, όπου T η περίοδος της φθίνουσας ταλάντωσης, το πλάτος ελαττώνεται κατά 50%. Να υπολογίσετε:

α) την περίοδο T της φθίνουσας ταλάντωσης.

β) τον αριθμό των ταλαντώσεων N που πρέπει να πραγματοποιηθούν ώστε το πλάτος να μειωθεί από $\frac{A_0}{4}$ σε $\frac{A_0}{16}$.

γ) Το κλάσμα της αρχικής ενέργειας που έχασε ο ταλαντωτής στο χρονικό διάστημα που πέρασε για να ελαττωθεί το πλάτος της ταλάντωσης από $\frac{A_0}{4}$ σε $\frac{A_0}{16}$.

<u>Λύση</u>

α)

$$A = A_0 e^{-\ln 4 \cdot t} \Rightarrow \frac{A_0}{2} = A_0 e^{-\ln 4 \cdot t} \Rightarrow \frac{1}{2} = e^{-\ln 4 \cdot t} \Rightarrow \frac{1}{2} = \frac{1}{e^{\ln 4 \cdot t}} \Rightarrow 2 = e^{\ln 4 \cdot t} \Rightarrow \ln 2 = \ln e^{\ln 4 \cdot t} \Rightarrow$$

$$\ln 2 = \ln 4 \cdot t \Rightarrow \ln 2 = \ln 2^2 \cdot t \Rightarrow \ln 2 = 2 \ln 2 \cdot t \Rightarrow t = 0,5 s \Rightarrow 10T = 0,5 \Rightarrow T = 0,05 s$$

β)

$$A = A_0 e^{-\ln 4 \cdot t} \Rightarrow \frac{A_0}{4} = A_0 e^{-\ln 4 \cdot t} \Rightarrow \frac{1}{4} = e^{-\ln 4 \cdot t} \Rightarrow \frac{1}{4} = \frac{1}{e^{\ln 4 \cdot t}} \Rightarrow 4 = e^{\ln 4 \cdot t} \Rightarrow$$

$$\ln 4 = \ln e^{\ln 4 \cdot t} \Rightarrow \ln 4 = \ln 4 \cdot t \Rightarrow t = 1 s$$

$$A = A_0 e^{-\ln 4 \cdot t} \Rightarrow \frac{A_0}{16} = A_0 e^{-\ln 4 \cdot t} \Rightarrow \frac{1}{16} = e^{-\ln 4 \cdot t} \Rightarrow \frac{1}{16} = \frac{1}{e^{\ln 4 \cdot t}} \Rightarrow 16 = e^{\ln 4 \cdot t} \Rightarrow \ln 16 = \ln e^{\ln 4 \cdot t} \Rightarrow$$

$$\ln 16 = \ln 4 \cdot t \Rightarrow \ln 4^2 = \ln 4 \cdot t \Rightarrow 2 \ln 4 = \ln 4 \cdot t \Rightarrow t = 2 s$$

Έτσι, σε χρόνο $1 s$ πραγματοποιούνται $t = N_1 T \Rightarrow 1 = N_2 0,05 \Rightarrow N_1 = 20$ ταλαντώσεις.

Σε χρόνο $2 s$ πραγματοποιούνται $t = N_2 T \Rightarrow 2 = N_2 0,05 \Rightarrow N_2 = 40$ ταλαντώσεις.

Άρα $\Delta N = N_2 - N_1 = 40 - 20 = 20$ ταλαντώσεις

γ) $$\frac{E_2 - E_1}{E_0} = \frac{\frac{1}{2} D A_2^2 - \frac{1}{2} D A_1^2}{\frac{1}{2} D A_0^2} = \frac{\frac{A_0^2}{4^2} - \frac{A_0^2}{16^2}}{A_0^2} = \frac{15}{256}$$

Ημερομηνία τροποποίησης: 15/7/2011

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1$^{\text{Ο}}$: ΜΗΧΑΝΙΚΕΣ – ΗΛΕΚΤΡΙΚΕΣ ΤΑΛΑΝΤΩΣΕΙΣ

ΕΝΟΤΗΤΑ 4: ΕΞΑΝΑΓΚΑΣΜΕΝΕΣ ΤΑΛΑΝΤΩΣΕΙΣ

ΘΕΜΑΤΑ ΠΡΟΣ ΕΠΙΛΥΣΗ

ΘΕΜΑ Β

Ερώτηση 1.

Για ένα σύστημα που εκτελεί εξαναγκασμένη ταλάντωση με συχνότητα f=10Hz, βρίσκεται σε κατάσταση συντονισμού και έχει πλάτος ταλάντωσης A=8cm, ισχύουν τα εξής:

α) έχει σταθερά απόσβεσης $b = 0$.

β) έχει απώλειες ενέργειας ανά περίοδο λιγότερες, από αυτές που θα είχε αν η συχνότητα του διεγέρτη γίνει $6\ \text{Hz}$.

γ) το πλάτος ταλάντωσης μπορεί να γίνει μεγαλύτερο από αυτό που έχει, αρκεί να ελαττώσουμε τη σταθερά απόσβεσης.

Να επιλέξετε τη σωστή πρόταση. Να αιτιολογήσετε την επιλογή σας.

<u>Λύση</u>

Σωστή απάντηση είναι η (γ).

Επειδή το σύστημα βρίσκεται στο συντονισμό και ταλαντώνεται με συγκεκριμένο πλάτος η σταθερά απόσβεσης είναι διαφορετική του μηδενός. Στο συντονισμό οι απώλειες μεγιστοποιούνται, αφού μεγιστοποιείται το πλάτος της ταλάντωσης και η δύναμη αντίστασης. Άρα οι απώλειες ενέργειας ανά περίοδο στο σύστημα είναι περισσότερες , από αυτές που θα είχε αν η συχνότητα του διεγέρτη γίνει $6\ \text{Hz}$.

Σε μια εξαναγκασμένη ταλάντωση για σταθερή συχνότητα του διεγέρτη, το πλάτος εξαρτάται από το b. Αύξηση του b προκαλεί μείωση του πλάτους ταλάντωσης. Οπότε η μείωση του θα οδηγήσει σε αύξηση του πλάτους.

Άρα σωστή πρόταση είναι η (γ).

Ερώτηση 2.

Ένας ραδιοφωνικός σταθμός εκπέμπει στα $100\,\mathrm{MHz}$. Αν για τη λήψη αυτού του ηλεκτρομαγνητικού κύματος χρησιμοποιείται δέκτης με κύκλωμα LC, στο οποίο το πηνίο έχει συντελεστή αυτεπαγωγής $L = 2\,\mathrm{mH}$, η τιμή της χωρητικότητας του πυκνωτή συντονίζεται ο δέκτης είναι:

α) $C = 12,5 \cdot 10^{-6}\,F$.

β) $C = 25 \cdot 10^{-6}\,F$.

γ) $C = 50 \cdot 10^{-6}\,F$.

Δίνεται $\pi^2 = 10$.

<u>Λύση</u>

Σωστή απάντηση είναι η α.

Για να συντονιστεί ο δέκτης στο συγκεκριμένο σταθμό πρέπει η ιδιοσυχνότητα του κυκλώματος LC να γίνει ίση με τη συχνότητα στην οποία εκπέμπει ο σταθμός. Δηλαδή $f = f_0$.

$$f = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}} \Rightarrow C = \frac{1}{4\pi^2 L f^2} \Rightarrow C = \frac{1}{4 \cdot 10 \cdot 2 \cdot 10^{-3}\,H\left(100 \cdot 10^6\,Hz\right)^2} \Rightarrow C = \frac{1}{8 \cdot 10^{14}}\,F \Rightarrow$$

$$C = 12,5 \cdot 10^{-16}\,F$$

ΘΕΜΑ Γ

Άσκηση 1.

Σώμα μάζας $m = 2kg$ ισορροπεί δεμένο στο κάτω άκρο κατακόρυφου ελατηρίου σταθεράς $k = 200N/m$, το πάνω άκρο του οποίου είναι στερεωμένο σε ακλόνητο σημείο. Το σώμα εκτελεί φθίνουσα ταλάντωση και η δύναμη απόσβεσης που επενεργεί πάνω του είναι της μορφής $F = -0,5u$ (S.I.). Εφαρμόζουμε στο σύστημα περιοδική δύναμη διέγερσης με συχνότητα $\frac{5}{\pi}Hz$, οπότε αποκαθίσταται ταλάντωση σταθερού πλάτους που είναι ίσο με $0,2m$. Αν η αρχική φάση της ταλάντωσης σταθερού πλάτους είναι $\varphi_0 = 0$, τότε:

α) Να γράψετε τις εξισώσεις της απομάκρυνσης και της ταχύτητας της εξαναγκασμένης ταλάντωσης.

β) Να υπολογίσετε το μέγιστο ρυθμό απορρόφησης ενέργειας του ταλαντωτή από τον διεγέρτη, κατά τη διάρκεια μιας περιόδου.

γ) Αν αυξήσουμε τη συχνότητα του διεγέρτη το πλάτος της ταλάντωσης θα αυξηθεί ή θα ελαττωθεί; Να δικαιολογήσετε την απάντησή σας.

Λύση

α) Η εξίσωση της απομάκρυνσης είναι $x = A\eta\mu\omega_\delta t$, $\varphi_0 = 0$.

Θέτουμε $A = 0,2m$, $\omega_\delta = 2\pi f_\delta = 2\pi\cdot\frac{5}{\pi}\ rad/s \Rightarrow \omega_\delta = 10\ rad/s$

και έχουμε, $x = 0,2\eta\mu 10t$ (S.I.)

Η εξίσωση της ταχύτητας είναι $u = u_{max}\cdot\sigma\upsilon\nu\omega_\delta t$, όπου

$u_{max} = \omega_\delta\cdot A = 10\cdot 0,2\ m/s \Rightarrow u_{max} = 2\ m/s$.

Άρα, $u = 2\cdot\sigma\upsilon\nu 10t$ (SI)

β) Ο ρυθμός απορρόφησης ενέργειας (ισχύς) του ταλαντωτή από το διεγέρτη, ισούται με την απόλυτη τιμή του ρυθμού απώλειας ενέργειας λόγω της δύναμης απόσβεσης, δηλαδή:

$$P = |P_{\alpha\pi}| = F\cdot u = b\cdot u\cdot u = b\cdot u^2$$

Άρα, $P_{max} = b\cdot u_{max}^2 = b\cdot(\omega_\delta A)^2 = 0,5\frac{N\cdot s}{m}\cdot(10\frac{rad}{s}\cdot 0,2m)^2 = 2J/s$

γ) Η ιδιοσυχνότητα του ταλαντωτή είναι:

$$f_0 = \frac{1}{2\pi} \cdot \sqrt{\frac{k}{m}} = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{200\ N/m}{2kg}} = \frac{5}{\pi}Hz$$

Αλλά η συχνότητα του διεγέρτη είναι $f_\delta = \frac{5}{\pi}Hz$, δηλαδή, $f_\delta = f_0$ και επομένως, όταν αυξηθεί η f_δ, θα ελαττωθεί το πλάτος της εξαναγκασμένης ταλάντωσης γιατί το σύστημα θα πάψει να βρίσκεται σε κατάσταση συντονισμού.

