ΚΕΦΑΛΑΙΟ 5^{Ο}: ΚΡΟΥΣΕΙΣ – ΦΑΙΝΟΜΕΝΟ DOPPLER

ΕΝΟΤΗΤΑ 1: ΚΡΟΥΣΕΙΣ

ΛΥΜΕΝΑ ΘΕΜΑΤΑ

ΘΕΜΑ Β

Ερώτηση 1.

Σώμα Σ_1 μάζας m που κινείται προς τα δεξιά στη θετική κατεύθυνση με ταχύτητα μέτρου υ συγκρούεται κεντρικά και πλαστικά με ακίνητο σώμα Σ_2 διπλάσιας μάζας.

Η μεταβολή της ορμής του σώματος Σ_1 κατά την κρούση έχει αλγεβρική τιμή:

α) $-\dfrac{m\upsilon}{3}$.

β) $-\dfrac{2m\upsilon}{3}$.

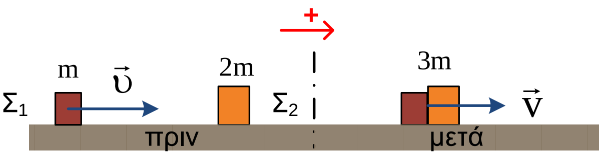
γ) 0.

Να επιλέξετε το γράμμα που αντιστοιχεί στη σωστή Λύση. Να δικαιολογήσετε την επιλογή σας.

<u>Λύση</u>

Σωστή απάντηση είναι η β.

Εφόσον έχουμε κρούση δύο σωμάτων ισχύει η αρχή διατήρησης της ορμής: $\vec{p}_{ολ}^{\,πριν} = \vec{p}_{ολ}^{\,μετά} \Rightarrow \vec{p}_1^{\,πριν} + \vec{p}_2^{\,πριν} = \vec{p}_{συσ.}^{\,μετά}$



Επειδή όλα τα διανύσματα των ορμών έχουν την ίδια διεύθυνση, επιλέγοντας θετική κατεύθυνση προς τα δεξιά, η παραπάνω εξίσωση γράφεται αλγεβρικά:

$$m\upsilon + 0 = (m+2m)V \Rightarrow m\upsilon = 3mV \Rightarrow V = \frac{\upsilon}{3} \quad (1)$$

όπου V το μέτρο της ταχύτητας του συσσωματώματος.

Η μεταβολή της αλγεβρικής τιμής της ορμής του σώματος Σ_1 κατά την κρούση είναι:

$$\Delta\vec{p}_1 = \vec{p}_1^{\,μετά} - \vec{p}_1^{\,πριν} \Rightarrow \Delta p_1 = p_1^{μετά} - p_1^{πριν} \Rightarrow \Delta p_1 = mV - m\upsilon \xrightarrow{(1)} \Delta p_1 = m\frac{\upsilon}{3} - m\upsilon \Rightarrow \Delta p_1 = -\frac{2m\upsilon}{3}$$

Ερώτηση 2.

Ένα σώμα Α που έχει μάζα m και ταχύτητα $\vec{\upsilon}_1$ συγκρούεται με άλλο σώμα Β που έχει διπλάσια μάζα και ταχύτητα $\vec{\upsilon}_2$, αντίρροπη της $\vec{\upsilon}_1$. Από τη κρούση δημιουργείται συσσωμάτωμα που παραμένει ακίνητο στο σημείο της σύγκρουσης. Ο λόγος $\frac{\upsilon_1}{\upsilon_2}$ των μέτρων των ταχυτήτων των δύο σωμάτων πριν από την κρούση, είναι:

α) 1/2.

β) 1.

γ) 2.

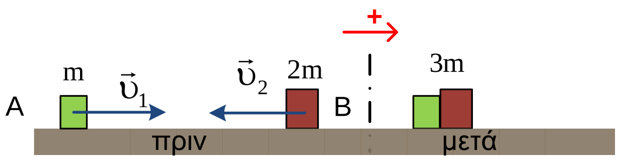
Να επιλέξετε το γράμμα που αντιστοιχεί στη σωστή Λύση. Να δικαιολογήσετε την επιλογή σας.

<u>Λύση</u>

Σωστή απάντηση είναι η γ.

Έστω $\vec{\upsilon}_1$ η ταχύτητα του σώματος Α και $\vec{\upsilon}_2$ η ταχύτητα του σώματος Β. Εφόσον έχουμε κρούση δύο σωμάτων ισχύει η αρχή διατήρησης της ορμής:

$$\vec{p}_{ολ}^{\,πριν} = \vec{p}_{ολ}^{\,μετά} \Rightarrow \vec{p}_1^{\,πριν} + \vec{p}_2^{\,πριν} = \vec{p}_{συσ}^{\,μετά}$$



Επειδή όλα τα διανύσματα των ορμών έχουν την ίδια διεύθυνση, επιλέγοντας θετική κατεύθυνση προς τα δεξιά, η παραπάνω εξίσωση γράφεται αλγεβρικά:

$$m\upsilon_1 - 2m\upsilon_2 = 0 \Rightarrow m\upsilon_1 = 2m\upsilon_2 \Rightarrow \upsilon_1 = 2\upsilon_2 \Rightarrow \frac{\upsilon_1}{\upsilon_2} = 2$$

Ερώτηση 3.

Δύο σώματα Α και Β, με μάζες m και 3m αντίστοιχα, βρίσκονται ακίνητα πάνω σε λείο οριζόντιο επίπεδο. Δίνουμε στο σώμα Α αρχική ταχύτητα $\vec{\upsilon}$ έτσι ώστε να κινηθεί προς τη θετική φορά και να συγκρουστεί κεντρικά και ελαστικά με το ακίνητο σώμα Β. Η αλγεβρική τιμή της ταχύτητας του σώματος Β μετά την κρούση είναι

α) $-\frac{\upsilon}{2}$.

β) $\frac{\upsilon}{2}$.

γ) $\frac{\upsilon}{4}$.

Να επιλέξετε το γράμμα που αντιστοιχεί στη σωστή Λύση.

Να δικαιολογήσετε την επιλογή σας.

Λύση

Σωστή απάντηση είναι η β.

Η κρούση είναι κεντρική και ελαστική και το σώμα Β είναι αρχικά ακίνητο. Άρα η αλγεβρική τιμή της ταχύτητας του σώματος Β μετά την κρούση δίνεται από τον τύπο: $\upsilon_2' = \frac{2m_1}{m_1 + m_2}\upsilon_1$ (1)

Αν αντικαταστήσουμε: $m_1=m$, $m_2=3m$, $\upsilon_1 = \upsilon$ στον τύπο (1) προκύπτει:

$$\upsilon_2' = \frac{2m}{m+3m}\upsilon \Rightarrow \upsilon_2' = \frac{2m}{4m}\upsilon \Rightarrow \upsilon_2' = \frac{\upsilon}{2}$$

Ερώτηση 4.

Σώμα $Σ_1$ μάζας m_1 συγκρούεται κεντρικά και ελαστικά με ένα δεύτερο ακίνητο σώμα $Σ_2$ μάζας m_2. Αν $ΔK_1$ είναι η μεταβολή της κινητικής ενέργειας του σώματος $Σ_1$ και $ΔK_2$ είναι η μεταβολή της κινητικής ενέργειας του σώματος $Σ_2$ λόγω της ελαστικής κρούσης, τότε ισχύει

Α) $\dfrac{\Delta K_1}{\Delta K_2} = \dfrac{m_1}{m_2}$.

β) $\dfrac{\Delta K_1}{\Delta K_2} = -1$.

γ) $\dfrac{\Delta K_1}{\Delta K_2} = 1$.

Να επιλέξετε το γράμμα που αντιστοιχεί στη σωστή Λύση. Να δικαιολογήσετε την επιλογή σας.

<u>Λύση</u>

Σωστή απάντηση είναι η β.

Η κρούση είναι κεντρική και ελαστική, άρα η κινητική ενέργεια του συστήματος των δύο σωμάτων διατηρείται:

$$K_{ολ}^{μετά} = K_{ολ}^{πριν} \Rightarrow K_1^{μετά} + K_2^{μετά} = K_1^{πριν} + K_2^{πριν} \Rightarrow K_1^{μετά} - K_1^{πριν} + K_2^{μετά} - K_2^{πριν} = 0 \Rightarrow$$

$$\Delta K_1 + \Delta K_2 = 0 \Rightarrow \Delta K_1 = -\Delta K_2 \Rightarrow \frac{\Delta K_1}{\Delta K_2} = -1$$

Ερώτηση 5.

Σώμα $Σ_1$ μάζας m_1 που κινείται προς τη θετική κατεύθυνση συγκρούεται κεντρικά και ελαστικά με δεύτερο ακίνητο σώμα $Σ_2$ μάζας m_2. Η ποσότητα της κινητικής ενέργειας που έχει μεταφερθεί από το σώμα $Σ_1$ στο σώμα $Σ_2$ μετά την κρούση γίνεται μέγιστη όταν:

α) $m_1 < m_2$.

β) $m_1 = m_2$.

γ) $m_1 > m_2$.

Να επιλέξετε το γράμμα που αντιστοιχεί στη σωστή Λύση.

Να δικαιολογήσετε την επιλογή σας.

<u>Λύση</u>

Σωστή απάντηση είναι η β.

Η κρούση είναι κεντρική και ελαστική, το σώμα $Σ_1$ έχει ταχύτητα μέτρου $υ_1$ και το σώμα $Σ_2$ είναι αρχικά ακίνητο. Άρα η αλγεβρική τιμή της ταχύτητας του σώματος $Σ_2$ μετά την κρούση δίνεται από τον τύπο: $υ'_2 = \dfrac{2m_1}{m_1 + m_2}υ_1$ (1)

Επειδή το σώμα $Σ_2$ είναι αρχικά ακίνητο η ποσότητα της κινητικής ενέργειας που έχει μεταφερθεί από το σώμα $Σ_1$ στο $Σ_2$ μετά την κρούση είναι:

$$K_2^{μετά} = \frac{1}{2}m_2υ_2'^2 \Rightarrow K_2^{μετά} = \frac{1}{2}m_2\left(\frac{2m_1}{m_1 + m_2}υ_1\right)^2 \Rightarrow K_2^{μετά} = \frac{1}{2}m_2\frac{4m_1^2}{(m_1 + m_2)^2}υ_1^2 \quad (1)$$

Η ποσότητα αυτή γίνεται μέγιστη όταν:

$$K_2^{μετά} = K_1^{πριν} \xrightarrow{(1)} \frac{1}{2}m_2\frac{4m_1^2}{(m_1 + m_2)^2}υ_1^2 = \frac{1}{2}m_1υ_1^2 \Rightarrow \frac{4m_1m_2}{(m_1 + m_2)^2} = 1 \Rightarrow$$

$$(m_1 + m_2)^2 = 4m_1m_2 \Rightarrow m_1^2 + m_2^2 + 2m_1m_2 = 4m_1m_2 \Rightarrow m_1^2 + m_2^2 - 2m_1m_2 = 0 \Rightarrow$$
$$(m_1 - m_2)^2 = 0 \Rightarrow m_1 - m_2 = 0 \Rightarrow m_1 = m_2$$

Ερώτηση 6.

Δύο σώματα με μάζες m_1 και m_2, εκ των οποίων η m_1 κινείται με ταχύτητα που έχει αλγεβρική τιμή υ_1 ενώ η m_2 είναι ακίνητη, συγκρούονται κεντρικά και ελαστικά. Μετά την κρούση η αλγεβρική τιμή της ταχύτητας υ_1' του σώματος m_1 θα δίνεται από τη σχέση:

α) $\upsilon_1' = \dfrac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2}\upsilon_1$.

β) $\upsilon_1' = \dfrac{m_1 + m_2}{m_1 - m_2}\upsilon_1$.

γ) $\upsilon_1 = \dfrac{2m_1}{m_1 - m_2}\upsilon_1$.

Να δικαιολογήσετε την επιλογή σας.

Λύση

Σωστή απάντηση είναι η α.

Σε κάθε κρούση ισχύει η Αρχή Διατήρησης της Ορμής.

$$\vec{p}_{ο\lambda}(\text{πριν}) = \vec{p}_{ο\lambda}(\text{μετά}) \Rightarrow$$
$$\vec{p}_1(\text{πριν}) + \vec{p}_2(\text{πριν}) = \vec{p}_1(\text{μετά}) + \vec{p}_2(\text{μετά}) \Rightarrow$$
$$m_1\upsilon_1 + 0 = m_1\upsilon_1' + m_2\upsilon_2' \Rightarrow$$

$$m_1\left(\upsilon_1 - \upsilon_1'\right) = m_2\upsilon_2' \quad (1)$$

Επειδή η κρούση είναι ελαστική ισχύει και η Αρχή Διατήρησης της Κινητικής Ενέργειας.

$$K_{ο\lambda}\left(\text{πριν}\right) = K_{ο\lambda}\left(\text{μετά}\right) \Rightarrow$$
$$K_1 + K_2 = K_1' + K_2' \Rightarrow$$
$$\frac{1}{2}m_1\upsilon_1^2 + 0 = \frac{1}{2}m_1\upsilon_1'^2 + \frac{1}{2}m_2\upsilon_2'^2 \Rightarrow$$
$$m_1\left(\upsilon_1^2 - \upsilon_1'^2\right) = m_2\upsilon_2'^2 \Rightarrow$$

$$m_1\left(\upsilon_1 - \upsilon_1'\right)\left(\upsilon_1 + \upsilon_1'\right) = m_2\upsilon_2'^2 \quad (2)$$

Διαιρώντας κατά μέλη τις σχέσεις (2) και (1) και παίρνοντας υπόψη μας ότι $\upsilon_1' \neq \upsilon_1$ και $\upsilon_2' \neq \upsilon_2$, προκύπτει:

$$\upsilon_1 + \upsilon_1' = \upsilon_2' \quad (3)$$

Λύνουμε τώρα το σύστημα των εξισώσεων (1) και (3).

$$(1) \xrightarrow{(3)} m_1(\upsilon_1 - \upsilon_1') = m_2(\upsilon_1 + \upsilon_1') \Rightarrow$$

$$m_1\upsilon_1 - m_1\upsilon_1' = m_2\upsilon_1 + m_2\upsilon_1' \Rightarrow$$

$$(m_1 - m_2)\upsilon_1 = (m_1 + m_2)\upsilon_1' \Rightarrow$$

$$\upsilon_1' = \frac{(m_1 - m_2)\upsilon_1}{m_1 + m_2}$$

Ερώτηση 7.

Ένας μαθητής ισχυρίζεται ότι είναι δυνατόν η αρχική ορμή ενός συστήματος δύο σωμάτων που συγκρούονται ελαστικά να είναι μηδέν, και μετά την κρούση η τελική ορμή του συστήματος να είναι μηδέν ενώ η κινητική ενέργεια του συστήματος να είναι διάφορη του μηδενός. Ο παραπάνω ισχυρισμός:

α) Είναι ψευδής.

β) Είναι αληθής.

Να δικαιολογήσετε την απάντησή σας.

<u>Λύση</u>

Σωστή απάντηση είναι η β.

Η ορμή είναι μέγεθος διανυσματικό. Αφού πριν την κρούση η ορμή του συστήματος είναι μηδέν, αυτό σημαίνει ότι οι ορμές των σωμάτων είναι αντίθετες.

$$\vec{p}_{ολ}(πριν) = 0$$
$$\vec{p}_1(πριν) + \vec{p}_2(πριν) = 0 \Rightarrow$$
$$\vec{p}_2(πριν) = -\vec{p}_1(πριν)$$

Η κινητική ενέργεια είναι μονόμετρο μέγεθος. Συνεπώς η αρχική κινητική ενέργεια του συστήματος είναι διάφορη του μηδενός.

$$K_{ολ}(πριν) = K_1(πριν) + K_2(πριν) = \frac{1}{2}m_1\upsilon_1^2 + \frac{1}{2}m_2\upsilon_2^2 \neq 0$$

Σε κάθε κρούση ισχύει η Αρχή Διατήρησης της Ορμής του συστήματος.

$$\vec{p}_{ολ}(πριν) = \vec{p}_{ολ}(μετά) \Rightarrow$$
$$0 = \vec{p}_{ολ}(μετά)$$

Άρα και μετά την κρούση η ορμή του συστήματος θα είναι μηδέν. Πάλι οι ορμές των σωμάτων θα είναι αντίθετες.

$$\vec{p}_{ολ}(πριν) = \vec{p}_{ολ}(μετά) \Rightarrow$$
$$0 = \vec{p}_1(μετά) + \vec{p}_2(μετά) \Rightarrow$$
$$\vec{p}_2(μετά) = -\vec{p}_1(μετά)$$

Επειδή όμως η κρούση είναι ελαστική, ισχύει και η Αρχή Διατήρησης της Κινητικής Ενέργειας του Συστήματος.

$$K_{ολ}(πριν) = K_{ολ}(μετά)$$

Συνεπώς και η τελική κινητική ενέργεια του συστήματος θα είναι διάφορη του μηδενός.

Ερώτηση 8.

Σώμα μάζας m_1=1 kg κινείται προς τη θετική κατεύθυνση και προσπίπτει με ταχύτητα μέτρου $υ_1$=10 m/s σε ακίνητη σφαίρα (2) μάζας m_2 και συγκρούεται ελαστικά και κεντρικά με αυτή. Μετά την κρούση η (1) κινείται με ταχύτητα μέτρου $υ_1'$=6 m/s αλλά αντίθετης φοράς από την $υ_1$. Η μάζα του σώματος m_2 είναι:

α) m_2=1 kg.

β) m_2=1/4 kg.

γ) m_2=4 kg.

Να δικαιολογήσετε την επιλογή σας.

<u>Λύση</u>

Σωστή απάντηση είναι η γ.

$$υ_1' = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} u_1 \Rightarrow -6 = \frac{1 - m_2}{1 + m_2} 10 \Rightarrow -6 - 6m_2 = 10 - 10m_2 \Rightarrow 4m_2 = 16 \Rightarrow$$

$$m_2 = 4\text{kg}$$

Παρατήρηση: Πρέπει να προσέξετε να βάλετε το πρόσημο μείον (-) στην ταχύτητα $υ_1'$.

Ερώτηση 9.

Σε μία ανελαστική κρούση μεταξύ δύο σωμάτων m_1 και m_2, εκ των οποίων το m_2 είναι αρχικά ακίνητο, το ποσοστό της μεταβιβαζόμενης ενέργειας από το m_1 στο m_2 δίνεται από τη σχέση:

α) $a\% = \frac{\Delta K_1}{K_1} 100\%$.

β) $a\% = \frac{K_2}{K_1} 100\%$.

γ) $a\% = \frac{\Delta K_{ολ}}{K_1} 100\%$.

όπου ΔK_1 η μεταβολή της κινητικής ενέργειας του πρώτου σώματος, K_2 η κινητική ενέργεια του δεύτερου σώματος και $\Delta K_{ολ}$ η μεταβολή της κινητικής ενέργειας του συστήματος.

Να δικαιολογήσετε την απάντησή σας.

<u>Λύση</u>

Σωστή απάντηση είναι η β.

Προσοχή: Αφού η κρούση των δύο σωμάτων είναι ανελαστική δεν ισχύει η Αρχή Διατήρησης της Κινητικής Ενέργειας.

Η κινητική ενέργεια που απέκτησε το m_2 μετά την κρούση δεν ισούται με την κινητική ενέργεια που έχασε το m_1. Ένα μέρος μεταφέρθηκε σαν θερμότητα στο περιβάλλον.

Από την ενέργεια K_1 που είχε το m_1 δόθηκε στο m_2 ενέργεια K_2.

Από τα 100% a%

Με την απλή μέθοδο των τριών προκύπτει:

$$a\% = \frac{K_2}{K_1} 100\%$$

Ερώτηση 10.

