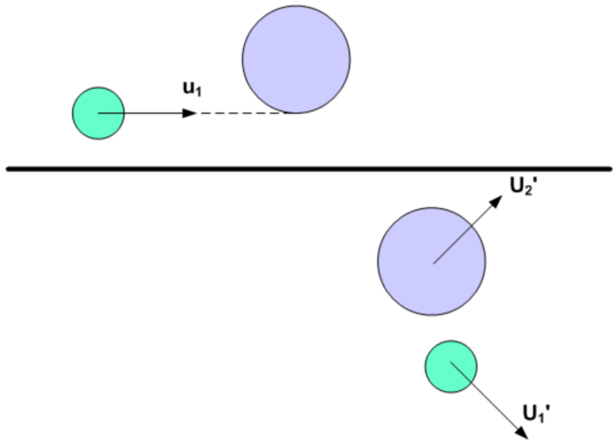
**ΚΕΦΑΛΑΙΟ 5$^{o}$: ΚΡΟΥΣΕΙΣ – ΦΑΙΝΟΜΕΝΟ DOPPLER**

**ΕΝΟΤΗΤΑ 1: ΚΡΟΥΣΕΙΣ**

**ΣΗΜΕΙΩΣΕΙΣ**

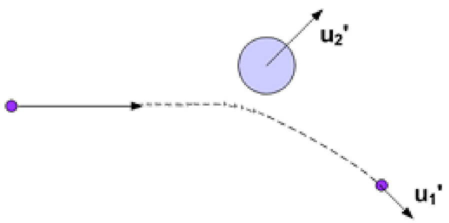
## Κρούση:

**Κρούση** ονομάζουμε το φαινόμενο κατά το οποίο δύο ή περισσότερα σώματα έρχονται σε επαφή για πολύ μικρό χρονικό διάστημα κατά το οποίο τα σώματα αλληλεπιδρούν με ισχυρές δυνάμεις, με αποτέλεσμα την απότομη μεταβολή της κινητικής τους κατάστασης.




*Εικόνα 1: Κρούση δύο σωμάτων*

Η έννοια της κρούσης είναι διευρυμένη στην περίπτωση του μικρόκοσμου, όπου τα συγκρουόμενα σώματα δεν έρχονται υποχρεωτικά σε επαφή. Όταν για παράδειγμα ένα σωμάτιο α κινείται προς έναν ακίνητο πυρήνα, οι αλληλεπιδράσεις μεταξύ των φορτισμένων σωματιδίων γίνονται πολύ ισχυρές όταν τα σώματα πλησιάσουν με αποτέλεσμα να μεταβάλλονται απότομα οι κινητικές καταστάσεις των σωμάτων, χωρίς αυτά να έρχονται τελικά σε επαφή. Η ιδιαίτερη αυτή περίπτωση κρούσης ονομάζεται **σκέδαση**.

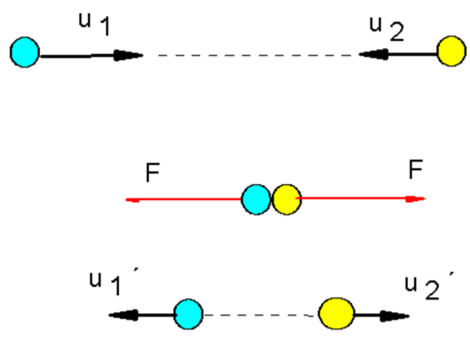



Εικόνα 2: Σκέδαση σωματιδίου α με αρχικά ακίνητο πυρήνα

## Είδη κρούσεων:

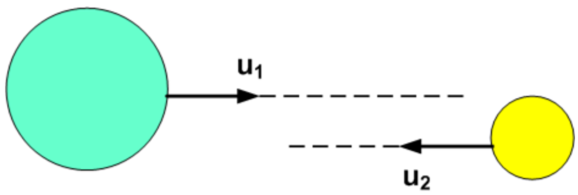
***Με κριτήριο τις διευθύνσεις των ταχυτήτων πριν την κρούση***

α. **Κεντρική** ονομάζεται η κρούση αν οι ταχύτητες των κέντρων μάζας των σωμάτων πριν την κρούση έχουν την ίδια διεύθυνση**.** Αν τα σώματα θεωρηθούν υλικά σημεία, τότε και οι ταχύτητες τους μετά την κρούση έχουν την ίδια διεύθυνση, την ίδια με αυτή των αρχικών ταχυτήτων.