Ημερομηνία τροποποίησης: 22/09/2011

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1$^{\text{ο}}$: ΜΗΧΑΝΙΚΕΣ – ΗΛΕΚΤΡΙΚΕΣ ΤΑΛΑΝΤΩΣΕΙΣ

ΕΝΟΤΗΤΑ 5: ΣΥΝΘΕΣΗ ΤΑΛΑΝΤΩΣΕΩΝ

ΘΕΜΑΤΑ ΠΡΟΣ ΕΠΙΛΥΣΗ

ΘΕΜΑ Β

Ερώτηση 1.

Ένα σώμα εκτελεί κίνηση που προέρχεται από τη σύνθεση δύο απλών αρμονικών ταλαντώσεων, ίδιας διεύθυνσης, γύρω από το ίδιο σημείο, με εξισώσεις $x_1 = 0,7\eta\mu 2\pi t$ και $x_2 = 0,4\eta\mu 2\pi t$ (όλα τα μεγέθη στο S.I.). Η σύνθετη ταλάντωση περιγράφεται (στο S.I.) από την εξίσωση:

α) $x = 0,3\eta\mu 2\pi t$.

β) $x = 1,1\eta\mu 4\pi t$.

γ) $x = 1,1\eta\mu 2\pi t$.

Ποιό από τα παραπάνω είναι το σωστό; Να δικαιολογήσετε την απάντησή σας.

Λύση

Σωστή απάντηση η γ.

Εφόσον η συχνότητα των δύο Α.Α.Τ. είναι ίδια (αφού έχουν ίδια γωνιακή συχνότητα $\omega = 2\pi$ rad/s) και η διαφορά φάσης των δύο ταλαντώσεων είναι μηδέν, το σώμα θα εκτελέσει μια νέα Α.Α.Τ. η οποία θα έχει την ίδια φάση και πλάτος ίσο με το άθροισμα των πλατών των επιμέρους ταλαντώσεων.

Άρα $A = A_1 + A_2 \Rightarrow A = 0,7m + 0,4m = 1,1m$ και φάση ίση με $2\pi t$. Η εξίσωση λοιπόν της σύνθετης ταλάντωσης είναι $x = 1,1\eta\mu 2\pi t$ (S.I.).

Ερώτηση 2.

Ένα σώμα εκτελεί κίνηση που προέρχεται από τη σύνθεση δύο απλών αρμονικών ταλαντώσεων, ίδιας διεύθυνσης, γύρω από το ίδιο σημείο, με εξισώσεις $x_1 = 0,3ημ2πt$ και $x_2 = 0,8ημ(2πt + π)$ (όλα τα μεγέθη στο S.I.) Η σύνθετη ταλάντωση περιγράφεται από την εξίσωση:

α) $x = 1,1ημ(2πt + π)$.

β) $x = 0,5ημ2πt$.

γ) $x = 0,5ημ(2πt + π)$.

Ποιό από τα παραπάνω είναι το σωστό; Να δικαιολογήσετε την απάντησή σας.

<u>Λύση</u>

Σωστή απάντηση η γ.

Εφόσον η συχνότητα των δύο Α.Α.Τ. είναι ίδια (αφού έχουν ίδια γωνιακή συχνότητα $ω = 2π\ rad/s$) και η διαφορά φάσης των δύο ταλαντώσεων είναι $π\ rad$ (180°) το σώμα θα εκτελέσει μια νέα Α.Α.Τ. της οποίας το πλάτος είναι ίσο με τη διαφορά των πλατών και η φάση της είναι ίση με τη φάση της ταλάντωσης που έχει το μεγαλύτερο πλάτος.

Άρα $A = |A_1 - A_2| \Rightarrow A = 0,8m - 0,3m = 0,5m$ και φάση ίση με της δεύτερης Α.Α.Τ., δηλαδή 2πt+π. Η εξίσωση λοιπόν της σύνθετης ταλάντωσης είναι x=0,5ημ(2πt+π) (S.I.)

Ερώτηση 3.

Ένα σώμα εκτελεί κίνηση που προέρχεται από τη σύνθεση δύο απλών αρμονικών ταλαντώσεων, γύρω από το ίδιο σημείο και έχουν ίδια ενέργεια$\left(E_1 = E_2\right)$, ίδια συχνότητα και ίδια διεύθυνση. Η ολική ενέργεια της σύνθετης ταλάντωσης είναι ίση με την ενέργεια των δύο ταλαντώσεων$\left(E = E_1 = E_2\right)$, όταν η διαφορά φάσης των δύο Α.Α.Τ. είναι:

α) 0^0.

β) 60^0.

γ) 120^0.

Ποιό από τα παραπάνω είναι το σωστό; Να δικαιολογήσετε την απάντησή σας.

<u>Λύση</u>
Σωστή απάντηση η γ.

Εφόσον η συχνότητα των δύο Α.Α.Τ. είναι ίδια, το σώμα θα εκτελέσει μια νέα ταλάντωση που το πλάτος της δίνεται από τον τύπο: $A = \sqrt{A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2\sigma\upsilon\nu\varphi}$ (1)

Οι δύο επιμέρους ταλαντώσεις και η συνισταμένη ταλάντωση που προκύπτει, έχουν την ίδια σταθερά $D=m\omega^2$ αφού έχουν ίδια γωνιακή συχνότητα.

Αφού ισχύει $E = E_1 = E_2 \Rightarrow \frac{1}{2}DA^2 = \frac{1}{2}DA_1^2 = \frac{1}{2}DA_2^2 \Rightarrow A^2 = A_1^2 = A_2^2 \Rightarrow A = A_1 = A_2$

Άρα η σχέση (1) γίνεται:

$$A = \sqrt{A^2 + A^2 + 2AA\sigma\upsilon\nu\varphi} \Rightarrow A^2 = A^2 + A^2 + 2A^2\sigma\upsilon\nu\varphi \Rightarrow 2A^2\sigma\upsilon\nu\varphi = -A^2 \Rightarrow$$

$2\sigma\upsilon\nu\varphi = -1 \Rightarrow \sigma\upsilon\nu\varphi = -\frac{1}{2}$, οπότε $\varphi_1 = \frac{2\pi}{3} \Rightarrow \varphi_1 = 120^o$ ή $\varphi_2 = \frac{4\pi}{3} \Rightarrow \varphi_1 = 240^o$. Η γωνία $\varphi_2 = 240^o$ δεν περιλαμβάνεται στις επιλογές μας, οπότε απομένει ως σωστή επιλογή η $\varphi_1 = 120^o$.

Ερώτηση 4.

Ένα σώμα εκτελεί κίνηση που προέρχεται από τη σύνθεση δύο απλών αρμονικών ταλαντώσεων, ίδιας διεύθυνσης που γίνονται γύρω από το ίδιο σημείο. Οι εξισώσεις των δύο ταλαντώσεων είναι:

$x_1 = 0,4\eta\mu(1998\pi t)$ και $x_2 = 0,4\eta\mu(2002\pi t)$ (S.I.)

Ο χρόνος ανάμεσα σε δύο διαδοχικούς μηδενισμούς του πλάτους της ιδιόμορφης ταλάντωσης (διακροτήματος) του σώματος είναι:

α) $0,5\text{s}$.

β) 1s.

γ) 2s.

Να επιλέξετε το σωστό. Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

<u>Λύση</u>

Σωστή απάντηση η α.

Από τις εξισώσεις x-t προκύπτει $\omega_1 = 1998\pi\ \text{rad/s}$ και $\omega_2 = 2002\pi\ \text{rad/s}$. Άρα οι συχνότητες είναι:

$$f_1 = \frac{\omega_1}{2\pi} \Rightarrow f_1 = \frac{1998\pi}{2\pi}\text{Hz} \Rightarrow f_1 = 999\text{Hz}$$ και

$$f_2 = \frac{\omega_1}{2\pi} \Rightarrow f_2 = \frac{2002\pi}{2\pi}\text{Hz} \Rightarrow f_2 = 1001\text{Hz}$$

Δηλαδή οι δύο ταλαντώσεις έχουν το ίδιο πλάτος και συχνότητες που διαφέρουν πολύ λίγο. Ο χρόνος ανάμεσα σε δύο διαδοχικούς μηδενισμούς του πλάτους (T_Δ) δίνεται από τον τύπο:

$$T_\Delta = \frac{1}{f_\Delta} \Rightarrow T_\Delta = \frac{1}{|f_1 - f_2|} \Rightarrow T_\Delta = \frac{1}{|999 - 1001|}\text{s} \Rightarrow T_\Delta = \frac{1}{2}\text{s} \Rightarrow T_\Delta = 0,5\text{s}$$

Ερώτηση 5.

Σώμα εκτελεί κίνηση που προέρχεται από τη σύνθεση δύο απλών αρμονικών ταλαντώσεων, ίδιου πλάτους και διεύθυνσης. Οι συχνότητες f_1 και f_2 ($f_2 > f_1$) αντίστοιχα των δύο ταλαντώσεων διαφέρουν μεταξύ τους 4Hz, με αποτέλεσμα να παρουσιάζεται διακρότημα. Αν η συχνότητα f_1 αυξηθεί κατά 8Hz, ο χρόνος που μεσολαβεί ανάμεσα σε δύο διαδοχικούς μηδενισμούς του πλάτους θα:

α) παραμείνει ο ίδιος.

β) μειωθεί κατά $4s$.

γ) αυξηθεί κατά $4s$.

Ποιό από τα παραπάνω είναι το σωστό; Να δικαιολογήσετε την απάντησή σας.

<u>Λύση</u>

Σωστή απάντηση η α.

Αρχικά ισχύει $f_2 = f_1 + 4Hz$. Ο χρόνος ανάμεσα σε δύο διαδοχικούς μηδενισμούς του πλάτους (T_Δ) δίνεται από τον τύπο:

$$T_\Delta = \frac{1}{f_\Delta} \Rightarrow T_\Delta = \frac{1}{|f_1 - f_2|} \Rightarrow T_\Delta = \frac{1}{4}s = 0,25s$$

Στη συνέχεια $f_1' = f_1 + 8Hz$ και ο χρόνος ανάμεσα σε δύο διαδοχικούς μηδενισμούς του πλάτους (T'_Δ) γίνεται:

$$T'_\Delta = \frac{1}{f_\Delta} \Rightarrow T'_\Delta = \frac{1}{|f'_1 - f_2|} \Rightarrow T'_\Delta = \frac{1}{|f_1 + 8 - (f_1 + 4)|} \Rightarrow T'_\Delta = \frac{1}{4}s = 0,25s$$

Δηλαδή παραμένει ίδιος.

Ερώτηση 6.