Κατά τη μετωπική ελαστική κρούση δύο σωμάτων m_1 και m_2 εκ των οποίων η m_2 είναι ακίνητη το ποσοστό μεταβολής της κινητικής ενέργειας της m_1 (επί της αρχικής κινητικής ενέργειάς της) είναι -36%. Ο λόγος $\frac{m_1}{m_2}$ είναι:

α) $\frac{m_1}{m_2}=9$ ή $\frac{m_1}{m_2}=\frac{1}{9}$.

β) $\frac{m_1}{m_2}=4$ ή $\frac{m_1}{m_2}=\frac{1}{4}$.

γ) $\frac{m_1}{m_2}=2$ ή $\frac{m_1}{m_2}=\frac{1}{2}$.

Να δικαιολογήσετε την απάντησή σας

<u>Λύση</u>

Σωστή απάντηση είναι η α.

Είναι γνωστό από τη θεωρία ότι μετά την ελαστική μετωπική κρούση δύο σωμάτων εκ των οποίων το ένα ήταν ακίνητο, τα δύο σώματα θα αποκτήσουν ταχύτητες:

$\upsilon'_1=\frac{m_1-m_2}{m_1+m_2}u_1$ και $\upsilon'_2=\frac{2m_1}{m_1+m_2}u_1$, όπου υ_1 και υ'_1 η αρχική και τελική ταχύτητα αντίστοιχα του αρχικά κινούμενου σώματος μάζας m_1, ενώ υ_2 και υ'_2 η αρχική και τελική ταχύτητα αντίστοιχα του αρχικά ακίνητου σώματος μάζας m_2.

Από τα δεδομένα προκύπτει:

$$K_1(\tau\varepsilon\lambda)=K_1(\alpha\rho\chi)-\frac{36}{100}K_1(\alpha\rho\chi)\Rightarrow K_1(\tau\varepsilon\lambda)=\frac{64}{100}K_1(\alpha\rho\chi)\Rightarrow\frac{1}{2}m_1\upsilon'^2_1=\frac{64}{100}\frac{1}{2}m_1\upsilon_1^2\Rightarrow$$
$$\upsilon'_1=\pm\frac{8}{10}\upsilon_1\Rightarrow\frac{m_1-m_2}{m_1+m_2}\upsilon_1=\pm\frac{8}{10}\upsilon_1\Rightarrow\frac{m_1-m_2}{m_1+m_2}=\pm\frac{8}{10}$$

<u>1η περίπτωση:</u>

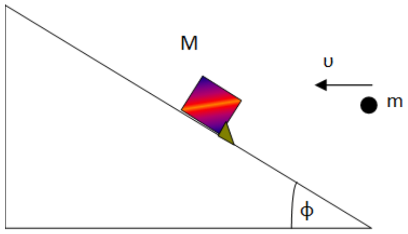
$$\frac{m_1-m_2}{m_1+m_2}=+\frac{8}{10}\Rightarrow 10m_1-10m_2=8m_1+8m_2\Rightarrow 2m_1=18m_2\Rightarrow m_1=9m_2\Rightarrow\frac{m_1}{m_2}=9$$

$2^η$ περίπτωση:

$$\frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} = -\frac{8}{10} \Rightarrow 10m_1 - 10m_2 = -8m_1 - 8m_2 \Rightarrow 18m_1 = 2m_2 \Rightarrow 9m_1 = m_2 \Rightarrow \frac{m_1}{m_2} = \frac{1}{9}$$

Ερώτηση 11.

Το βλήμα μάζας m του σχήματος κινείται παράλληλα με το οριζόντιο επίπεδο και συγκρούεται πλαστικά με το κιβώτιο μάζας M που ισορροπεί με τη βοήθεια μικρού εμποδίου πάνω σε λείο ακλόνητο κεκλιμένο επίπεδο γωνίας κλίσης φ.



Αν η ταχύτητα του βλήματος έχει μέτρο υ, τότε το μέτρο της ταχύτητας του συσσωματώματος αμέσως μετά την κρούση θα είναι:

α) $V_K = \dfrac{m\upsilon}{(m+M)}$.

β) $V_K = \dfrac{m\upsilon\sigma\upsilon\nu\varphi}{(m+M)}$.

γ) $V_K = \dfrac{m\upsilon\eta\mu\varphi}{(m+M)}$.

Να δικαιολογήσετε την απάντησή σας

<u>Λύση</u>

Σωστή απάντηση είναι η β.

Όπως είναι γνωστό, από τον 2^0 νόμο του Νεύτωνα σε γενικευμένη μορφή προκύπτει:

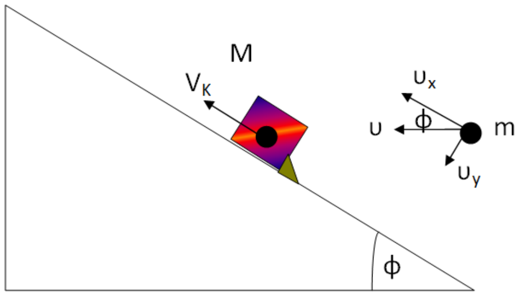
$$\Sigma\vec{F} = \frac{\Delta\vec{p}}{\Delta t} \Rightarrow \Delta\vec{p} = \Sigma\vec{F}\cdot\Delta t \Rightarrow \vec{p}_{o\lambda}(\tau\epsilon\lambda) - \vec{p}_{o\lambda}(\alpha\rho\chi) = \Sigma\vec{F}\cdot\Delta t \Rightarrow$$

$$\vec{p}_{o\lambda}(\tau\epsilon\lambda) = \vec{p}_{o\lambda}(\alpha\rho\chi) + \Sigma\vec{F}\cdot\Delta t \quad (1)$$

Από τη σχέση (1) παρατηρούμε ότι η ορμή ενός συστήματος διατηρείται μόνο αν η συνισταμένη των δυνάμεων στο σύστημα ή το χρονικό διάστημα που διαρκεί το φαινόμενο, τείνουν στο μηδέν.

Στην περίπτωσή μας αυτό δεν συμβαίνει γιατί στη διάρκεια της κρούσης αναπτύσσεται μία τεράστια κάθετη αντίδραση από το κεκλιμένο επίπεδο.

Μπορούμε όμως να εφαρμόσουμε την Αρχή Διατήρησης της Ορμής στον άξονα x’x για το μικρό χρονικό διάστημα της κρούσης.



$$\vec{p}_{ο\lambda}^{(x)}(\text{πριν}) = \vec{p}_{ο\lambda}^{(x)}(\text{μετά}) \Rightarrow \vec{p}_m^{(x)} + \vec{p}_M^{(x)} = \vec{p}_m'^{(x)} + \vec{p}_M'^{(x)}$$

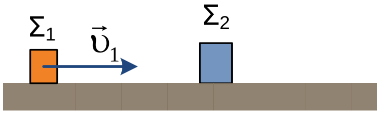
Επιλέγοντας θετική φορά προς τα πάνω, γράφουμε την παραπάνω σχέση αλγεβρικά:

$$m\upsilon_x + 0 = (m+M)V_K \Rightarrow V_K = \frac{m\upsilon\sigma\upsilon\nu\varphi}{(m+M)}$$

Στον άξονα y΄y δεν ισχύει η Αρχή Διατήρησης της Ορμής για τους λόγους που αναφέραμε.

ΘΕΜΑ Γ

Άσκηση 1.



Σώμα $Σ_1$ με μάζα $m_1 = 2kg$ και ταχύτητα μέτρου $\upsilon_1 = 20m/s$, κινείται σε οριζόντιο επίπεδο χωρίς τριβές, προς τη θετική κατεύθυνση, όπως στο σχήμα. Το σώμα $Σ_1$ συγκρούεται με σώμα $Σ_2$ μάζας $m_2 = 3kg$ που αρχικά είναι ακίνητο. Η κρούση οδηγεί στη συγκόλληση των σωμάτων. Η χρονική διάρκεια της κρούσης θεωρείται αμελητέα.

Να υπολογίσετε:

α) την ταχύτητα του συσσωματώματος που δημιουργείται μετά την κρούση.

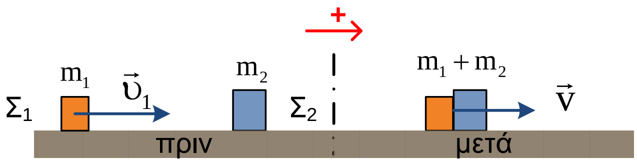
β) την απώλεια της μηχανικής ενέργειας του συστήματος κατά την κρούση.

γ) το ποσοστό της αρχικής κινητικής ενέργειας του σώματος $Σ_1$ που μεταφέρθηκε στο σώμα $Σ_2$.

δ) τη μεταβολή της ορμής του σώματος $Σ_1$.

Λύση

α) Έστω $\vec{V}$ η ταχύτητα του συσσωματώματος που δημιουργείται αμέσως μετά την κρούση. Εφαρμόζουμε την αρχή διατήρησης της ορμής για το σύστημα των δύο σωμάτων:



$$\vec{p}_{ολ}^{\,πριν} = \vec{p}_{ολ}^{\,μετά} \Rightarrow \vec{p}_1^{\,πριν} + \vec{p}_2^{\,πριν} = \vec{p}_{συσ}^{\,μετά} \quad (1)$$

Επειδή όλα τα διανύσματα των ορμών έχουν την ίδια διεύθυνση, επιλέγοντας θετική κατεύθυνση προς τα δεξιά, η εξίσωση (1) γράφεται αλγεβρικά:

$$m_1\upsilon_1 + 0 = (m_1 + m_2)V \Rightarrow V = \frac{m_1\upsilon_1}{m_1 + m_2}$$

Με αντικατάσταση προκύπτει $V = \dfrac{2kg \cdot 20\frac{m}{s}}{2kg + 3kg} \Rightarrow V = \dfrac{40\frac{m}{s}}{5} \Rightarrow V = 8\dfrac{m}{s}$

β) Θεωρούμε ως επίπεδο μηδενικής δυναμικής ενέργειας το οριζόντιο επίπεδο.

Η απώλεια της μηχανικής ενέργειας του συστήματος κατά την κρούση είναι:

$$E_{\alpha\pi} = E^{\pi\rho\iota\nu}_{\mu\eta\chi} - E^{\mu\varepsilon\tau\acute{\alpha}}_{\mu\eta\chi} \Rightarrow E_{\alpha\pi} = (K^{\pi\rho\iota\nu}_{o\lambda} + U^{\pi\rho\iota\nu}_{o\lambda}) - (K^{\mu\varepsilon\tau\acute{\alpha}}_{o\lambda} + U^{\mu\varepsilon\tau\acute{\alpha}}_{o\lambda}) \xrightarrow{U^{\pi\rho\iota\nu}_{o\lambda} = U^{\mu\varepsilon\tau\acute{\alpha}}_{o\lambda} = 0} E_{\alpha\pi} = K^{\pi\rho\iota\nu}_{o\lambda} - K^{\mu\varepsilon\tau\acute{\alpha}}_{o\lambda} \Rightarrow$$

$$E_{\alpha\pi} = \frac{1}{2}m_1\upsilon_1^2 - \frac{1}{2}(m_1 + m_2)V^2$$

Με αντικατάσταση προκύπτει:

$$E_{\alpha\pi} = \frac{1}{2}2Kg\left(20\frac{m}{s}\right)^2 - \frac{1}{2}5kg\left(8\frac{m}{s}\right)^2 \Rightarrow E_{\alpha\pi} = 400J - 160J \Rightarrow E_{\alpha\pi} = 240J$$

γ) Η κινητική ενέργεια του σώματος $Σ_2$ μετά τη κρούση είναι: $K_2^{\mu\varepsilon\tau\acute{\alpha}} = \frac{1}{2}m_2V^2$ και η κινητική ενέργεια του σώματος $Σ_1$ πριν την κρούση είναι: $K_1^{\pi\rho\iota\nu} = \frac{1}{2}m_1\upsilon_1^2$.

Το ποσοστό της αρχικής κινητικής ενέργειας του σώματος $Σ_1$ που μεταφέρθηκε στο σώμα $Σ_2$ είναι:

$$\frac{K_2^{\mu\varepsilon\tau\acute{\alpha}}}{K_1^{\pi\rho\iota\nu}} = \frac{\frac{1}{2}m_2V^2}{\frac{1}{2}m_1\upsilon_1^2} = \frac{m_2V^2}{m_1\upsilon_1^2}$$

Με αντικατάσταση προκύπτει: $\dfrac{K_2^{\mu\varepsilon\tau\acute{\alpha}}}{K_1^{\pi\rho\iota\nu}} = \dfrac{3kg\cdot\left(8\frac{m}{s}\right)^2}{2kg\cdot\left(20\frac{m}{s}\right)^2} = \dfrac{3\cdot 64}{2\cdot 400} = 0,24$ ή 24%

δ) Η μεταβολή της ορμής του σώματος $Σ_1$ είναι: $\Delta\vec{p}_1 = \vec{p}_1^{\,\mu\varepsilon\tau\acute{\alpha}} - \vec{p}_1^{\,\pi\rho\iota\nu}$

Επειδή όλα τα διανύσματα των ορμών έχουν την ίδια διεύθυνση, επιλέγοντας θετική κατεύθυνση προς τα δεξιά, η παραπάνω εξίσωση γράφεται αλγεβρικά:

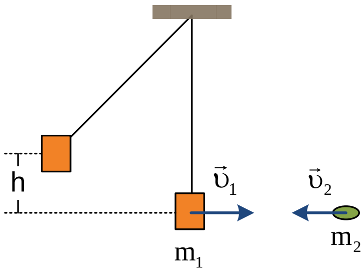
$$\Delta p_1 = p_1^{\mu\varepsilon\tau\acute{\alpha}} - p_1^{\pi\rho\iota\nu} \Rightarrow \Delta p_1 = m_1V - m_1\upsilon_1 \Rightarrow \Delta p_1 = 2kg\cdot 8\frac{m}{s} - 2kg\cdot 20\frac{m}{s} \Rightarrow \Delta p_1 = 16kg\cdot\frac{m}{s} - 40\frac{kg\cdot m}{s} \Rightarrow$$

$$\Delta p_1 = -24kg\cdot\frac{m}{s}$$

Άρα η ορμή του σώματος $Σ_1$ ελαττώνεται κατά: $\Delta p_1 = 24\frac{kg\cdot m}{s}$

Άσκηση 2.

Σώμα μάζας $m_1 = 0,9\ kg$ που είναι προσδεμένο στο άκρο τεντωμένου νήματος μήκους $L = 2m$, αφήνεται ελεύθερο από ύψος h, όπως φαίνεται στο σχήμα. Όταν το νήμα βρίσκεται στην κατακόρυφη θέση, το σώμα έχει ταχύτητα μέτρου $\upsilon_1 = 2m/s$ και συγκρούεται πλαστικά με βλήμα μάζας $m_2 = 0,1kg$ και ταχύτητας μέτρου $\upsilon_2 = 48m/s$ με φορά προς το σώμα. Η χρονική διάρκεια της κρούσης θεωρείται αμελητέα.



Να υπολογίσετε:

α) το ύψος h από το οποίο αφέθηκε ελεύθερο το σώμα μάζας m_1.

β) το μέτρο της ταχύτητας του συσσωματώματος που δημιουργείται μετά την κρούση.

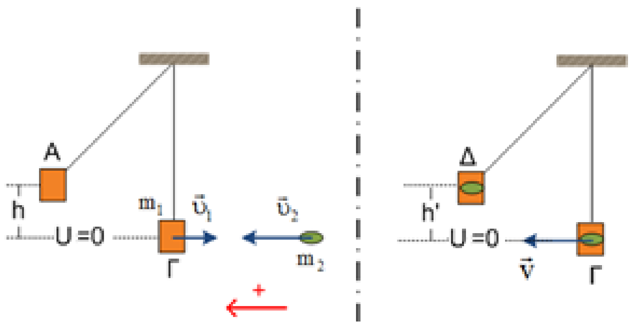
γ) το ύψος h' στο οποίο θα φτάσει το συσσωμάτωμα μετά την κρούση.

δ) τη μεταβολή της μηχανικής ενέργειας του συστήματος κατά τη κρούση. Σε τι μορφή ενέργειας μετατράπηκε αυτή;

Δίνεται: $g = 10m/s^2$.

<u>Λύση</u>

α) Στο σώμα πριν από την κρούση η μόνη δύναμη που παράγει έργο είναι το βάρος, που είναι συντηρητική δύναμη. Άρα ισχύει το θεώρημα διατήρησης της μηχανικής ενέργειας το οποίο εφαρμόζουμε για τις θέσεις Α και Γ του σώματος.



(Θεωρούμε ως επίπεδο μηδενικής δυναμικής ενέργειας το οριζόντιο επίπεδο που περνά από το σημείο της σύγκρουσης).

$$E_{\mu\eta\chi.\alpha\rho\chi.} = E_{\mu\eta\chi.\tau\epsilon\lambda.} \Rightarrow K_\alpha + U_\alpha = K_\tau + U_\tau \Rightarrow 0 + m_1 g h = \frac{1}{2} m_1 \upsilon_1^2 + 0 \Rightarrow h = \frac{\upsilon_1^2}{2g}$$

Με αντικατάσταση προκύπτει: $h = \dfrac{\left(2\dfrac{m}{s}\right)^2}{2 \cdot 10\dfrac{m}{s^2}} \Rightarrow h = 0,2m$

β) Έστω $\vec{v}$ η ταχύτητα του συσσωματώματος που δημιουργείται αμέσως μετά τη κρούση. Εφαρμόζουμε την αρχή διατήρησης της ορμής για το σύστημα των δύο σωμάτων:

$$\vec{p}_{ολ}^{\,πριν} = \vec{p}_{ολ}^{\,μετά} \Rightarrow \vec{p}_1^{\,πριν} + \vec{p}_2^{\,πριν} = \vec{p}_{συσ}^{\,μετά}$$

Επειδή όλα τα διανύσματα των ορμών έχουν την ίδια διεύθυνση, επιλέγοντας θετική κατεύθυνση προς τα αριστερά, η παραπάνω εξίσωση γράφεται αλγεβρικά:

$$-m_1\upsilon_1 + m_2\upsilon_2 = (m_1+m_2)V \Rightarrow V = \frac{m_2\upsilon_2 - m_1\upsilon_1}{m_1+m_2} \quad (1)$$

Με αντικατάσταση προκύπτει:

$$V = \frac{0,1kg\cdot 48\frac{m}{s} - 0,9kg\cdot 2\frac{m}{s}}{0,9kg + 0,1kg} \Rightarrow V = \frac{4,8\frac{m}{s} - 1,8\frac{m}{s}}{1} \Rightarrow V = 3\frac{m}{s}$$

γ) Στο συσσωμάτωμα μετά τη κρούση η μόνη δύναμη που παράγει έργο είναι το βάρος, που είναι συντηρητική δύναμη. Άρα ισχύει το θεώρημα διατήρησης της μηχανικής ενέργειας το οποίο εφαρμόζουμε για τις θέσεις Γ και Δ.

(Θεωρούμε ως επίπεδο μηδενικής δυναμικής ενέργειας το οριζόντιο επίπεδο που περνά από το σημείο της σύγκρουσης).

$$E_{μηχ.αρχ.} = E_{μηχ.τελ.} \Rightarrow K_α + U_α = K_τ + U_τ \Rightarrow \frac{1}{2}(m_1+m_2)V^2 + 0 = 0 + (m_1+m_2)gh' \Rightarrow h' = \frac{V^2}{2g}$$

Με αντικατάσταση προκύπτει: $h' = \dfrac{\left(3\frac{m}{s}\right)^2}{2\cdot 10\frac{m}{s^2}} \Rightarrow h' = 0,45m$

δ) Η απώλεια της μηχανικής ενέργειας του συστήματος κατά τη κρούση είναι:

$$E_{απ} = E_{μηχ}^{πριν} - E_{μηχ}^{μετά} \Rightarrow E_{απ} = (K_{ολ}^{πριν} + U_{ολ}^{πριν}) - (K_{ολ}^{μετά} + U_{ολ}^{μετά}) \xrightarrow{U_{ολ}^{πριν}=U_{ολ}^{μετά}=0} E_{απ} = K_{ολ}^{πριν} - K_{ολ}^{μετά} \Rightarrow$$

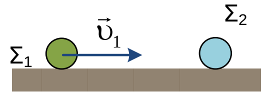
$$E_{απ} = \frac{1}{2}m_1\upsilon_1^2 + \frac{1}{2}m_2\upsilon_2^2 - \frac{1}{2}(m_1+m_2)V^2$$

Με αντικατάσταση προκύπτει:

$$E_{απ} = \frac{1}{2}0,9Kg\left(2\frac{m}{s}\right)^2 + \frac{1}{2}0,1kg\left(48\frac{m}{s}\right)^2 - \frac{1}{2}1kg\left(3\frac{m}{s}\right)^2 \Rightarrow E_{απ} = 1,8J + 115,2J - 4,5J \Rightarrow E_{απ} = 112,5J$$

Η ενέργεια αυτή μετατράπηκε κατά την κρούση σε θερμότητα.

