ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2^{Ο}: ΚΥΜΑΤΑ

ΕΝΟΤΗΤΑ 1: Η ΕΝΝΟΙΑ ΤΟΥ ΚΥΜΑΤΟΣ – ΜΗΧΑΝΙΚΑ ΚΥΜΑΤΑ

ΛΥΜΕΝΑ ΘΕΜΑΤΑ

ΘΕΜΑ Β

Ερώτηση 1.

Εγκάρσιο αρμονικό κύμα διαδίδεται σε ομογενές γραμμικό ελαστικό μέσο και προς την θετική κατεύθυνση του άξονα x'x. Θεωρούμε ότι η πηγή παραγωγής του κύματος βρίσκεται στο σημείο Ο, αρχή του άξονα x'x.

Δύο σημεία Α και Β του ελαστικού μέσου, έχουν κάποια χρονική στιγμή φάσεις $\varphi_A = 11\frac{\pi}{6}\ \mathrm{rad/s}$ και $\varphi_B = 10\pi\ \mathrm{rad/s}$ αντίστοιχα.

Η απόσταση του σημείου Β από την πηγή παραγωγής του κύματος είναι:

α) μεγαλύτερη από αυτή του Α.

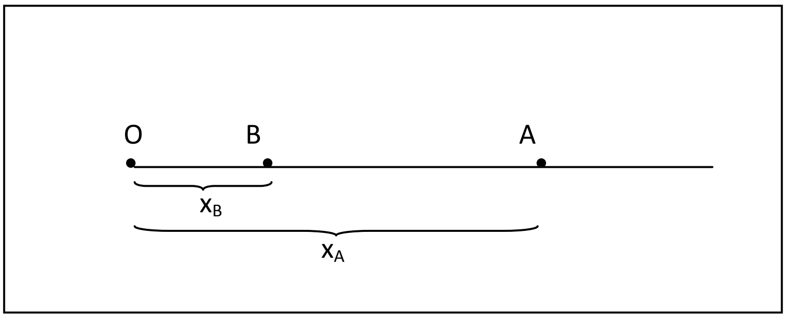
β) μικρότερη από αυτή του Α.

γ) ίση με αυτή του Α.

Να δικαιολογήσετε την απάντησή σας.

<u>Λύση</u>

Σωστή απάντηση η β.



Γνωρίζουμε ότι η φάση ενός αρμονικού κύματος δίνεται από τη σχέση: $\varphi = 2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda}\right)$

Επειδή από τα δεδομένα, η φάση του Β είναι μεγαλύτερη από αυτή του Α θα έχουμε:

$$\varphi_B > \varphi_A \Rightarrow 2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{x_B}{\lambda}\right) > 2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{x_A}{\lambda}\right) \Rightarrow -2\pi\frac{x_B}{\lambda} > -2\pi\frac{x_A}{\lambda} \Rightarrow x_B < x_A$$

Άρα το Β βρίσκεται πιο κοντά στην πηγή (σημείο Ο).

Ερώτηση 2.

Δύο αρμονικά εγκάρσια κύματα διαδίδονται σε ελαστική χορδή κατά την θετική κατεύθυνση.

Αν είναι γνωστό ότι το πλάτος του δεύτερου κύματος είναι διπλάσιο του πρώτου $(A_2 = 2A_1)$ ενώ τα μήκη κύματος των δύο αυτών κυμάτων είναι ίσα ($\lambda_2 = \lambda_1$), τότε για τα μέτρα των μέγιστων ταχυτήτων ταλάντωσης των μορίων της ελαστικής χορδής θα ισχύει:

α) $\frac{u_{max1}}{u_{max2}} = 2$

β) $\frac{u_{max1}}{u_{max2}} = 1$

γ) $\frac{u_{max1}}{u_{max2}} = \frac{1}{2}$

<u>Λύση</u>

Σωστή απάντηση η γ.

Αφού τα δύο κύματα διαδίδονται στο ίδιο ελαστικό μέσο, θα έχουν ίσες ταχύτητες διάδοσης.

$u_1 = u_2$ (1)

Από την σχέση (1) και με την βοήθεια της θεμελιώδους εξίσωσης της κυματικής $u = \lambda \cdot f$, όπου λ το μήκος και f η συχνότητα του κύματος, προκύπτει:

$$\lambda_1 \cdot f_1 = \lambda_2 \cdot f_2 \xrightarrow{\lambda_1 = \lambda_2} f_1 = f_2$$

Συνεπώς, επειδή $T = \frac{1}{f}$, προκύπτει:

$$T_1 = T_2$$

και αφού $\omega = \frac{2\pi}{T}$, θα ισχύει:

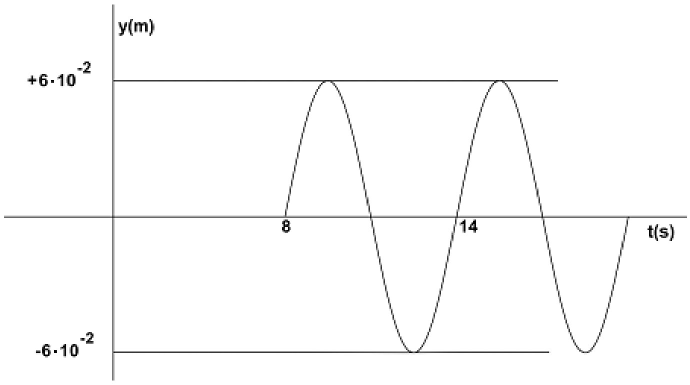
$\omega_1 = \omega_2$ (2)

Από την σχέση που δίνει το μέτρο της μέγιστης ταχύτητας ταλάντωσης: $u_{max} = \omega A$, όπου ω η γωνιακή συχνότητα και A το πλάτος της ταλάντωσης, και με τη βοήθεια της σχέσης (2) προκύπτει:

$$\frac{u_{max1}}{u_{max2}} = \frac{\omega A_1}{\omega A_2} \xrightarrow{A_2 = 2A_1} \frac{u_{max1}}{u_{max2}} = \frac{A_1}{2A_1} \Rightarrow \frac{u_{max1}}{u_{max2}} = \frac{1}{2}$$

Ερώτηση 3.

Η παρακάτω γραφική παράσταση, αναφέρεται στη ταλάντωση ενός σημείου Α ενός ομογενούς ελαστικού μέσου στο οποίο διαδίδεται εγκάρσιο αρμονικό κύμα με ταχύτητα $u = 4m/s$.



α) Η περίοδος του κύματος είναι:

1) $6s$.

2) $8s$.

3) $6 \cdot 10^{-2} s$.

β) Το μήκος του κύματος είναι:

1) $24m$.

2) $\frac{2}{3}m$.

3) $2m$.

Να δικαιολογήσετε τις απαντήσεις σας.

<u>Λύση</u>

Οι σωστές απαντήσεις είναι:

α) 1.

β) 1.

Από το διάγραμμα προκύπτουν:

α) $T = (14-8)s \Rightarrow T = 6s$

β) Με βάση τη θεμελιώδη εξίσωση της κυματικής προκύπτει:

$$u = \frac{\lambda}{T} \Rightarrow \lambda = uT = 24m$$

Ερώτηση 4.

Δίνεται η εξίσωση της φάσης ενός γραμμικού αρμονικού κύματος που διαδίδεται σε γραμμικό ομογενές ελαστικό μέσο: $\varphi = \frac{2\pi}{3}(6t - 2x)$ στο S.I. Ένα σημείο Σ απέχει 6 m από την πηγή δημιουργίας του κύματος. Το κύμα τη χρονική στιγμή $t = 1s$:

α) δεν έχει φτάσει στο σημείο Σ.

β) μόλις έφτασε στο σημείο Σ.

γ) έχει προσπεράσει το σημείο Σ.

Να δικαιολογήσετε την απάντησή σας.

<u>Λύση</u>

Σωστή απάντηση η α.

Α΄ τρόπος:

Συγκρίνοντας τον γενικό τύπο της φάσης ενός μηχανικού αρμονικού κύματος με αυτόν της εκφώνησης προκύπτουν:

$$\begin{cases} \varphi = \frac{2\pi}{3}(6t - 2x) \\ \varphi = 2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda}\right) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \varphi = (4\pi t - \frac{4\pi}{3}x) \\ \varphi = \left(\frac{2\pi t}{T} - \frac{2\pi x}{\lambda}\right) \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} \frac{2\pi t}{T} = 4\pi t \Rightarrow 4T = 2s \Rightarrow T = 0,5s \\ \\ \frac{2\pi x}{\lambda} = \frac{4\pi x}{3} \Rightarrow 4\lambda = 6m \Rightarrow \lambda = 1,5m \end{matrix}$$

Από τη θεμελιώδη εξίσωση της κυματικής μπορούμε να υπολογίσουμε την ταχύτητα διάδοσης του κύματος.

$$u = \frac{\lambda}{T} = \frac{1,5}{0,5} m/s \Rightarrow u = 3m/s$$

Σε χρόνο $t = 1s$ το κύμα έχει διανύσει απόσταση:

$$u = \frac{d}{t} \Rightarrow d = ut \Rightarrow d = 3m$$

Άρα το κύμα δεν έχει φτάσει ακόμα στο σημείο Σ.