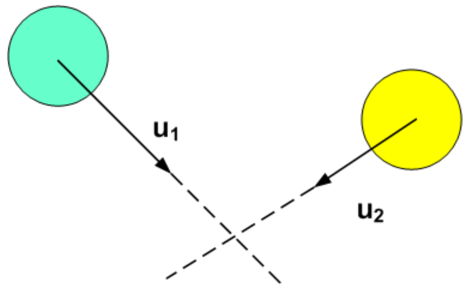

*Εικόνα 3: Κεντρική κρούση*

β. **Έκκεντρη** ονομάζεται η κρούση αν οι ταχύτητες των κέντρων μάζας των σωμάτων πριν την κρούση έχουν παράλληλες διευθύνσεις.




*Εικόνα 4: Έκκεντρη κρούση*

γ. **Πλάγια** ονομάζεται η κρούση αν οι ταχύτητες των κέντρων μάζας των σωμάτων πριν την κρούση έχουν τυχαίες διευθύνσεις.




*Εικόνα 5: Πλάγια κρούση*

## <u>Είδη κρούσεων</u>

***Με κριτήριο τη διατήρηση ή μη της μηχανικής ενέργειας του συστήματος***

**α. Ελαστική** ονομάζεται η κρούση κατά την οποία η μηχανική ενέργεια του συστήματος των σωμάτων διατηρείται. Δηλαδή: $\mathbf{E_{μηχ(αρχ)} = E_{μηχ(τελ)}}$.

Με δεδομένο ότι η χρονική διάρκεια μιας κρούσης είναι πολύ μικρή, θεωρούμε ότι πρακτικά η κρούση δύο σωμάτων συμβαίνει σε ένα σημείο του χώρου και τα σώματα δεν μετακινούνται κατά τη διάρκεια της. Έτσι η δυναμική ενέργεια των σωμάτων παραμένει σταθερή κατά τη διάρκεια της κρούσης. Συνεπώς η διατήρηση της μηχανικής ενέργειας του συστήματος των σωμάτων μεταπίπτει σε διατήρηση της κινητικής ενέργειας του συστήματος των σωμάτων. Έτσι, αν $K_{ολ(αρχ)}$ είναι η κινητική ενέργεια του συστήματος των σωμάτων ελάχιστα πριν την κρούση και $K_{ολ(τελ)}$ αμέσως μετά, θα πρέπει: $\mathbf{K_{ολ(αρχ)} = K_{ολ(τελ)}}$.

β. **Ανελαστική** ονομάζεται η κρούση στην οποία ένα μέρος της μηχανικής ενέργειας του συστήματος των σωμάτων μετατρέπεται σε θερμότητα. Δηλαδή:

$\mathbf{E_{μηχ(αρχ)} = E_{μηχ\,(τελ)} + Q}$

όπου **Q** το ποσό θερμότητας.

Και σε αυτήν την περίπτωση σύμφωνα με τη διευκρίνιση που παρουσιάστηκε στην περίπτωση της ελαστικής κρούσης, η θερμότητα Q προέρχεται από τη μείωση της κινητικής ενέργειας του συστήματος των σωμάτων. Συνεπώς:

$\mathbf{K_{ολ(αρχ)} = K_{ολ(τελ)} + Q}$.

Μία περίπτωση ανελαστικής κρούσης είναι η **πλαστική** κρούση, κατά την οποία το ένα σώμα “σφηνώνεται” στο άλλο με αποτέλεσμα να δημιουργείται συσσωμάτωμα.