Άσκηση 3.



Σώμα Σ_1 μάζας m_1 κινούμενο προς τη θετική φορά σε λείο οριζόντιο επίπεδο συγκρούεται με ταχύτητα μέτρου $\upsilon_1 = 8m/s$ κεντρικά και ελαστικά με ακίνητο σώμα μάζας m_2. Η χρονική διάρκεια της κρούσης θεωρείται αμελητέα.

Αμέσως μετά την κρούση, το σώμα μάζας m_1 κινείται αντίρροπα με ταχύτητα μέτρου $\upsilon_1' = 4m/s$. Να υπολογίσετε:

α) το λόγο των μαζών $\frac{m_2}{m_1}$.

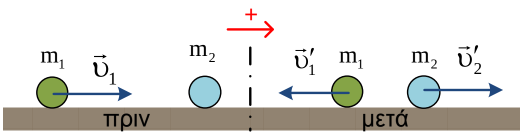
β) το μέτρο της ταχύτητας του σώματος μάζας m_2 αμέσως μετά την κρούση.

γ) το ποσοστό της αρχικής κινητικής ενέργειας του σώματος μάζας m_1 που μεταβιβάστηκε στο σώμα μάζας m_2 λόγω της κρούσης.

δ) την αλγεβρική τιμή της μεταβολής της ορμής των δύο σωμάτων, αν $m_2 = 2kg$. Τι παρατηρείτε;

Δίνεται $g = 10\ m/s^2$.

<u>Λύση</u>



α) Ορίζουμε θετική φορά προς τα δεξιά. Άρα $\upsilon_1' = 4m/s$.

Η κρούση είναι κεντρική και ελαστική, το σώμα Σ_1 έχει ταχύτητα μέτρου $\upsilon_1 = 8m/s$ και το σώμα Σ_2 είναι αρχικά ακίνητο. Άρα η αλγεβρική τιμή της ταχύτητας υ_1' του σώματος Σ_1 μετά την κρούση δίνεται από τον τύπο:

$$\upsilon_1' = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2}\upsilon_1 \quad (1)$$

και η αλγεβρική τιμή της ταχύτητας υ_2' του σώματος Σ_2 μετά την κρούση δίνεται από τον τύπο: $\upsilon_2' = \frac{2m_1}{m_1 + m_2}\upsilon_1 \quad (2)$

Ονομάζουμε το λόγο $\frac{m_2}{m_1} = \lambda$ οπότε $m_2 = \lambda \cdot m_1$ (3)

Από τις σχέσεις (1), (3) προκύπτει:

$$\upsilon_1' = \frac{m_1 - \lambda m_1}{m_1 + \lambda m_1}\upsilon_1 \Rightarrow \upsilon_1' = \frac{m_1(1-\lambda)}{m_1(1+\lambda)}\upsilon_1 \Rightarrow \upsilon_1' = \frac{1-\lambda}{1+\lambda}\upsilon_1 \Rightarrow \upsilon_1' + \lambda\upsilon_1' = \upsilon_1 - \lambda\upsilon_1 \Rightarrow$$

$$\lambda(\upsilon_1 + \upsilon_1') = \upsilon_1 - \upsilon_1' \Rightarrow \lambda = \frac{\upsilon_1 - \upsilon_1'}{\upsilon_1 + \upsilon_1'}$$

Με αντικατάσταση προκύπτει: $\lambda = \dfrac{8\frac{m}{s} - (-4\frac{m}{s})}{8\frac{m}{s} + (-4\frac{m}{s})} \Rightarrow \lambda = \dfrac{12}{4} \Rightarrow \lambda = 3$

Δηλαδή $\dfrac{m_2}{m_1} = 3$

β) Το μέτρο της ταχύτητας του σώματος μάζας m_2 αμέσως μετά την κρούση θα υπολογιστεί από τη σχέση (2): $\upsilon_2' = \dfrac{2m_1}{m_1 + m_2}\upsilon_1$

Με αντικατάσταση $m_2 = 3m_1$ προκύπτει: $\upsilon_2' = \dfrac{2m_1}{m_1 + 3m_1}\upsilon_1 \Rightarrow \upsilon_2' = \dfrac{2m_1}{4m_1}\upsilon_1 \Rightarrow \upsilon_2' = \dfrac{\upsilon_1}{2}$ (4)

και αντικαθιστώντας $\upsilon_1 = 8\ m/s$ προκύπτει: $\upsilon_2' = \dfrac{8\frac{m}{s}}{2} \Rightarrow \upsilon_2' = 4\dfrac{m}{s}$

γ) Επειδή το σώμα μάζας m_2 είναι πριν την κρούση ακίνητο, το ποσοστό της αρχικής κινητικής ενέργειας του σώματος μάζας m_1 που μεταβιβάστηκε στο σώμα μάζας m_2 λόγω της κρούσης είναι:

$$\frac{K_2^{\mu\varepsilon\tau\acute{\alpha}}}{K_1^{\pi\rho\iota\nu}} = \frac{\frac{1}{2}m_2\upsilon_2'^2}{\frac{1}{2}m_1\upsilon_1^2}$$

Με αντικατάσταση $m_2=3m_1$ και $\upsilon_2' = 4m/s$ προκύπτει :

$$\frac{K_2^{\mu\varepsilon\tau\acute{\alpha}}}{K_1^{\pi\rho\iota\nu}} = \frac{\frac{1}{2}m_2\upsilon_2'^2}{\frac{1}{2}m_1\upsilon_1^2} = \frac{\frac{1}{2}3m_1\left(4\frac{m}{s}\right)^2}{\frac{1}{2}m_1\left(8\frac{m}{s}\right)^2} = \frac{3\cdot 16}{64} = 0,75 \quad \acute{\eta} \quad 75\%$$

δ) Η μεταβολή της ορμής του σώματος Σ_2 είναι: $\Delta\vec{p}_2 = \vec{p}_2^{\,\mu\varepsilon\tau\acute{\alpha}} - \vec{p}_2^{\,\pi\rho\iota\nu}$

Επειδή όλα τα διανύσματα των ορμών έχουν την ίδια διεύθυνση, επιλέγοντας θετική κατεύθυνση προς τα δεξιά, η παραπάνω εξίσωση γράφεται αλγεβρικά:

$$\Delta p_2 = m_2 \upsilon_2' - m_2 \upsilon_2 \xrightarrow{\upsilon_2 = 0} \Delta p_2 = m_2 \upsilon_2' - 0 \Rightarrow \Delta p_2 = m_2 \upsilon_2'$$

Με αντικατάσταση προκύπτει: $\Delta p_2 = 2\mathrm{kg} \cdot 4\dfrac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} \Rightarrow \Delta p_2 = 8\dfrac{\mathrm{kg} \cdot \mathrm{m}}{\mathrm{s}}$

Η μεταβολή της ορμής του σώματος Σ_1 είναι: $\Delta \vec{p}_1 = \vec{p}_1^{\,\mu\varepsilon\tau\acute{\alpha}} - \vec{p}_1^{\,\pi\rho\iota\nu}$

Επειδή όλα τα διανύσματα των ορμών έχουν την ίδια διεύθυνση, επιλέγοντας θετική κατεύθυνση προς τα δεξιά, η παραπάνω εξίσωση γράφεται αλγεβρικά:

$$\Delta p_1 = m_1 \upsilon_1' - m_1 \upsilon_1 \Rightarrow \Delta p_1 = m_1 (\upsilon_1' - \upsilon_1)$$

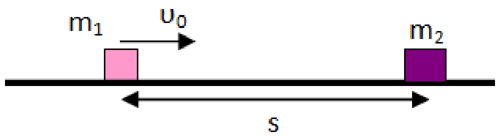
Είναι $\dfrac{m_2}{m_1} = 3 \Rightarrow m_1 = \dfrac{m_2}{3} \Rightarrow m_1 = \dfrac{2}{3}\mathrm{kg}$

οπότε με αντικατάσταση προκύπτει: $\Delta p_1 = \dfrac{2}{3}\mathrm{kg} \cdot (-4 - 8)\dfrac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} \Rightarrow \Delta p_1 = -8\dfrac{\mathrm{kg} \cdot \mathrm{m}}{\mathrm{s}}$

Παρατηρούμε ότι οι δύο μεταβολές είναι αντίθετες.

Άσκηση 4.

Το σώμα μάζας $m_1 = 2kg$ του παρακάτω σχήματος βάλλεται με αρχική ταχύτητα $u_0 = 10m/s$ πάνω σε οριζόντιο δάπεδο που παρουσιάζει συντελεστή τριβής $\mu = 0,2$. Αφού διανύσει απόσταση $s = 9m$ συγκρούεται κεντρικά και ελαστικά με το ακίνητο σώμα μάζας $m_2 = 6kg$ που είναι αρχικά ακίνητο.



Να βρείτε:

α) την ταχύτητα του σώματος μάζας m_1 λίγο πριν την κρούση.

β) τις ταχύτητες των σωμάτων αμέσως μετά την κρούση.

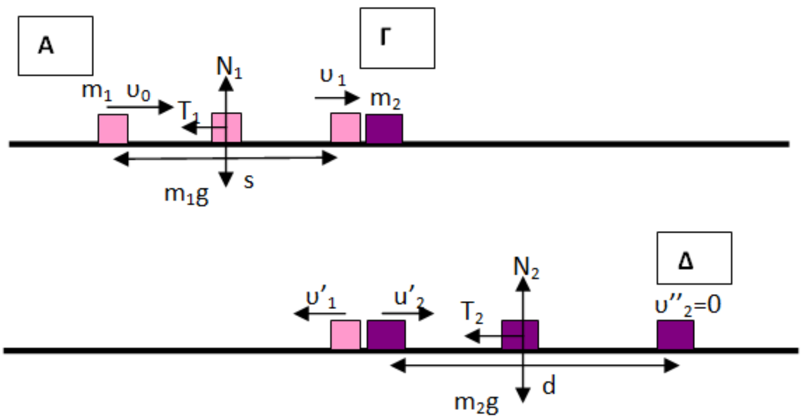
γ) το ποσοστό της ενέργειας του σώματος m_1 που μεταβιβάστηκε στο σώμα μάζας m_2.

δ) το διάστημα d που θα διανύσει το σώμα μάζας m_2 μέχρι να σταματήσει.

Δίνεται η επιτάχυνση της βαρύτητας $g = 10m/s^2$.

Λύση

α) Φαινόμενο 1^0: Κίνηση του m_1 από το Α στο Γ.



Εφαρμόζουμε το θεώρημα μεταβολής κινητικής ενέργειας.

$$K_{\Gamma} - K_{A} = W_{B_1} + W_{N} + W_{T_1} \Rightarrow$$

$$\frac{1}{2}m_1\upsilon_1^2 - \frac{1}{2}m_1\upsilon_0^2 = 0 + 0 + T_1 \cdot s \cdot \sigma\upsilon\nu 180^0 \xrightarrow{T_1=\mu m_1 g}$$

$$\frac{1}{2}m_1\upsilon_1^2 - \frac{1}{2}m_1\upsilon_0^2 = -\mu m_1 g s$$

$$\frac{1}{2}\upsilon_1^2 - \frac{1}{2}\upsilon_0^2 = -\mu g s \Rightarrow \upsilon_1^2 = \upsilon_0^2 - 2\mu g s \Rightarrow$$

$$\upsilon_1 = \sqrt{\upsilon_0^2 - 2\mu g s} \Rightarrow$$

$$\upsilon_1 = \sqrt{100 - 2 \cdot 0,2 \cdot 10 \cdot 9}\ m/s = \sqrt{100 - 36}\ m/s = \sqrt{64}\ m/s \Rightarrow$$

$$\upsilon_1 = 8m/s$$

β) <u>Φαινόμενο 2^0</u>: Κρούση του m_1 με το m_2. Θεωρούμε θετική φορά προς τα δεξιά.

Επειδή η κρούση των δύο σωμάτων είναι κεντρική και ελαστική ισχύουν οι τύποι:

$$\upsilon_1' = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2}\upsilon_1 \text{ και } \upsilon_2' = \frac{2m_1}{m_1 + m_2}\upsilon_1$$

Με αντικατάσταση έχουμε:

$$\upsilon_1' = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2}\upsilon_1 = \frac{2-6}{2+6}8m/s \Rightarrow \upsilon_1' = -4m/s$$

$$\upsilon_2' = \frac{2m_1}{m_1 + m_2}\upsilon_1 = \frac{2 \cdot 2}{2+6}8m/s \Rightarrow \upsilon_2' = 4m/s$$

γ) Λίγο πριν την κρούση το σώμα μάζας m_1 είχε κινητική ενέργεια:

$$K_1 = \frac{1}{2}m_1\upsilon_1^2 = \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 8^2 J \Rightarrow K_1 = 64J$$

Αμέσως μετά την κρούση το σώμα μάζας m_2 έχει κινητική ενέργεια:

$$K_2' = \frac{1}{2}m_2\upsilon_2'^2 = \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 4^2 J \Rightarrow K_2' = 48J$$

Το ποσοστό της ενέργειας του σώματος m_1 που μεταβιβάστηκε στο σώμα μάζας m_2 είναι:

$$e\% = \frac{K_2'}{K_1}100\% = \frac{48}{64}100\% \Rightarrow e\% = 75\%$$

δ) <u>Φαινόμενο 3^0</u>: Κίνηση του m_2 από το Γ στο Δ.

Εφαρμόζουμε το θεώρημα μεταβολής κινητικής ενέργειας.

$$K_{\Delta} - K_{\Gamma} = W_{B_2} + W_N + W_{T_2} \Rightarrow$$

$$0 - \frac{1}{2} m_2 \upsilon'^2_2 = 0 + 0 + T_2 d\sigma\upsilon\nu 180^0 \xrightarrow{T_2 = \mu m_2 g}$$

$$-\frac{1}{2} m_2 \upsilon'^2_2 = -\mu m_2 g d \Rightarrow$$

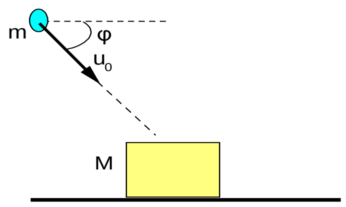
$$-\frac{1}{2} \upsilon'^2_2 = -\mu g d \Rightarrow$$

$$d = \frac{\upsilon'^2_2}{2\mu g} = \frac{16}{2 \cdot 0,2 \cdot 10} m \Rightarrow$$

$$d = 4m$$

Άσκηση 5.

Ένας ξύλινος κύβος μάζας M=0,9kg ηρεμεί πάνω σε λείο οριζόντιο επίπεδο. Ένα μικρό βλήμα μάζας m=0,1kg το οποίο, λίγο πριν να συγκρουστεί, κινείται με ταχύτητα μέτρου u_0=50m/s, σχηματίζοντας με τον ορίζοντα γωνία φ, σφηνώνεται στον κύβο. Να υπολογίσετε:



α) την ταχύτητα V του συσσωματώματος.

β) τη θερμότητα που αναπτύχθηκε κατά την κρούση.

γ) το ποσοστό της μηχανικής ενέργειας του βλήματος το οποίο μεταφέρθηκε στον κύβο.

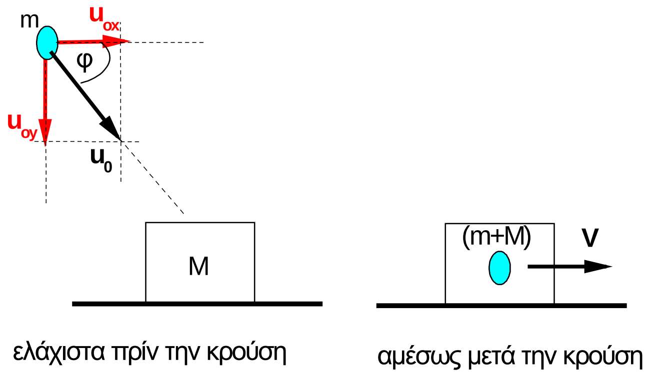
δ) τη μεταβολή της ορμής του συστήματος των σωμάτων κατά την κρούση.

Δίνονται: ημφ=0,6, συνφ=0,8.

<u>Λύση</u>

α) Η κρούση είναι πλάγια και πλαστική ενώ το συσσωμάτωμα μετά την κρούση θα κινηθεί οριζόντια. Στην οριζόντια διεύθυνση δεν ασκούνται εξωτερικές δυνάμεις άρα η ορμή του συστήματος των σωμάτων θα διατηρείται σε αυτή τη διεύθυνση. Στην κατακόρυφη διεύθυνση ο κύβος δέχεται δύναμη από το δάπεδο άρα σε αυτή τη διεύθυνση η ορμή του συστήματος των σωμάτων δεν διατηρείται. Για να εξετάσουμε την ορμή του συστήματος ανά άξονα αναλύουμε την ορμή του m ελάχιστα πριν την κρούση σε κάθετες συνιστώσες:

$$\begin{cases} p_{m(x)} = m u_o συνφ \\ p_{m(y)} = m u_o ημφ \end{cases}$$



Στην οριζόντια διεύθυνση η διατήρηση της ορμής του συστήματος των σωμάτων γράφεται:

$$\vec{p}_{m(x)} + \vec{p}_{M(x)} = \vec{p}'_{(m+M)(x)} \Rightarrow m u_o συνφ = (m+M)V \Rightarrow V = \frac{m u_o συνφ}{m+M} \Rightarrow V = 4\frac{m}{s}$$

β) Το ποσό θερμότητας που αναπτύσσεται ισούται με τη μείωση της μηχανικής ενέργειας του συστήματος των σωμάτων κατά την κρούση τους. Δηλαδή:

$$Q = E_{\mu\eta\chi(\alpha\rho\chi)} - E_{\mu\eta\chi\ (\tau\varepsilon\lambda)} \Rightarrow Q = K_{(\alpha\rho\chi)} - K_{\tau\varepsilon\lambda} = \frac{1}{2}mu_0^2 - \frac{1}{2}(m+M)V^2 \Rightarrow Q = 117J$$

γ) Ο κύβος αποκτά κατά την κρούση ενέργεια: $\frac{1}{2}MV^2$ άρα το ζητούμενο ποσοστό είναι:

$$\Pi\% = \frac{\frac{1}{2}MV^2}{\frac{1}{2}mu_0^2}\cdot 100\% = \frac{\frac{1}{2}\cdot 0,9\cdot 4^2\ J}{\frac{1}{2}\cdot 0,1\cdot 50^2\ J}\cdot 100\% = 5,76\%$$

δ) Η ορμή του συστήματος διατηρείται στον οριζόντιο άξονα όπως εξηγήσαμε προηγουμένως. Αντίθετα στον κατακόρυφο άξονα δε διατηρείται. Συνεπώς:

$$\Delta\vec{p} = \Delta\vec{p}_y = \vec{p}_{y(m+M)} - (\vec{p}_{y(m)\alpha\rho\chi} + \vec{p}_{y(M)\alpha\rho\chi}) \Rightarrow \Delta\vec{p} = -\vec{p}_{y(m)\alpha\rho\chi} \Rightarrow \Delta p = -mu_o\eta\mu\varphi \Rightarrow$$

$$\Delta p = -3kg\frac{m}{s}$$

Άσκηση 6.