Β΄ τρόπος:

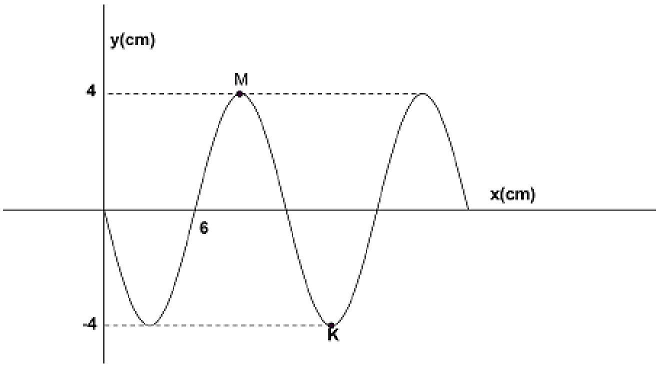
Η φάση ενός υλικού σημείου του μέσου έχει νόημα από τη στιγμή που αυτό ξεκινά να ταλαντώνεται. Εκείνη τη στιγμή η φάση του προφανώς ισούται με μηδέν. Αν το σημείο

$\Sigma\left(x_\Sigma = 6m\right)$ ξεκινά την ταλάντωση του τη χρονική στιγμή t_Σ, τότε η εξίσωση της φάσης του θα είναι μηδενική. Δηλαδή: $\varphi_\Sigma = 0 \Rightarrow \frac{2\pi}{3}(6t_\Sigma - 2x_\Sigma) = 0 \Rightarrow 6t_\Sigma - 2\cdot 6 = 0 \Rightarrow t_\Sigma = 2s$

Συνεπώς τη χρονική στιγμή $t = 1s$ το κύμα δεν έχει φτάσει στο σημείο Σ.

Ερώτηση 5.

Στο παρακάτω διάγραμμα φαίνεται το στιγμιότυπο ενός γραμμικού αρμονικού κύματος που διαδίδεται σε ομογενές ελαστικό μέσο κάποια χρονική στιγμή.



Το μήκος του ευθύγραμμου τμήματος ΚΜ εκείνη τη χρονική στιγμή είναι ίση με

α) 10cm.

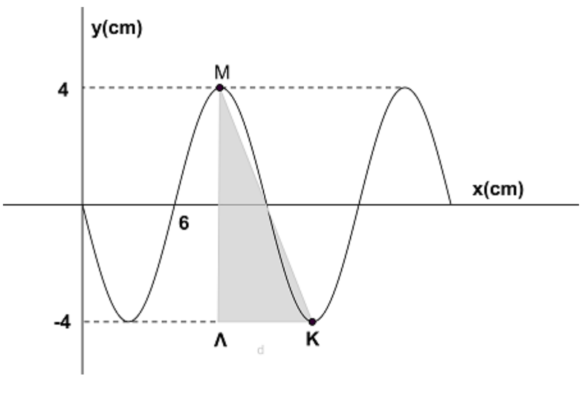
β) 8cm.

γ) 6cm.

Να δικαιολογήσετε την απάντησή σας.

Λύση

Σωστή απάντηση η α.



Από το διάγραμμα προκύπτει: $\frac{\lambda}{2} = 6\text{cm} \Rightarrow \lambda = 12\text{cm}$

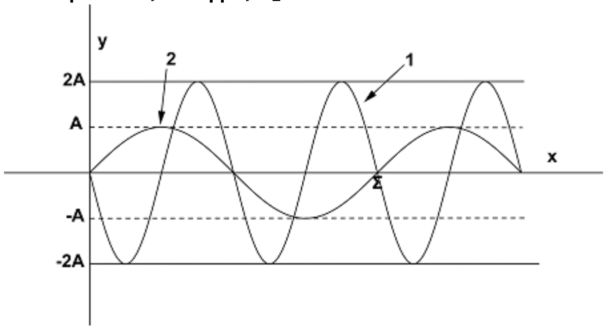
Με εφαρμογή του πυθαγόρειου θεωρήματος στο γραμμοσκιασμένο τρίγωνο έχουμε: $(\text{MK}) = \sqrt{(\Lambda\text{K})^2 + (\text{M}\Lambda)^2}$ (1)

Όμως είναι: $\left(\mathrm{M\Lambda}\right)=2\mathrm{A}$ και $\left(\mathrm{\Lambda K}\right)=\dfrac{\lambda}{2}$, οπότε: $(\mathrm{MK})=\sqrt{(\dfrac{\lambda}{2})^2+\left(2\mathrm{A}\right)^2}=$

$\sqrt{6^2+8^2}\,\mathrm{cm}=\sqrt{100}\mathrm{cm}\Rightarrow(\mathrm{MK})=10\mathrm{cm}$

Ερώτηση 6.

Οι παρακάτω γραφικές παραστάσεις αναφέρονται σε στιγμιότυπα δύο εγκάρσιων αρμονικών κυμάτων (1) και (2), που διαδίδονται στο ίδιο ομογενές ελαστικό μέσον κάποια χρονική στιγμή t_1.



Α) Να μεταφέρετε στο τετράδιο σας το παραπάνω διάγραμμα και να σχεδιάσετε τη φορά του διανύσματος της ταχύτητάς του σημείου Σ τη χρονική στιγμή t_1, για τις δύο αυτές περιπτώσεις.

Β) Αν u_{max1} και u_{max2} τα μέτρα των μέγιστων ταχυτήτων ταλάντωσης του σημείου Σ από τα δύο κύματα, τότε ισχύει ότι:

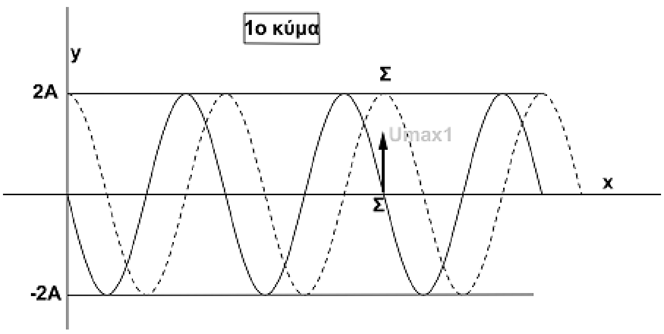
α) $\dfrac{u_{max1}}{u_{max2}} = 2$.

β) $\dfrac{u_{max1}}{u_{max2}} = 1$.

γ) $\dfrac{u_{max1}}{u_{max2}} = 4$.

<u>Λύση</u>

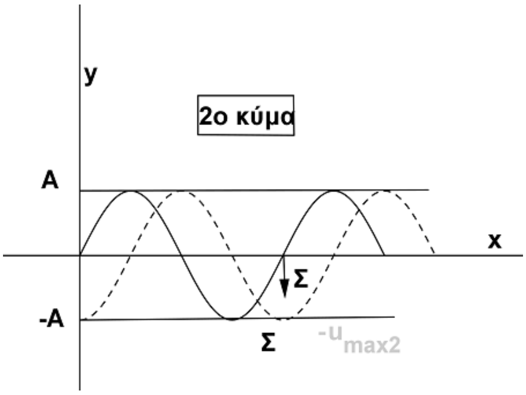
Σωστή απάντηση για το Β) είναι η γ).



Α) Στο παραπάνω διάγραμμα με συνεχή γραμμή φαίνεται το στιγμιότυπο του 1ου κύματος τη χρονική στιγμή t_1, ενώ με διακεκομμένη γραμμή φαίνεται το στιγμιότυπο του ίδιου κύματος τη χρονική στιγμή $t_2 = t_1 + T/4$

Παρατήρηση: Για να σχεδιάσουμε το στιγμιότυπο του κύματος τη χρονική στιγμή t_2, μετακινούμε τη γραφική παράσταση που αναφέρεται τη χρονική στιγμή t_1 κατά λ/4 προς τα δεξιά, γιατί όπως είναι γνωστό το κύμα σε χρόνο μίας περιόδου διανύει ένα μήκος κύματος, άρα σε ένα τέταρτο της περιόδου διανύει ένα τέταρτο του μήκους κύματος.

Σε αυτό το δεύτερο στιγμιότυπο το σημείο Σ βρίσκεται στην ανώτερη θέση της ταλάντωσής του και αυτό εξηγεί την κατεύθυνση της ταχύτητας του την χρονική στιγμή t_1. Το ότι η ταχύτητα του σημείου Σ έχει τη χρονική στιγμή t_1 τη μέγιστη κατά μέτρο τιμή της, εξηγείται από το γεγονός ότι βρίσκεται στη θέση ισορροπίας του (y=0).



Στο παραπάνω διάγραμμα με συνεχή γραμμή φαίνεται το στιγμιότυπο του 2ου κύματος τη χρονική στιγμή t_1, ενώ με διακεκομμένη γραμμή φαίνεται το στιγμιότυπο του ίδιου κύματος τη χρονική στιγμή $t_2=t_1+T/4$.

Για το σχεδιασμό αυτού του δεύτερου στιγμιότυπου κάναμε χρήση της παραπάνω παρατήρησης.

Σε αυτό το δεύτερο στιγμιότυπο το σημείο Σ βρίσκεται στην κατώτερη θέση της ταλάντωσής του και αυτό εξηγεί την κατεύθυνση της ταχύτητας του την χρονική στιγμή t_1. Το ότι η ταχύτητα του σημείου Σ έχει τη χρονική στιγμή t_1 τη μέγιστη κατά μέτρο τιμή της, εξηγείται από το γεγονός ότι βρίσκεται στη θέση ισορροπίας του (y=0).

Β) Από το διάγραμμα της εκφώνησης παρατηρούμε ότι το μήκος κύματος του 2ου κύματος είναι διπλάσιο από αυτό του 1ου.