Ένα σώμα εκτελεί κίνηση που προέρχεται από τη σύνθεση δύο απλών αρμονικών ταλαντώσεων, ίδιας διεύθυνσης που γίνονται γύρω από το ίδιο σημείο με το ίδιο πλάτος Α και συχνότητες που διαφέρουν πολύ λίγο. Αν T_1 και T_2 είναι αντίστοιχα οι περίοδοι των δύο ταλαντώσεων, τότε η περίοδος της περιοδικής κίνησης που προκύπτει δίνεται από τον τύπο:

α) $T = |T_2 - T_1|$

β) $T = \dfrac{T_2 + T_1}{2}$

γ) $T = \dfrac{2T_1T_2}{T_2 + T_1}$

Ποιό από τα παραπάνω είναι το σωστό; Να δικαιολογήσετε την απάντησή σας.

<u>Λύση</u>

Σωστή απάντηση: (γ)

Η γωνιακή συχνότητα της περιοδικής κίνησης που προκύπτει είναι: $\omega = \dfrac{\omega_1 + \omega_2}{2}$. Άρα:

$$\omega = \frac{\omega_1 + \omega_2}{2} \Rightarrow \frac{2\pi}{T} = \frac{\frac{2\pi}{T_1} + \frac{2\pi}{T_2}}{2} \Rightarrow \frac{1}{T} = \frac{\frac{1}{T_1} + \frac{1}{T_2}}{2} \Rightarrow \frac{1}{T} = \frac{\frac{T_2 + T_1}{T_1T_2}}{2} \Rightarrow \frac{1}{T} = \frac{T_2 + T_1}{2T_1T_2} \Rightarrow$$

$$T = \frac{2T_1T_2}{T_2 + T_1}$$

Ερώτηση 7.

Σώμα εκτελεί ταυτόχρονα δύο Α.Α.Τ. της ίδιας συχνότητας, που γίνονται γύρω από το ίδιο σημείο και στην ίδια διεύθυνση. Αν οι εξισώσεις των επιμέρους ταλαντώσεων είναι: $x_1 = A_1 ημωt$ (S.I.) και $x_2 = A_2 ημ(ωt + φ)$ (S.I.) με $A_1 = A_2$, τότε η αρχική φάση $φ$, ώστε η σύνθετη ταλάντωση να έχει πλάτος $A = A_1 = A_2$ είναι:

α) $φ = 0$.

β) $φ = \frac{2π}{3}$.

γ) $φ = \frac{π}{2}$.

Επιλέξτε την σωστή απάντηση και αιτιολογήστε.

<u>Λύση</u>

Το πλάτος της σύνθετης ταλάντωσης υπολογίζεται από τη σχέση:

$A = \sqrt{A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2συνφ}$. Όμως $A = A_1 = A_2$.

$A = \sqrt{A^2 + A^2 + 2A^2συνφ} \Rightarrow A^2 = 2A^2 + 2A^2συνφ \Rightarrow -A^2 = 2A^2συνφ \Rightarrow συνφ = -\frac{1}{2}$. Άρα

$φ = \frac{2π}{3}$ και $φ = \frac{4π}{3}$. Η δεύτερη λύση δεν περιλαμβάνεται στις επιλογές.

Επομένως σωστό ειναι το β.

Ερώτηση 8.

Ένας παρατηρητής ακούει τον ήχο από δύο διαπασών που λειτουργούν ταυτόχρονα και παράγουν ήχους με συχνότητες $f_1 = 1000\ \mathrm{Hz}$ και f_2. Ο παρατηρητής αντιλαμβάνεται τα παραγόμενα διακροτήματα να έχουν περίοδο $0,25\ \mathrm{s}$. Παρατηρούμε ότι αν αυξηθεί η συχνότητα f_2 του δεύτερου διαπασών κατά $2\ \mathrm{Hz}$ τότε ο χρόνος μεταξύ δύο διαδοχικών μηδενισμών της έντασης του ήχου αυξάνεται. Η συχνότητα f_2 του δεύτερου διαπασών είναι:

α) $4\ \mathrm{Hz}$.

β) $1004\ \mathrm{Hz}$.

γ) $996\ \mathrm{Hz}$.

Επιλέξτε τη σωστή απάντηση και δικαιολογήστε.

<u>Λύση</u>

Η συχνότητα του διακροτήματος είναι:

$$f_\delta = \frac{1}{T_\delta} = \frac{1}{0,25} = 4\ \mathrm{Hz}.$$

Για την f_δ ισχύει:

$$f_\delta = |f_1 - f_2| \Rightarrow 4 = |1000 - f_2|.$$

Άρα

$$1000 - f_2 = 4 \Rightarrow f_2 = 996\ \mathrm{Hz}$$

ή

$$1000 - f_2 = -4 \Rightarrow f_2 = 1004\ \mathrm{Hz}$$

Από τη σχέση $T_\delta = \dfrac{1}{|f_1 - f_2|}$ προκύπτει ότι η περίοδος του διακροτήματος αυξάνεται αν μειωθεί η διαφορά $f_1 - f_2$. Έτσι, αύξηση της f_2 κατά $2\ \mathrm{Hz}$ οδηγεί σε αύξηση της περιόδου του διακροτήματος μόνο αν $f_2 = 996\ \mathrm{Hz}$. Άρα σωστό είναι το γ.

ΘΕΜΑ Γ

Άσκηση 1.

Ένα σώμα μάζας $250g$ εκτελεί κίνηση που προέρχεται από τη σύνθεση δύο απλών αρμονικών ταλαντώσεων, ίδιας διεύθυνσης, γύρω από το ίδιο σημείο, με εξισώσεις $x_1 = 0,08\eta\mu(4\pi t)$ και $x_2 = 0,08\sqrt{3}\eta\mu 4(\pi t + \frac{\pi}{2})$ (όλα τα μεγέθη στο S.I.).

α) Να υπολογισθεί το πλάτος Α της συνισταμένης ταλάντωσης που εκτελεί το σώμα.

β) Να γραφεί η εξίσωση της απομάκρυνσης της ταλάντωσης που εκτελεί το σώμα.

γ) Να βρεθεί η δύναμη επαναφοράς τη στιγμή που το σώμα περνά από τη θέση $x = 0,1m$.

δ) Να υπολογισθεί ο λόγος της κινητικής προς τη δυναμική ενέργεια της ταλάντωσης του υλικού σημείου τη στιγμή που περνά από τη θέση $x = 0,08m$.

Δίνεται: $\pi^2 \simeq 10$

Λύση

α) Η διαφορά φάσης των δύο ταλαντώσεων είναι $\varphi = \varphi_2 - \varphi_1 = \left(4\pi t + \frac{\pi}{2}\right) - 4\pi t = \frac{\pi}{2}$ και

τα πλάτη είναι $A_1 = 0,08m$ και $A_2 = 0,08\sqrt{3}m$ αντίστοιχα.

Εφόσον η συχνότητα των δύο Α.Α.Τ. είναι ίδια (αφού έχουν την ίδια γωνιακή συχνότητα $\omega = 4\pi\ rad/s$), το σώμα θα εκτελέσει μια νέα ταλάντωση που το πλάτος της δίνεται από τον τύπο:

$$A = \sqrt{A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2\sigma\upsilon\nu\varphi} \xrightarrow{\varphi=\frac{\pi}{2}} A = \sqrt{A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2\sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{2}} \Rightarrow A = \sqrt{A_1^2 + A_2^2}$$

Αντικαθιστώντας τα πλάτη έχουμε:

$$A = \sqrt{(0,08m)^2 + \left(0,08\sqrt{3}m\right)^2} \Rightarrow A = \sqrt{(0,08m)^2 + 3\cdot\left(0,08m\right)^2} \Rightarrow A = \sqrt{4\cdot\left(0,08m\right)^2} \Rightarrow$$

$$A = 2\cdot\left(0,08m\right) \Rightarrow A = 0,16m$$

β) Αρχικά υπολογίζουμε τη διαφορά φάσης της σύνθετης Α.Α.Τ. με την πρώτη επιμέρους ταλάντωση (πού έχει μικρότερη φάση από τη δεύτερη), δηλαδή τη γωνία θ, από τον

τύπο: $\varepsilon\varphi\theta = \dfrac{A_2\eta\mu\frac{\pi}{2}}{A_1 + A_2\sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{2}}$ οπότε με αντικατάσταση προκύπτει:

$$\varepsilon\varphi\theta = \frac{0,08\sqrt{3}\eta\mu 90^o}{0,08 + 0,08\sqrt{3}\sigma\upsilon\nu 90^o} \Rightarrow \varepsilon\varphi\theta = \frac{0,08\sqrt{3}}{0,08} \Rightarrow \varepsilon\varphi\theta = \sqrt{3} \Rightarrow \theta = \frac{\pi}{3} rad$$

Η φάση της σύνθετης Α.Α.Τ. είναι $\varphi' = \varphi_1 + \theta \Rightarrow \varphi' = 4\pi t + \frac{\pi}{3}$ (S.I.)

Η εξίσωση της απομάκρυνσης της σύνθετης Α.Α.Τ. δίνεται από τον τύπο:

$x = A\eta\mu\varphi' \Rightarrow x = 0,16\eta\mu\left(4\pi t + \frac{\pi}{3}\right)$ (S.I.) (1)

γ) Η σταθερά ταλάντωσης δίνεται από τον τύπο:

$$D = m\omega^2 \Rightarrow D = 0,25Kg \cdot (4\pi s^{-1})^2 \Rightarrow D = 0,25Kg \cdot 16\pi^2 s^{-2} \xrightarrow{\pi^2 \simeq 10} D = 40Kg \cdot s^{-2}$$

Η δύναμη επαναφοράς δίνεται από τον τύπο:

$$F_{\varepsilon\pi} = -Dx \Rightarrow F_{\varepsilon\pi} = -40Kg \cdot s^{-2} \cdot 0,1m \Rightarrow F_{\varepsilon\pi} = -4N$$

δ) $\frac{K}{U} = \frac{E_{o\lambda} - U}{U} = \frac{E_{o\lambda}}{U} - 1 = \frac{\frac{1}{2}DA^2}{\frac{1}{2}Dx^2} - 1 = \frac{A^2}{x^2} - 1 = \frac{0,16^2}{0,08^2} - 1 = \left(\frac{0,16}{0,08}\right)^2 - 1 = 2^2 - 1 = 3$

Άσκηση 2.

Υλικό σημείο Σ εκτελεί κίνηση που προέρχεται από τη σύνθεση δύο απλών αρμονικών ταλαντώσεων, οι οποίες γίνονται στην ίδια διεύθυνση και γύρω από την ίδια θέση ισορροπίας. Οι ταλαντώσεις περιγράφονται από τις εξισώσεις:

$x_1 = 2\eta\mu 10t$ και $x_2 = 2\eta\mu\left(10t + \frac{\pi}{3}\right)$, ($x_1$ και x_2 σε cm, t σε s)

α) Να υπολογισθεί το πλάτος Α της συνισταμένης απλής αρμονικής ταλάντωσης που εκτελεί το Σ.

β) Να βρεθεί η εξίσωση της απομάκρυνσης της ταλάντωσης που εκτελεί το Σ.

γ) Να γραφεί η εξίσωση της ταχύτητας ταλάντωσης του Σ.