Ένας ξύλινος κύβος μάζας $M = 4,5\text{kg}$ είναι δεμένος στο άκρο ενός αβαρούς και μη εκτατού νήματος μήκους $L = 0,2\text{m}$, το άλλο άκρο του οποίου είναι δεμένο σε οροφή. Ο κύβος ηρεμεί με το νήμα κατακόρυφο. Ένα βλήμα μάζας $m = 0,5\text{kg}$ κινείται οριζόντια με ταχύτητα $u_0 = 20\text{m/s}$ και συγκρούεται κεντρικά και πλαστικά με τον κύβο. Να υπολογίσετε:

α) το μέτρο της ταχύτητα του συσσωματώματος αμέσως μετά την κρούση.

β) το ποσό θερμότητας που αναπτύσσεται κατά την κρούση των σωμάτων.

γ) τη μέγιστη ανύψωση που επιτυγχάνει το συσσωμάτωμα μετά την κρούση.

δ) την τάση του νήματος αμέσως μετά την κρούση των σωμάτων.

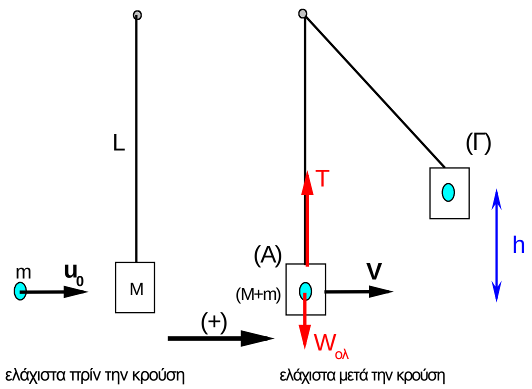
Δίνεται $g = 10\ \text{m/s}^2$.

Λύση

α) Κατά την κρούση η ορμή του συστήματος των σωμάτων διατηρείται σταθερή, άρα:

$$\vec{p}_m + \vec{p}_M = \vec{p}'_{(m+M)} \Rightarrow$$

$$mu_0 + 0 = (m+M)V \Rightarrow V = 2\frac{m}{s}$$



β) Το ποσό θερμότητας Q που αναπτύσσεται κατά την κρούση είναι ίσο με τη μείωση της μηχανικής ενέργειας του συστήματος των σωμάτων. Άρα: $Q = E_{μηχ(αρχ)} - E_{μηχ\ (τελ)}$

Η κρούση διαρκεί ελάχιστα, άρα η δυναμική ενέργεια του συστήματος δε μεταβάλλεται. Συνεπώς:

$$Q = K_{αρχ} - K_{τελ} = \frac{1}{2}mu_0^2 - \frac{1}{2}(m+M)V^2 \Rightarrow Q = 90\text{J}$$

γ) Στο σχήμα η θέση (Γ) είναι το υψηλότερο σημείο που φτάνει το συσσωμάτωμα μετά την κρούση, άρα η ταχύτητα του σε αυτή τη θέση μηδενίζεται στιγμιαία. Εφαρμόζουμε το Θεώρημα Μεταβολής Κινητικής Ενέργειας από τη θέση (Α) έως τη θέση (Γ):

$$K_{(m+M)(Γ)} - K_{(m+M)(A)} = W_w + W_T \qquad (1)$$

Η τάση του νήματος είναι κάθετη στην τροχιά του συσσωματώματος άρα W_T=0. Η (1) γράφεται:

$$0-\frac{1}{2}(m+M)V^2=-(m+M)gh \Rightarrow h=\frac{V^2}{2g} \Rightarrow \ h=0,2m \quad (2)$$

Άρα το νήμα γίνεται οριζόντιο, αφού h=L.

δ) Το συσσωμάτωμα μετά την κρούση διαγράφει τμήμα κυκλικής τροχιάς, άρα η συνισταμένη των δυνάμεων που δέχεται το συσσωμάτωμα στην ακτινική διεύθυνση έχει το ρόλο της κεντρομόλου δύναμης. Συνεπώς αμέσως μετά την κρούση θα ισχύει:

$$\Sigma F=F_\kappa \Rightarrow T-W_{o\lambda}=(m+M)\frac{V^2}{L} \Rightarrow T=(m+M)g+(m+M)\frac{V^2}{L} \Rightarrow T=150N$$

Άσκηση 7.

Μικρή σφαίρα $Σ_1$, μάζας $m_1 = 2kg$ που κινείται πάνω σε λείο επίπεδο με ταχύτητα $u_1 = 10m/s$ συγκρούεται κεντρικά και ελαστικά με ακίνητη σφαίρα $Σ_2$ μάζας $m_2 = 8kg$. Να υπολογίσετε:

α) τις ταχύτητες των σωμάτων μετά την κρούση.

β) τη μεταβολή της ορμής κάθε σφαίρας καθώς και τη μεταβολή της ορμής του συστήματος των σφαιρών.

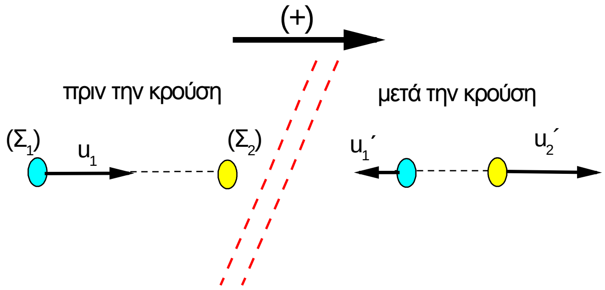
γ) τη μεταβολή της κινητικής ενέργειας του σώματος $Σ_1$.

δ) το ποσοστό επί τοις εκατό της αρχικής κινητικής ενέργειας της σφαίρας $Σ_1$ που μεταφέρθηκε κατά την κρούση στη σφαίρα $Σ_2$.

Λύση

α) Στην περίπτωση αυτή αντιμετωπίζουμε την κεντρική ελαστική κρούση δύο σφαιρών, εκ των οποίων η μία είναι αρχικά ακίνητη. Στην περίπτωση αυτή οι εξισώσεις που εφαρμόζουμε είναι:

$$\begin{cases} u_1' = \dfrac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} u_1 \\ u_2' = \dfrac{2m_1}{m_1 + m_2} u_1 \end{cases} \Rightarrow$$



$$\begin{cases} u_1' = \dfrac{2-8}{8+2} \cdot 10 \dfrac{m}{s} \\ u_2' = \dfrac{2 \cdot 2}{8+2} \cdot 10 \dfrac{m}{s} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u_1' = -6 \dfrac{m}{s} \\ u_2' = 4 \dfrac{m}{s} \end{cases}$$

Το πρόσημο (-) της u_1' δηλώνει ότι η σφαίρα $Σ_1$ μετά την κρούση κινείται προς τα αριστερά.

β) Η μεταβολή της ορμής της σφαίρας $Σ_1$ υπολογίζεται ως εξής:

$$\Delta\vec{P_1} = \vec{P_1'} - \vec{P_1} \Rightarrow \Delta\vec{P_1} = m_1\vec{u_1'} - m_1\vec{u_1} \Rightarrow \Delta P_1 = 2kg \cdot \left(-6\frac{m}{s} - 10\frac{m}{s}\right) \Rightarrow \Delta P_1 = -32kg \cdot \frac{m}{s}$$

Αντίστοιχα για τη μεταβολή της σφαίρας $Σ_2$ έχουμε:

$$\Delta\vec{P_2} = \vec{P_2'} - \vec{P_2} \Rightarrow \Delta\vec{P_2} = m_2\vec{u_2'} - 0 \Rightarrow \Delta P_2 = 8kg \cdot 4\frac{m}{s} = 32kg \cdot \frac{m}{s}$$

Για τη μεταβολή της ορμής του συστήματος των σφαιρών έχουμε:

$$\Delta\overrightarrow{P_{ολ}} = \Delta\overrightarrow{P_1} + \Delta\overrightarrow{P_2} \Rightarrow \Delta\overrightarrow{P_{ολ}} = -32kg\cdot\frac{m}{s} + 32kg\cdot\frac{m}{s} \Rightarrow \Delta\overrightarrow{P_{ολ}} = 0$$

Το αποτέλεσμα είναι αναμενόμενο αφού η ορμή του συστήματος των σωμάτων διατηρείται, άρα θα πρέπει:

$$\Delta\overrightarrow{P_{ολ}} = 0$$

γ) Η κινητική ενέργεια της σφαίρας $Σ_1$ μεταβλήθηκε κατά:

$$\Delta K_1 = K_1' - K_1 = \frac{1}{2}m_1 u_1'^{\,2} - \frac{1}{2}m_1 u_1^2 \Rightarrow$$

$$\Delta K_1 = \frac{1}{2}\cdot 2kg\cdot\left[\left(-6\frac{m}{s}\right)^2 - \left(10\frac{m}{s}\right)^2\right] \Rightarrow \Delta K_1 = -64J$$

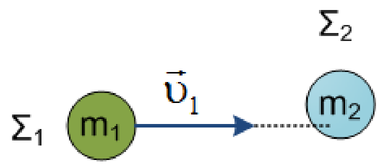
δ) Η κρούση είναι ελαστική άρα η μείωση της ενέργειας του $Σ_1$ κατά την κρούση ισούται με την ενέργεια που μεταφέρεται στο $Σ_2$. Το ζητούμενο ποσοστό ισούται με:

$$Π\% = \frac{K_1 - K'_1}{K_1}\cdot 100\% = \frac{-\Delta K_1}{\frac{1}{2}m_1 u_1^2}\cdot 100\% = \frac{64J}{100J}\cdot 100\% \Rightarrow Π\% = 64\%$$

ΘΕΜΑ Δ

Πρόβλημα 1.

Σφαίρα Σ$_1$ μάζας $m_1 = m$ κινείται με ταχύτητα μέτρου $\upsilon_1 = 6m/s$ και συγκρούεται με άλλη σφαίρα Σ$_2$ μάζας $m_2 = 2m$, που είναι αρχικά ακίνητη. Η κρούση είναι έκκεντρη και ελαστική και η χρονική διάρκεια της κρούσης θεωρείται αμελητέα. Μετά την κρούση, η σφαίρα Σ$_1$ κινείται με ταχύτητα $\vec{\upsilon}'_1$ που έχει διεύθυνση κάθετη στη διεύθυνση της $\vec{\upsilon}_1$. Να υπολογιστεί:



α) το μέτρο και η διεύθυνση της ταχύτητας $\vec{\upsilon}'_2$ της σφαίρας Σ$_2$, μετά την κρούση.

β) το μέτρο της ταχύτητας της σφαίρας Σ$_1$, μετά την κρούση.

γ) το ποσοστό της αρχικής κινητικής ενέργειας της σφαίρας μάζας m_1 που μεταβιβάστηκε στη σφαίρα μάζας m_2 λόγω της κρούσης.

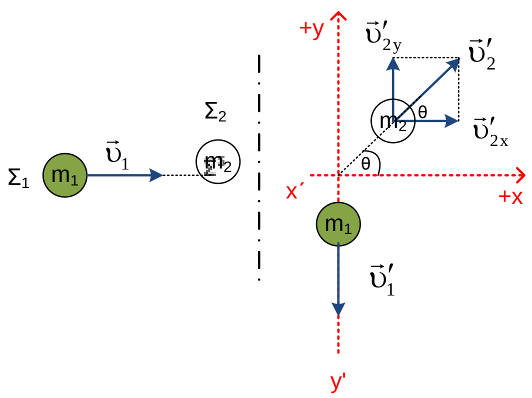
δ) το μέτρο της μεταβολής της ορμής της σφαίρας Σ$_1$ κατά τη κρούση, αν $m_2 = 2kg$.

Δίνεται η μαθηματική ιδιότητα $\eta\mu^2\theta + \sigma\upsilon\nu^2\theta = 1$.

<u>Λύση</u>

α) Στο διπλανό σχήμα φαίνεται η πορεία των δύο σφαιρών μετά την έκκεντρη κρούση. Αναλύουμε την ταχύτητα $\vec{\upsilon}'_2$ σε δύο συνιστώσες οι οποίες έχουν μέτρα:

$$\upsilon'_{2x} = \upsilon'_2 \sigma\upsilon\nu\theta \quad \text{και} \quad \upsilon'_{2y} = \upsilon'_2 \eta\mu\theta$$



Εφαρμόζουμε την αρχή διατήρησης της ορμής για κάθε άξονα χωριστά:

x΄x: $\vec{p}^{\,\pi\rho\iota\nu}_{o\lambda.x} = \vec{p}^{\,\mu\varepsilon\tau\acute{\alpha}}_{o\lambda.x} \Rightarrow \vec{p}^{\,\pi\rho\iota\nu}_{1.x} + \vec{p}^{\,\pi\rho\iota\nu}_{2.x} = \vec{p}^{\,\mu\varepsilon\tau\acute{\alpha}}_{1.x} + \vec{p}^{\,\mu\varepsilon\tau\acute{\alpha}}_{2.x}$

Επιλέγοντας θετική κατεύθυνση προς τα δεξιά, η παραπάνω εξίσωση γράφεται αλγεβρικά:

$$m_1\upsilon_1 + 0 = 0 + m_2\upsilon'_{2x} \Rightarrow m_1\upsilon_1 = m_2\upsilon'_{2x} \xrightarrow{m_2=2m_1}$$
$$m_1\upsilon_1 = 2m_1\upsilon'_{2x} \Rightarrow \upsilon_1 = 2\upsilon'_2\sigma\upsilon\nu\theta \qquad (1)$$

y΄y: $\vec{p}^{\,\pi\rho\iota\nu}_{o\lambda.y} = \vec{p}^{\,\mu\varepsilon\tau\acute{\alpha}}_{o\lambda.y} \Rightarrow \vec{p}^{\,\pi\rho\iota\nu}_{1.y} + \vec{p}^{\,\pi\rho\iota\nu}_{2.y} = \vec{p}^{\,\mu\varepsilon\tau\acute{\alpha}}_{1.y} + \vec{p}^{\,\mu\varepsilon\tau\acute{\alpha}}_{2.y}$

Επιλέγοντας θετική κατεύθυνση προς τα πάνω, η παραπάνω εξίσωση γράφεται αλγεβρικά:

$$0 = m_2\upsilon'_{2y} - m_1\upsilon'_1 \Rightarrow m_1\upsilon'_1 = m_2\upsilon'_{2y} \xrightarrow{m_2=2m_1}$$

$$m_1\upsilon'_1 = 2m_1\upsilon'_{2y} \Rightarrow \upsilon'_1 = 2\upsilon'_{2y} \Rightarrow \upsilon'_1 = 2\upsilon'_2\eta\mu\theta \quad (2)$$

Υψώνουμε τις σχέσεις (1) και (2) στο τετράγωνο και τις προσθέτουμε κατά μέλη:

$$\upsilon_1^2 + \upsilon_1'^2 = 4\upsilon_2'^2\sigma\upsilon\nu^2\theta + 4\upsilon_2'^2\eta\mu^2\theta \Rightarrow \upsilon_1^2 + \upsilon_1'^2 = 4\upsilon_2'^2(\sigma\upsilon\nu^2\theta + \eta\mu^2\theta) \Rightarrow \upsilon_1^2 + \upsilon_1'^2 = 4\upsilon_2'^2 \quad (3)$$

Επειδή η κρούση είναι ελαστική η κινητική ενέργεια του συστήματος διατηρείται.

$$K_{ολ}^{πριν} = K_{ολ}^{μετά} \Rightarrow K_1^{πριν} + K_2^{πριν} = K_1^{μετά} + K_2^{μετά} \Rightarrow \frac{1}{2}m\upsilon_1^2 + 0 = \frac{1}{2}m\upsilon_1'^2 + \frac{1}{2}2m\upsilon_2'^2 \Rightarrow$$

$$\upsilon_1^2 = \upsilon_1'^2 + 2\upsilon_2'^2 \quad (4)$$

Προσθέτουμε κατά μέλη τις σχέσεις (4) και (3):

$$2\upsilon_1^2 + \upsilon_1'^2 = \upsilon_1'^2 + 6\upsilon_2'^2 \Rightarrow \upsilon_1^2 = 3\upsilon_2'^2 \Rightarrow \upsilon'_2 = \frac{\upsilon_1}{\sqrt{3}} \Rightarrow \upsilon'_2 = \frac{6\frac{m}{s}}{\sqrt{3}} \Rightarrow \upsilon'_2 = \frac{6\sqrt{3}}{3}\frac{m}{s} \Rightarrow \upsilon'_2 = 2\sqrt{3}\frac{m}{s}$$

$$(1) \Rightarrow \sigma\upsilon\nu\theta = \frac{\upsilon_1}{2\upsilon'_2} \Rightarrow \sigma\upsilon\nu\theta = \frac{6\frac{m}{s}}{4\sqrt{3}\frac{m}{s}} \Rightarrow \sigma\upsilon\nu\theta = \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \theta = 30^o$$

β) Αφαιρούμε κατά μέλη τις σχέσεις (3) και (4):

$$\upsilon_1'^2 = 2\upsilon_2'^2 - \upsilon_1'^2 \Rightarrow 2\upsilon_1'^2 = 2\upsilon_2'^2 \Rightarrow \upsilon_1'^2 = \upsilon_2'^2 \Rightarrow \upsilon'_1 = \upsilon'_2 \Rightarrow \upsilon'_1 = \upsilon'_2 = 2\sqrt{3}\frac{m}{s}$$

γ) Επειδή η σφαίρα μάζας m_2 είναι ακίνητη πριν τη κρούση, το ποσοστό της αρχικής κινητικής ενέργειας της σφαίρας μάζας m_1 που μεταβιβάστηκε στη σφαίρα μάζας m_2 λόγω της κρούσης είναι:

$$\frac{K_2^{μετά}}{K_1^{πριν}} = \frac{\frac{1}{2}m_2\upsilon_2'^2}{\frac{1}{2}m_1\upsilon_1^2} = \frac{2m_1\upsilon_2'^2}{m_1\upsilon_1^2} = \frac{2\upsilon_2'^2}{\upsilon_1^2} = \frac{2\cdot\left(2\sqrt{3}\frac{m}{s}\right)^2}{\left(6\frac{m}{s}\right)^2} = \frac{2}{3} \quad \text{ή} \quad 66{,}7\%$$

δ) Εφαρμόζουμε την αρχή διατήρησης της ορμής: $\vec{p}_{ολ}^{πριν} = \vec{p}_{ολ}^{μετά} \Rightarrow$

$$\vec{p}_1^{πριν} + \vec{p}_2^{πριν} = \vec{p}_1^{μετά} + \vec{p}_2^{μετά} \Rightarrow \vec{p}_1^{πριν} = \vec{p}_1^{μετά} + \vec{p}_2^{μετά} \Rightarrow$$

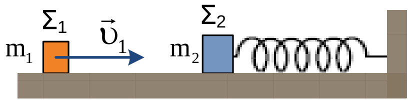
$$\vec{p}_1^{\,μετά} - \vec{p}_1^{\,πριν} = -\vec{p}_2^{\,μετά} \Rightarrow \Delta\vec{p}_1 = -\vec{p}_2^{\,μετά} \Rightarrow \Delta\vec{p}_1 = -m_2\vec{υ}_2'$$

Δηλαδή η μεταβολή της ορμής της σφαίρας $Σ_1$ έχει αντίθετη κατεύθυνση από την ταχύτητα $\vec{υ}_2'$ και μέτρο $\Delta p_1 = m_2 υ_2'$

Με αντικατάσταση m_2=2kg και $υ_2' = 2\sqrt{3}\,\frac{m}{s}$ προκύπτει:

$$\Delta p_1 = 2kg \cdot 2\sqrt{3}\,\frac{m}{s} \Rightarrow \Delta p_1 = 4\sqrt{3}\,\frac{kg \cdot m}{s}$$

Πρόβλημα 2.