$\lambda_2 = 2\lambda_1$ (1)

Επειδή και τα δύο κύματα διαδίδονται στο ίδιο ελαστικό μέσο, θα έχουν ίσες ταχύτητες διάδοσης:

$u_1 = u_2$ (2)

Η σχέση (2) με τη βοήθεια της σχέσης: $u = \frac{\lambda}{T}$, γράφεται:

$$\frac{\lambda_1}{T_1} = \frac{\lambda_2}{T_2} \xrightarrow{(1)} \frac{\lambda_1}{T_1} = \frac{2\lambda_1}{T_2} \Rightarrow T_2 = 2T_1 \quad (3)$$

Από τη γραφική παράσταση προκύπτει ότι: $A_1=2A_2$ (4)

Για τα μέτρα της μέγιστης ταχύτητας ταλάντωσης του σημείου Σ ισχύει:

$$\left.\begin{matrix} u_{max1} = \omega_1 A_1 \\ u_{max2} = \omega_2 A_2 \end{matrix}\right\} \Rightarrow \left.\begin{matrix} u_{max1} = \dfrac{2\pi}{T_1} A_1 \\ u_{max2} = \dfrac{2\pi}{T_2} A_2 \end{matrix}\right\} \xrightarrow{\div} \frac{u_{max1}}{u_{max2}} = \frac{T_2}{T_1} \cdot \frac{A_1}{A_2} \xrightarrow{(3),(4)} \frac{u_{max1}}{u_{max2}} = \frac{2T_1}{T_1} \cdot \frac{2A_2}{A_2} \Rightarrow$$

$$\frac{u_{max1}}{u_{max2}} = 4$$

Ερώτηση 7.

Δίνονται οι εξισώσεις δύο εγκάρσιων μηχανικών αρμονικών κυμάτων στο (S.I.), καθένα από τα οποία διαδίδεται σε διαφορετικό ομογενές γραμμικό ελαστικό μέσο.

1) $y_1 = 5 \cdot 10^{-1} \eta\mu\pi\left(\frac{t}{5} - x\right)$,

2) $y_2 = 2 \cdot 10^{-2} \eta\mu 2\pi\left(\frac{t}{4} + x\right)$.

Α) Η ταχύτητα διάδοσης του πρώτου κύματος είναι

α) μεγαλύτερη της ταχύτητας διάδοσης του δεύτερου.

β) μικρότερη της ταχύτητας διάδοσης του δεύτερου.

γ) ίση με τη ταχύτητα διάδοσης του δεύτερου.

Β) το μέτρο της μέγιστης επιτάχυνσης που έχουν τα μόρια του ελαστικού μέσου στο οποίο διαδίδεται το πρώτο κύμα είναι:

α) μεγαλύτερο

β) μικρότερο

γ) ίσο με αυτό των μορίων του ελαστικού μέσου στο οποίο διαδίδεται το δεύτερο κύμα.

Να δικαιολογήσετε τις απαντήσεις σας.

Λύση

Σωστές απαντήσεις είναι οι:

Α) β)

Β) α)

Α) Η γενική εξίσωση ενός κύματος δίνεται από τη σχέση: $y = A\eta\mu 2\pi\left(\frac{t}{T} \pm \frac{x}{\lambda}\right)$, όπου Α το πλάτος, λ το μήκος και Τ η περίοδος του κύματος.

Συγκρίνοντας τη γενική εξίσωση του κύματος με αυτές της εκφώνησης, έχουμε:

Για το 1^{ο} κύμα.

$$\begin{cases} y_1 = 5 \cdot 10^{-1} \eta\mu\pi\left(\frac{t}{5} - x\right) \\ y_1 = A_1 \eta\mu 2\pi\left(\frac{t}{T_1} - \frac{x}{\lambda_1}\right) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y_1 = 5 \cdot 10^{-1} \eta\mu\left(\frac{\pi t}{5} - \pi x\right) \\ y_1 = A_1 \eta\mu\left(\frac{2\pi t}{T_1} - \frac{2\pi x}{\lambda_1}\right) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{2\pi t}{T_1} = \frac{\pi t}{5} \Rightarrow T_1 = 10\text{s} \\ \frac{2\pi x}{\lambda_1} = \pi x \Rightarrow \lambda_1 = 2\text{m} \end{cases} \quad \text{και}$$

$A_1 = 5 \cdot 10^{-1}\text{m}$

Από τη θεμελιώδη εξίσωση της κυματικής υπολογίζουμε τη ταχύτητα διάδοσης αυτού του κύματος:

$$u_1 = \frac{\lambda_1}{T_1} = \frac{2}{10} m/s \Rightarrow u_1 = 0,2 m/s$$

Για το 2⁰ κύμα.

$$\begin{cases} y_2 = 2\cdot 10^{-2}\eta\mu 2\pi\left(\frac{t}{4}+x\right) \\ y_2 = A_2\eta\mu 2\pi\left(\frac{t}{T_2}+\frac{x}{\lambda_2}\right) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{t}{T_2} = \frac{t}{4} \Rightarrow T_2 = 4s \\ \frac{x}{\lambda_2} = x \Rightarrow \lambda_2 = 1m \end{cases} \text{ και } A_2 = 2\cdot 10^{-2} m .$$

Από τη <u>θεμελιώδη εξίσωση της κυματικής</u> υπολογίζουμε τη ταχύτητα διάδοσης αυτού του κύματος:

$$u_2 = \frac{\lambda_2}{T_2} = \frac{1}{4} m/s \Rightarrow u_2 = 0,25 m/s$$

Συμπεραίνουμε ότι η ταχύτητα διάδοσης του πρώτου κύματος είναι μικρότερη της ταχύτητας διάδοσης του δεύτερου.

Β) Το μέτρο της μέγιστης επιτάχυνσης ταλάντωσης ενός μορίου του ελαστικού μέσου, δίνεται από τη σχέση:

$$\alpha_{max} = \omega^2 A ,$$

όπου ω η γωνιακή συχνότητα και Α το πλάτος της ταλάντωσης.

Επειδή ισχύει: $\omega = \frac{2\pi}{T}$,

η παραπάνω σχέση γράφεται:

$$\alpha_{max} = \left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 A$$

Για το 1⁰ κύμα.

$$\alpha_{max1} = \left(\frac{2\pi}{10}\right)^2 5\cdot 10^{-1} m/s^2 \Rightarrow \alpha_{max1} = 2\pi^2\cdot 10^{-2} m/s^2$$

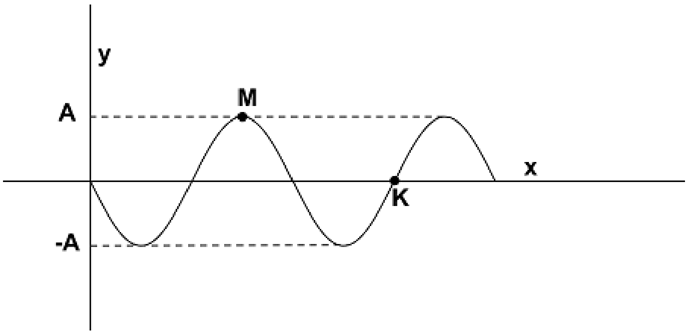
Για το 2⁰ κύμα.

$$\alpha_{max2} = \left(\frac{2\pi}{4}\right)^2 2\cdot 10^{-2} m/s^2 \Rightarrow \alpha_{max2} = 0,5\pi^2\cdot 10^{-2} m/s^2$$

Συμπεραίνουμε ότι μέγιστη επιτάχυνση έχουν τα μόρια του ελαστικού μέσου στο οποίο διαδίδεται το $1^{ο}$ κύμα.

Ερώτηση 8.

Δίνεται το στιγμιότυπο ενός εγκάρσιου αρμονικού κύματος που διαδίδεται σε ομογενές γραμμικό ελαστικό μέσον και προς τη θετική κατεύθυνση. Η πηγή παραγωγής αυτού του κύματος βρίσκεται στην αρχή του άξονα x’x.



Για τις φάσεις των σημείων Μ και Κ ισχύει:

α) $\varphi_M > \varphi_K$.

β) $\varphi_M = \varphi_K$.

γ) $\varphi_M < \varphi_K$.

Να δικαιολογήσετε την απάντησή σας.

<u>Λύση</u>

Σωστή απάντηση η α.

Από την εξίσωση της φάσης του κύματος $\varphi = 2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda}\right)$, έχουμε για τις φάσεις των σημείων Μ και Κ:

$\varphi_M = 2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{x_M}{\lambda}\right)$ και $\varphi_K = 2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{x_K}{\lambda}\right)$

Επειδή όμως όπως παρατηρούμε από το διάγραμμα:

$x_K > x_M$,

έπεται ότι:

$\varphi_K < \varphi_M$.

ΘΕΜΑ Γ

Άσκηση 1.

Μια πηγή Ο που βρίσκεται στην αρχή του άξονα x'x, αρχίζει να εκτελεί τη χρονική στιγμή t=0, απλή αρμονική ταλάντωση με εξίσωση $y_0 = 6 \cdot 10^{-2} \eta\mu\pi t$ (S.I.). Το παραγόμενο γραμμικό αρμονικό κύμα διαδίδεται κατά τη θετική κατεύθυνση του άξονα x'x με ταχύτητα $u = 8\ m/s$ σε γραμμικό ομογενές ελαστικό μέσο.

α) Να βρείτε την περίοδο, τη συχνότητα και το μήκος κύματος.

β) Να γράψετε την εξίσωση του κύματος.

γ) Ποια χρονική στιγμή θα αρχίσει να κινείται ένα σημείο Μ του άξονα x'x που βρίσκεται στη θέση $x = 20\ m$;

δ) Να βρείτε τη φάση του σημείου Μ τις χρονικές στιγμές: $t_1 = 1,5\,s$ και $t_2 = 2,5\,s$.

ε) Να γράψετε για το σημείο Μ την εξίσωση της απομάκρυνσης y σε συνάρτηση με το χρόνο και να γίνει η γραφική της παράσταση.