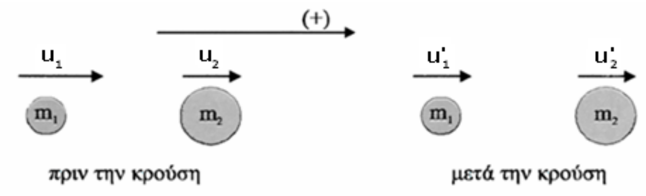
## Η Διατήρηση της ορμής στις κρούσεις

Κατά την κρούση των σωμάτων οι δυνάμεις αλληλεπίδρασης (εσωτερικές δυνάμεις) που αναπτύσσονται μεταξύ των σωμάτων είναι κατά πολύ ισχυρότερες από τις τυχόν υπάρχουσες εξωτερικές. Έτσι το σύστημα μπορεί να θεωρηθεί μονωμένο για τη διάρκεια της κρούσης, οπότε ισχύει η Αρχή Διατήρησης της Ορμής.

Άρα στη διάρκεια κάθε κρούσης ισχύει: $\vec{P}_{\text{ολ}(\text{πριν})} = \vec{P}_{\text{ολ}(\text{μετ.})}$.

**Κεντρική ελαστική κρούση δύο σφαιρών**

Έστω δύο σφαίρες με μάζες $m_1$ και $m_2$ οι οποίες κινούνται με ταχύτητες μέτρων $u_1$ και $u_2$ αντίστοιχα. Οι σφαίρες συγκρούονται κεντρικά και ελαστικά με αποτέλεσμα μετά την κρούση οι ταχύτητες τους να έχουν μέτρο $u_1'$ και $u_2'$, όπως φαίνεται στο σχήμα. Για να υπολογίσουμε τις ταχύτητες των σφαιρών μετά την κρούση εργαζόμαστε ως εξής:




**Εικόνα 6: Κεντρική ελαστική κρούση**

Κατά τη διάρκεια της κρούσης των δύο σφαιρών το σύστημα τους θεωρείται μονωμένο. Άρα ισχύει η ΑΔΟ:

$$\vec{P}_{ολ(πριν)} = \vec{P}_{ολ(μετ.)}$$

Η κρούση είναι κεντρική, άρα η παραπάνω διανυσματική έκφραση της ΑΔΟ μετατρέπεται σε αλγεβρική:

$$m_1 u_1 + m_2 u_2 = m_1 u_1' + m_2 u_2' \quad (1)$$

Η κρούση είναι ελαστική άρα: $K_{ολ(αρχ)} = K_{ολ(τελ)}$ ή

$$\frac{1}{2} m_1 u_1^2 + \frac{1}{2} m_2 u_2^2 = \frac{1}{2} m_1 u_1'^2 + \frac{1}{2} m_2 u_2'^2 \quad (2)$$

Η εξίσωση (1) γράφεται:

$$m_1 (u_1 - u_1') = m_2 (u_2' - u_2) \quad (3)$$

ενώ η (2):

$$m_1 (u_1 - u_1')(u_1 + u_1') = m_2 (u_2' - u_2)(u_2' + u_2) \quad (4)$$

Διαιρώντας κατά μέλη τη σχέση (4) με τη σχέση (3) προκύπτει: $u_1 + u_1' = u_2' + u_2 \quad (5)$

Οι ταχύτητες των σφαιρών αμέσως μετά την κρούση προκύπτουν λύνοντας το σύστημα των (3) και (5):

$$\begin{cases} u_1' = \dfrac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} u_1 + \dfrac{2m_2}{m_1 + m_2} u_2 & (6) \\ u_2' = \dfrac{2m_1}{m_1 + m_2} u_1 + \dfrac{m_2 - m_1}{m_1 + m_2} u_2 & (7) \end{cases}$$

Στις σχέσεις αυτές καταλήξαμε υποθέτοντας ότι οι ταχύτητες των σωμάτων πριν και μετά την κρούση έχουν τη φορά του σχήματος, άρα σε αυτές αντικαθιστούμε τις αλγεβρικές τιμές των ταχυτήτων. Αν προκύψει αρνητική τιμή, τότε η εν λόγω ταχύτητα είναι αντίθετης φοράς από αυτή που έχουμε σχεδιάσει.

**Διερεύνηση των σχέσεων (6), (7)**

**Α.** Αν $m_1 = m_2$ τότε από τις σχέσεις (6), (7) προκύπτει

$$\begin{cases} u_1' = u_2 \\ u_2' = u_1 \end{cases}$$

δηλαδή σε μία κεντρική ελαστική κρούση δύο σφαιρών με ίσες μάζες, οι σφαίρες "ανταλλάσσουν" ταχύτητες.