Σώμα Σ_2 μάζας $m_2 = 4kg$ βρίσκεται ακίνητο σε λείο οριζόντιο επίπεδο και είναι δεμένο στο άκρο οριζόντιου ελατηρίου, το άλλο άκρο του οποίου είναι ακλόνητα στερεωμένο. Ένα δεύτερο σώμα Σ_1 μάζας $m_1 = 1kg$ κινείται οριζόντια με ταχύτητα μέτρου $\upsilon_1 = 10m/s$ και συγκρούεται μετωπικά και ελαστικά με το Σ_2.

Να υπολογίσετε:

α) τις ταχύτητες των δύο σωμάτων μετά την κρούση.

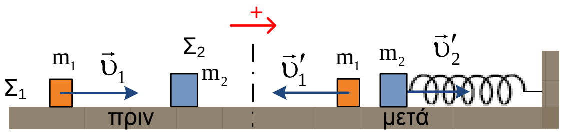
β) το μέτρο της μεταβολής της ορμής του σώματος Σ_2.

γ) το ποσοστό της κινητικής ενέργειας του σώματος Σ_1 που μεταφέρθηκε στο σώμα Σ_2.

δ) τη μέγιστη συσπείρωση Δl του ελατηρίου.

Δίνεται η σταθερά του ελατηρίου $k = 100\dfrac{N}{m}$

<u>Λύση</u>



α) Ορίζουμε θετική φορά προς τα δεξιά. Η κρούση είναι κεντρική και ελαστική, το σώμα Σ_1 έχει ταχύτητα μέτρου υ_1=10m/s και το σώμα Σ_2 είναι αρχικά ακίνητο. Άρα η αλγεβρική τιμή της ταχύτητας υ_1' του σώματος Σ_1 μετά την κρούση δίνεται από τον τύπο:

$$\upsilon_1' = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2}\upsilon_1 \qquad (1)$$

και η αλγεβρική τιμή της ταχύτητας υ_2' του σώματος Σ_2 μετά την κρούση δίνεται από τον τύπο: $\upsilon_2' = \dfrac{2m_1}{m_1 + m_2}\upsilon_1$ (2)

Με αντικατάσταση προκύπτει: $\upsilon_1' = \dfrac{1-4}{1+4}10\dfrac{m}{s} \Rightarrow \upsilon_1' = \dfrac{-3}{5}10\dfrac{m}{s} \Rightarrow \upsilon_1' = -6\dfrac{m}{s}$ (έχει φορά προς τα αριστερά όπως στο σχήμα)

και $\upsilon_2' = \dfrac{2 \cdot 1}{5}10\dfrac{m}{s} \Rightarrow \upsilon_2' = 4\dfrac{m}{s}$

β) Η μεταβολή της ορμής του σώματος Σ_2: $\Delta\vec{p}_2 = \vec{p}_2^{\,\mu\varepsilon\tau\acute{\alpha}} - \vec{p}_2^{\,\pi\rho\iota\nu}$

Επειδή όλα τα διανύσματα των ορμών έχουν την ίδια διεύθυνση, επιλέγοντας θετική κατεύθυνση προς τα δεξιά, η παραπάνω εξίσωση γράφεται αλγεβρικά:

$$\Delta p_2 = m_2 \upsilon_2' - m_2 \upsilon_2 \xrightarrow{\upsilon_2 = 0} \Delta p_2 = m_2 \upsilon_2' - 0 \Rightarrow \Delta p_2 = m_2 \upsilon_2'$$

Με αντικατάσταση προκύπτει: $\Delta p_2 = 4\text{kg} \cdot 4\frac{\text{m}}{\text{s}} \Rightarrow \Delta p_2 = 16\frac{\text{kg}\cdot\text{m}}{\text{s}}$

Επειδή η αλγεβρική τιμή της μεταβολής της ορμής είναι θετική, ταυτίζεται με το μέτρο.

γ) Η κινητική ενέργεια του $Σ_2$ μετά την κρούση είναι: $K_2^{μετά} = \frac{1}{2} m_2 \upsilon_2'^2$

Επειδή το σώμα $Σ_2$ αρχικά ήταν ακίνητο, το ποσοστό της κινητικής ενέργειας του σώματος $Σ_1$ που μεταφέρθηκε στο σώμα $Σ_2$, είναι:

$$\frac{K_2^{μετά}}{K_1^{πριν}} = \frac{\frac{1}{2} m_2 \upsilon_2'^2}{\frac{1}{2} m_1 \upsilon_1^2} = \frac{\frac{1}{2} 4\text{kg}\left(4\frac{\text{m}}{\text{s}}\right)^2}{\frac{1}{2} 1\text{kg}\left(10\frac{\text{m}}{\text{s}}\right)^2} = \frac{4\cdot 16}{100} = 0,64 \quad \text{ή} \quad 64\%$$

δ) Κατά τη συμπίεση του ελατηρίου όλη η κινητική ενέργεια του σώματος $Σ_2$ μετατρέπεται σε δυναμική ενέργεια στο ελατήριο:

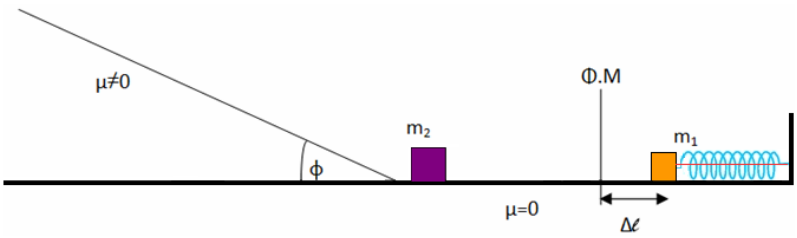
$$K = U_{ελ} \Rightarrow \frac{1}{2} m_2 \upsilon_2'^2 = \frac{1}{2} k \Delta l^2 \Rightarrow \Delta l = \upsilon_2' \sqrt{\frac{m_2}{k}}$$

και με αντικατάσταση $m_2 = 4\text{kg}$, $\upsilon_2' = 4\frac{\text{m}}{\text{s}}$ και $k = 100\frac{\text{N}}{\text{m}}$ προκύπτει:

$$\Delta l = 4\frac{\text{m}}{\text{s}} \cdot \sqrt{\frac{4\text{kg}}{100\frac{\text{N}}{\text{m}}}} \Rightarrow \Delta l = 4\frac{2}{10}\text{m} \Rightarrow \Delta l = 0,8 \quad \text{m}$$

Πρόβλημα 3.

Το σώμα μάζας $m_1 = 1kg$ του παρακάτω σχήματος, ακουμπάει χωρίς να έχει προσδεθεί στο ελεύθερο άκρο οριζόντιου ιδανικού ελατηρίου σταθεράς $k = 10^4 N/m$. Το ελατήριο είναι συμπιεσμένο σε σχέση με το φυσικό του μήκος κατά $\Delta\ell = 0{,}1m$ με τη βοήθεια νήματος. Κάποια στιγμή το νήμα κόβεται και το σώμα μάζας m_1 συγκρούεται κεντρικά και ελαστικά με το αρχικά ακίνητο σώμα μάζας $m_2 = 4kg$. Το οριζόντιο επίπεδο είναι λείο. Το m_2 μετά την κρούση κινείται σε μη λείο κεκλιμένο επίπεδο γωνίας κλίσης $\varphi = 30^0$ που παρουσιάζει τριβές με συντελεστή τριβής ολίσθησης $\mu = \frac{\sqrt{3}}{5}$.



Α. Να υπολογίσετε:

α) το μέτρο της ταχύτητας του σώματος m_1 λίγο πριν την κρούση του με το σώμα m_2.

β) τις ταχύτητες των σωμάτων αμέσως μετά την ελαστική τους κρούση.

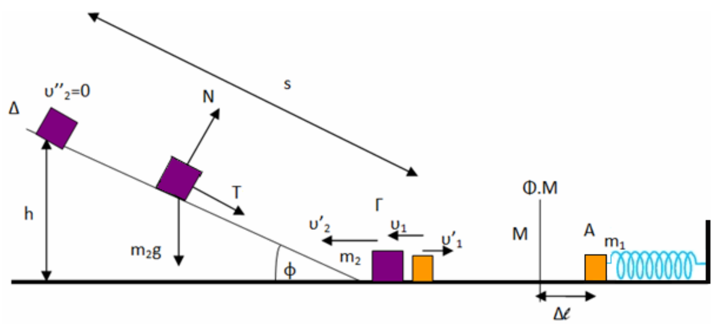
γ) το διάστημα που θα διανύσει το m_2 μέχρι να σταματήσει.

Β. Θα επιστρέψει το m_2 στη βάση του κεκλιμένου επιπέδου, αν υποτεθεί ότι το μήκος του κεκλιμένου επιπέδου είναι αρκετά μεγάλο για την κίνηση του σώματος;

Δίνεται η επιτάχυνση βαρύτητας $g = 10m/s^2$.

<u>Λύση</u>

Α.



α) <u>Φαινόμενο 1^0</u>: Ταλάντωση του m_1.

Το σώμα μάζας m_1 για όσο χρόνο βρίσκεται σε επαφή με το ελατήριο εκτελεί απλή αρμονική ταλάντωση. Η επαφή του με το ελατήριο χάνεται στο φυσικό μήκος που συμπίπτει με τη θέση ισορροπίας της ταλάντωσης.

Εφαρμόζουμε την Αρχή Διατήρησης Ενέργειας Ταλάντωσης.

$$E_{ολ}(A)=E_{ολ}(M)\Rightarrow$$
$$K(A)+U(A)=K(M)+U(M)\Rightarrow$$
$$0+\frac{1}{2}D\left(\Delta l\right)^2=\frac{1}{2}m_1\upsilon_1^2+0\xrightarrow{D=k}$$
$$\upsilon_1=\sqrt{\frac{k}{m_1}}\Delta l\Rightarrow$$
$$\upsilon_1=\sqrt{\frac{10^4}{1}}0{,}1m/s\Rightarrow$$
$$\upsilon_1=10m/s$$

β) <u>Φαινόμενο 2^0</u>: Κρούση του m_1 με το m_2. Θετική φορά λαμβάνεται αυτή προς τα αριστερά.

Επειδή η κρούση των δύο σωμάτων είναι κεντρική και ελαστική ισχύουν οι τύποι:

$$\upsilon_1'=\frac{m_1-m_2}{m_1+m_2}\upsilon_1 \text{ και } \upsilon_2'=\frac{2m_1}{m_1+m_2}\upsilon_1$$

Με αντικατάσταση έχουμε:

$$\upsilon_1'=\frac{m_1-m_2}{m_1+m_2}\upsilon_1=\frac{1-4}{1+4}10m/s\Rightarrow \upsilon_1'=-6m/s$$

$$\upsilon_2'=\frac{2m_1}{m_1+m_2}\upsilon_1=\frac{2\cdot 1}{1+4}10m/s\Rightarrow \upsilon_2'=4m/s$$

γ) <u>Φαινόμενο 3^0</u>: Κίνηση του m_2 στο κεκλιμένο επίπεδο.

Εφαρμόζουμε το θεώρημα μεταβολής της κινητικής ενέργειας για το m_2 από τη θέση Γ έως τη θέση Δ.

$$K_\Delta - K_\Gamma = W_{m_2 g} + W_N + W_{T\rho} \Rightarrow$$

$$0 - \frac{1}{2} m_2 \upsilon'^2_2 = -m_2 g h + 0 + T \cdot s \cdot \sigma\upsilon\nu 180^0 \xrightarrow{h = s\eta\mu\varphi}$$

$$0 - \frac{1}{2} \cancel{m}_2 \upsilon'^2_2 = -\cancel{m}_2 g \cdot s \cdot \eta\mu\varphi + 0 - \mu \cancel{m}_2 g \cdot s \cdot \sigma\upsilon\nu\varphi \Rightarrow$$

$$\frac{1}{2} \upsilon'^2_2 = gs\left(\eta\mu\varphi + \mu\sigma\upsilon\nu\varphi\right) \Rightarrow$$

$$s = \frac{\upsilon'^2_2}{2g\left(\eta\mu\varphi + \mu\sigma\upsilon\nu\varphi\right)} \Rightarrow$$

$$s = \frac{16}{2 \cdot 10\left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{5}\frac{\sqrt{3}}{2}\right)} m \Rightarrow$$

$$s = \frac{16}{2 \cdot 10\left(\frac{8}{10}\right)} m \Rightarrow$$

$$s = 1m$$

Β. Όταν το σώμα σταματήσει, η τριβή ολίσθησης μετατρέπεται ακαριαία σε στατική τριβή και αντιτίθεται στην συνιστώσα $m_2 g_x$ που έχει την τάση να ξαναθέσει σε κίνηση το σώμα m_2.

Αν η $m_2 g_x$ είναι μεγαλύτερη της μέγιστης τιμής της στατικής τριβής το σώμα θα επανέλθει στη βάση του κεκλιμένου επιπέδου.

Αν η $m_2 g_x$ είναι μικρότερη ή ίση της μέγιστης τιμής της στατικής τριβής το σώμα δεν θα επανέλθει στη βάση του κεκλιμένου επιπέδου και θα σταματήσει οριστικά.

Σε αυτή την περίπτωση στο σώμα θα ασκείται η στατική τριβή που θα είναι ίση με το $m_2 g_x$ και όχι η μέγιστη τιμή της στατικής τριβής.

Έλεγχος: $m_2 g_x = m_2 g \eta\mu\varphi = 4 \cdot 10 \cdot \frac{1}{2} N = 20N$

$$T_{\sigma\tau}(max) = \mu m_2 g \sigma\upsilon\nu\varphi = \frac{\sqrt{3}}{5} 4 \cdot 10 \frac{\sqrt{3}}{2} = 12N$$

Αφού η $m_2 g_x$ είναι μεγαλύτερη της μέγιστης τιμής της στατικής τριβής το σώμα θα επανέλθει στη βάση του κεκλιμένου επιπέδου.

Πρόβλημα 4.

Ένα σώμα μάζας $M = 35\text{kg}$ ισορροπεί δεμένο στο κάτω άκρο κατακόρυφου ιδανικού ελατηρίου σταθεράς $k = 20\text{N/m}$, το άλλο άκρο του οποίου είναι ακλόνητα στερεωμένο σε οροφή. Κάποια στιγμή ένα βλήμα μάζας m=5 kg βάλλεται από απόσταση $h = 3,2\text{m}$ κάτω από το σώμα M με αρχική ταχύτητα μέτρου $\upsilon_0 = 16\text{m/s}$ και με φορά προς τα πάνω και συγκρούεται πλαστικά με το σώμα μάζας M. Να υπολογίσετε:

α) Το μέτρο της ταχύτητας του βλήματος λίγο πριν την κρούση.

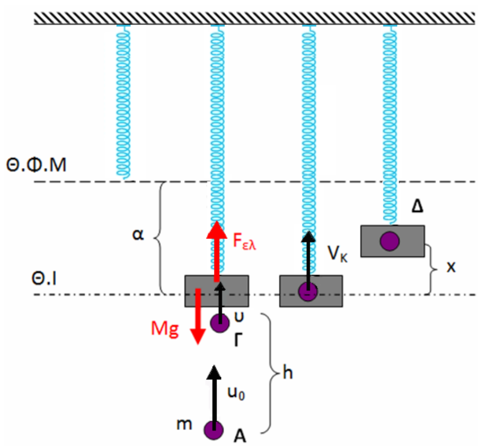
β) Το μέτρο της ταχύτητας του συσσωματώματος αμέσως μετά την κρούση.

γ) Τη θερμότητα που αναπτύχθηκε κατά την διάρκεια της κρούσης.

δ) Τη μέγιστη συσπείρωση του ελατηρίου από την αρχική του θέση.

Δίνεται η επιτάχυνση της βαρύτητας $g = 10\text{m/s}^2$.

<u>Λύση</u>



$$\Sigma F_{\Theta.I} = 0 \Rightarrow Mg - F_{\varepsilon\lambda} = 0 \Rightarrow Mg = k\alpha \Rightarrow$$

$$\alpha = \frac{Mg}{k} \quad (*)$$

α) <u>Φαινόμενο 1^0:</u> Κίνηση του m από το A προς το Γ.

Θ.Μ.Κ.Ε. για το m:

$$K_\Gamma - K_A = W_{mg} \Rightarrow$$

$$\frac{1}{2}m\upsilon^2 - \frac{1}{2}m\upsilon_0^2 = -mgh \Rightarrow$$

$$\upsilon^2 = \upsilon_0^2 - 2gh = \sqrt{256 - 2\cdot 10\cdot 3,2}\text{m/s} \Rightarrow \upsilon = \sqrt{64\cdot 4 - 64}\text{m/s} \Rightarrow \upsilon = \sqrt{64\cdot 3}\text{m/s} \Rightarrow$$

$$\upsilon = 8\sqrt{3}\text{m/s} \quad (1)$$

β) <u>Φαινόμενο 2^0:</u> Πλαστική κρούση m-M.

Α.Δ.Ο (λίγο πριν –λίγο μετά την κρούση)

$$\vec{p}_{ολ}\left(\text{πριν}\right)=\vec{p}_{ολ}\left(\text{μετά}\right)\Rightarrow$$
$$\vec{p}_m+\vec{p}_M=\vec{p}_m^{'}+\vec{p}_M^{'}$$

Επιλέγοντας θετική φορά προς τα πάνω, γράφουμε την παραπάνω σχέση αλγεβρικά:

$$m\upsilon=(m+M)V_K\Rightarrow V_K=\frac{mu}{m+M}\Rightarrow V_K=\frac{40\sqrt{3}}{40}m/s\Rightarrow V_K=\sqrt{3}m/s\quad(2)$$

γ) $Q=\left|\Delta K_{ολ}\right|=K_{ολ}(\alpha\rho\chi)-K_{ολ}(\tau\varepsilon\lambda)$ (3)

Η αρχική κινητική ενέργεια του συστήματος είναι:

$$K_{ολ}(\alpha\rho\chi)=\frac{1}{2}m\upsilon^2+0=\frac{1}{2}\cdot 5\cdot\left(8\sqrt{3}\right)^2 J=480J\quad(4)$$

Η τελική κινητική ενέργεια του συστήματος είναι:

$$K_{ολ}(\tau\varepsilon\lambda)=\frac{1}{2}(m+M)V_K^2=\frac{1}{2}(5+35)\left(\sqrt{3}\right)^2 J=20\cdot 3J\Rightarrow K_{ολ}(\tau\varepsilon\lambda)=60J\quad(5)$$

$$(3)\xrightarrow{(4),(5)}Q=\left(480-60\right)J\Rightarrow Q=420J$$

δ) <u>Φαινόμενο 3^0:</u> Συσπείρωση του ελατηρίου.

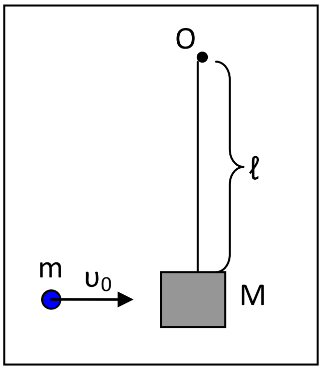
Θ.Μ.Κ.Ε για το συσσωμάτωμα από το Γ→Δ

$$K_\Delta-K_\Gamma=W_{(m+M)g}+W_{F_{ελ}}\Rightarrow$$
$$0-\frac{1}{2}(m+M)V_K^2=-(m+M)gx+\frac{1}{2}k\alpha^2-\frac{1}{2}k\left(\alpha-x\right)^2\Rightarrow$$
$$-\frac{1}{2}(m+M)V_K^2=-(m+M)gx+\frac{1}{2}k\alpha^2-\frac{1}{2}k\alpha^2-\frac{1}{2}kx^2+k\alpha x\xrightarrow{(*)}$$
$$-\frac{1}{2}(m+M)V_K^2=-(m+M)gx-\frac{1}{2}kx^2+k\frac{Mg}{k}x\Rightarrow$$
$$-\frac{1}{2}(m+M)V_K^2=-mgx-\frac{1}{2}kx^2\Rightarrow\frac{1}{2}kx^2+mgx-\frac{1}{2}(m+M)V_K^2=0\Rightarrow$$
$$10x^2+50x-\frac{1}{2}\cdot 40\cdot 3=0\Rightarrow x^2+5x-6=0\Rightarrow$$

$$\begin{cases}x=-6m & \text{απορρίπτεται}\\ x=1m & \text{δεκτή}\end{cases}$$

Πρόβλημα 5.