<u>Λύση</u>

α) Συγκρίνοντας την εξίσωση της απομάκρυνσης y_O του σημείου Ο από τη θέση ισορροπίας του σε συνάρτηση με το χρόνο t, με την εξίσωση της εκφώνησης, έχουμε:

$$\left.\begin{array}{r} y_o = 6 \cdot 10^{-2} \eta\mu\pi t \\ y_o = A\eta\mu\dfrac{2\pi t}{T} \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{2\pi t}{T} = \pi t \Rightarrow T = 2s,\ f = \frac{1}{T} = \frac{1}{2}Hz \Rightarrow f = 0,5Hz$$

, όπου T η περίοδος, f η συχνότητα και A το πλάτος του κύματος.

Από τη θεμελιώδη εξίσωση της κυματικής υπολογίζουμε το μήκος κύματος λ:

$$u = \frac{\lambda}{T} \Rightarrow \lambda = uT = 8 \cdot 2m \Rightarrow \lambda = 16m$$

β) Από τη σχέση που δίνει την εξίσωση κύματος που διαδίδεται κατά τη θετική φορά: $y = A\eta\mu 2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda}\right)$, με αντικατάσταση, προκύπτει:

$$y = 6 \cdot 10^{-2} \eta\mu 2\pi\left(\frac{t}{2} - \frac{x}{16}\right) \text{ (S.I.)}$$

γ) Οδεύοντας το κύμα με σταθερή ταχύτητα u=8 m/s πρέπει να διανύσει την απόσταση x.

Ισχύει: $u = \frac{x}{t^*} \Rightarrow t^* = \frac{x}{u} = \frac{20}{8}s \Rightarrow t^* = 2,5s$

δ) Από τον τύπο της φάσης: $\varphi = 2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda}\right)$, με αντικατάσταση, η φάση του σημείου Μ ως συνάρτηση του χρόνου, γράφεται:

$$\varphi_M = 2\pi\left(\frac{t}{2} - \frac{20}{16}\right) \text{ (S.I.) για } t \geq 2,5s$$

Τη χρονική στιγμή $t_1 = 1,55s$ η διαταραχή δεν έχει φτάσει στο σημείο Μ, κατά συνέπεια το σημείο Μ δεν έχει αρχίσει την ταλάντωσή του και ο υπολογισμός της φάσης του με την παραπάνω σχέση δεν έχει νόημα.

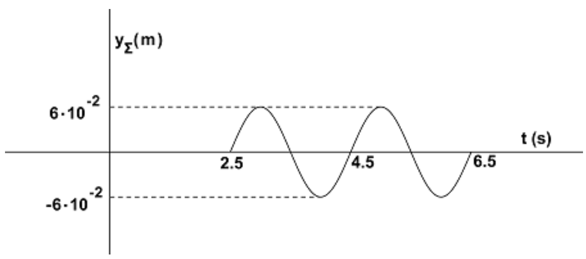
ε) Η σχέση που δίνει την εξίσωση απομάκρυνσης του σημείου Μ από τη θέση ισορροπίας του σε συνάρτηση με το χρόνο είναι:

$$y = A\eta\mu 2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda}\right) \Rightarrow y = 6\cdot 10^{-2}\eta\mu 2\pi\left(\frac{t}{2} - \frac{x}{16}\right) \Rightarrow y_M = 6\cdot 10^{-2}\eta\mu 2\pi\left(\frac{t}{2} - \frac{20}{16}\right) \text{ (S.I.) για}$$

$t \geq 2,5s$ (1)

Για τη χάραξη της γραφικής παράστασης της παραπάνω εξίσωσης θα βασιστούμε στον παρακάτω πίνακα τιμών:

$t(s)$	$y\ (m)$
2,5	0
3	$6\cdot 10^{-2}$
3,5	0
4	$-6\cdot 10^{-2}$
...	...



Άσκηση 2.

Μια πηγή Ο αρχίζει να εκτελεί, τη χρονική στιγμή t=0, απλή αρμονική ταλάντωση. Το παραγόμενο από την πηγή αρμονικό γραμμικό κύμα διαδίδεται σε ομογενές ελαστικό μέσο κατά τη θετική κατεύθυνση x΄x και έχει εξίσωση: $y = 5\cdot 10^{-2}\eta\mu\pi\left(\frac{t}{2}-\frac{x}{5}\right)$ (S.I.).

α) Να υπολογίσετε την περίοδο, το μήκος κύματος και την ταχύτητα διάδοσης αυτού του κύματος.

β) Να υπολογίσετε την απόσταση στην οποία θα έχει φθάσει το κύμα τη χρονική στιγμή $t_1 = 13s$.

γ) Να βρείτε τις φάσεις των σημείων $x_N = 32,5m$ και $x_K = 36m$ τη χρονική στιγμή $t_1 = 13s$.

δ) Να γράψετε τις εξισώσεις της φάσης $\varphi = f(x)$, της απομάκρυνσης $y = f(x)$, και της δυναμικής ενέργειας ταλάντωσης $U = f(x)$ σε συνάρτηση με την απόσταση x από την πηγή Ο, τη χρονική στιγμή $t_1 = 13s$. Να θεωρήσετε ότι κάθε στοιχειώδες τμήμα του σχοινιού έχει μάζα $m = 2\cdot 10^{-3}kg$.

ε) Τη χρονική στιγμή $t_1 = 13s$ να βρείτε για το σημείο Λ με απόσταση από την πηγή $x_Λ$=20 m:

i) τη φάση του.

ii) την απομάκρυνσή του y από τη θέση ισορροπίας του.

iii) τη δυναμική ενέργεια ταλάντωσης μάζας του σχοινιού $m = 2\cdot 10^{-3}kg$ που ταλαντώνεται στο παραπάνω σημείο.

<u>Λύση</u>

α) Από τη σχέση που δίνει την εξίσωση του κύματος, με σύγκριση προκύπτουν:

$$\begin{cases} y = 5\cdot 10^{-2}\eta\mu\pi\left(\frac{t}{2}-\frac{x}{5}\right) \\ y = A\eta\mu 2\pi\left(\frac{t}{T}-\frac{x}{\lambda}\right) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = 5\cdot 10^{-2}\eta\mu\left(\frac{\pi t}{2}-\frac{\pi x}{5}\right) \\ y = A\eta\mu\left(\frac{2\pi t}{T}-\frac{2\pi x}{\lambda}\right) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{2\pi t}{T} = \frac{\pi t}{2} \\ \frac{2\pi x}{\lambda} = \frac{\pi x}{5} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} T = 4s \\ \lambda = 10m \end{cases}$$

όπου T η περίοδος, λ το μήκος και A το πλάτος του κύματος.

Από τη θεμελιώδη εξίσωση της κυματικής υπολογίζουμε την ταχύτητα διάδοσης αυτού του κύματος:

$$u = \frac{\lambda}{T} \Rightarrow u = \frac{10}{4}m/s \Rightarrow u = 2,5m/s$$

β) Το κύμα διαδίδεται με σταθερή ταχύτητα u=2,5 m/s και τη χρονική στιγμή t_1 θα έχει διανύσει απόσταση: $u=\frac{x^*}{t_1}\Rightarrow x^*=ut_1=2,5\cdot 13m\Rightarrow x^*=32,5m$

γ) Η εξίσωση της φάσης: $\varphi=2\pi\left(\frac{t}{T}-\frac{x}{\lambda}\right)$, την χρονική στιγμή t_1=13 s παίρνει τη μορφή:

$$\varphi(t_1=13s)=2\pi\left(\frac{13}{4}-\frac{x}{10}\right),\ x\le 32,5m\ (S.I.)$$

Για το σημείο Ν:

$\varphi_N(t_1=13s)=2\pi\left(\frac{13}{4}-\frac{32,5}{10}\right)rad\Rightarrow \varphi_N(t_1=13s)=0$, το οποίο σημαίνει ότι αυτή τη χρονική στιγμή το κύμα έφθασε στο σημείο Ν, $x=32,5m$.

Για το σημείο Κ:

Η διαταραχή δεν έχει φτάσει στο σημείο Κ, κατά συνέπεια το σημείο Κ δεν έχει αρχίσει

την ταλάντωσή του και ο υπολογισμός της φάσης του με την παραπάνω σχέση δεν έχει νόημα.