δ) Να υπολογισθεί η αλγεβρική τιμή της ταχύτητας τη χρονική στιγμή $t = \frac{\pi}{15}s$ μετά από τη στιγμή $t = 0$.

Λύση

α) Η διαφορά φάσης των δύο ταλαντώσεων είναι $\varphi = \varphi_2 - \varphi_1 = \frac{\pi}{3}$ και τα πλάτη είναι:

$A_1 = 2cm$ και $A_2 = 2cm$

Εφόσον η συχνότητα των δύο Α.Α.Τ. είναι ίδια (αφού έχουν την ίδια γωνιακή συχνότητα $\omega = 10\ rad/s$), το σώμα θα εκτελέσει μια νέα ταλάντωση που το πλάτος της δίνεται από τον τύπο: $A = \sqrt{A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2\sigma\upsilon\nu\varphi}$

Αντικαθιστώντας έχουμε:

$$A = \sqrt{(2cm)^2 + (2cm)^2 + 2\cdot 2cm\cdot 2cm\cdot \sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{3}} \Rightarrow A = \sqrt{(2cm)^2 + (2cm)^2 + 2\cdot(2cm)^2\frac{1}{2}} \Rightarrow$$

$$A = \sqrt{3(2cm)^2} \Rightarrow A = 2\sqrt{3}cm$$

β) Αρχικά υπολογίζουμε τη διαφορά φάσης της σύνθετης Α.Α.Τ. με την πρώτη επιμέρους ταλάντωση (που έχει μικρότερη φάση από τη δεύτερη), δηλαδή τη γωνία θ, από τον τύπο: $\varepsilon\varphi\theta = \frac{A_2\eta\mu\varphi}{A_1 + A_2\sigma\upsilon\nu\varphi}$, οπότε με αντικατάσταση προκύπτει:

$$\varepsilon\varphi\theta = \frac{2\eta\mu\frac{\pi}{3}}{2 + 2\sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{3}} \Rightarrow \varepsilon\varphi\theta = \frac{2\frac{\sqrt{3}}{2}}{2 + 2\frac{1}{2}} \Rightarrow \varepsilon\varphi\theta = \frac{\sqrt{3}}{3} \Rightarrow \theta = \frac{\pi}{6}rad$$

Η φάση της σύνθετης Α.Α.Τ. είναι $\varphi' = \varphi_1 + \theta \Rightarrow \varphi' = 10t + \frac{\pi}{6}$ (S.I.)

Η εξίσωση της απομάκρυνσης της σύνθετης Α.Α.Τ. δίνεται από τον τύπο:

$x = A\eta\mu\varphi' \Rightarrow x = 2\sqrt{3}\eta\mu(10t + \frac{\pi}{6})$ (x σε cm, t σε s)

γ) Η εξίσωση της ταχύτητας ταλάντωσης του Σ δίνεται από τον τύπο:
$\upsilon = \omega A\sigma\upsilon\nu\varphi' \Rightarrow \upsilon = \omega A\sigma\upsilon\nu(\omega t + \varphi_1 + \theta)$

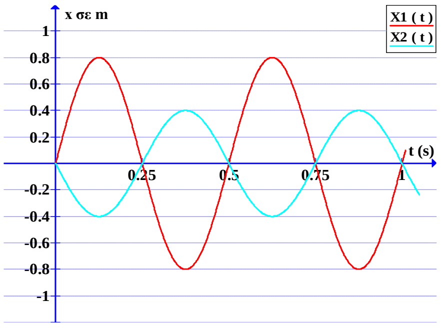
Άρα $\upsilon = 10 \cdot 2\sqrt{3}\,\sigma\upsilon\nu\left(10t + \frac{\pi}{6}\right) \Rightarrow \upsilon = 20\sqrt{3}\,\sigma\upsilon\nu\left(10t + \frac{\pi}{6}\right)$ (υ σε cm/s και t σε s)

δ) Με αντικατάσταση του χρόνου t = π/15 s στην παραπάνω εξίσωση βρίσκουμε:
$\upsilon = 20\sqrt{3}\,\sigma\upsilon\nu\left(10\frac{\pi}{15} + \frac{\pi}{6}\right)\ \frac{cm}{s} \Rightarrow \upsilon = 20\sqrt{3}\,\sigma\upsilon\nu\left(\frac{2\pi}{3} + \frac{\pi}{6}\right)\ \frac{cm}{s} \Rightarrow$
$\upsilon = 20\sqrt{3}\,\sigma\upsilon\nu\left(\frac{5\pi}{6}\right)\ \frac{cm}{s} \Rightarrow$

$\upsilon = -20\sqrt{3}\,\sigma\upsilon\nu\left(\frac{\pi}{6}\right)\ \frac{cm}{s} \Rightarrow \upsilon = -20\sqrt{3}\,\frac{\sqrt{3}}{2}\ \frac{cm}{s} \Rightarrow \upsilon = -20\,\frac{3}{2}\ \frac{cm}{s} \Rightarrow \upsilon = -30\frac{cm}{s}$

Άσκηση 3.

Ένα σώμα μάζας $m = 0,1kg$ εκτελεί κίνηση που προέρχεται από τη σύνθεση δύο απλών αρμονικών ταλαντώσεων, ίδιας διεύθυνσης, γύρω από το ίδιο σημείο και οι απομακρύνσεις τους δίνονται από το παρακάτω διάγραμμα.



α) Να γραφεί η εξίσωση της απομάκρυνσης των δύο ταλαντώσεων.

β) Να γραφεί η εξίσωση της απομάκρυνσης της συνισταμένης ταλάντωσης και να παρασταθεί γραφικά στο ίδιο διάγραμμα με τις δύο επιμέρους ταλαντώσεις.

γ) Να υπολογισθεί η ενέργεια της συνισταμένης ταλάντωσης.

δ) Να βρεθεί η απομάκρυνση της σύνθετης ταλάντωσης, τη χρονική στιγμή που η κινητική ενέργεια γίνει τριπλάσια της δυναμικής, για πρώτη φορά.

Δίνεται: $\pi^2 \simeq 10$

Λύση

α) Από το παραπάνω διάγραμμα βλέπουμε ότι οι δύο Α.Α.Τ. έχουν πλάτη $A_1 = 0,8m$ και $A_2 = 0,4m$ αντίστοιχα, ενώ η περίοδός τους είναι ίδια και ίση με $T = 0,5s$. Η αρχική φάση της πρώτης ταλάντωσης είναι μηδέν, αφού τη χρονική στιγμή $t = 0$ η απομάκρυνση είναι $x = 0$ και στη συνέχεια γίνεται θετική. Η αρχική φάση της δεύτερης ταλάντωσης είναι $\pi\ rad$, αφού τη χρονική στιγμή $t = 0$ η απομάκρυνση είναι $x = 0$ και στη συνέχεια γίνεται αρνητική.

Η γωνιακή συχνότητα των δύο επιμέρους ταλαντώσεων δίνεται από τον τύπο:

$$\omega = \frac{2\pi}{T} \Rightarrow \omega = \frac{2\pi\ rad}{0,5s} \Rightarrow \omega = 4\pi \frac{rad}{s}$$

Άρα οι εξισώσεις των δύο ταλαντώσεων είναι:

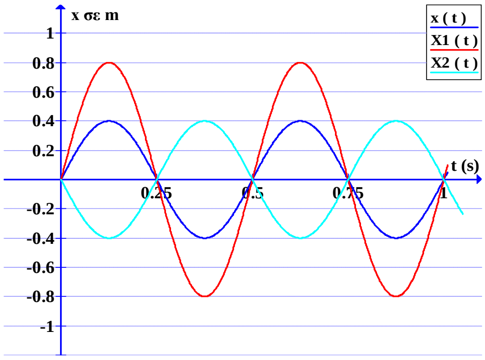
$x_1 = A_1 \eta\mu\omega t \Rightarrow x_1 = 0,8\eta\mu 4\pi t$ (S.I.) και

$x_2 = A_2 \eta\mu(\omega t + \pi) \Rightarrow x_2 = 0,4\eta\mu(4\pi t + \pi)$ (S.I.)

β) Εφόσον η συχνότητα των δύο Α.Α.Τ. είναι ίδια (αφού έχουν ίδια περίοδο) και η διαφορά φάσης τους είναι π rad, το σώμα θα εκτελέσει μια νέα Α.Α.Τ. που θα έχει την ίδια συχνότητα, πλάτος ίσο με τη διαφορά των πλατών και φάση ίση με τη φάση της ταλάντωσης που έχει το μεγαλύτερο πλάτος, δηλαδή της πρώτης για την οποία $\varphi_o = 0$. Άρα:

$$A = A_1 - A_2 = 0,8m - 0,4m = 0,4m\ .$$

Η εξίσωση απομάκρυνσης της σύνθετης ταλάντωσης είναι: $x = A\eta\mu\omega t \Rightarrow x = 0,4\eta\mu 4\pi t$ (S.I.)



γ) Η σταθερά D της σύνθετης ταλάντωσης είναι:

$$D = m\omega^2 \Rightarrow D = 0,1kg \cdot (4\pi \cdot s^{-1})^2 \Rightarrow D = 0,1kg \cdot 16\pi^2 \cdot s^{-2} \xrightarrow{\pi^2 \simeq 10} D = 16kg \cdot s^{-2}$$

και η ενέργεια είναι:

$$E = \tfrac{1}{2}DA^2 \Rightarrow E = \frac{1}{2}16kg \cdot s^{-2} \cdot (0,4m)^2 \Rightarrow E = 8kg \cdot s^{-2} \cdot 0,16m^2 \Rightarrow E = 1,28J$$

δ) Ισχύει $K = 3U$. Εφαρμόζουμε την Αρχή Διατήρησης της Ενέργειας:

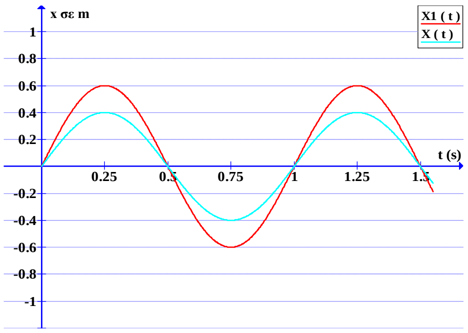
$$K + U = E \Rightarrow 3U + U = E \Rightarrow 4U = E \Rightarrow 4\frac{1}{2}Dx^2 = \frac{1}{2}DA^2 \Rightarrow 4x^2 = A^2 \Rightarrow x = \pm\frac{A}{2} \Rightarrow$$

$$x = \pm\frac{0,4m}{2} \Rightarrow x = \pm 0,2m$$

Όπως φαίνεται και στο διάγραμμα, επειδή θέλουμε την πρώτη φορά που συμβαίνει αυτό, κρατάμε μόνο τη θετική τιμή, δηλαδή $x = 0,2m$.

Άσκηση 4.

Ένα σώμα μάζας $m = 0,2kg$ εκτελεί κίνηση που προέρχεται από τη σύνθεση δύο απλών αρμονικών ταλαντώσεων, ίδιας διεύθυνσης, γύρω από το ίδιο σημείο. Στο παρακάτω διάγραμμα, φαίνεται η γραφική παράσταση της απομάκρυνσης της πρώτης ταλάντωσης $x_1(t)$ και της συνισταμένης ταλάντωσης $x(t)$.