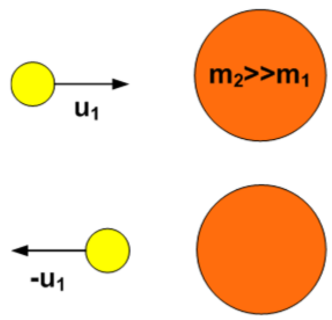
**Β.** Αν $u_2 = 0$, αν δηλαδή η σφαίρα μάζας $m_2$ είναι ακίνητη πριν την κρούση τότε από τις σχέσεις (6), (7) προκύπτει

$$\begin{cases} u_1' = \dfrac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} u_1 & (8) \\ u_2' = \dfrac{2m_1}{m_1 + m_2} u_1 & (9) \end{cases}$$

**Γ.** Αν $u_2=0$ και $m_2>>m_1$ αν δηλαδή η μία σφαίρα συγκρούεται κεντρικά και ελαστικά με άλλη ακίνητη και πολύ μεγαλύτερης μάζας τότε από τις (8) και (9) προκύπτει:

$$\begin{cases} u_1' = -u_1 \\ u_2' = 0 \end{cases}$$

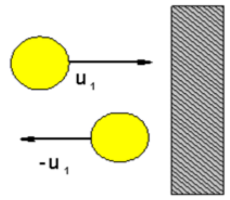
δηλαδή η σφαίρα με την μικρότερη μάζα ανακλάται με ταχύτητα ίδιου μέτρου και αντίθετης φοράς από αυτήν της αρχικής




***Εικόνα 7: Κρούση σφαίρας με ακίνητο σώμα πολύ μεγαλύτερης μάζας***

και το σώμα με την κατά πολύ μεγαλύτερη μάζα, παραμένει πρακτικά ακίνητο.

Την ίδια συμπεριφορά παρουσιάζει η ελαστική κρούση μίας σφαίρας με ακλόνητο εμπόδιο, όπως ένας τοίχος, αν η σφαίρα προσκρούει με ταχύτητα κάθετη στην επιφάνεια του τοίχου.

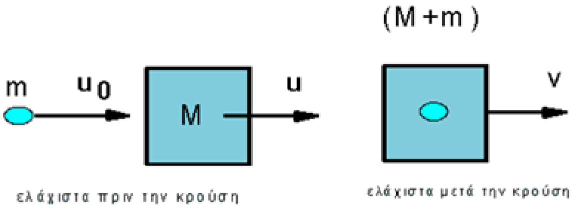



***Εικόνα 8: Κρούση σφαίρας με ακλόνητο εμπόδιο***

## Διευκρινίσεις:

### *i. Μελέτη πλαστικής κρούσης δύο σωμάτων*

Έστω ένας μικρός ξύλινος κύβος μάζας M ο οποίος κινείται οριζόντια με ταχύτητα μέτρου u και ένα βλήμα μάζας m το οποίο κινείται στην ίδια διεύθυνση με τον κύβο με ταχύτητα $u_0$. Ας υποθέσουμε ότι τα σώματα συγκρούονται κεντρικά και πλαστικά, δημιουργώντας συσσωμάτωμα μάζας $\left(m+M\right)$ το οποίο αμέσως μετά την κρούση έχει ταχύτητα V.




Η ορμή του συστήματος των σωμάτων διατηρείται σταθερή, άρα: $\vec{p}_m + \vec{p}_M = \vec{p}'_{(m+M)} \Rightarrow$

$$mu_0 + Mu = (m+M)V \Rightarrow V = \frac{mu_0 + Mu}{m+M}$$

Η κινητική ενέργεια του συστήματος των σωμάτων πριν την κρούση είναι: $K_{ολ(αρχ)} = \frac{1}{2}mu_0^2 + \frac{1}{2}Mu^2$

ενώ η κινητική ενέργεια του συσσωματώματος αμέσως μετά την κρούση είναι: $K_{ολ(τελ)} = \frac{1}{2}(m+M)V^2 \Rightarrow$