δ) Η εξίσωση της φάσης σε συνάρτηση με την θέση x τη στιγμή t_1 είναι:

$$\varphi=2\pi\left(\frac{t}{T}-\frac{x}{\lambda}\right)\Rightarrow\varphi=2\pi\left(\frac{t}{4}-\frac{x}{10}\right)rad\Rightarrow\varphi(t_1)=2\pi\left(\frac{13}{4}-\frac{x}{10}\right),\ x\le 32,5m\quad (S.I.)\ (1)$$

Η εξίσωση απομάκρυνσης από τη θέση ισορροπίας σε συνάρτηση με την θέση x τη στιγμή t_1 είναι:

$$y=A\eta\mu 2\pi\left(\frac{t}{T}-\frac{x}{\lambda}\right)\Rightarrow y=5\cdot 10^{-2}\eta\mu 2\pi\left(\frac{t}{4}-\frac{x}{10}\right)\Rightarrow$$
$$y(t_1)=5\cdot 10^{-2}\eta\mu 2\pi\left(\frac{13}{4}-\frac{x}{10}\right),\ x\le 32,5m\quad (S.I.)\ (2)$$

Η εξίσωση της δυναμικής ενέργειας ταλάντωσης σε συνάρτηση με την θέση x τη στιγμή t_1 είναι:

$$U=\frac{1}{2}Dy^2=\frac{1}{2}m\omega^2A^2\eta\mu^2 2\pi\left(\frac{t}{T}-\frac{x}{\lambda}\right)\Rightarrow U=6,25\pi^2\cdot 10^{-7}\eta\mu^2 2\pi\left(\frac{t}{2}-\frac{x}{10}\right)\Rightarrow$$
$$U(t_1)=6,25\pi^2\cdot 10^{-7}\eta\mu^2 2\pi\left(\frac{13}{4}-\frac{x}{10}\right),\ x\le 32,5m\quad (S.I.)\ (3)$$

ε)

i) $\xrightarrow{(1)} \varphi_\Lambda(t_1) = 2\pi\left(\frac{13}{4} - \frac{20}{10}\right)\text{rad} = 2\pi(3,25-2)\text{rad} = 2\pi(1,25)\text{rad} = 2\pi\left(1+\frac{1}{4}\right)\text{rad} \Rightarrow$

$\varphi_\Lambda(t_1) = \left(2\pi + \frac{\pi}{2}\right)\text{rad}$ (4)

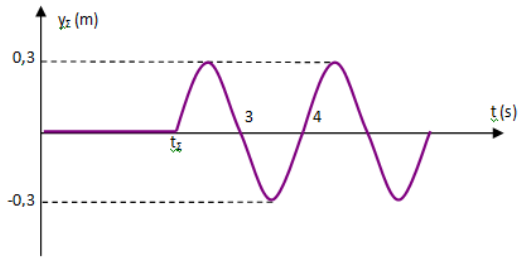
ii) $\xrightarrow{(2),(4)} y_\Lambda(t_1) = 5\cdot 10^{-2}\,\eta\mu\left(2\pi + \frac{\pi}{2}\right)\text{m} = 5\cdot 10^{-2}\,\eta\mu\frac{\pi}{2}\text{m} \Rightarrow y_\Lambda(t_1) = 5\cdot 10^{-2}\,\text{m}$

iii) $\xrightarrow{(3),(4)} U_\Lambda(t_1) = 6,25\pi^2\cdot 10^{-7}\,\eta\mu^2\left(2\pi + \frac{\pi}{2}\right)\text{J} = 6,25\pi^2\cdot 10^{-7}\,\eta\mu^2\frac{\pi}{2}\text{J} \Rightarrow$

$U_\Lambda(t_1) = 6,25\pi^2\cdot 10^{-7}\,\text{J}$

Άσκηση 3.

Η πηγή Ο που βρίσκεται στην αρχή του άξονα x'x, αρχίζει τη χρονική στιγμή t=0 να εκτελεί απλή αρμονική ταλάντωση, που περιγράφεται από την εξίσωση $y = A\eta\mu\omega t$. Το κύμα που δημιουργεί, διαδίδεται κατά μήκος γραμμικού ομογενούς ελαστικού μέσου και κατά τη θετική φορά. Ένα σημείο Σ απέχει από την πηγή Ο απόσταση $12\ m$ και αρχίζει να ταλαντώνεται τη χρονική t_Σ. Στη γραφική παράσταση που ακολουθεί φαίνεται η απομάκρυνση του σημείου Σ από τη θέση ισορροπίας του, σε συνάρτηση με το χρόνο. Δίνεται $\pi^2 = 10$.



Να υπολογίσετε:

α) Την περίοδο του κύματος.

β) Τη χρονική στιγμή t_Σ και την ταχύτητα διάδοσης του κύματος.

γ) Το μέτρο της μέγιστης επιτάχυνσης ταλάντωσης του σημείου Σ.

δ) Το μέτρο της ταχύτητας ταλάντωσης του σημείου Σ όταν θα βρίσκεται στη θέση $y = -0{,}15m$ από τη θέση ισορροπίας του.

ε) Τη διαφορά φάσης του σημείου Σ μεταξύ των χρονικών στιγμών $t_1 = 12s$ και $t_2 = 15s$.

<u>Λύση</u>

α) Από το διάγραμμα παρατηρούμε ότι: $\frac{T}{2} = (4-3)s \Rightarrow T = 2s$

β) Από το διάγραμμα φαίνεται ότι το κύμα φτάνει στο σημείο Σ μισή περίοδο πριν την χρονική στιγμή $t = 3s$.

Άρα η χρονική στιγμή t_Σ θα είναι:

$$t_\Sigma = \left(3 - \frac{T}{2}\right) \Rightarrow t_\Sigma = 2s$$

Επειδή το κύμα διαδίδεται με σταθερή ταχύτητα, έχουμε:

$$u = \frac{x_\Sigma}{t_\Sigma} = \frac{12}{2} m/s \Rightarrow u = 6m/s$$

γ) Η γωνιακή συχνότητα του κύματος είναι:

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi}{2} rad/s \Rightarrow \omega = \pi \ rad/s$$

Από το διάγραμμα παρατηρούμε επίσης, ότι το πλάτος του κύματος είναι A=0,3 m.

Το μέτρο της μέγιστης επιτάχυνσης ταλάντωσης του σημείου Σ είναι:

$$\left|\alpha_{max}\right| = \omega^2 A = \pi^2 0,3 m/s^2 \Rightarrow \alpha_{max} = 3m/s^2$$

δ) Αφού το σημείο Σ εκτελεί απλή αρμονική ταλάντωση, ισχύει η Αρχή Διατήρησης Ενέργειας Ταλάντωσης.

$$\frac{1}{2}DA^2 = \frac{1}{2}Dy^2 + \frac{1}{2}mu^2 \Rightarrow u^2 = \frac{D}{m}\left(A^2 - y^2\right) \xrightarrow{|y|=A/2}$$

$$u = \pm\omega\sqrt{3A^2/4} \Rightarrow u = \pm\frac{\sqrt{3}}{2}\omega A = \pm\frac{\sqrt{3}}{2}\pi \cdot 0,3 \ m/s \Rightarrow u = \pm 0,15\pi\sqrt{3} m/s$$

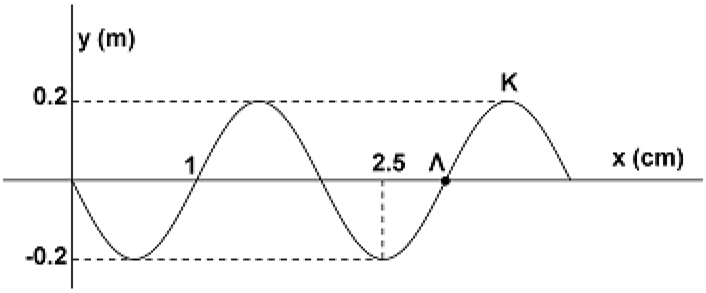
ε) Από την εξίσωση της φάσης του κύματος $\varphi = 2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda}\right)$,

υπολογίζουμε τη διαφορά φάσης του σημείου Σ μεταξύ των χρονικών στιγμών t_1 και t_2:

$$\Delta\varphi_{t_1,t_2} = 2\pi\left(\frac{t_2}{T} - \frac{x_\Sigma}{\lambda}\right) - 2\pi\left(\frac{t_1}{T} - \frac{x_\Sigma}{\lambda}\right) = \frac{2\pi}{T}\left(t_2 - t_1\right) = \frac{2\pi}{2}\left(15 - 12\right) rad \Rightarrow \Delta\varphi_{t_1,t_2} = 3\pi \ rad$$

Άσκηση 4.

Η πηγή κύματος Ο αρχίζει τη χρονική στιγμή $t_0 = 0s$ να εκτελεί απλή αρμονική ταλάντωση πλάτους $A = 0,2m$. Το αρμονικό κύμα που δημιουργείται διαδίδεται κατά μήκος γραμμικού ομογενούς ελαστικού μέσου, κατά τον άξονα Οx. Στο παρακάτω διάγραμμα απεικονίζεται το στιγμιότυπο του κύματος μετά από χρόνο $t_1 = 10s$.



α) Να υπολογίσετε την ταχύτητα υ διάδοσης του κύματος στο ελαστικό μέσο.

β) Να βρείτε την περίοδο Τ του αρμονικού κύματος.

γ) Να υπολογίσετε το μέτρο της μέγιστης ταχύτητας ταλάντωσης των μορίων του ελαστικού μέσου.

δ) Να γράψετε την εξίσωση του αρμονικού κύματος.

ε) Να υπολογίσετε τη διαφορά φάσης μεταξύ των σημείων Κ και Λ τη χρονική στιγμή t_1.

<u>Λύση</u>

α) Από το διάγραμμα συμπεραίνουμε ότι τα τρία τέταρτα του μήκους κύματος είναι $1,5m$

$$\frac{3}{4}\lambda = (2,5-1)m \Rightarrow \lambda = 2m$$

Συμπεραίνουμε επίσης ότι το κύμα έχει διαδοθεί σε απόσταση 2λ. Άρα το κύμα διένυσε με σταθερή ταχύτητα απόσταση $x_1 = 4m$ σε χρόνο $t_1 = 10s$.

Η ταχύτητα διάδοσης του κύματος θα είναι:

$$u = \frac{x_1}{t_1} = \frac{4}{10}m/s \Rightarrow u = 0,4m/s$$

β) Από τη θεμελιώδη εξίσωση της κυματικής u=λf, έχουμε:

$$u = \frac{\lambda}{T} \Rightarrow T = \frac{\lambda}{u} = \frac{2}{0,4}s \Rightarrow T = 5s$$

γ) Όπως είναι γνωστό, το μέτρο της μέγιστης ταχύτητας ταλάντωσης των μορίων του ελαστικού μέσου δίνεται από τη σχέση:

$\left|u_{max}\right| = \omega A$,

όπου ω η γωνιακή συχνότητα και Α το πλάτος της ταλάντωσης.