α) Να υπολογισθεί η σταθερά της συνισταμένης ταλάντωσης.

β) Να γραφεί η εξίσωση της απομάκρυνσης της πρώτης και της συνισταμένης ταλάντωσης.

γ) Να γραφεί η εξίσωση της απομάκρυνσης της δεύτερης ταλάντωσης και να παρασταθεί γραφικά στο ίδιο διάγραμμα.

δ) Να βρεθεί η κινητική ενέργεια του σώματος τη χρονική στιγμή $t = \frac{1}{8}s$.

Δίνεται: $\pi^2 \simeq 10$

Λύση

α) Όπως φαίνεται στο διάγραμμα και η πρώτη ταλάντωση και η συνισταμένη έχουν ίδια περίοδο T=1s. Οπότε η γωνιακή τους συχνότητα είναι:

$$\omega = \frac{2\pi}{T} \Rightarrow \omega = \frac{2\pi\ rad}{1s} \Rightarrow \omega = 2\pi\frac{rad}{s}$$

Η σταθερά D της συνισταμένης ταλάντωσης είναι:

$$D = m\omega^2 \Rightarrow D = 0,2kg \cdot (2\pi \cdot s^{-1})^2 \Rightarrow D = 0,2kg \cdot 4\pi^2 \cdot s^{-2} \xrightarrow{\pi^2 \simeq 10} D = 8kg \cdot s^{-2}$$

β) Η αρχική φάση της πρώτης ταλάντωσης είναι μηδέν, αφού τη χρονική στιγμή t=0 η απομάκρυνση είναι x=0 και στη συνέχεια γίνεται θετική. Για τον ίδιο λόγο και η συνισταμένη ταλάντωση έχει αρχική φάση ίση με μηδέν.

Οι εξισώσεις της απομάκρυνσης τους είναι:

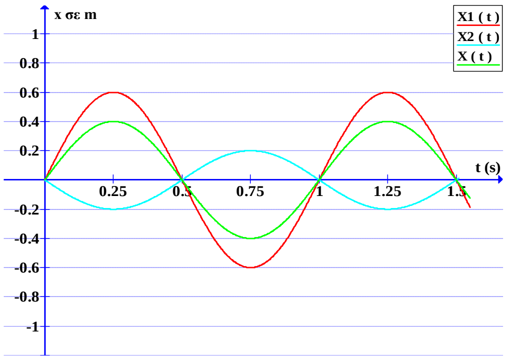
$x_1 = A_1 ημωt \Rightarrow x_1 = 0,6ημ2πt$ (S.I.) και

$x = Aημωt \Rightarrow x = 0,4ημ2πt$ (S.I.)

γ) Ισχύει $x = x_1 + x_2 \Rightarrow x_2 = x - x_1 \Rightarrow x_2 = 0,4ημ2πt - 0,6ημ2πt \Rightarrow x_2 = -0,2ημ2πt$ (S.I.)

<u>Σημείωση:</u> Γνωρίζουμε από τα Μαθηματικά ότι: $-ημφ = ημ(φ+π)$. Άρα η εξίσωση της απομάκρυνσης της δεύτερης ταλάντωσης γράφεται τελικά:

$x_2 = 0,2ημ(2πt + π)$ (S.I.)



δ) Η εξίσωση της ταχύτητας της συνισταμένης ταλάντωσης είναι:
$υ = ωAσυνωt \Rightarrow υ = 2π \cdot 0,4συν2πt \Rightarrow υ = 0,8π \cdot συν2πt$ (S.I.)

Τη χρονική στιγμή $t = \frac{1}{8}s$ το σώμα έχει ταχύτητα:

$$υ = 0,8π \cdot συν2πt \text{ (S.I.)} \xrightarrow{t=\frac{1}{8}s} υ = 0,8π \cdot συν2π \cdot \frac{1}{8} \text{ (S.I.)} \Rightarrow υ = 0,8π \cdot συν\frac{π}{4} \text{ (S.I.)} \Rightarrow$$

$$υ = 0,8π\frac{\sqrt{2}}{2}\frac{m}{s} \Rightarrow υ = 0,4\sqrt{2}π\frac{m}{s}$$

Η κινητική ενέργεια του σώματος είναι:

$$K = \frac{1}{2}mυ^2 \Rightarrow K = \frac{1}{2}0,2kg \cdot \left(0,4\sqrt{2}π\frac{m}{s}\right)^2 \Rightarrow K = 0,1 \cdot 0,16 \cdot 2 \cdot π^2 J \xrightarrow{π^2 \simeq 10} K = 0,32J$$

Άσκηση 5.

Ένα διαπασών παράγει ήχο συχνότητας $f_1 = 1001\text{Hz}$. Αν φέρουμε πολύ κοντά ένα δεύτερο διαπασών, περίπου ίδιο με το πρώτο, παράγεται και ένας δεύτερος ήχος συχνότητας f_2 που είναι λίγο μικρότερη από την πρώτη. Ο σύνθετος ήχος που ακούει τότε ένας παρατηρητής έχει συχνότητα $f = 1000\text{Hz}$. Να υπολογισθεί:

α) η συχνότητα f_2.

β) η συχνότητα μεταβολής του πλάτους της σύνθετης κίνησης.

γ) πόσες φορές μηδενίζεται η ένταση του ήχου που ακούει ο παρατηρητής σε χρόνο $\Delta t = 2\text{s}$.

δ) Ένα μόριο του αέρα ταλαντώνεται εξαιτίας του ήχου που παράγουν τα διαπασών. Να υπολογισθεί πόσες φορές περνά από τη θέση ισορροπίας του σε χρόνο ίσο με τη περίοδο των διακροτημάτων.

<u>Λύση</u>

α) Η γωνιακή συχνότητα του σύνθετου ήχου είναι:

$$\omega = \frac{\omega_1 + \omega_2}{2} \Rightarrow \omega_1 + \omega_2 = 2\omega \Rightarrow \omega_2 = 2\omega - \omega_1 \Rightarrow 2\pi f_2 = 2 \cdot 2\pi f - 2\pi f_1 \Rightarrow f_2 = 2f - f_1 \Rightarrow$$

$$f_2 = 2 \cdot 1000\text{Hz} - 1001\text{Hz} \Rightarrow f_2 = 999\text{Hz}$$

β) Η συχνότητα μεταβολής του πλάτους της σύνθετης κίνησης είναι:

$$f_\Delta = |f_1 - f_2| \Rightarrow f_\Delta = |1001\text{Hz} - 999\text{Hz}| \Rightarrow f_\Delta = 2\text{Hz}$$

γ) Η περίοδος του διακροτήματος είναι:

$$T_\Delta = \frac{1}{|f_1 - f_2|} \Rightarrow T_\Delta = \frac{1}{|1001\text{Hz} - 999\text{Hz}|} \Rightarrow T_\Delta = \frac{1}{2\text{Hz}} \Rightarrow T_\Delta = 0,5\text{s}$$

Εφόσον η ένταση του ήχου μηδενίζεται κάθε $T_\Delta = 0,5\text{s}$, σε χρόνο $\Delta t = 2\text{s}$ θα μηδενιστεί $\frac{\Delta t}{T_\Delta} = \frac{2\text{s}}{0,5\text{s}} = 4$ φορές.

δ) Η περίοδος της σύνθετης ταλάντωσης του μορίου του αέρα είναι:

$$T = \frac{1}{f} \Rightarrow T = \frac{1}{1000\text{Hz}} \Rightarrow T = 10^{-3}\text{s}$$

Άρα σε χρόνο T_Δ κάνει $\frac{T_\Delta}{T} = \frac{0,5s}{10^{-3}s} = 500$ ταλαντώσεις, δηλαδή περνά 1000 φορές από τη θέση ισορροπίας του (δύο σε κάθε ταλάντωση).

Άσκηση 6.

Σώμα μάζας $m = 0,5\,kg$ εκτελεί ταυτοχρόνως δύο Α.Α.Τ. της ίδιας συχνότητας που γίνονται γύρω από το ίδιο σημείο και στην ίδια διεύθυνση. Οι δύο Α.Α.Τ. περιγράφονται από τις εξισώσεις: $x_1 = 0,5 \cdot ημ20\pi t$ (S.I.)

$x_2 = 0,7 \cdot ημ(20\pi t + \pi)$ (S. I.)

α) Να βρεθεί η εξίσωση της απομάκρυνσης και της ταχύτητας σε σχέση με το χρόνο για τη σύνθετη ταλάντωση.

β) Να υπολογιστεί η περίοδος της σύνθετης ταλάντωσης.

γ) Να υπολογιστεί το πλάτος της δύναμης επαναφοράς για τη σύνθετη ταλάντωση.

δ) Να υπολογιστεί η ταχύτητα του σώματος όταν η απομάκρυνσή του είναι $x = 0,1\,m$.

Δίνεται $\pi^2 = 10$.

Λύση

α) Οι επιμέρους Α.Α.Τ. έχουν την ίδια γωνιακή συχνότητα $\omega_1 = \omega_2 = \omega = 20\pi\, rad/s$ που είναι και η γωνιακή συχνότητα ω της σύνθετης ταλάντωσης. Η διαφορά φάσης των δύο Α.Α.Τ. είναι $\phi = \pi$ και επομένως η σύνθετη ταλάντωση έχει πλάτος $A = |A_1 - A_2| = 0,2\,m$ και παίρνει τη φάση της ταλάντωσης με το μεγαλύτερο πλάτος.

Άρα $x = Aημ(\omega t + \pi)$

$x = 0,2ημ(20\pi t + \pi)$ (S. I.)

Για την ταχύτητα ισχύει:

$u = u_{max} \cdot συν(\omega t + \pi)$, όπου $u_{max} = \omega \cdot A = 20\pi \frac{rad}{s} \cdot 0,2m = 4\pi \frac{m}{s}$.

Άρα $u = 4\pi \cdot συν(20\pi t + \pi)$ (S. I.)

β) Η περίοδος της σύνθετης ταλάντωσης υπολογίζεται από τη σχέση:

$$\omega = \frac{2\pi}{T} \Rightarrow T = \frac{2\pi}{\omega}$$

$$T = \frac{2\pi}{20\pi} \Rightarrow T = 0,1\,s.$$

γ) Το πλάτος της δύναμης επαναφοράς είναι:

$$F_{MAX} = m \cdot a_{MAX} \Rightarrow F_{MAX} = m \cdot \omega^2 \cdot A$$

$$F_{MAX} = 0,5m \cdot \left(20\pi \frac{rad}{s}\right)^2 \cdot 0,2m \Rightarrow F_{MAX} = 400\ N\ .$$

δ) Από την Αρχή Διατήρησης της Ενέργειας για τη σύνθετη ταλάντωση προκύπτει:

$$\frac{1}{2}DA^2 = \frac{1}{2}mu^2 + \frac{1}{2}Dx^2 \Rightarrow m\omega^2 A^2 = mu^2 + m\omega^2 x^2 \Rightarrow \omega^2 A^2 = u^2 + \omega^2 x^2 \Rightarrow$$

$$u^2 = \omega^2 A^2 - \omega^2 x^2 \Rightarrow u^2 = \omega^2 \left(A^2 - x^2\right) \Rightarrow u = \pm\omega\sqrt{A^2 - x^2}$$

$$u = \pm 20\pi \frac{rad}{s}\sqrt{(0,2m)^2 - (0,1m)^2} \Rightarrow u = \pm 20\pi\sqrt{0,03}\frac{m}{s} \Rightarrow u = \pm 20\pi\sqrt{3 \cdot 10^{-2}}\frac{m}{s} \Rightarrow$$

$$u = \pm 2\pi\sqrt{3}\ \frac{m}{s}$$

Άσκηση 7.