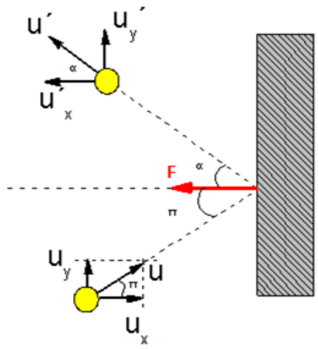
$$K_{ολ(τελ)} = \frac{1}{2}(m+M)\left(\frac{mu_0 + Mu}{m+M}\right)^2 \Rightarrow K_{ολ(τελ)} = \frac{1}{2}\frac{(mu_0 + Mu)^2}{m+M}$$

Η θερμότητα που εκλύεται κατά την κρούση θα είναι:

$$Q = K_{ολ(αρχ)} - K_{ολ(τελ)} = \frac{1}{2}mu_0^2 + \frac{1}{2}Mu^2 - \frac{1}{2}\frac{(mu_0 + Mu)^2}{m+M}$$

***ii. Ισότητα της γωνίας πρόσπτωσης με τη γωνία ανάκλασης όταν σφαίρα συγκρούεται πλάγια και ελαστικά με ακλόνητο εμπόδιο.***

Θεωρούμε μία σφαίρα μάζας m η οποία προσκρούει σε κατακόρυφο τοίχο, έτσι ώστε η ταχύτητα της να σχηματίζει με την κάθετη στον τοίχο γωνία π. Αναλύουμε την ταχύτητα u σε δύο κάθετες μεταξύ τους συνιστώσες, μια κάθετη στο εμπόδιο και μία παράλληλη στο εμπόδιο. Η σύγκρουση αφορά τη συνιστώσα η οποία είναι κάθετη στο εμπόδιο, δηλαδή την $u_x$. Στη διεύθυνση αυτή το σώμα δέχεται δύναμη από ακλόνητο εμπόδιο, άρα δεν μπορούμε να εφαρμόσουμε την Αρχή Διατήρησης Ορμής. Στη διεύθυνση που είναι παράλληλη στο εμπόδιο η ορμή θα παραμένει σταθερή, αφού δεν ασκείται δύναμη στη σφαίρα. Άρα και οι αντίστοιχες συνιστώσες πριν και μετά την κρούση είναι ίσες. Δηλαδή $u_y = u_y'$ (1)




***Εικόνα 10: Πλάγια ελαστική κρούση με ακλόνητο εμπόδιο***

Η κρούση είναι ελαστική, άρα η κινητική ενέργεια διατηρείται: $K' = K$ ή $\frac{1}{2}mu^2 = \frac{1}{2}mu'^2$ ή

$\boxed{u^2 = u'^2}$. (2)

Από τις (1) και (2):

$$u^2 = u'^2 \Rightarrow \sqrt{u_x^2 + u_y^2} = \sqrt{u'^2_x + u'^2_y} \Rightarrow |u_x| = |u'_x| \Rightarrow u_x = -u'_x$$

Επίσης, από την (1) έχουμε:

$u_y' = u_y \Rightarrow ημπ = ημα \Rightarrow π = α$ , δηλαδή η γωνία πρόσπτωσης ισούται με τη γωνία ανάκλασης.

**ΚΕΦΑΛΑΙΟ 5$^{Ο}$: ΚΡΟΥΣΕΙΣ - ΦΑΙΝΟΜΕΝΟ DOPPLER**

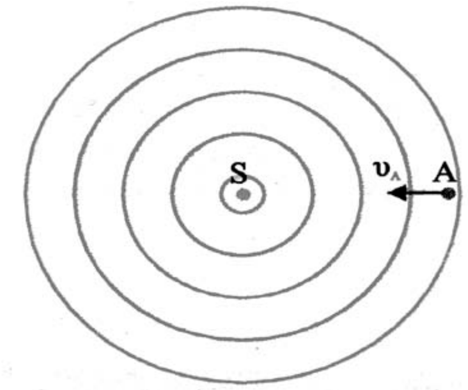
**ΕΝΟΤΗΤΑ 2: ΦΑΙΝΟΜΕΝΟ DOPPLER**

**ΣΗΜΕΙΩΣΕΙΣ**

***Doppler*** ονομάζεται το φαινόμενο κατά το οποίο ένας παρατηρητής αντιλαμβάνεται διαφορετική συχνότητα από αυτή που εκπέμπει μία κυματική πηγή, λόγω σχετικής κίνησης μεταξύ παρατηρητή και πηγής.