Από το διάγραμμα φαίνεται ότι το πλάτος είναι: $A = 0,2m$

Η γωνιακή συχνότητα είναι: $\omega = \dfrac{2\pi}{T} = \dfrac{2\pi}{5} rad/s$

Με αντικατάσταση λοιπόν προκύπτει:

$\left|u_{max}\right| = 8\pi \cdot 10^{-2} m/s$

δ) Από την εξίσωση του κύματος: $y = A\eta\mu 2\pi\left(\dfrac{t}{T} - \dfrac{x}{\lambda}\right)$,

με αντικατάσταση προκύπτει:

$y = 0,2\eta\mu 2\pi\left(\dfrac{t}{5} - \dfrac{x}{2}\right)$ (SI)

ε) Από το διάγραμμα συμπεραίνουμε ότι

$$x_K = \lambda + \frac{3\lambda}{4} = \frac{7\lambda}{4} \Rightarrow x_K = 3,5m$$

$$x_\Lambda = \lambda + \frac{\lambda}{2} = \frac{3\lambda}{2} \Rightarrow x_\Lambda = 3m$$

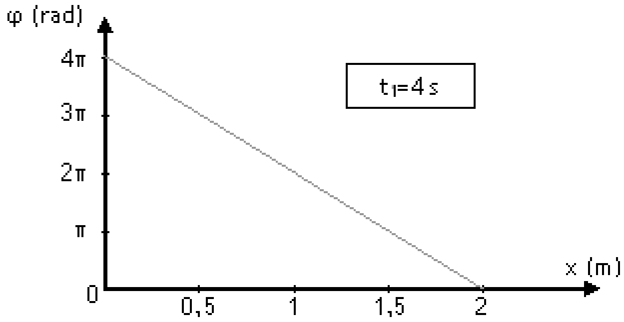
Από την εξίσωση της φάσης του κύματος $\varphi = 2\pi\left(\dfrac{t}{T} - \dfrac{x}{\lambda}\right)$,

υπολογίζουμε τη διαφορά φάσης μεταξύ των σημείων Κ και Λ την χρονική στιγμή t_1 :

$$\Delta\varphi_{K,\Lambda} = 2\pi\left(\frac{t_1}{T} - \frac{x_\Lambda}{\lambda}\right) - 2\pi\left(\frac{t_1}{T} - \frac{x_K}{\lambda}\right) = \frac{2\pi}{\lambda}\left(x_K - x_\Lambda\right) = \frac{2\pi}{2} 0,5 \text{ rad} \Rightarrow \Delta\varphi_{K,\Lambda} = \frac{\pi}{2} \text{ rad}$$

Άσκηση 5.

Το σχήμα παρουσιάζει τη γραφική παράσταση $\varphi = f(x)$ της φάσης των σημείων μιας ομογενούς ελαστικής χορδής, στην οποία διαδίδεται ένα εγκάρσιο αρμονικό κύμα, τη χρονική στιγμή $t_1 = 4\,s$. Το πλάτος της ταλάντωσης των σημείων από τα οποία περνά το κύμα είναι $A = 0,2\,m$. Δύο σημεία Κ και Λ της χορδής βρίσκονται στις θέσεις $x_K = +1\,m$ και $x_\Lambda = +1,5\,m$, αντίστοιχα. Για το σημείο της θέσης $x = 0$ γνωρίζουμε ότι τη χρονική στιγμή $t = 0$ το σημείο αυτό διέρχεται από τη θέση ισορροπίας του με θετική ταχύτητα



α) Να γραφεί η εξίσωση του κύματος.

β) Να γραφεί η εξίσωση $u = f(x, t)$ της ταχύτητας ταλάντωσης των σημείων του ελαστικού μέσου.

γ) να βρεθούν οι χρονικές στιγμές $t_{(K)}$ και $t_{(\Lambda)}$, στις οποίες τα σημεία Κ και Λ ξεκινούν ταλάντωση.

δ) Να υπολογιστεί η διαφορά φάσης μεταξύ των ταλαντώσεων των σημείων Κ και Λ την ίδια χρονική στιγμή.

ε) Να γίνει η γραφική παράσταση $\phi = f(t)$ του σημείου Λ, μέχρι τη στιγμή που το σημείο Λ έχει εκτελέσει μία πλήρη ταλάντωση.

στ) Να γίνει η γραφική παράσταση $y = f(t)$ του σημείου Λ, μέχρι τη στιγμή που το σημείο Λ έχει εκτελέσει 2 πλήρεις ταλαντώσεις.

ζ) Να βρεθεί η φορά κίνησης του σημείου Λ, τη χρονική στιγμή t_1.

η) Να σχεδιαστεί το στιγμιότυπο του κύματος τη χρονική στιγμή $t_2 = 8\,s$.

<u>Λύση</u>

α) Από το σχήμα φαίνεται ότι η φάση της ταλάντωσης των σημείων του ελαστικού μέσου διάδοσης του κύματος μειώνεται προς τη θετική κατεύθυνση του άξονα. Αυτό σημαίνει ότι το κύμα διαδίδεται προς τη θετική κατεύθυνση του άξονα, επομένως, η εξίσωση του κύματος είναι της μορφής:

$$y = A\eta\mu 2\pi\left(\frac{t}{T}-\frac{x}{\lambda}\right)$$

Η εξίσωση φάσης για αυτό το κύμα δίνεται από τον τύπο:

$$\phi = 2\pi\left(\frac{t}{T}-\frac{x}{\lambda}\right)$$

Από τα δεδομένα του σχήματος έχουμε ότι:

για $x = 0$ και $t = 4\,s \Rightarrow \phi = 4\pi\,rad$

Αντικαθιστώντας τις τιμές στην εξίσωση φάσης, έχουμε:

$$4\pi = 4\omega \Rightarrow \boxed{\omega = \pi\,\frac{rad}{s}}$$

Επομένως, $\boxed{T = 2\,s}$ και $\boxed{f = 0,5\,Hz}$.

Η εξίσωση φάσης παίρνει τη μορφή:

$$\phi = \pi t - \frac{2\pi x}{\lambda}$$

για $x = 2\,m$ και $t = 4\,s \Rightarrow \phi = 0$

Αντικαθιστώντας τις τιμές στην εξίσωση φάσης, έχουμε:

$$0 = 4\pi - \frac{4\pi}{\lambda} \Rightarrow \frac{4\pi}{\lambda} = 4\pi \Rightarrow$$

$$\boxed{\lambda = 1\,m}$$

Έτσι, η εξίσωση φάσης παίρνει τη μορφή:

$$\boxed{\phi = \pi t - 2\pi x}$$

Τελικά, η εξίσωση του κύματος παίρνει τη μορφή:

$$\boxed{y = 0,2\eta\mu\left(\pi t - 2\pi x\right)\ \text{(S. I.)}}$$

β) Η μέγιστη ταχύτητα ταλάντωσης των μορίων του ελαστικού μέσου υπολογίζεται από τον τύπο:

$$u_{max} = \omega A \Rightarrow$$

$$\boxed{u_{max} = 0,2\pi\frac{m}{s}}$$

Με αντικατάσταση στην εξίσωση της ταχύτητας, έχουμε:

$$u = u_{max}\sigma\upsilon\nu\left(\omega t - \frac{2\pi x}{\lambda}\right) \Rightarrow$$

$$\boxed{u = 0,2\pi\sigma\upsilon\nu\left(\pi t - 2\pi x\right)\ \text{(S. I.)}}$$

γ) Για να βρούμε πότε ένα σημείο του μέσου ξεκίνησε ταλάντωση, μπορούμε να εργαστούμε με διάφορους τρόπους.

Για το σημείο Κ θα χρησιμοποιήσουμε την εξίσωση φάσης. Ένα σημείο της χορδής ξεκινά να ταλαντώνεται όταν η φάση του γίνει μηδέν:

$$\phi = \pi t - 2\pi x \Rightarrow 0 = \pi t_{(K)} - 2\pi \cdot 1 \Rightarrow \pi t_{(K)} = 2\pi \Rightarrow$$

$$\boxed{t_{(K)} = 2\,s}$$

Για το σημείο Λ θα χρησιμοποιήσουμε την ταχύτητα του κύματος:

$$u = \lambda f \Rightarrow$$

$$\boxed{u = 0,5\,\frac{m}{s}}$$

Επειδή:

$$u = \frac{x}{t} = \sigma\tau\alpha\theta.$$

με αντικατάσταση έχουμε:

$$u = \frac{x}{t} \Rightarrow 0,5 = \frac{1,5}{t_{(\Lambda)}} \Rightarrow$$

$$\boxed{t_{(\Lambda)} = 3\,s}$$

δ) Για τον υπολογισμό της διαφοράς φάσης των σημείων Κ, Λ την ίδια χρονικά στιγμή, εργαζόμαστε ως εξής:

Οι φάσεις των Κ, Λ ως προς το χρόνο δίνονται από τις εξισώσεις:

$$\phi_K = 2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{x_K}{\lambda}\right)$$

$$\phi_\Lambda = 2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{x_\Lambda}{\lambda}\right)$$

Με αφαίρεση κατά μέλη, έχουμε:

$$\phi_K - \phi_\Lambda = 2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{x_K}{\lambda}\right) - 2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{x_\Lambda}{\lambda}\right) = 2\pi\frac{t}{T} - 2\pi\frac{x_K}{\lambda} - 2\pi\frac{t}{T} + 2\pi\frac{x_\Lambda}{\lambda} =$$

$$= -2\pi\frac{x_K}{\lambda} + 2\pi\frac{x_\Lambda}{\lambda} = -\frac{2\pi}{\lambda}\left(x_K - x_\Lambda\right)$$