Σώμα εκτελεί ταυτόχρονα δύο Α.Α.Τ. της ίδιας διεύθυνσης, που γίνονται γύρω από το ίδιο σημείο, με το ίδιο πλάτος και συχνότητες που διαφέρουν πολύ λίγο. Οι επιμέρους ταλαντώσεις περιγράφονται από τις εξισώσεις $x_1 = 0,2\eta\mu 100\pi t$ (S. I.) και $x_2 = 0,2\eta\mu 102\pi t$ (S. I.).

α) Να γραφεί η εξίσωση της απομάκρυνσης σε σχέση με το χρόνο για τη σύνθετη ταλάντωση.

β) Να υπολογιστεί η χρονική στιγμή που μηδενίζεται το πλάτος για πρώτη φορά.

γ) Να υπολογιστεί ο χρόνος ανάμεσα σε δύο διαδοχικούς μηδενισμούς του πλάτους.

<u>Λύση</u>

α) Η σύνθετη ταλάντωση είναι μία περιοδική κίνηση, η οποία παρουσιάζει διακροτήματα. Από τις επιμέρους ταλαντώσεις προκύπτει: $A = 0,2\ m$, $\omega_1 = 100\pi\ rad/s$, $\omega_2 = 102\pi\ rad/s$. Η εξίσωση της απομάκρυνσης σε σχέση με το χρόνο για τη σύνθετη ταλάντωση είναι:

$$x = 2A\sigma\upsilon\nu\left(\frac{\omega_2-\omega_1}{2}t\right)\cdot\eta\mu\left(\frac{\omega_2+\omega_1}{2}t\right)$$

$$x = 0,4\sigma\upsilon\nu(\pi t)\cdot\eta\mu(101\pi t) \text{ (S. I.)}$$

β) Το πλάτος μηδενίζεται όταν:

$$A' = 0$$

$$2A\cdot\sigma\upsilon\nu\left(\frac{\omega_2-\omega_1}{2}\right)t = 0 \Rightarrow \frac{\omega_2-\omega_1}{2}t = (2\kappa+1)\frac{\pi}{2}$$

. Για πρώτη φορά μηδενίζεται όταν $\kappa = 0$

.

$$(\omega_2-\omega_1)t = \pi \Rightarrow t = \frac{\pi}{\omega_2-\omega_1}$$

$$t = \frac{\pi}{2\pi} = 0,5\ s$$

γ) Ο χρόνος ανάμεσα σε δύο διαδοχικούς μηδενισμούς του πλάτους είναι η περίοδος του διακροτήματος.

$$T_\delta = \frac{1}{|f_1 - f_2|} \Rightarrow T_\delta = \frac{1}{\left|\frac{\omega_1}{2\pi} - \frac{\omega_2}{2\pi}\right|}$$

$$T_\delta = \frac{1}{|50 - 51|} \Rightarrow T_\delta = 1\,s$$

ΘΕΜΑ Δ

Πρόβλημα 1.

Ένα σώμα μάζας $m = 200g$ εκτελεί κίνηση που προέρχεται από τη σύνθεση δύο απλών αρμονικών ταλαντώσεων, ίδιας διεύθυνσης, ίδιας συχνότητας, ίδιου πλάτους A και γύρω από το ίδιο σημείο. Η πρώτη ταλάντωση έχει αρχική φάση μηδέν και υστερεί φασικά από τη δεύτερη κατά φ, με $\varphi < \pi\ rad$. Η συνισταμένη κίνηση που προκύπτει έχει το ίδιο πλάτος A με κάθε μια από τις επιμέρους ταλαντώσεις. Η κάθε μια ταλάντωση έχει ενέργεια $0,1J$, ενώ η δύναμη επαναφοράς έχει μέγιστη τιμή 2N.

α) Να υπολογισθεί η διαφορά φάσης της:

α1) δεύτερης ταλάντωσης με την πρώτη και

α2) της σύνθετης ταλάντωσης με την πρώτη.

β) Να γραφούν οι εξισώσεις της απομάκρυνσης των δύο αρχικών ταλαντώσεων.

γ) Να γραφεί η εξίσωση της επιτάχυνσης – χρόνου για την συνισταμένη ταλάντωση.

δ) Να υπολογισθεί το μέτρο της ταχύτητας ταλάντωσης του σώματος τη στιγμή που η δυναμική ενέργεια του σώματος είναι τριπλάσια της κινητικής.

<u>Λύση</u>

α1) Έστω φ η διαφορά φάσης των δύο ταλαντώσεων. Το πλάτος της συνισταμένης ταλάντωσης δίνεται από τον τύπο:

$$A = \sqrt{A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2\sigma\upsilon\nu\varphi} \xrightarrow{A_1=A_2=A} A = \sqrt{A^2 + A^2 + 2A\cdot A\cdot\sigma\upsilon\nu\varphi} \Rightarrow A^2 = 2A^2 + 2A^2\sigma\upsilon\nu\varphi \Rightarrow$$

$$2A^2\sigma\upsilon\nu\varphi = -A^2 \Rightarrow \sigma\upsilon\nu = -\frac{1}{2} \Rightarrow \varphi = \pi - \frac{\pi}{3} \Rightarrow \varphi = \frac{2\pi}{3}$$

α2) Η αρχική φάση θ της σύνθετης ταλάντωσης, βρίσκεται από τον τύπο:

$\varepsilon\varphi\theta = \dfrac{A_2\eta\mu\varphi}{A_1 + A_2\sigma\upsilon\nu\varphi}$, οπότε με αντικατάσταση προκύπτει:

$$\varepsilon\varphi\theta = \frac{A\eta\mu\frac{2\pi}{3}}{A + A\sigma\upsilon\nu\frac{2\pi}{3}} \Rightarrow \varepsilon\varphi\theta = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{1-\frac{1}{2}} \Rightarrow \varepsilon\varphi\theta = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{1}{2}} \Rightarrow \varepsilon\varphi\theta = \sqrt{3} \Rightarrow \theta = \frac{\pi}{3}rad$$

β) Εφόσον οι δύο ταλαντώσεις έχουν την ίδια συχνότητα και η συνισταμένη ταλάντωση θα έχει την ίδια συχνότητα. Άρα κάθε ταλάντωση θα έχει την ίδια σταθερά D, αφού $D = m\omega^2$.

Ισχύει: $\left.\begin{matrix} E = \frac{1}{2}DA^2 \\ F_{\varepsilon\pi,max} = DA \end{matrix}\right\} \Rightarrow \dfrac{E}{F_{\varepsilon\pi,max}} = \dfrac{1}{2}A \Rightarrow A = \dfrac{2E}{F_{\varepsilon\pi,max}} \Rightarrow A = \dfrac{2\cdot 0,1J}{2N} \Rightarrow A = 0,1m$

Η σταθερά ταλάντωσης θα υπολογιστεί από τον τύπο:

$$F_{\varepsilon\pi,\max} = DA \Rightarrow D = \frac{F_{\varepsilon\pi,\max}}{A} \Rightarrow D = \frac{2N}{0,1m} \Rightarrow D = 20\frac{N}{m}$$

Η γωνιακή συχνότητα είναι: $\omega = \sqrt{\frac{D}{m}} \Rightarrow \omega = \sqrt{\frac{20N/m}{0,2kg}} \Rightarrow \omega = 10\frac{rad}{s}$

Άρα οι εξισώσεις απομάκρυνσης των δύο αρχικών ταλαντώσεων είναι:

$x_1 = A\eta\mu\omega t \Rightarrow x_1 = 0,1\eta\mu 10t$ (S.I.) και

$$x_2 = A\eta\mu\left(\omega t + \frac{2\pi}{3}\right) \Rightarrow x_2 = 0,1\eta\mu\left(10t + \frac{2\pi}{3}\right) \text{ (S.I.)}$$

γ) Η εξίσωση της επιτάχυνσης – χρόνου για την συνισταμένη ταλάντωση είναι:

$$\alpha = -\omega^2 x \Rightarrow \alpha = -\omega^2 A\eta\mu\left(\omega t + \theta\right) \Rightarrow \alpha = -100 \cdot 0,1\eta\mu\left(10t + \frac{\pi}{3}\right) \text{ (S.I.)} \Rightarrow$$

$$\alpha = -10\eta\mu\left(10t + \frac{\pi}{3}\right) \text{ (S.I.)}$$

δ) Η ταχύτητα ταλάντωσης για τη συγκεκριμένη χρονική στιγμή που ισχύει $U = 3K$, θα υπολογιστεί από την αρχή διατήρησης της ενέργειας:

$$E = K + U \xrightarrow{U=3K} E = 4K \Rightarrow \frac{1}{2}DA^2 = 4\frac{1}{2}m\upsilon^2 \Rightarrow |\upsilon| = A\sqrt{\frac{D}{4m}} \Rightarrow$$

$$|\upsilon| = 0,1m\sqrt{\frac{20N/m}{4 \cdot 0,2kg}} \Rightarrow |\upsilon| = 0,5\frac{m}{s}$$

Πρόβλημα 2.

Ένα σώμα μάζας $m = 100g$ εκτελεί κίνηση που προέρχεται από τη σύνθεση δύο απλών αρμονικών ταλαντώσεων, ίδιας διεύθυνσης, ίδιας συχνότητας και γύρω από το ίδιο σημείο. Η δεύτερη ταλάντωση έχει τριπλάσιο πλάτος από την πρώτη και η φάση της προηγείται κατά γωνία $\varphi = 60^0$. Η πρώτη ταλάντωση έχει αρχική φάση μηδέν. Η συνισταμένη ταλάντωση έχει εξίσωση:

$x = 0,2\sqrt{13}\eta\mu(2\pi t + \theta)$ (S.I.).

α) Να υπολογισθεί η αρχική φάση θ της συνισταμένης ταλάντωσης.

β) Να γραφούν οι εξισώσεις της απομάκρυνσης των δύο αρχικών ταλαντώσεων.

γ) Να γραφεί η εξίσωση της ταχύτητας - χρόνου της συνισταμένης ταλάντωσης.

δ) Να υπολογισθεί ο ρυθμός μεταβολής της ορμής του σώματος όταν περνά από τη θέση $x = 0,2m$.

Να θεωρήσετε ότι: $\pi^2 \simeq 10$ και $0,6\sqrt{3} \simeq 1$.