**Μελέτη του φαινομένου στην περίπτωση των ηχητικών κυμάτων**

**<u>Ακίνητη πηγή – κινούμενος παρατηρητής</u>**




Έστω ότι ένας παρατηρητής (Α) κινείται με ταχύτητα $\upsilon_A$ πλησιάζοντας ακίνητη πηγή S η οποία εκπέμπει ηχητικά κύματα με συχνότητα $f_s$ στον ακίνητο αέρα, όπου τα ηχητικά κύματα διαδίδονται με ταχύτητα υ. Στο σχήμα οι ομόκεντροι κύκλοι παριστάνουν τη θέση των διαδιδόμενων μέγιστων (μέτωπα) που εκπέμπονται από την ηχητική πηγή. Δύο διαδοχικά μέτωπα απέχουν κατά λ, εξ ορισμού. Επίσης ισχύει η θεμελιώδης εξίσωση της κυματικής $\upsilon=\lambda\cdot f_s$.

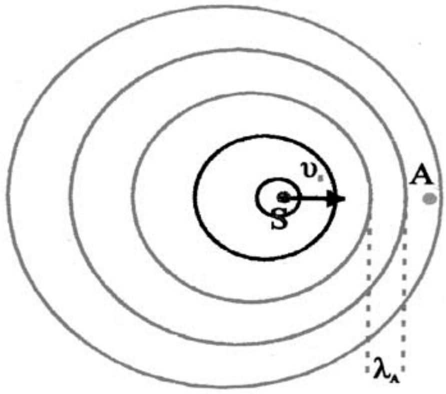
Ο ήχος όμως ως προς τον παρατηρητή διαδίδεται με ταχύτητα $\upsilon+\upsilon_A$, άρα, με βάση τη θεμελιώδη εξίσωση της κυματικής αυτός αντιλαμβάνεται συχνότητα:

$$f_A=\frac{\upsilon+\upsilon_A}{\lambda}\Rightarrow f_A=\frac{\upsilon+\upsilon_A}{\frac{\upsilon}{f_s}}\Rightarrow \boxed{f_A=\frac{\upsilon+\upsilon_A}{\upsilon}f_s}$$

Αντίστοιχα, αν ο παρατηρητής απομακρύνεται από την πηγή, τότε ο ήχος ως προς τον παρατηρητή διαδίδεται με ταχύτητα $\upsilon-\upsilon_A$, άρα αυτός αντιλαμβάνεται συχνότητα:

$$\boxed{f_A=\frac{\upsilon-\upsilon_A}{\upsilon}f_s}$$

## Ακίνητος παρατηρητής – κινούμενη πηγή




Έστω ότι μία ηχητική πηγή κινείται με ταχύτητα $\upsilon_s$ πλησιάζοντας ακίνητο παρατηρητή, εκπέμποντας με συχνότητα $f_s$. Η πηγή ακολουθεί τα ηχητικά κύματα, οπότε ο παρατηρητής αντιλαμβάνεται ότι δύο διαδοχικά μέγιστα απέχουν κατά $\lambda_A = \lambda - \upsilon_s T$, όπου $\upsilon_s T$ η απόσταση που διανύει η πηγή σε χρόνο μίας περιόδου.

Άρα: $\lambda_A = \lambda - \upsilon_s T \Rightarrow \lambda_A = \frac{\upsilon}{f_s} - \frac{\upsilon_s}{f_s}$ . Συνεπώς η συχνότητα που αντιλαμβάνεται ο παρατηρητής θα ισούται με: $f_A = \frac{\upsilon}{\lambda_A} \Rightarrow f_A = \frac{\upsilon}{\frac{\upsilon}{f_s} - \frac{\upsilon_s}{f_s}} \Rightarrow \boxed{f_A = \frac{\upsilon}{\upsilon - \upsilon_s} f_s}$

Αντίστοιχα, αν η πηγή απομακρύνεται από τον ακίνητο παρατηρητή, τότε η συχνότητα που αυτός αντιλαμβάνεται είναι: $\boxed{f_A = \frac{\upsilon}{\upsilon + \upsilon_s} f_s}$