Επομένως:

$$\phi_K - \phi_\Lambda = -\frac{2\pi}{\lambda}(1\text{m} - 1,5\text{m}) \Rightarrow$$

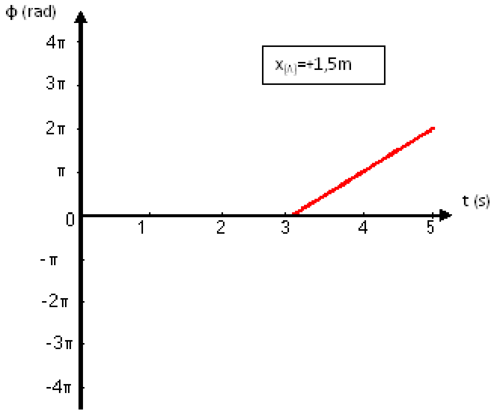
$$\boxed{\phi_K - \phi_\Lambda = +\pi \text{ rad}}$$

ε) Για τη χάραξη της γραφικής παράστασης $\phi = f(t)$ για το σημείο Λ, θέτουμε x=1,5 m στην εξίσωση της φάσης:

$$\phi = \pi t - 2\pi x \Rightarrow$$

$\boxed{\phi = \pi t - 3\pi \text{ (S. I.)}}$ με $t \geq 3\text{s}$

Η εξίσωση που προκύπτει είναι πρώτου βαθμού ως προς t, η γραφική παράσταση της οποίας φαίνεται στο σχήμα:

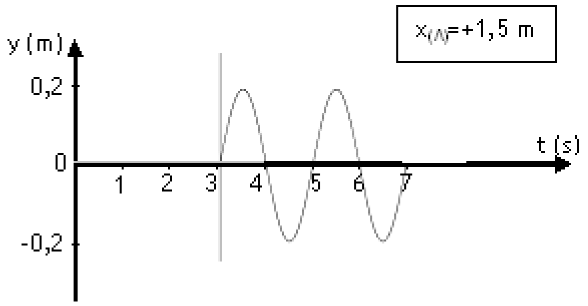


στ) Για τη χάραξη της γραφικής παράστασης $y = f(t)$ για το σημείο Λ, θέτουμε $x = 1,5\text{ m}$ στην εξίσωση κύματος:

$$y = 0,2\eta\mu\left(\pi t - 2\pi x\right) \Rightarrow$$

$$\boxed{y = 0,2\eta\mu\left(\pi t - 3\pi\right) \text{ (S. I.)}}$$

Η εξίσωση που προκύπτει είναι αρμονική συνάρτηση από τη στιγμή $t = 3\text{ s}$ και έπειτα. Η γραφική της παράσταση φαίνεται στο σχήμα:



ζ) Για την εύρεση της φοράς κίνησης του σημείου Λ θα χρησιμοποιήσουμε την εξίσωση

$u = 0,2\pi\sigma\upsilon\nu\left(\pi t - 2\pi x\right)$ (S. I.)

της ταχύτητας ταλάντωσης των σημείων του ελαστικού μέσου, από το ερώτημα β). Θέτουμε στην εξίσωση $x = 1,5\,\mathrm{m}$ και $t = 4\,\mathrm{s}$:

$$u = 0,2\pi\sigma\upsilon\nu\left(\pi t - 2\pi x\right) \Rightarrow u = 0,2\pi\sigma\upsilon\nu\left(4\pi - 3\pi\right) \Rightarrow u = 0,2\pi\sigma\upsilon\nu\pi \Rightarrow$$

$$\boxed{u = -0,2\pi\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}}$$

η) Για $t_2 = 8\,\mathrm{s}$, η εξίσωση κύματος παίρνει τη μορφή

$$y = 0,2\eta\mu\left(\pi t - 2\pi x\right) \Rightarrow$$

$\boxed{y = 0,2\eta\mu\left(8\pi - 2\pi x\right)}$ (S. I.)

Πρόκειται να σχεδιάσουμε τη γραφική παράσταση αυτής της συνάρτησης.

Για να σχεδιαστεί το στιγμιότυπο του κύματος τη στιγμή $t_2 = 8\,\mathrm{s}$, πρέπει αρχικά να βρούμε μέχρι ποιο σημείο x_2 της χορδής θα έχει διαδοθεί το κύμα εκείνη τη στιγμή.

Θέτουμε $t_2 = 8\,\mathrm{s}$ στην εξίσωση $u = \dfrac{x}{t}$ και έχουμε:

$$u = \frac{x}{t} \Rightarrow 0,5 = \frac{x_2}{8} \Rightarrow x_2 = +4\,\mathrm{m}$$

Υπολογίζουμε την απομάκρυνση της πηγής του κύματος τη χρονική στιγμή $t_2 = 8\,\mathrm{s}$:

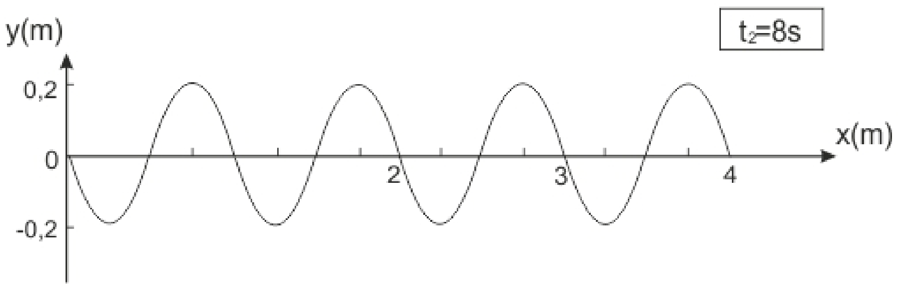
$$y = 0,2\eta\mu\left(\pi t - 2\pi x\right) \Rightarrow y = 0,2\eta\mu\left(4\pi\right)\mathrm{m} \Rightarrow y = 0$$

Υπολογίζουμε την απομάκρυνση του σημείου που απέχει $\lambda / 4$ από την πηγή, τη χρονική στιγμή $t_2 = 8\,\mathrm{s}$:

$$y = 0,2\eta\mu\left(\pi t - 2\pi x\right) \Rightarrow y = 0,2\eta\mu\left(4\pi - \frac{\pi}{2}\right) \Rightarrow y = -0,2\ m$$

Ακολουθώντας την ίδια διαδικασία υπολογίζουμε, για τη χρονική στιγμή $t_2 = 8\ s$, την απομάκρυνση του σημείου που απέχει $2\lambda / 4$ από την πηγή, την απομάκρυνση του σημείου που απέχει $3\lambda / 4$ από την πηγή, την απομάκρυνση του σημείου που απέχει λ από την πηγή και προχωρώντας ανά $\lambda / 4$, την απομάκρυνση των υπολοίπων σημείων μέχρι τη θέση x_2.

Ενώνουμε τα σημεία με μια συνεχή αρμονική καμπύλη για να ολοκληρώσουμε την κατασκευή του στιγμιότυπου.



Ημερομηνία τροποποίησης: 18/7/2011

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2^Ο: ΚΥΜΑΤΑ

ΕΝΟΤΗΤΑ 2: ΕΠΑΛΛΗΛΙΑ ΚΥΜΑΤΩΝ – ΣΥΜΒΟΛΗ ΚΥΜΑΤΩΝ – ΣΤΑΣΙΜΑ ΚΥΜΑΤΑ

ΛΥΜΕΝΑ ΘΕΜΑΤΑ

ΘΕΜΑ Β

Ερώτηση 1.

Δύο σύγχρονες κυματικές πηγές Π_1, Π_2 ταλαντώνονται κάθετα στην επιφάνεια ενός υγρού με το ίδιο πλάτος A, παράγοντας κύματα συχνότητας f και μήκους κύματος λ. Σημείο (Σ) της επιφάνειας του υγρού απέχει κατά $r_1 = 4\lambda$ από την πηγή Π_1 και κατά $r_2 = \frac{17}{6}\lambda$ από την πηγή Π_2. Η μέγιστη ταχύτητα ταλάντωσης του σημείου (Σ) αφού συμβάλλουν σε αυτό τα κύματα ισούται με:

α) $u_{max} = 2\sqrt{3}\pi f A$.

β) $u_{max} = 4\pi f A$.

γ) $u_{max} = \pi f A$.

Να επιλέξετε τη σωστή απάντηση και να δικαιολογήσετε την επιλογή σας.

Λύση

Σωστή απάντηση η (α).

Μετά τη συμβολή των κυμάτων, το σημείο (Σ) ταλαντώνεται με πλάτος:
$$A_\Sigma = 2A\left|\sigma\upsilon\nu\left(2\pi\frac{r_1 - r_2}{2\lambda}\right)\right| \Rightarrow$$

$$A_\Sigma = 2A\left|\sigma\upsilon\nu\frac{7\pi}{6}\right| \Rightarrow A_\Sigma = \sqrt{3}A$$

Άρα $u_{max(\Sigma)} = \omega A_\Sigma \Rightarrow u_{max(\Sigma)} = 2\pi f \cdot \sqrt{3}A$

Ερώτηση 2.

Κατά μήκος μίας ελαστικής χορδής που ταυτίζεται με τον άξονα x΄Ox έχει δημιουργηθεί στάσιμο κύμα, ως αποτέλεσμα της συμβολής δύο αντίθετα διαδιδόμενων αρμονικών κυμάτων με το ίδιο πλάτος και το ίδιο μήκος κύματος $\lambda = 0,8\text{m}$. Στο σημείο Ο ($x = 0$) έχει δημιουργηθεί κοιλία. Τα σημεία Α ($x_A = 0,4\text{ m}$) και Β ($x_B = 1,6\text{ m}$) παρουσιάζουν διαφορά φάσης:

α) $\Delta\phi = \pi \text{ rad}$.