Το σώμα του διπλανού σχήματος έχει μάζα $M=4,8kg$ και ισορροπεί δεμένο στο κάτω άκρο κατακόρυφου μη εκτατού νήματος μήκους $\ell=0,18m$. Σώμα μάζας $m=0,2kg$ κινείται με ταχύτητα υ_0 και συγκρούεται πλαστικά με το σώμα M. Να υπολογίσετε:



α) Την ελάχιστη ταχύτητα που πρέπει να έχει το σώμα m ώστε μετά την πλαστική τους κρούση, το συσσωμάτωμα να διαγράψει μία πλήρη κυκλική τροχιά (να κάνει ανακύκλωση).

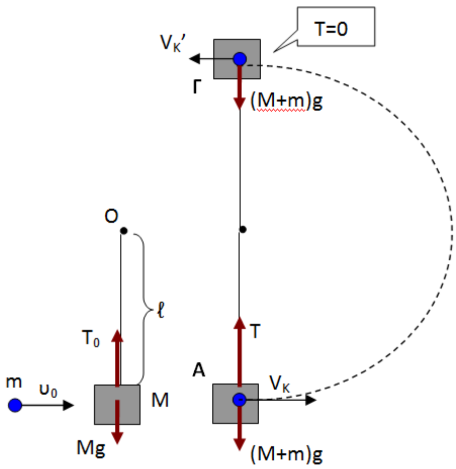
β) Το μέτρο της μεταβολής της ορμής της μάζας m πριν και μετά την κρούση.

γ) Την τάση T_0 του νήματος πριν την κρούση.

δ) Την τάση T του νήματος αμέσως μετά την κρούση. Δίνεται η επιτάχυνση βαρύτητας $g=10m/s^2$.

Λύση

α)



Φαινόμενο 1^0: Πλαστική κρούση m-M.

Α.Δ.Ο (λίγο πριν - λίγο μετά)

$$\vec{p}_{ο\lambda}(\pi\rho\iota\nu)=\vec{p}_{ο\lambda}(\mu\varepsilon\tau\acute{\alpha})\Rightarrow$$
$$\vec{p}_m+\vec{p}_M=\vec{p}_m^{'}+\vec{p}_M^{'}\Rightarrow$$
$$mu_0=(m+M)V_K\Rightarrow$$

$$\upsilon_0=\frac{(m+M)V_K}{m}=\frac{(0,2+4,8)V_K}{0,2}\Rightarrow\upsilon_0=25V_K \quad (1)$$

Φαινόμενο 2^0: Κίνηση συσσωματώματος από το Α στο Γ.

Εφαρμόζουμε το <u>Θεώρημα μεταβολής κινητικής ενέργειας.</u>

$$K_\Gamma - K_A = W_{(m+M)g} + W_T \Rightarrow$$
$$\frac{1}{2}(m+M)V_K'^2 - \frac{1}{2}(m+M)V_K^2 = -(m+M)g2\ell + 0 \Rightarrow$$

$$V_K^2 = V_K'^2 + 4g\ell \Rightarrow V_K = \sqrt{V_K'^2 + 4g\ell} \quad (2)$$

<u>Φαινόμενο 3⁰:</u> Συνθήκη ανακύκλωσης στο σημείο Γ.

$$\Sigma F_R = F_K \Rightarrow$$
$$T + (M+m)g = (M+m)\frac{V_K'^2}{\ell} \xrightarrow{V_K' \to min \Rightarrow T=0}$$

$$V_K'^2 = g\ell \Rightarrow V_K' = \sqrt{g\ell} = \sqrt{10 \cdot 0{,}18}\ m/s \Rightarrow V_K' = \sqrt{1{,}8}\ m/s \quad (3)$$

$$(2) \xrightarrow{(3)} V_K = \sqrt{1{,}8 + 4 \cdot 10 \cdot 0{,}18}\ m/s = \sqrt{1{,}8 + 7{,}2}\ m/s = \sqrt{9}\ m/s \Rightarrow V_K = 3m/s \quad (4)$$

$$(1) \xrightarrow{(4)} u_0 = 25 \cdot 3m/s \Rightarrow u_0 = 75m/s$$

β) Το μέτρο της ορμής της μάζας m πριν την κρούση είναι:

$$p_m = mu_0 = 0{,}2 \cdot 75kg \cdot m/s \Rightarrow p_m = 15kg \cdot m/s$$

Το μέτρο της ορμής της μάζας m μετά την κρούση είναι:

$$p_m' = mV_K = 0{,}2 \cdot 3kg \cdot m/s \Rightarrow p_m' = 0{,}6kg \cdot m/s$$

Το μέτρο της μεταβολής της ορμής του m κατά την κρούση είναι:

$$|\Delta\vec{p}_m| = |p_m' - p_m| = |0{,}6 - 15|\ kg \cdot m/s \Rightarrow |\Delta\vec{p}_m| = 14{,}4kg \cdot m/s$$

γ) Επειδή αρχικά το σώμα μάζας Μ ισορροπούσε: $\Sigma F = 0 \Rightarrow T_0 - Mg = 0 \Rightarrow T_0 = Mg \Rightarrow$ $T_0 = 4{,}8 \cdot 10N \Rightarrow T_0 = 48N$

δ) Το συσσωμάτωμα αμέσως μετά την κρούση μπαίνει σε κυκλική κίνηση.

Προσοχή: Η τάση του νήματος δεν ισούται με το βάρος του συσσωματώματος ($T \neq (M+m)g$) και η συνισταμένη της τάσης και του βάρους είναι η κεντρομόλος δύναμη.

$$\Sigma F_R = F_K \Rightarrow T-(M+m)g=(M+m)\frac{V_K^2}{\ell} \Rightarrow T=(M+m)g+(M+m)\frac{V_K^2}{\ell} \xrightarrow{(4)}$$

$$T=\left(50+5\frac{9}{0,18}\right)N \Rightarrow T=300N$$

Πρόβλημα 6.

Κατακόρυφο ιδανικό ελατήριο σταθεράς k, έχει το κάτω άκρο του δεμένο στο έδαφος και στο άνω άκρο του έχουμε δέσει μικρό σώμα $Σ_2$ μάζας m_2=3kg. Το σώμα ισορροπεί με το ελατήριο συσπειρωμένο κατά d=0,3m. Στην ίδια κατακόρυφο με τον άξονα του ελατηρίου και σε ύψος d_0=0,2m πάνω από το $Σ_2$ αφήνουμε ένα μικρό σώμα $Σ_1$ μάζας m_1=1kg. Τα δύο σώματα συγκρούονται κεντρικά και πλαστικά. Το συσσωμάτωμα εκτελεί απλή αρμονική ταλάντωση.

α) Να υπολογίσετε την ταχύτητα του συσσωματώματος αμέσως μετά την κρούση των σωμάτων.

β) Να υπολογίσετε τη σταθερά επαναφοράς του ελατηρίου και την περίοδο ταλάντωσης που θα εκτελέσει το συσσωμάτωμα.

γ) Να υπολογίσετε την ενέργεια της ταλάντωσης του συσσωματώματος.

δ) Να γράψετε την εξίσωση της επιτάχυνσης του συσσωματώματος σε σχέση με το χρόνο, θεωρώντας θετική φορά κατακόρυφη προς τα επάνω και λαμβάνοντας ως χρονική στιγμή t=0 τη στιγμή αμέσως μετά την κρούση.

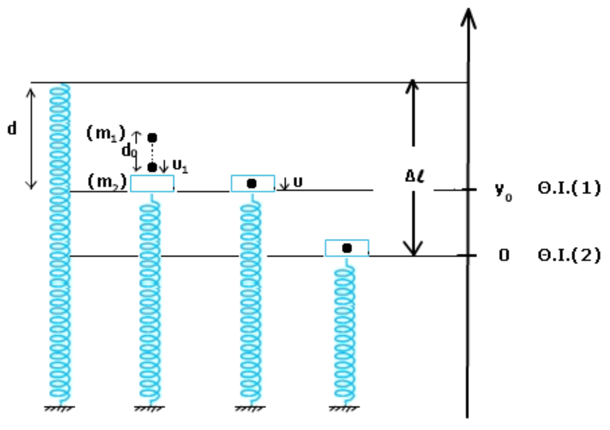
Δίνεται: g=10m/s^2

Λύση

α) Για την κίνηση του $Σ_1$, εφαρμόζουμε την αρχή διατήρησης της ενέργειας:

$$E_{μηχ(αρχ)} = E_{μηχ(τελ)} \Rightarrow \frac{1}{2}m_1 υ_1^2 = m_1 g d_0 \Rightarrow$$

$$υ_1 = \sqrt{2gd_0} \Rightarrow υ_1 = 2\frac{m}{s}$$



Κατά την κρούση η ορμή του συστήματος διατηρείται άρα αν υ η ταχύτητα του συσσωματώματος αμέσως μετά την κρούση, τότε:

$$m_1 υ_1 = (m_1 + m_2)υ \Rightarrow υ = 0,5\frac{m}{s}$$

β) Στην αρχική θέση ισορροπίας, Θ.Ι. (1), πριν την κρούση των σωμάτων ισχύει:

$$ΣF = 0 \Rightarrow F_{ελ} - W_{w_2} = 0 \Rightarrow kd - m_2 g = 0 \Rightarrow k = \frac{m_2 g}{d} \Rightarrow k = 100\frac{N}{m}$$

Επειδή D=k ισχύει ότι:

$$k=(m_1+m_2)\cdot\omega^2 \Rightarrow \omega=5\frac{rad}{s}$$

Άρα: $T=\frac{2\pi}{\omega}=0,4\pi\ s$

γ) Στην περίπτωση πλαστικής κρούσης σωμάτων, όπου το ένα είναι δεμένο στο άκρο ελατηρίου, αν το ελατήριο είναι κατακόρυφο ή πλάγιο, το συσσωμάτωμα έχει νέα θέση ισορροπίας. Αν στη νέα θέση ισορροπίας το ελατήριο είναι συσπειρωμένο κατά $\Delta\ell$, θα πρέπει:

$$\Sigma F=0\Rightarrow F_{\varepsilon\lambda}-W_{o\lambda}=0\Rightarrow k\Delta\ell=(m_1+m_2)g\Rightarrow\Delta\ell=0,4m$$

Συνεπώς αμέσως μετά την κρούση το συσσωμάτωμα βρίσκεται σε σχέση με τη νέα θέση ισορροπίας σε απομάκρυνση μέτρου: $y_0=\Delta\ell-d=0,1m$.

Η ενέργεια της ταλάντωσης ισούται:

$$E=K+U=\frac{1}{2}(m_1+m_2)\cdot\upsilon^2+\frac{1}{2}ky_0^2\Rightarrow E=1J$$

δ) Η επιτάχυνση του (m_1+m_2) περιγράφεται από την εξίσωση $\alpha=-\omega^2 A\eta\mu(\omega t+\varphi_0)$.

Από την ενέργεια ταλάντωσης του συσσωματώματος έχουμε: $E=\frac{1}{2}kA^2\Rightarrow A=0,1\sqrt{2}m$

Η απομάκρυνση του (m_1+m_2) περιγράφεται από την $y=A\eta\mu(\omega t+\varphi_0)$. Την $t=0$ είναι (S.I.):

$$y=y_0\Rightarrow 0,1\sqrt{2}\cdot\eta\mu\varphi_0=0,1\Rightarrow\eta\mu\varphi_0=\eta\mu\frac{\pi}{4}\Rightarrow\varphi_0=\frac{\pi}{4}rad \text{ ή } \varphi_0=\frac{3\pi}{4}rad$$

Όμως (θετική φορά προς τα πάνω) $\upsilon<0\Rightarrow\sigma\upsilon\nu\varphi_0<0$. Άρα $\varphi_0=\frac{3\pi}{4}rad$

Συνεπώς, η ζητούμενη εξίσωση είναι:

$$\alpha=-\omega^2A\eta\mu(\omega t+\varphi_0)\Rightarrow\alpha=-\ 2,5\sqrt{2}\eta\mu(5t+\frac{3\pi}{4})\quad (S.I.)$$

Ημερομηνία τροποποίησης: 19/07/2011

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 5^{O}: ΚΡΟΥΣΕΙΣ - ΦΑΙΝΟΜΕΝΟ DOPPLER

ΕΝΟΤΗΤΑ 2: ΦΑΙΝΟΜΕΝΟ DOPPLER

ΛΥΜΕΝΑ ΘΕΜΑΤΑ

ΘΕΜΑ Β

Ερώτηση 1.

Ένας παρατηρητής κινείται με σταθερή ταχύτητα υ_A προς ακίνητη πηγή ήχου που εκπέμπει κύματα συχνότητας f_s και μήκους κύματος λ_s.

Ο παρατηρητής αντιλαμβάνεται τα ηχητικά κύματα να διαδίδονται με ταχύτητα η οποία είναι κατά 10% μεγαλύτερη από αυτήν που αντιλαμβάνεται όταν είναι ακίνητος.

Η συχνότητα του ήχου που αντιλαμβάνεται ο παρατηρητής f_A και η συχνότητα f_s συνδέονται με τη σχέση

α) $f_A = 1,1f_s$.

β) $f_A = 1,2f_s$.

γ) $f_A = 1,05f_s$.

Να επιλέξετε τη σωστή λύση. Να δικαιολογήσετε την επιλογή σας.

<u>Λύση</u>

Σωστή λύση είναι η α.

Εφαρμόζουμε τη θεμελιώδη εξίσωση της κυματικής για τον κινούμενο παρατηρητή και για έναν υποθετικό ακίνητο παρατηρητή.

Για τον ακίνητο παρατηρητή: $\upsilon_{\eta\chi} = \lambda_s \cdot f_s$

Για τον κινούμενο παρατηρητή: $\upsilon_{\eta\chi(A)} = \lambda_A \cdot f_A$

Διαιρούμε κατά μέλη τις δυο προηγούμενες σχέσεις και θέτοντας $\lambda_A = \lambda_s$ (επειδή η πηγή είναι ακίνητη) βρίσκουμε ότι:

$$\frac{\upsilon_{\eta\chi}}{\upsilon_{\eta\chi(A)}} = \frac{\lambda s \cdot f_s}{\lambda_A \cdot f_A} \cdot \Rightarrow \frac{\upsilon_{\eta\chi}}{1,1\upsilon_{\eta\chi}} = \frac{f_s}{f_A} \Rightarrow f_A = 1,1f_s$$

Επομένως σωστή λύση είναι η α.

Σημαντική παρατήρηση

Η ταχύτητα του ήχου που αντιλαμβάνεται ένας παρατηρητής $\upsilon_{\eta\chi(A)}$ εξαρτάται από την ταχύτητα του παρατηρητή υ_A και είναι ανεξάρτητη από την ταχύτητα της πηγής. Ισχύει:

Όταν παρατηρητής πλησιάζει την πηγή: $\upsilon_{\eta\chi(A)} = \upsilon_{\eta\chi} + \upsilon_A$ (1)

Όταν παρατηρητής απομακρύνεται από την πηγή: $\upsilon_{\eta\chi(A)} = \upsilon_{\eta\chi} - \upsilon_A$ (2),

όπου $\upsilon_{\eta\chi}$ η ταχύτητα του ήχου όπως τη μετρά ένας ακίνητος παρατηρητής.

Ερώτηση 2.

Μια ηχητική πηγή βρίσκεται μεταξύ δυο ακίνητων παρατηρητών A και B. Η πηγή εκπέμπει ηχητικά κύματα που έχουν μήκος κύματος λ_s και συχνότητας f_s. Ο παρατηρητής A αντιλαμβάνεται τα ηχητικά κύματα να έχουν μήκος κύματος $\lambda_A = 0,9\lambda_s$ Επομένως:

1)

α) η πηγή πλησιάζει τον παρατηρητή A.

β) η πηγή απομακρύνεται από τον παρατηρητή A.

γ) η πηγή είναι ακίνητη.

2) Ο παρατηρητής B αντιλαμβάνεται ήχο με μήκος κύματος:

i) $\lambda_B = 1,2\lambda_s$.

ii) $\lambda_B = 1,1\lambda_s$.

iii) $\lambda_B = \lambda_s$.

Να επιλέξετε τις σωστές απαντήσεις. Να δικαιολογήσετε τις επιλογές σας.

<u>Λύση</u>

1) Σωστή λύση είναι η α.

2) Σωστή λύση είναι η ii.

1) Όταν μια ηχητική πηγή κινείται προς έναν παρατηρητή αυτός αντιλαμβάνεται μήκος κύματος μικρότερο από αυτό που θα αντιλαμβανόταν αν η πηγή ήταν ακίνητη. Στην περίπτωση μας έχουμε $\lambda_A = 0,9\lambda_s$, άρα η πηγή S πλησιάζει τον παρατηρητή A.

2) Η πηγή πλησιάζει τον παρατηρητή A, άρα το μήκος κύματος που αυτός αντιλαμβάνεται βρίσκεται από τη σχέση:

$\lambda_A = \lambda_s - \upsilon_s \cdot T_s$ (1)

όπου υ_s δηλώνει την ταχύτητα της πηγής.

Η πηγή απομακρύνεται από τον παρατηρητή B, άρα το μήκος κύματος που αυτός αντιλαμβάνεται βρίσκεται από τη σχέση:

$\lambda_B = \lambda_s + \upsilon_s \cdot T_s$ (2)

Προσθέτουμε κατά μέλη τις (1) και (2) και έχουμε:

$$\begin{pmatrix} \lambda_A = \lambda_s - \upsilon_s \cdot T_s \\ \lambda_B = \lambda_s + \upsilon_s \cdot T_s \end{pmatrix} \Rightarrow \lambda_A + \lambda_B = 2\lambda_s \Rightarrow$$

$$0,9\lambda_s + \lambda_B = 2\lambda_s \Rightarrow \lambda_B = 1,1\lambda_s$$

Επομένως σωστό είναι το ii.

Σημαντική παρατήρηση

Το μήκος κύματος που αντιλαμβάνεται ένας παρατηρητής εξαρτάται μόνο από την ταχύτητα της πηγής και είναι ανεξάρτητο από την ταχύτητα του παρατηρητή. Ισχύει:

Αν η πηγή πλησιάζει τον παρατηρητή με ταχύτητα υ_s τότε ο παρατηρητής αντιλαμβάνεται μήκος κύματος $\lambda_A = \lambda_s - \upsilon_s \cdot T_s$ (δηλαδή $\lambda_A < \lambda_s$).

Αν η πηγή απομακρύνεται από τον παρατηρητή με ταχύτητα υ_s, τότε ο παρατηρητής αντιλαμβάνεται μήκος κύματος $\lambda_A = \lambda_s + \upsilon_s \cdot T_s$ (δηλαδή $\lambda_A > \lambda_s$).

Ερώτηση 3.

Μια ηχητική πηγή κινούμενη με σταθερή ταχύτητα υ_s πλησιάζει και προσπερνά ακίνητο παρατηρητή A. Οι συχνότητες του ήχου που αντιλαμβάνεται ο παρατηρητής καθώς η πηγή τον πλησιάζει και καθώς απομακρύνεται από αυτόν είναι f_1 και f_2 αντίστοιχα. Οι δύο συχνότητες συνδέονται με τη σχέση $f_1 = 2f_2$.

Η ταχύτητα υ_s της πηγής και η ταχύτητα διάδοσης του ήχου $\upsilon_{\eta\chi}$ συνδέονται με τη σχέση:

α) $\upsilon_s = \frac{\upsilon_{\eta\chi}}{3}$.

β) $\upsilon_s = \frac{\upsilon_{\eta\chi}}{2}$.

γ) $\upsilon_s = \frac{\upsilon_{\eta\chi}}{4}$.

Να επιλέξετε τη σωστή λύση. Να δικαιολογήσετε την επιλογή σας.

Λύση

Σωστή πρόταση είναι η α.