**Κινούμενη πηγή – κινούμενος παρατηρητής:**

Αν και ο παρατηρητής και η πηγή κινούνται σε σχέση με τον αέρα τότε η συχνότητα που αντιλαμβάνεται παρατηρητής είναι: $\boxed{f_A = \frac{\upsilon \pm \upsilon_A}{\upsilon \mp \upsilon_s} f_s}$

Στην παραπάνω εξίσωση ο αριθμητής αναφέρεται στην κίνηση του παρατηρητή. Το πρόσημο (+) χρησιμοποιείται όταν ο παρατηρητής κινείται προς την πηγή και το (-) στην αντίστροφη περίπτωση. Αντίστοιχα, ο παρονομαστής αναφέρεται στην κίνηση της πηγής με το πρόσημο (-) να χρησιμοποιείται όταν η πηγή κινείται προς τον παρατηρητή και το (+) στην αντίστροφη περίπτωση.

**Διευκρινήσεις:**

α) Η παραπάνω μελέτη του φαινομένου έχει γίνει υπό την προϋπόθεση ότι ο παρατηρητής και η πηγή κινούνται με ταχύτητες μικρότερου μέτρου από την ταχύτητα διάδοσης των ηχητικών κυμάτων.

β) Αν ο παρατηρητής και η πηγή είναι ακίνητοι ή κινούνται ομόρροπα και ισοταχώς, τότε η συχνότητα του ήχου που αντιλαμβάνεται ο παρατηρητής είναι ίση με αυτή που εκπέμπεται από την πηγή.

## Εφαρμογές

α) Ραντάρ τροχαίας: Οι συσκευές ραντάρ της τροχαίας εκπέμπουν ηλεκτρομαγνητικά κύματα τα οποία προσπίπτουν στα κινούμενα οχήματα και ανακλώνται πίσω στη συσκευή. Τα ανακλώμενα κύματα έχουν διαφοροποιημένη συχνότητα σε σχέση με τα εκπεμπόμενα καθώς το κινούμενο όχημα είναι η κινούμενη πηγή. Ο ανιχνευτής υπολογίζει από τη διαφορά των συχνοτήτων την ταχύτητα των οχημάτων.

β) Μετεωρολογία: Αντίστοιχα ραντάρ μετρούν την ταχύτητα των αερίων μαζών ώστε να συγκεντρωθούν στοιχεία των μετεωρολογικών προβλέψεων.

γ) Ιατρική: Με κατάλληλα μηχανήματα στέλνονται υπερηχητικοί παλμοί με σκοπό να ανακλαστούν από τα ερυθρά αιμοσφαίρια που βρίσκονται μέσα στο αίμα και κινούνται με μεγάλες ταχύτητες. Από τη διαφορά συχνότητας μεταξύ των εκπεμπόμενων και ανακλώμενων κυμάτων μπορούμε να υπολογίσουμε την ταχύτητα ροής του αίματος.

δ) Αστρονομία: Το φαινόμενο αφορά και το φώς, όπου η μεταβολή του χρώματος που λαμβάνουμε από κάποιο άστρο μεταφράζεται σε ταχύτητα με την οποία το άστρο πλησιάζει ή απομακρύνεται από τη Γη. Ειδικότερα, αν ένα άστρο απομακρύνεται από τη Γη τότε η ακτινοβολία που ανιχνεύουμε από αυτό έχει μετατοπιστεί προς το ερυθρό (μικρότερη συχνότητα) ενώ αντίστροφα αν ένα άστρο πλησιάζει προς τη Γη τότε η ακτινοβολία που ανιχνεύουμε έχει μετατοπιστεί προς το ιώδες. Βέβαια, η εξισώσεις στην περίπτωση του φαινομένου Doppler για τα ηλεκτρομαγνητικά κύματα γενικότερα διαφέρουν από αυτές που δείξαμε για την περίπτωση του ήχου.

ε) Υποβρύχιες παρατηρήσεις: Με τη βοήθεια του φαινομένου μπορούμε να υπολογίσουμε την κατεύθυνση και την ταχύτητα ενός σώματος που κινείται υποβρυχίως.

*Ημερομηνία τροποποίησης: 19/07/2011*