<u>Λύση</u>

α) Η αρχική φάση θ της σύνθετης ταλάντωσης, θα υπολογισθεί από τον τύπο:

$$\varepsilon\varphi\theta = \frac{A_2\eta\mu\varphi}{A_1 + A_2\sigma\upsilon\nu\varphi} \quad (1)$$

Η διαφορά φάσης των δύο ταλαντώσεων είναι $\varphi = 60^o$ και $A_2 = 3A_1$. Εφόσον η συχνότητα των δύο Α.Α.Τ. είναι ίδια, το σώμα θα εκτελέσει μια νέα ταλάντωση που το πλάτος της δίνεται από τον τύπο:

$$A = \sqrt{A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2\sigma\upsilon\nu\varphi} \xrightarrow{A_2=3A_1,\varphi=60^o} A = \sqrt{A_1^2 + 9A_1^2 + 2A_1 \cdot 3A_1 \cdot \sigma\upsilon\nu 60^o} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow A = \sqrt{A_1^2 + 9A_1^2 + 2A_1 \cdot 3A_1 \cdot \frac{1}{2}} \Rightarrow A^2 = 13A_1^2 \Rightarrow A_1 = \frac{A}{\sqrt{13}} \xrightarrow{A=0,2\sqrt{13}m} A_1 = 0,2m$$

και επειδή $A_2 = 3A_1$ έχουμε $A_2 = 0,6m$.

οπότε με αντικατάσταση στον αρχικό τύπο (1) προκύπτει:

$$\varepsilon\varphi\theta = \frac{0,6 \cdot \eta\mu 60^o}{0,2 + 0,6 \cdot \sigma\upsilon\nu 60^o} \Rightarrow \varepsilon\varphi\theta = \frac{3\frac{\sqrt{3}}{2}}{1 + 3\frac{1}{2}} \Rightarrow \varepsilon\varphi\theta = \frac{3\frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{5}{2}} \Rightarrow \varepsilon\varphi\theta = 0,6\sqrt{3} \Rightarrow \varepsilon\varphi\theta \simeq 1,$$ οπότε

$\theta_1 \simeq \frac{\pi}{4}rad$ ή $\theta_2 \simeq \frac{5\pi}{4}rad$. Όμως, $\theta_2 > \varphi$, άρα απορρίπτεται. Επομένως $\theta \simeq \frac{\pi}{4}rad$.

β) Οι εξισώσεις απομάκρυνσης των δύο αρχικών ταλαντώσεων είναι:

$x_1 = A_1 ημωt \Rightarrow x_1 = 0,2ημ2πt$ (S.I.) και

$x_2 = A_2 ημ\left(ωt + φ\right) \Rightarrow x_2 = 0,6ημ\left(2πt + \frac{π}{3}\right)$ (S.I.)

γ) Η εξίσωση της ταχύτητας - χρόνου της συνισταμένης ταλάντωσης είναι:

$$υ = ωAσυν(ωt + θ) \Rightarrow υ = 2π \cdot 0,2\sqrt{13}συν\left(2πt + \frac{π}{4}\right) \text{ (S.I.)} \Rightarrow υ = 0,4π\sqrt{13}συν\left(2πt + \frac{π}{4}\right) \text{ (S.I.)}$$

δ) Η σταθερά D της συνισταμένης ταλάντωσης είναι:

$$D = mω^2 \Rightarrow D = 0,1kg \cdot (2π \cdot s^{-1})^2 \Rightarrow D = 0,1kg \cdot 4π^2 \cdot s^{-2} \xrightarrow{π^2 \simeq 10} D = 4kg \cdot s^{-2}$$

Ο ρυθμός μεταβολής της ορμής του σώματος όταν περνά από τη θέση x=0,2m είναι:

$$\frac{dP}{dt} = ΣF \Rightarrow \frac{dP}{dt} = -Dx \Rightarrow \frac{dP}{dt} = -4kg \cdot s^{-2} \cdot 0,2m \Rightarrow \frac{dP}{dt} = -0,8\frac{kg \cdot m \cdot s^{-1}}{s}$$

Πρόβλημα 3.

Ένα σώμα εκτελεί κίνηση που προέρχεται από τη σύνθεση δύο απλών αρμονικών ταλαντώσεων, ίδιας διεύθυνσης, γύρω από το ίδιο σημείο που περιγράφονται από τις εξισώσεις: $x_1 = A\eta\mu 199\pi t$ και $x_2 = A\eta\mu 201\pi t$ (S.I.). Η εξίσωση που περιγράφει την συνισταμένη ταλάντωση είναι:

$x = 0,04 \cdot \sigma\upsilon\nu 2\pi f_3 t \cdot \eta\mu 2\pi f_4 t$ (S.I.).

α) Να υπολογισθεί το πλάτος A και οι συχνότητες f_1 και f_2 των δύο επιμέρους Α.Α.Τ.

β) Τι εκφράζει το ημιάθροισμα των συχνοτήτων των επιμέρους Α.Α.Τ. και ποιά είναι η τιμή του;

γ) Να υπολογισθεί η περίοδος των διακροτημάτων T_Δ και ο αριθμός των ταλαντώσεων που εκτελεί το σώμα στο χρόνο αυτό.

δ) Να σχεδιάσετε ποιοτικά τη γραφική παράσταση της απομάκρυνσης της σύνθετης ταλάντωσης με το χρόνο.

<u>Λύση</u>

α) Η συνισταμένη ταλάντωση έχει μέγιστο πλάτος διπλάσιο (2Α) από το πλάτος (Α) της κάθε μιας από τις επιμέρους ταλαντώσεις, δηλαδή $2A = 0,04\text{m}$ οπότε $A = 0,02\text{m}$.

Οι γωνιακές συχνότητες είναι $\omega_1 = 199\pi \text{ rad/s}$ και $\omega_2 = 201\pi \text{ rad/s}$. Οπότε:

$$\omega_1 = 2\pi f_1 \Rightarrow f_1 = \frac{\omega_1}{2\pi} \Rightarrow f_1 = \frac{199\pi}{2\pi}\text{Hz} \Rightarrow f_1 = 99,5\text{Hz} \text{ και}$$
$$\omega_2 = 2\pi f_2 \Rightarrow f_2 = \frac{\omega_2}{2\pi} \Rightarrow f_2 = \frac{201\pi}{2\pi}\text{Hz} \Rightarrow f_2 = 100,5\text{Hz}$$

β) Το ημιάθροισμα των συχνοτήτων είναι η συχνότητα ταλάντωσης της συνισταμένης κίνησης.

$$\omega_3 = \frac{\omega_1 + \omega_2}{2} \Rightarrow 2\pi f_3 = \frac{2\pi f_1 + 2\pi f_2}{2} \Rightarrow f_3 = \frac{f_1 + f_2}{2} \Rightarrow f_3 = \frac{99,5\text{Hz} + 100,5\text{Hz}}{2} \Rightarrow f_3 = 100\text{Hz}$$

γ) Η περίοδος των διακροτημάτων είναι:

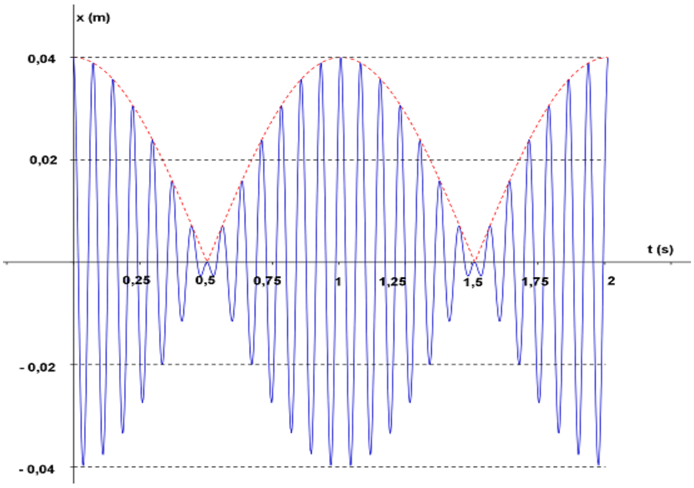
$$T_\Delta = \frac{1}{|f_1 - f_2|} \Rightarrow T_\Delta = \frac{1}{|99,5\text{Hz} - 100,5\text{Hz}|} \Rightarrow T_\Delta = \frac{1}{1\text{Hz}} \Rightarrow T_\Delta = 1\text{s}$$

Η περίοδος της σύνθετης ταλάντωσης είναι: $T_4 = \frac{1}{f_4} \Rightarrow T_4 = \frac{1}{100}\text{s}$

Άρα σε χρόνο T_Δ κάνει $\frac{T_\Delta}{T_4} = \frac{1s}{\frac{1}{100}s} = 100$ ταλαντώσεις.

δ) Το διάγραμμα θα γίνει με τα εξής δεδομένα: Τη χρονική στιγμή t=0 το πλάτος είναι μέγιστο και ίσο με 0,04m και για $t_1 = \frac{T_\Delta}{2} = 0,5s$ και $t_2 = t_1 + T_\Delta = 1,5s$ το πλάτος μηδενίζεται.

Η εξίσωση του πλάτους $A' = 0,04 \cdot συν|2\pi f_3 t| \Rightarrow A' = 0,04 \cdot |συν\pi t|$ (S.I.) παριστάνεται με διακεκομμένη γραμμή στο σχήμα.



Σημείωση: Ο ποιοτικός σχεδιασμός του παραπάνω διαγράμματος, αφορά στο πλήθος των ταλαντώσεων (κανονικά έπρεπε να είναι 100 ταλαντώσεις ανά δευτερόλεπτο).

Πρόβλημα 4.

Οι ήχοι που παράγονται από δύο ακίνητα διαπασών, έχουν την ίδια ένταση, βρίσκονται πολύ κοντά το ένα με το άλλο και έχουν συχνότητες $f_1 = 499Hz$ και $f_2 = 501Hz$, αντίστοιχα. Οι ήχοι αναγκάζουν το τύμπανο ενός αυτιού να ταλαντώνεται. Οι επιμέρους ταλαντώσεις που ενεργοποιούν το τύμπανο έχουν μηδενική αρχική φάση και ίδιο πλάτος Α.

α) Να υπολογισθεί η συχνότητα:

α1) των διακροτημάτων.

α2) μεταβολής του πλάτους της σύνθετης κίνησης.

α3) της σύνθετης κίνησης.

β) Να υπολογισθεί ο αριθμός των μεγιστοποιήσεων του πλάτους των διακροτημάτων σε χρόνο $20s$.

γ) Να υπολογισθεί ο αριθμός των ταλαντώσεων που εκτελεί το τύμπανο σε χρόνο 1 s.

δ) Να υπολογισθεί, σαν συνάρτηση του χρόνου, η διαφορά φάσης των δύο επιμέρους ταλαντώσεων που ενεργοποιούν το τύμπανο και να παρασταθεί γραφικά. Στο διάγραμμα να φαίνονται οι χρονικές στιγμές $\frac{T_\Delta}{2}$ και T_Δ (όπου T_Δ η περίοδος των διακροτημάτων). Να εξηγήσετε με τη βοήθεια της διαφοράς φάσης, γιατί στις στιγμές αυτές το πλάτος είναι μηδέν και μέγιστο αντίστοιχα.