Η συχνότητα f_1 που αντιλαμβάνεται ο παρατηρητής καθώς η πηγή τον πλησιάζει βρίσκεται από τη σχέση:

$$f_1 = \frac{\upsilon_{\eta\chi}}{\upsilon_{\eta\chi} - \upsilon_s} f_s$$

Η συχνότητα f_2 που αντιλαμβάνεται ο παρατηρητής καθώς η πηγή απομακρύνεται από αυτόν βρίσκεται από τη σχέση:

$$f_2 = \frac{\upsilon_{\eta\chi}}{\upsilon_{\eta\chi} + \upsilon_s} f_s$$

Σύμφωνα με την εκφώνηση $f_1 = 2f_2$, οπότε με αντικατάσταση παίρνουμε:

$$f_1 = 2 \cdot f_2 \Rightarrow \frac{\upsilon_{\eta\chi}}{\upsilon_{\eta\chi} - \upsilon_s} f_s = 2 \frac{\upsilon_{\eta\chi}}{\upsilon_{\eta\chi} + \upsilon_s} f_s \Rightarrow$$

$$2(\upsilon_{\eta\chi} - \upsilon_s) = \upsilon_{\eta\chi} + \upsilon_s \Rightarrow 2\upsilon_{\eta\chi} - 2\upsilon_s = \upsilon_{\eta\chi} + \upsilon_s \Rightarrow$$

$$\upsilon_{\eta\chi} = 3\upsilon_s \Rightarrow \upsilon_s = \frac{\upsilon_{\eta\chi}}{3}$$

Άρα σωστή πρόταση είναι η α.

Ερώτηση 4.

Μια πηγή κινούμενη με ταχύτητα $\upsilon_s = \frac{\upsilon_{\eta\chi}}{20}$ απομακρύνεται από κινούμενο παρατηρητή ο οποίος κινείται με ταχύτητα $\upsilon_A = \frac{\upsilon_{\eta\chi}}{40}$ κατευθυνόμενος προς την πηγή.

Η πηγή εκπέμπει ήχο συχνότητας f_s, μήκους κύματος λ_s, ο οποίος κινείται στον αέρα με ταχύτητα $\upsilon_{\eta\chi}$.

α) Ο παρατηρητής αντιλαμβάνεται ήχο που έχει ταχύτητα διάδοσης ως προς αυτόν $\upsilon_{\eta\chi(A)} = \frac{39\upsilon_{\eta\chi}}{40}$.

β) Ο παρατηρητής αντιλαμβάνεται ήχο που έχει μήκος κύματος $\lambda_A = \frac{20}{21}\cdot\lambda_s$.

γ) Ο παρατηρητής αντιλαμβάνεται ήχο που έχει συχνότητα $f_A = \frac{41}{42}f_s$

Να επιλέξετε τη σωστή λύση. Να δικαιολογήσετε την επιλογή σας.

<u>Λύση</u>

Σωστή λύση είναι η γ.

Η πρόταση α είναι λάθος διότι έχουμε παρατηρητή που κατευθύνεται προς ηχητική πηγή. Στην περίπτωση αυτή η ταχύτητα διάδοσης του ήχου ως προς τον παρατηρητή $\upsilon_{\eta\chi(A)}$ είναι μεγαλύτερη από τη $\upsilon_{\eta\chi}$ και όχι μικρότερη όπως δίνεται. (Βλέπε και παρατήρηση παραδείγματος 1, θέμα Β)

Η πρόταση β είναι λάθος, διότι έχουμε πηγή που απομακρύνεται από παρατηρητή. Στην περίπτωση αυτή το μήκος κύματος που αντιλαμβάνεται ο παρατηρητής, λ_A, είναι μεγαλύτερο από λ_s και όχι μικρότερο όπως δίνεται. (Βλέπε και παρατήρηση παραδείγματος 2, θέμα Β).

Για την πρόταση γ έχουμε:

Για τον κινούμενο παρατηρητή γράφουμε τη θεμελιώδη εξίσωση της κυματικής ως εξής:

$$\upsilon_{\eta\chi(A)} = \lambda_A \cdot f_A \quad \text{ή} \quad f_A = \frac{\upsilon_{\eta\chi(A)}}{\lambda_A} \qquad (1)$$

Με βάση την παρατήρηση της Παράδειγμας (1), επειδή ο παρατηρητής κατευθύνεται προς την πηγή η ταχύτητα διάδοσης του ήχου ως προς τον παρατηρητή βρίσκεται από τη σχέση $\upsilon_{\eta\chi(A)} = \upsilon_{\eta\chi} + \upsilon_A$

Με βάση την παρατήρηση της Παράδειγμας (2), επειδή η πηγή απομακρύνεται από τον παρατηρητή το μήκος κύματος που αντιλαμβάνεται ο παρατηρητής λ_A βρίσκεται από τη σχέση: $\lambda_A = \lambda_s + \upsilon_s T_s = \frac{\upsilon_{\eta\chi}}{f_s} + \frac{\upsilon_s}{f_s}$ ή $\lambda_A = \frac{\upsilon_{\eta\chi} + \upsilon_s}{f_s}$

Με αντικατάσταση στη σχέση (1) των $\upsilon_{\eta\chi(A)}$ και λ_A παίρνουμε:

$$f_A = \frac{\upsilon_{\eta\chi} + \upsilon_A}{\frac{\upsilon_{\eta\chi} + \upsilon_s}{f_s}} \Rightarrow f_A = \frac{\upsilon_{\eta\chi} + \upsilon_A}{\upsilon_{\eta\chi} + \upsilon_s} f_s \Rightarrow f_A = \frac{\upsilon_{\eta\chi} + \frac{\upsilon_{\eta\chi}}{40}}{\upsilon_{\eta\chi} + \frac{\upsilon_{\eta\chi}}{20}} f_s \Rightarrow f_A = \frac{\frac{41\upsilon_{\eta\chi}}{40}}{\frac{21\upsilon_{\eta\chi}}{20}} f_s \Rightarrow$$

$$f_A = \frac{\frac{41\upsilon_{\eta\chi}}{40}}{\frac{42\upsilon_{\eta\chi}}{40}} f_s \Rightarrow f_A = \frac{41}{42} f_s$$

Επομένως σωστή λύση είναι η γ.

Ερώτηση 5.

Μια ακίνητη πηγή ήχου s εκπέμπει ήχο συχνότητας f_s. Ένας παρατηρητής πλησιάζει την πηγή κινούμενος με σταθερή ταχύτητα. Η πηγή εκπέμπει N_S μέγιστα ήχου σε χρονικό διάστημα Δt. Ο παρατηρητής σε χρονικό διάστημα Δt θα αντιλαμβάνεται N_A μέγιστα ήχου για τα οποία ισχύει:

α) $N_A = N_S$.

β) $N_A > N_S$.

γ) $N_A < N_S$.

Να επιλέξετε τη σωστή λύση. Να δικαιολογήσετε την επιλογή σας.

Λύση

Σωστή πρόταση είναι η β.

Για τη συχνότητα που εκπέμπει η πηγή ισχύει: $f_s = \frac{N_s}{\Delta t}$

Για τη συχνότητα f_A που αντιλαμβάνεται ο παρατηρητής ισχύει: $f_A = \frac{N_A}{\Delta t}$

Το χρονικό διάστημα Δt στις παραπάνω σχέσεις είναι κοινό, επομένως:

$$\frac{N_s}{f_s} = \frac{N_A}{f_A} \Rightarrow \frac{N_s}{N_A} = \frac{f_s}{f_A}$$

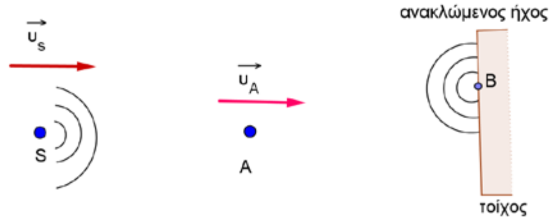
Επειδή ο παρατηρητής πλησιάζει προς την πηγή έχουμε $f_S < f_A$, άρα:

$$\frac{N_s}{N_A} < 1 \Rightarrow N_s < N_A$$

Άρα, σωστή πρόταση είναι η β.

Ερώτηση 6.

Πηγή κινείται με ταχύτητα $\upsilon_s = \frac{\upsilon_{\eta\chi}}{10}$, όπου $\upsilon_{\eta\chi}$ η ταχύτητα του ήχου ως προς τον αέρα. Μπροστά από την πηγή, σε μεγάλη απόσταση, υπάρχει ακίνητο κατακόρυφο εμπόδιο (τοίχος) στο οποίο ο ήχος μπορεί να ανακλαστεί. Ανάμεσα στην πηγή και στο εμπόδιο υπάρχει ένας παρατηρητής Α ο οποίος κατευθύνεται προς το εμπόδιο με ταχύτητα $\upsilon_A = \frac{\upsilon_{\eta\chi}}{20}$.



Η πηγή εκπέμπει ήχο συχνότητας f_S. Ο ήχος μετά την ανάκλαση του στον κατακόρυφο τοίχο γίνεται αντιληπτός από τον παρατηρητή με συχνότητα f_A. Οι δύο συχνότητες συνδέονται με τη σχέση:

α) $f_A = \frac{10}{9} \cdot f_s$.

β) $f_A = \frac{19}{18} \cdot f_s$.

γ) $f_A = \frac{21}{18} \cdot f_s$.

Να επιλέξετε τη σωστή λύση. Να δικαιολογήσετε την επιλογή επίσης.

Λύση

Σωστή λύση είναι η γ.

Η συχνότητα f_A που αντιλαμβάνεται ο παρατηρητής προέρχεται από το εμπόδιο. Η συχνότητα που εκπέμπει ένα εμπόδιο συμπίπτει πάντα με τη συχνότητα που θα ανίχνευε επίσης δέκτης που βρίσκεται πάνω του. Άρα πρέπει να βρούμε πρώτα τη συχνότητα f_B που ανιχνεύει το εμπόδιο. Έχουμε ακίνητο παρατηρητή (το εμπόδιο) και πηγή που το πλησιάζει, άρα η συχνότητα f_B βρίσκεται από τη σχέση:

$$f_B = \frac{\upsilon_{\eta\chi}}{\upsilon_{\eta\chi} - \upsilon_s} f_s \Rightarrow f_B = \frac{\upsilon_{\eta\chi}}{\upsilon_{\eta\chi} - \frac{\upsilon_{\eta\chi}}{10}} f_s \Rightarrow f_B = \frac{\upsilon_{\eta\chi}}{\frac{9\upsilon_{\eta\chi}}{10}} f_s \Rightarrow f_B = \frac{10}{9} f_s$$

Η συχνότητα του ανακλώμενου ήχου που ακούει ο παρατηρητής είναι f_A και η κατάλληλη σχέση που την υπολογίζει θα έχει πηγή ακίνητη (το εμπόδιο που εκπέμπει f_B) και παρατηρητή που πλησιάζει την πηγή, δηλαδή

$$f_A = \frac{\upsilon_{\eta\chi} + \upsilon_A}{\upsilon_{\eta\chi}} f_B$$

Με αντικατάσταση επίσης f_B παίρνουμε:

$$f_A = \frac{\upsilon_{\eta\chi} + \upsilon_A}{\upsilon_{\eta\chi}} \frac{10}{9} f_s \Rightarrow f_A = \frac{\upsilon_{\eta\chi} + \frac{\upsilon_{\eta\chi}}{20}}{\upsilon_{\eta\chi}} \frac{10}{9} f_s \Rightarrow f_A = \frac{\frac{21\upsilon_{\eta\chi}}{20}}{\upsilon_{\eta\chi}} \frac{10}{9} f_s \Rightarrow$$

$$f_A = \frac{21}{20} \cdot \frac{10}{9} f_s \Rightarrow f_A = \frac{21}{18} \cdot f_s \, .$$

Άρα σωστή λύση είναι η γ.

<u>Σημαντική παρατήρηση</u>

Όταν το κύμα συναντά εμπόδιο, το εμπόδιο συμπεριφέρεται ως δευτερογενής πηγή κυμάτων και τα επανεκπέμπει με συχνότητα ίδια με αυτή που τα δέχτηκε. Όμως, όπως το εμπόδιο μπορεί να είναι ακίνητο ή κινούμενο, έτσι και η δευτερογενής πηγή κυμάτων μπορεί να είναι επίσης ακίνητη ή κινούμενη.

ΘΕΜΑ Γ

Άσκηση 1.

Ένας παρατηρητής A και ένα περιπολικό s (πηγή ήχου) αφού συναντηθούν στον ίδιο ευθύγραμμο δρόμο συνεχίζουν να κινούνται απομακρυνόμενοι ο ένας από τον άλλον με σταθερές ταχύτητες.

Οι ταχύτητες τους είναι αντίστοιχα $\upsilon_A = 20\frac{m}{s}$ και $\upsilon_s = 10\frac{m}{s}$. Καθώς απομακρύνονται ο ένας από τον άλλον, το περιπολικό εκπέμπει ήχο συχνότητας $f_s = 350Hz$ για χρονικό διάστημα $\Delta t_s = 6,4s$. Για τον παρατηρητή A να βρεθεί:

α) η ταχύτητα διάδοσης του ήχου που αντιλαμβάνεται.

β) το μήκος κύματος του ήχου που ακούει.

γ) η συχνότητα του ήχου που αντιλαμβάνεται.

δ) η χρονική διάρκεια Δt_A του ήχου που ακούει.

Δίνεται η ταχύτητα του ήχου στον αέρα $\upsilon_{\eta\chi} = 340\frac{m}{s}$.

<u>Λύση</u>

α) Έχουμε παρατηρητή που απομακρύνεται από ηχητική πηγή, άρα για την ταχύτητα του ήχου που αντιλαμβάνεται ο παρατηρητής ισχύει:

$$\upsilon_{\eta\chi(A)} = \upsilon_{\eta\chi} - \upsilon_A \Rightarrow \upsilon_{\eta\chi(A)} = 320\frac{m}{s}$$

(Βλέπε και παρατήρηση παραδείγματος 1, θέμα Β).

β) Έχουμε πηγή που απομακρύνεται από παρατηρητή, άρα για το μήκος κύματος που αντιλαμβάνεται ο παρατηρητής ισχύει (βλέπε και παρατήρηση παραδείγματος 2, θέμα Β)

$$\lambda_A = \lambda_s + \upsilon_s \cdot T_s \Rightarrow \lambda_A = \lambda_s + \frac{\upsilon_s}{f_s} \Rightarrow$$

$$\lambda_A = \frac{\upsilon_{\eta\chi}}{f_s} + \frac{\upsilon_s}{f_s} \Rightarrow \lambda_A = \frac{\upsilon_{\eta\chi} + \upsilon_s}{f_s} \Rightarrow \lambda_A = \frac{350}{350}\text{m} = 1\text{m}$$

γ) Έχουμε παρατηρητή που απομακρύνεται από ηχητική πηγή και πηγή που απομακρύνεται από παρατηρητή, άρα η συχνότητα του ήχου που αντιλαμβάνεται ο παρατηρητής δίνεται από τη σχέση

$f_A = \frac{\upsilon_{\eta\chi} - \upsilon_A}{\upsilon_{\eta\chi} + \upsilon_s} f_s$ και αντικαθιστώντας παίρνουμε:

$$f_A = \frac{340 - 20}{340 + 10} 350\text{Hz} \Rightarrow f_A = 320\text{Hz}$$

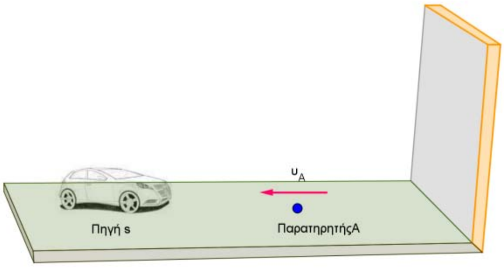
δ) Ο αριθμός των μεγίστων N_s που εκπέμπει η πηγή δίνονται από τη σχέση $N_s = f_s \cdot \Delta t_s$

Ο αριθμός των μεγίστων N_A που αντιλαμβάνεται ο παρατηρητής δίνονται από τη σχέση $N_A = f_A \cdot \Delta t_A$.

Όμως όσα μέγιστα παραχθούν από την πηγή, τόσα θα φθάσουν στον παρατηρητή, δηλαδή $N_A = N_S \Rightarrow f_A \cdot \Delta t_A = f_s \cdot \Delta t_s \Rightarrow \Delta t_A = \frac{f_s \cdot \Delta t_s}{f_A} \Rightarrow \Delta t_A = \frac{350 \cdot 6,4}{320}\text{s} \Rightarrow \Delta t_A = 7$

Άσκηση 2.

Ένας παρατηρητής κατευθύνεται προς ακίνητο αυτοκίνητο με σταθερή ταχύτητα $\upsilon_A = 20\frac{m}{s}$. Πίσω από τον παρατηρητή και στην ευθεία αυτοκινήτου - παρατηρητή



υπάρχει ακίνητη επιφάνεια στην οποία ο ήχος μπορεί να ανακλαστεί.

1) Ο οδηγός του αυτοκινήτου κορνάρει εκπέμποντας ηχητικά κύματα συχνότητας $f_S = 1020Hz$. Να βρεθούν:

α) Η συχνότητα του ήχου που αντιλαμβάνεται ο παρατηρητής και που προέρχεται απευθείας από την κόρνα του αυτοκινήτου.

β) Η συχνότητα του ανακλώμενου ήχου που αντιλαμβάνεται ο παρατηρητής.

2) Ο παρατηρητής προσπερνά το αυτοκίνητο και καθώς απομακρύνεται από αυτό κινούμενος πάντα με την ίδια ταχύτητα υ_A, ο οδηγός του αυτοκινήτου ξανακορνάρει για χρονικό διάστημα $3,2s$. Να βρεθούν:

α) Πόση είναι τώρα η συχνότητα του απευθείας αλλά και του ανακλώμενου ήχου που ακούει ο παρατηρητής;

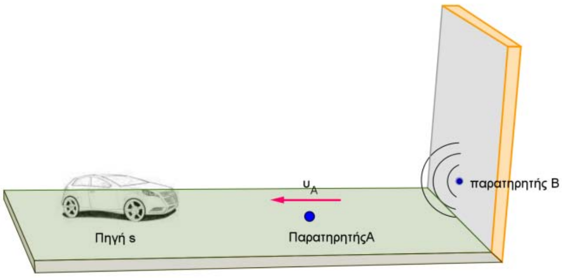
β) Πόσο μετατοπίστηκε ο παρατηρητής στο χρονικό διάστημα που άκουγε την κόρνα του αυτοκινήτου;

Δίνεται η ταχύτητα διάδοσης του ήχου στον αέρα $\upsilon_{\eta\chi} = 340\frac{m}{s}$.

<u>Λύση</u>

Α)

α) Έχουμε παρατηρητή που πλησιάζει ακίνητη πηγή, άρα η συχνότητα του ήχου που αντιλαμβάνεται ο παρατηρητής και που προέρχεται απευθείας από την κόρνα του αυτοκινήτου είναι



$$f_A = \frac{\upsilon_{ηχ} + \upsilon_A}{\upsilon_{ηχ}} f_s \Rightarrow f_A = \frac{340+20}{340} 1020Hz \Rightarrow f_A = \frac{360}{340} 1020Hz = 1080Hz$$

β) Για να βρούμε την συχνότητα του ανακλώμενου ήχου που αντιλαμβάνεται ο παρατηρητής σκεφτόμαστε ως εξής:

Θεωρούμε ότι πηγή ήχου είναι η ανακλώσα επιφάνεια. Έχουμε παρατηρητή που απομακρύνεται από ακίνητη πηγή, άρα η συχνότητα του ήχου που αντιλαμβάνεται ο παρατηρητής είναι

$$f_A = \frac{\upsilon_{ηχ} - \upsilon_A}{\upsilon_{ηχ}} f_B \qquad (1) \quad ,$$

όπου f_B η συχνότητα του ήχου που εκπέμπεται από την ανακλώσα επιφάνεια.

Όμως η συχνότητα του ήχου f_B που εκπέμπεται από αυτήν είναι ίση με την συχνότητα του ήχου που ακούει ένας παρατηρητής B που βρίσκεται (κολλημένος) στην επιφάνεια. Η επιφάνεια όμως είναι ακίνητη και η πηγή είναι ακίνητη, άρα για τον παρατηρητή B δεν υπάρχει φαινόμενο Doppler και η συχνότητα f_B που αντιλαμβάνεται είναι ίση με τη συχνότητα της πηγής, δηλαδή $f_B = f_s = 1020Hz$.

Αντικαθιστώντας στη σχέση (1) έχουμε:

$$f_B = \frac{340-20}{340} 1020Hz = 960Hz \, .$$

2)

α) Έχουμε παρατηρητή που απομακρύνεται από ακίνητη ηχητική πηγή, άρα η συχνότητα του απευθείας ήχου που αντιλαμβάνεται ο παρατηρητης είναι:

$$f_A = \frac{\upsilon_{ηχ} - \upsilon_A}{\upsilon_{ηχ}} f_S \Rightarrow f_A = \frac{340-20}{340} 1020Hz = 960Hz$$

Για τον ήχο από ανάκλαση έχουμε πάλι παρατηρητή που απομακρύνεται από ακίνητη ηχητική πηγή, άρα θα αντιλαμβάνεται και από ανάκλαση την ίδια συχνότητα $f_A = 960Hz$

β) Ο παρατηρητής μετατοπίστηκε κατά $\Delta x = \upsilon_A \Delta t_A \quad (2)$,

όπου Δt_A η χρονική διάρκεια που ακούει τον ήχο από την πηγή ο παρατηρητής.

Ο αριθμός των μεγίστων N_S που εκπέμπει η πηγή δίνονται από τη σχέση $N_S = f_S \cdot \Delta t_S$.

Ο αριθμός των μεγίστων N_A που αντιλαμβάνεται ο παρατηρητής δίνονται από τη σχέση $N_A = f_A \cdot \Delta t_A$.

Όμως όσα μέγιστα παραχθούν από την πηγή, τόσα θα φθάσουν στον παρατηρητή, δηλαδή $N_A = N_S$.

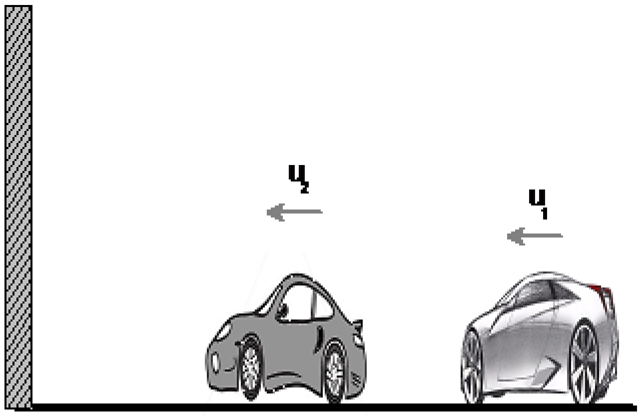
Άρα $f_s \cdot \Delta t_s = f_A \cdot \Delta t_A \Rightarrow \Delta t_A = \dfrac{f_s \cdot \Delta t_s}{f_A} \Rightarrow \Delta t_A = \dfrac{1020 \cdot 3,2}{960} s = 3,4s$

Με αντικατάσταση στη σχέση (2) παίρνουμε

$\Delta x = 68m$

Άσκηση 3.

Δύο αυτοκίνητα (1) και (2) κινούνται ευθύγραμμα και ομόρροπα με ταχύτητες $\upsilon_1 = 40 m/s$ και $\upsilon_2 = 20 m/s$ αντίστοιχα. Τα αυτοκίνητα πλησιάζουν προς κατακόρυφο τοίχο στη βάση του οποίου έχουμε τοποθετήσει έναν ανιχνευτή ηχητικών κυμάτων. Κάποια χρονική στιγμή κατά την οποία το αυτοκίνητο (2) προπορεύεται του (1), ο οδηγός του (2) πιέζει την κόρνα του, η οποία εκπέμπει ήχο συχνότητας $f_s = 640 Hz$.



Να υπολογίσετε τη συχνότητα του ήχου που:

α) καταγράφει ο ανιχνευτής στη βάση του τοίχου.

β) αντιλαμβάνεται ο οδηγός του αυτοκινήτου (1) απευθείας από το αυτοκίνητο (2).

γ) ανακλάται από τον τοίχο, όπως την αντιλαμβάνεται ο οδηγός του αυτοκινήτου (1).

δ) ανακλάται από τον τοίχο, όπως την αντιλαμβάνεται ο οδηγός του αυτοκινήτου (2).

Δίνεται η ταχύτητα του ήχου στον ακίνητο αέρα $\upsilon = 340 m/s$.

<u>Λύση</u>

α) Ο ανιχνευτής (ο οποίος έχει το ρόλο του παρατηρητή) είναι ακίνητος (υ_A=0) και η ηχητική πηγή πλησιάζει με ταχύτητα υ_2. Συνεπώς η ανιχνευόμενη συχνότητα ισούται με:

$$f_1 = \frac{\upsilon}{\upsilon - \upsilon_2} f_s \Rightarrow f_1 = \frac{340}{340 - 20} \cdot 640 Hz \Rightarrow f_1 = 680 Hz$$

β) Στην περίπτωση αυτή ο παρατηρητής κινείται προς την πηγή με ταχύτητα $υ_1$ και η πηγή απομακρύνεται από τον παρατηρητή με ταχύτητα $υ_2$. Άρα ο οδηγός του (1) αντιλαμβάνεται συχνότητα:

$$f = \frac{υ+υ_1}{υ+υ_2} f_s \Rightarrow f = \frac{380}{360} \cdot 640\text{Hz} \Rightarrow f_1 \approx 676\text{Hz}$$

γ) Ο τοίχος λειτουργεί ως ακίνητη ηχητική πηγή ($υ_S$=0) συχνότητας $f_1 = 680\text{Hz}$. Ο παρατηρητής (1) πλησιάζει την πηγή με ταχύτητα $υ_1$,άρα ο ήχος από ανάκλαση που αντιλαμβάνεται έχει συχνότητα: $f' = \frac{υ+υ_1}{υ} f_1 \Rightarrow f' = \frac{380}{340} \cdot 680\text{Hz} \Rightarrow$

$$f' = 760\text{Hz}$$

δ) Ομοίως με το (γ) ο παρατηρητής (2) πλησιάζει την πηγή με ταχύτητα $υ_2$ ενώ ο τοίχος λειτουργεί ως ακίνητη ηχητική πηγή συχνότητας $f_1 = 680\text{Hz}$. Άρα ο οδηγός του (2), αντιλαμβάνεται λόγο ανάκλασης συχνότητα:

$$f_2 = \frac{υ+υ_2}{υ} f_1 \Rightarrow f_2 = \frac{360}{340} \cdot 680\text{Hz} \Rightarrow f_2 = 720\text{Hz}$$

ΘΕΜΑ Δ

Πρόβλημα 1.

Ένας παρατηρητής βρίσκεται ανάμεσα σε δυο ακίνητες και πανομοιότυπες πηγές κυμάτων Π_1 και Π_2 οι οποίες εκπέμπουν κύματα ίδιας συχνότητας $f_s = 510\text{Hz}$. Ο παρατηρητής κινείται με σταθερή ταχύτητα υ_A πλησιάζοντας την πηγή Π_1 και απομακρυνόμενος από την πηγή Π_2. Οι ήχοι που αντιλαμβάνεται ο παρατηρητής έχουν

συχνότητες f_1 και f_2 για τις οποίες ισχύει $\frac{f_1}{f_2} = \frac{43}{42}$

Να βρεθούν:

α) η ταχύτητα υ_A του κινούμενου παρατηρητή.

β) η συχνότητα του κάθε ήχου που αντιλαμβάνεται ο παρατηρητής.

γ) η συχνότητα των διακροτημάτων του σύνθετου ήχου που αντιλαμβάνεται ο παρατηρητής.

δ) η μετατόπιση του παρατηρητή στο χρονικό διάστημα που παρεμβάλλεται μεταξύ 13 μεγιστοποιήσεων του πλάτους του σύνθετου ήχου που αντιλαμβάνεται ο παρατηρητής.

Δίνεται η ταχύτητα διάδοσης του ήχου στον αέρα $\upsilon_{\eta\chi} = 340\frac{m}{s}$.

<u>Λύση</u>

α) Ο παρατηρητής πλησιάζει την ακίνητη πηγή Π_1, άρα για τη συχνότητα του ήχου $f_{A(1)}$ που αντιλαμβάνεται ισχύει:

$$f_{A(1)} = \frac{\upsilon_{\eta\chi} + \upsilon_A}{\upsilon_{\eta\chi}} f_s \quad (1)$$

Ο παρατηρητής απομακρύνεται από την ακίνητη πηγή Π_2, άρα για τη συχνότητα $f_{A(2)}$ του ήχου που αντιλαμβάνεται ισχύει

$$f_{A(2)} = \frac{\upsilon_{\eta\chi} - \upsilon_A}{\upsilon_{\eta\chi}} f_s \quad (2)$$

Με διαίρεση κατά μέλη έχουμε:

$$\frac{f_1}{f_2}=\frac{\upsilon_{\eta\chi}+\upsilon_A}{\upsilon_{\eta\chi}-\upsilon_A}\Rightarrow\frac{43}{42}=\frac{\upsilon_{\eta\chi}+\upsilon_A}{\upsilon_{\eta\chi}-\upsilon_A}\Rightarrow 43(\upsilon_{\eta\chi}-\upsilon_A)=42(\upsilon_{\eta\chi}+\upsilon_A)\Rightarrow$$

$$43\upsilon_{\eta\chi}-43\upsilon_A=42\upsilon_{\eta\chi}+42\upsilon_A\Rightarrow\upsilon_{\eta\chi}=85\upsilon_A\Rightarrow\upsilon_A=\frac{\upsilon_{\eta\chi}}{85}\,.$$

Άρα:

$$\upsilon_A=4\frac{m}{sec}$$

β) Από τις σχέσεις (1) και (2) βρίσκουμε:

$$f_{A(1)}=\frac{\upsilon_{\eta\chi}+\upsilon_A}{\upsilon_{\eta\chi}}f_s=\frac{340+4}{340}510Hz=516Hz$$

$$f_{A(2)}=\frac{\upsilon_{\eta\chi}-\upsilon_A}{\upsilon_{\eta\chi}}f_s=\frac{340-4}{340}510Hz=504Hz$$

γ) <u>Σημαντική παρατήρηση:</u> Όταν στο αυτί μας φτάσουν 2 ήχοι ίδιου πλάτους(έντασης) με συχνότητες που διαφέρουν λίγο μεταξύ τους τότε το τύμπανό μας ταλαντώνεται περιοδικά με μέγιστα και παύσεις. Η αυξομείωση αυτή της έντασης του ήχου είναι το διακρότημα και ο χρόνος ανάμεσα σε δύο διαδοχικούς μηδενισμούς ή μεγιστοποιήσεις της έντασης (πλάτους) του ήχου είναι η περίοδος του διακροτήματος.

$$f_\delta=f_2-f_1\Rightarrow f_\delta=12Hz$$

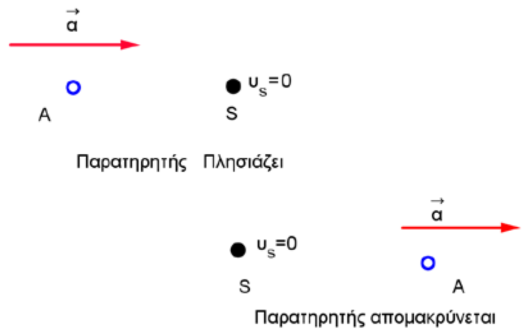
δ) Το χρονικό διάστημα μεταξύ 13 μεγιστοποιήσεων του πλάτους είναι 12 περίοδοι διακροτήματος, δηλαδή:

$\Delta t=12\cdot T_\delta=1s$ όπου $T_\delta=\frac{1}{f_\delta}=\frac{1}{12}sec$.

Ο παρατηρητής κινείται ομαλά με ταχύτητα $\upsilon_A=4\frac{m}{s}$. Επομένως θα έχει διανύσει απόσταση $\Delta x=\upsilon_A\cdot\Delta t=4m$

Πρόβλημα 2.

Ένας αρχικά ακίνητος παρατηρητής A ($\upsilon_0 = 0$) ξεκινά ομαλά επιταχυνόμενη κίνηση με επιτάχυνση $\alpha = 5\frac{m}{s^2}$, κατευθυνόμενος προς ακίνητη ηχητική πηγή S. Η πηγή εκπέμπει ήχο συχνότητας $f_S = 680Hz$ που διαδίδεται ως προς τον αέρα με ταχύτητα $\upsilon_{\eta\chi} = 340\frac{m}{s}$. Ο παρατηρητής μετά από χρόνο $\Delta t = 10s$ φθάνει στην πηγή την προσπερνά και συνεχίζει την κίνησή του απομακρυνόμενος από αυτή.



α) Να βρεθεί η συχνότητα του ήχου που ακούει ο παρατηρητής την χρονική στιγμή $t = 5s$.

β) Να γραφούν οι σχέσεις που συνδέουν τη συχνότητα του ήχου που αντιλαμβάνεται ο παρατηρητής σε συνάρτηση με το χρόνο, για το χρονικό διάστημα 0 έως 20 s.

γ) Να γίνει το διάγραμμα της συχνότητας του ήχου που αντιλαμβάνεται ο παρατηρητής σε σχέση με το χρόνο σε αριθμημένους άξονες από το ξεκίνημα του έως την χρονική στιγμή $t = 20s$.

δ) Να βρεθεί ο αριθμός των ηχητικών κυμάτων (μέγιστα ήχου) που ανίχνευσε ο παρατηρητής στο χρονικό διάστημα 0 έως $t = 10s$.

<u>Λύση</u>

α) Υπολογίζουμε την ταχύτητα του παρατηρητή την $t = 5s$ από την σχέση $\upsilon = \alpha \cdot t$. Επομένως

$$\upsilon = (5 \cdot 5)\frac{m}{s} = 25\frac{m}{s}$$

Έχουμε παρατηρητή που πλησιάζει ακίνητη πηγή, άρα ισχύει:

$$f_A = \frac{\upsilon_{\eta\chi} + \upsilon_A}{\upsilon_{\eta\chi}} f_s \Rightarrow f_A = \frac{340 + 25}{340} 680Hz \Rightarrow f_A = 730Hz$$

β)Όταν ο παρατηρητής πλησιάζει ισχύει η σχέση:

$$f_A = \frac{\upsilon_{\eta\chi} + \upsilon_A}{\upsilon_{\eta\chi}} f_s \Rightarrow f_A = \frac{\upsilon_{\eta\chi} + \alpha \cdot t}{\upsilon_{\eta\chi}} f_s \Rightarrow f_A = \frac{340 + 5 \cdot t}{340} 680 \Rightarrow$$

$$f_A = (340 + 5 \cdot t) \cdot 2 \Rightarrow f_A = 680 + 10 \cdot t \text{ (SI)} \quad \gamma\iota\alpha \ 0 \le t < 10s$$

Όταν ο παρατηρητής απομακρύνεται ισχύει η σχέση:

$$f_A = \frac{\upsilon_{\eta\chi} - \upsilon_A}{\upsilon_{\eta\chi}} f_s \Rightarrow f_A = \frac{\upsilon_{\eta\chi} - (\upsilon_o + \alpha \cdot \Delta t)}{\upsilon_{\eta\chi}} f_s \Rightarrow f_A = \frac{340 - 50 - 5 \cdot \Delta t}{340} 680 \Rightarrow$$

$$f_A = (290 - 5 \cdot \Delta t) \cdot 2 \Rightarrow f_A = 580 - 10\Delta t \ ,$$

όπου Δt το χρονικό διάστημα από τη στιγμή που ο παρατηρητής προσπέρασε την πηγή και μετά, δηλαδή $\Delta t = (t - 10)s$, άρα έχουμε:

$$f_A = 580 - 10 \cdot \Delta t \Rightarrow f_A = 580 - 10 \cdot (t - 10) \Rightarrow$$
$$f_A = 580 - 10 \cdot t + 100 \Rightarrow f_A = 680 - 10 \cdot t \left(\text{SI}\right) \ \gamma\iota\alpha \ 10s < t \le 20s$$

γ) Η συνάρτηση έχει δυο κλάδους:

για $0 \le t < 10s$ έχει εξίσωση $f_A = 680 + 10 \cdot t$ (SI)

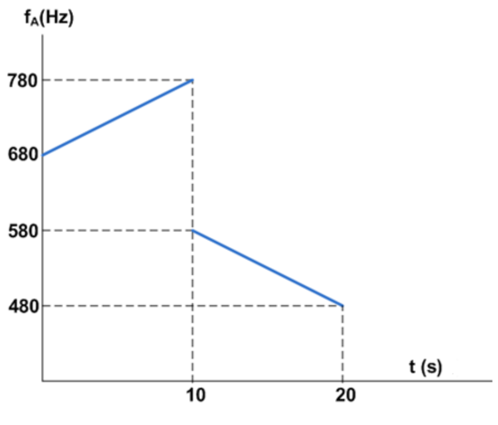
για $10s < t \le 20s$ έχει εξίσωση $f_A = 680 - 10 \cdot t$ (SI)

Αντικαθιστούμε στη θέση του t τις διάφορες τιμές που μπορεί να πάρει ο χρόνος και έχουμε:

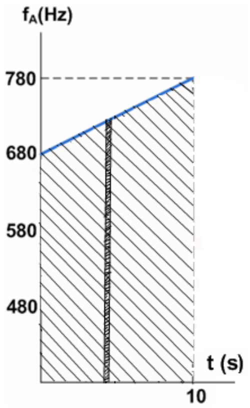
1ος κλάδος: για $t = 0 \Rightarrow f_A = 680Hz$. Για $t = 10s \Rightarrow f_A = 780Hz$.

2ος κλάδος: για $t = 10s \Rightarrow f_A = 580Hz$. Για $t = 20s \Rightarrow f_A = 480Hz$.

Το ζητούμενο διάγραμμα φαίνεται παρακάτω:



δ)



Α΄ τρόπος:

Τα μέγιστα που αντιλαμβάνεται ο παρατηρητής σε στοιχειώδες χρονικό διάστημα dt είναι $f_A \cdot dt$, δηλαδή το έντονα γραμμοσκιασμένο στοιχειώδες εμβαδό του σχήματος. Άρα τα μέγιστα που αντιλαμβάνεται στο χρονικό διάστημα $0s$ έως $10s$ είναι αριθμητικά ίσα με το εμβαδό του τραπεζίου που σχηματίζεται μεταξύ του άξονα των χρόνων ,της γραφικής παράστασης $f_A = f(t)$ και των κατακόρυφων που διέρχονται από τις χρονικές στιγμές $t = 0s$ και $t = 10s$.

Εμβαδό $= \dfrac{680+780}{2} \cdot 10 = 7300$ μέγιστα.

Β΄ τρόπος:

Τα μέγιστα N_A που αντιλαμβάνεται ο παρατηρητής βρίσκονται από τη σχέση

$N = \bar{f} \cdot \Delta t$, όπου $\bar{f}$ η μέση συχνότητα που αντιλαμβάνεται ο παρατηρητής στο χρονικό διάστημα 0 έως 10s. Επειδή στο χρονικό αυτό διάστημα η συχνότητα αυξάνεται γραμμικά σε σχέση με το χρόνο η μέση συχνότητα θα είναι:

$$\bar{f} = \frac{f_{αρχ} + f_{τελ}}{2} = \frac{680+780}{2} Hz = 730 Hz$$

Με αντικατάσταση στη σχέση $N = \bar{f} \cdot \Delta t$ εύκολα προκύπτει $N = 7300$ μέγιστα.

Ημερομηνία τροποποίησης: 19/07/2011