<u>Λύση</u>

α1) Η συχνότητα των διακροτημάτων είναι:

$$f_\Delta = |f_1 - f_2| \Rightarrow f_\Delta = |499Hz - 501Hz| \Rightarrow f_\Delta = 2Hz$$

α2) Η συχνότητα μεταβολής του πλάτους της σύνθετης κίνησης ταυτίζεται με τη συχνότητα του διακροτήματος και είναι $2Hz$, όπως υπολογίστηκε προηγουμένως.

α3) Η γωνιακή συχνότητα της σύνθετης κίνησης είναι:

$$\omega = \frac{\omega_1 + \omega_2}{2} \Rightarrow 2\pi f = \frac{2\pi f_1 + 2\pi f_2}{2} \Rightarrow f = \frac{499Hz + 501Hz}{2} \Rightarrow f = 500Hz$$

β) Η περίοδος των διακροτημάτων είναι:

$$T_\Delta = \frac{1}{f_\Delta} \Rightarrow T_\Delta = \frac{1}{2} \Rightarrow T_\Delta = 0,5\text{s}$$

Εφόσον η ένταση του ήχου μηδενίζεται κάθε $T_\Delta = 0,5\text{s}$, σε χρόνο $\Delta t = 20\text{s}$ θα μηδενιστεί

$\frac{\Delta t}{T_\Delta} = \frac{20\text{s}}{0,5\text{s}} = 40$ φορές.

γ) Η περίοδος της σύνθετης ταλάντωσης που εκτελεί το τύμπανο είναι:

$$T = \frac{1}{f} \Rightarrow T = \frac{1}{500}\text{s}$$

Άρα σε χρόνο t=1s κάνει $\frac{t}{T} = \frac{1\text{s}}{\frac{1}{500}\text{s}} = 500$ ταλαντώσεις.

δ) Οι δύο ταλαντώσεις δεν έχουν αρχική φάση, άρα η φάση τους είναι:

$\varphi_1 = \omega_1 t \Rightarrow \varphi_1 = 2\pi f_1 t$ και $\varphi_2 = \omega_2 t \Rightarrow \varphi_2 = 2\pi f_2 t$

Άρα

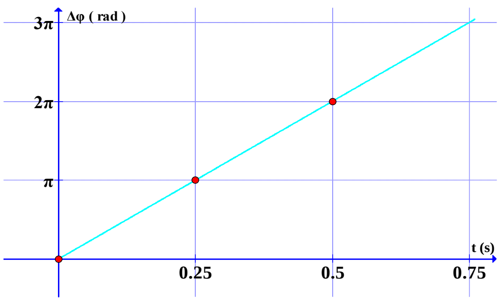
$$\Delta\varphi = \varphi_2 - \varphi_1 \Rightarrow \Delta\varphi = 2\pi f_2 t - 2\pi f_1 t \Rightarrow \Delta\varphi = 2\pi(f_2 - f_1)t \Rightarrow \Delta\varphi = 2\pi f_\Delta t \xrightarrow{f_\Delta = 2\text{Hz}} \Delta\varphi = 2\pi 2t \ (\text{S.I.} \Rightarrow$$

$\Delta\varphi = 4\pi t$ (φ σε rad, t σε s)

Για $t = 0 \Rightarrow \Delta\varphi = 0$

Για $t = \frac{T_\Delta}{2} = 0,25\text{s} \Rightarrow \Delta\varphi = \pi \text{ rad}$

Για $t = T_\Delta = 0,5\text{s} \Rightarrow \Delta\varphi = 2\pi \text{ rad}$



Το πλάτος δίνεται από τη σχέση: $A' = 2A\left|\sigma\upsilon\nu\left(\frac{\omega_1 - \omega_2}{2}t\right)\right| \Rightarrow A' = 2A\left|\sigma\upsilon\nu\left(\frac{\Delta\varphi}{2}\right)\right|$ (1)

Τη χρονική στιγμή $t = \frac{T_\Delta}{2} = 0,25s$ η διαφορά φάσης των δύο ταλαντώσεων είναι $\Delta\varphi = \pi \text{ rad}$, δηλαδή

$$(1) \xrightarrow{\Delta\varphi=\pi \text{ rad}} A' = 2A\left|\text{συν}\left(\frac{\pi}{2}\right)\right| \Rightarrow A' = 0$$

Τη χρονική στιγμή $t = T_\Delta = 0,5s$ η διαφορά φάσης των δύο ταλαντώσεων είναι $\Delta\varphi = 2\pi \text{ rad}$. δηλαδή:

$$(1) \xrightarrow{\Delta\varphi=2\pi \text{ rad}} A' = 2A\left|\text{συν}\left(\frac{2\pi}{2}\right)\right| \Rightarrow A' = 2A \Rightarrow A' \text{μέγιστο}$$

Πρόβλημα 5.

Ένα σώμα εκτελεί κίνηση που προέρχεται από τη σύνθεση δύο απλών αρμονικών ταλαντώσεων, ίδιας διεύθυνσης, ίδιου πλάτους Α, που πραγματοποιούνται γύρω από το ίδιο σημείο με παραπλήσιες συχνότητες f_1 και f_2 ($f_2 < f_1$). Οι δύο ταλαντώσεις έχουν αρχική φάση μηδέν. Η απομάκρυνση σε συνάρτηση με το χρόνο της σύνθετης κίνησης που παρουσιάζει διακροτήματα είναι:

$x = 0,02 \cdot συν2\pi t \cdot ημ50\pi t$ (S.I.)

α) Να υπολογισθούν οι συχνότητες f_1 και f_2 και το πλάτος Α των δύο ταλαντώσεων.

β) Να γραφούν οι εξισώσεις απομάκρυνσης – χρόνου των δύο επιμέρους ταλαντώσεων.

γ) Να υπολογιστεί πότε μηδενίζεται το πλάτος του διακροτήματος στο χρονικό διάστημα από 0 έως 1s.

δ) Να υπολογισθεί πόσες φορές μηδενίζεται η απομάκρυνση της σύνθετης κίνησης σε χρόνο ίσο με την περίοδο των διακροτημάτων.

ε) Να γίνει το διάγραμμα της συνισταμένης ταλάντωσης για χρονικό διάστημα από 0 έως 1s.

<u>Λύση</u>

α) Η γενική μορφή της σύνθετης κίνησης είναι: $x = 2Aσυν\left(\frac{\omega_1 - \omega_2}{2}t\right)ημ\left(\frac{\omega_1 + \omega_2}{2}t\right)$ (1)

Με σύγκριση της γενικής σχέσης (1) βρίσκουμε:

$2A = 0,02m \Rightarrow A = 0,01m$.

$$\left.\begin{array}{l}\frac{\omega_1+\omega_2}{2} = 50\pi \\ \frac{\omega_1-\omega_2}{2} = 2\pi\end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l}\omega_1+\omega_2 = 100\pi \\ \omega_1-\omega_2 = 4\pi\end{array}\right\} \xrightarrow[(-)]{(+)} \left.\begin{array}{l}2\omega_1 = 104\pi \\ 2\omega_2 = 96\pi\end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l}\omega_1 = 52\pi \\ \omega_2 = 48\pi\end{array}\right\}$$

Οι συχνότητες είναι: $f_1 = \frac{\omega_1}{2\pi} \Rightarrow f_1 = \frac{52\pi}{2\pi}Hz \Rightarrow f_1 = 26Hz$ και

$f_2 = \frac{\omega_2}{2\pi} \Rightarrow f_2 = \frac{48\pi}{2\pi}Hz \Rightarrow f_2 = 24Hz$

β) Οι εξισώσεις απομάκρυνσης – χρόνου των δύο επιμέρους ταλαντώσεων είναι:

$x_1 = Aημ\omega_1 t \Rightarrow x_1 = 0,01ημ52\pi t$ (S.I.)

$x_2 = Aημ\omega_2 t \Rightarrow x_2 = 0,01ημ48\pi t$ (S.I.)

γ) Το πλάτος του διακροτήματος $A' = 2A\left|\sigma\upsilon\nu(\frac{\omega_1-\omega_2}{2}t)\right|$ θα μηδενίζεται όταν:

$$\left|\sigma\upsilon\nu(\frac{\omega_1-\omega_2}{2}t)\right| = 0 \Rightarrow \frac{(52\pi-48\pi)\mathrm{rad/s}}{2}t = (2k+1)\frac{\pi}{2} \Rightarrow t = \frac{2k+2}{4}\mathrm{s}$$

Άρα, για το χρονικό διάστημα από 0 έως 1s θα έχουμε μηδενισμό του πλάτους του διακροτήματος τις χρονικές στιγμές $t_1 = 0,25\mathrm{s}$ και $t_2 = 0,75\mathrm{s}$.

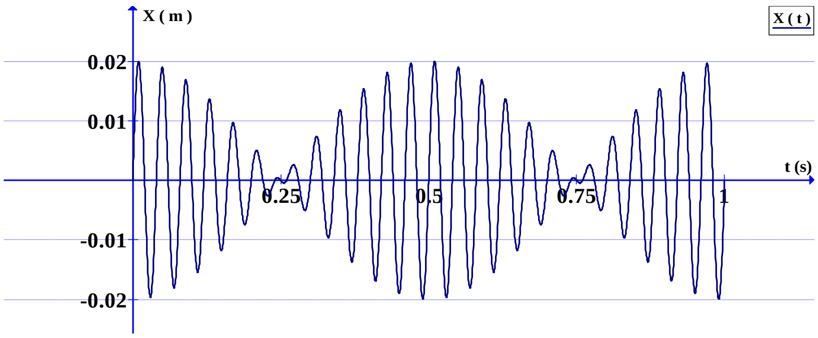
δ) Η γωνιακή συχνότητα της σύνθετης ταλάντωσης είναι $\omega = 50\pi$ rad/s, άρα η περίοδος είναι: $T = \frac{2\pi}{\omega} \Rightarrow T = \frac{2\pi}{50\pi}\mathrm{s} \Rightarrow T = 0,04\mathrm{s}$

Η περίοδος των διακροτημάτων είναι:

$$T_\Delta = \frac{1}{f_\Delta} \Rightarrow T_\Delta = \frac{1}{f_1 - f_2} \Rightarrow T_\Delta = \frac{1}{26\mathrm{Hz} - 24\mathrm{Hz}} \Rightarrow T_\Delta = 0,5\mathrm{s}$$

Άρα σε χρόνο T_Δ κάνει $\frac{T_\Delta}{T} = \frac{0,5\mathrm{s}}{0,04\mathrm{s}} = 12,5$ ταλαντώσεις, δηλαδή η απομάκρυνση γίνεται μηδέν 25 φορές (δύο σε κάθε ταλάντωση).

ε) Το ζητούμενο διάγραμμα είναι:



Ημερομηνία τροποποίησης: 15/7/2011