β) $\Delta\phi = \pi/2 \text{ rad}$.

γ) $\Delta\phi = 0 \text{ rad}$.

Να επιλέξετε τη σωστή απάντηση και να δικαιολογήσετε την επιλογή σας.

<u>Λύση</u>

Σωστή απάντηση είναι η (α).

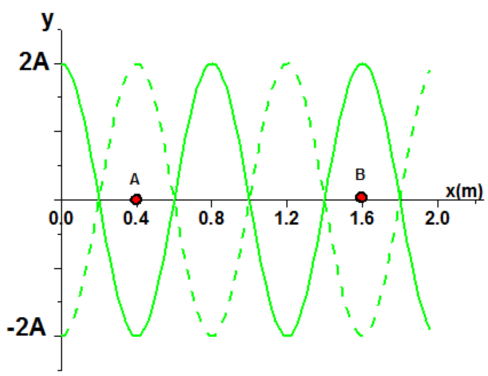
Το Α ικανοποιεί τη συνθήκη κοιλιών $x = k\lambda/2$, για $k = 1$ ενώ το Β για $k = 4$. Άρα είναι κοιλίες και μεταξύ τους παρεμβάλλονται άλλες δύο που αντιστοιχούν σε κ=2 και κ=3. Με δεδομένο ότι οι διαδοχικές κοιλίες βρίσκονται σε αντίθεση φάσης, για τα Α, Β θα είναι $\Delta\phi = \pi \text{ rad}$, δηλαδή η πρόταση (α).

Ή

Είναι: $y_A = 2A\sigma\upsilon\nu\left(2\pi\frac{x_A}{\lambda}\right)\eta\mu\left(2\pi\frac{t}{T}\right) = 2A\cdot\sigma\upsilon\nu\pi\cdot\eta\mu\omega t = -2A\eta\mu\omega t = 2A\eta\mu\left(\omega t + \pi\right)$

ενώ: $y_B = 2A\sigma\upsilon\nu\left(2\pi\frac{x_B}{\lambda}\right)\eta\mu\left(2\pi\frac{t}{T}\right) = 2A\cdot\sigma\upsilon\nu4\pi\cdot\eta\mu\omega t = 2A\eta\mu\omega t$

Άρα $\Delta\phi = \pi \text{ rad}$.



Ερώτηση 3.

Δύο σύγχρονες κυματικές πηγές A και B ταλαντώνονται κάθετα στην επιφάνεια ενός υγρού με το ίδιο πλάτος, παράγοντας κύματα με μήκος κύματος $\lambda = 0,8\,\mathrm{m}$. Σημείο Σ της επιφάνειας του υγρού απέχει $r_1 = 2,6\,\mathrm{m}$ από την πηγή A και μετά τη συμβολή των κυμάτων σε αυτό παραμένει ακίνητο. Η απόσταση r_2 του Σ από την πηγή B μπορεί να είναι ίση με:

α) $1,8\,\mathrm{m}$.

β) $0,6\,\mathrm{m}$.

γ) $2\,\mathrm{m}$.

<u>Λύση</u>

Σωστή απάντηση: (β)

Το σημείο Σ είναι σημείο απόσβεσης αφού μετά τη συμβολή των κυμάτων σε αυτό, παραμένει ακίνητο. Άρα θα πρέπει να ικανοποιείται η συνθήκη:

$$r_1 - r_2 = (2N+1)\frac{\lambda}{2} \Rightarrow 2,6 - r_2 = (2N+1)\cdot 0,4 \Rightarrow N = \frac{2,2 - r_2}{0,8},\ N = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$$

Από τις δοθείσες τιμές μόνο η (β) έχει ακέραια λύση, όπου $N = \dfrac{2,2 - 0,6}{0,8} \Rightarrow N = 2$

Ερώτηση 4.

Δύο σύγχρονες κυματικές πηγές Α και Β ταλαντώνονται κάθετα στην επιφάνεια ενός υγρού με το ίδιο πλάτος, παράγοντας κύματα με μήκος κύματος λ. Αν η απόσταση των πηγών ισούται με λ, τότε μεταξύ των πηγών διέρχονται:

α) δύο υπερβολές ενίσχυσης και δύο υπερβολές απόσβεσης.

β) μία υπερβολή ενίσχυσης και δύο υπερβολές απόσβεσης.

γ) μία υπερβολή ενίσχυσης και καμία υπερβολή απόσβεσης.

Να επιλέξετε τη σωστή πρόταση και να δικαιολογήσετε την επιλογή σας.

Λύση

Σωστή απάντηση: (β)

Αν (Σ) σημείο απόσβεσης επί του ΑΒ το οποίο απέχει από τις πηγές x_1 και x_2 αντίστοιχα, τότε τα κύματα αλληλοαναιρούνται οπότε πρέπει να ισχύει η συνθήκη της αναιρετικής ή ακυρωτικής συμβολής: $x_1 - x_2 = (2N+1)\frac{\lambda}{2}, N = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$

Επίσης: $x_1 + x_2 = AB$

Προσθέτοντας κατά μέλη τις δύο αυτές εξισώσεις προκύπτει:

$$x_1 = \frac{(2N+1)\frac{\lambda}{2} + AB}{2} \Rightarrow x_1 = \frac{(2N+1)\frac{\lambda}{2} + \lambda}{2}$$

Το σημείο (Σ) βρίσκεται μεταξύ των πηγών άρα:

$$0 < x_1 < AB \Rightarrow 0 < \frac{(2N+1)\frac{\lambda}{2} + \lambda}{2} < \lambda \Rightarrow -\lambda < (2N+1)\frac{\lambda}{2} < \lambda \Rightarrow -1,5 < N < 0,5$$

Άρα ο ακέραιος Ν μπορεί να πάρει τις τιμές Ν=0 και Ν=-1. Συνεπώς υπάρχουν δύο σημεία απόσβεσης επί του ΑΒ, δηλαδή το ΑΒ τέμνεται από δύο υπερβολές απόσβεσης.

Αντίστοιχα αν (Σ) σημείο ενίσχυσης επί του ΑΒ το οποίο απέχει από τις πηγές κατά x_1 και x_2 αντίστοιχα, τότε θα πρέπει να επαληθεύει τη συνθήκη ενισχυτικής συμβολής: $x_1 - x_2 = N\lambda, N = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$

Επίσης: $x_1 + x_2 = AB$

Προσθέτοντας κατά μέλη τις δύο αυτές εξισώσεις προκύπτει: $x_1 = \frac{N\lambda + AB}{2} = \frac{N\lambda + \lambda}{2} = \frac{(N+1)\lambda}{2}$

Το σημείο (Σ) βρίσκεται μεταξύ των πηγών άρα:

$$0 < x_1 < AB \Rightarrow 0 < \frac{(N+1)\lambda}{2} < \lambda \Rightarrow -1 < N < 1$$

Άρα ο ακέραιος N μπορεί να πάρει την τιμή $N = 0$ και το AB τέμνεται από μία υπερβολή ενίσχυσης.

Ερώτηση 5.

Δύο σύγχρονες κυματικές πηγές Π_1, Π_2 ταλαντώνονται κάθετα στην επιφάνεια ενός υγρού με το ίδιο πλάτος $A = 0,4\,m$ και περίοδο $T = 0,1\,s$. Τα παραγόμενα κύματα έχουν μήκος κύματος λ. Σημείο (Σ) της επιφάνειας απέχει r_1 από την πηγή Π_1 και r_2 από την πηγή Π_2, με $r_1 - r_2 = \frac{31\lambda}{6}$. Το σημείο (Σ), μετά τη συμβολή των κυμάτων σε αυτό, έχει μέγιστη ταχύτητα ταλάντωσης μέτρου:

α) $16\pi\,m/s$.

β) $8\pi\sqrt{3}\,m/s$.

γ) $2\pi\,m/s$.

Να επιλέξετε τη σωστή απάντηση και να δικαιολογήσετε την επιλογή σας.

<u>Λύση</u>

Σωστή απάντηση: (β)

Το πλάτος του (Σ) μετά τη συμβολή των κυμάτων ισούται με:

$$A_\Sigma = 2A\left|\sigma\upsilon\nu\left(2\pi\frac{r_1 - r_2}{2\lambda}\right)\right| = 2A\left|\sigma\upsilon\nu\left(\frac{31\pi}{6}\right)\right| = 2A\left|\sigma\upsilon\nu\left(5\pi + \frac{\pi}{6}\right)\right| = \sqrt{3}A = \sqrt{3}\cdot 0,4\,m$$

Άρα: $u_{max(\Sigma)} = \omega A_\Sigma = \frac{2\pi}{T}\cdot A_\Sigma = 8\pi\sqrt{3}\,\frac{m}{s}$

Ερώτηση 6.

Δύο σύγχρονες κυματικές πηγές Π_1, Π_2 ταλαντώνονται κάθετα στην ελαστική επιφάνεια ενός υγρού με το ίδιο πλάτος A, παράγοντας κύματα με μήκος κύματος λ. Τα κύματα συμβάλλουν στη επιφάνεια του υγρού. Το πλήθος των υπερβολών ενίσχυσης που τέμνουν το τμήμα που συνδέει τις πηγές:

α) είναι άρτιο.

β) είναι περιττό.

γ) είναι άρτιο αν οι πηγές απέχουν κατά ακέραιο πολλαπλάσιο του λ και περιττό αν οι πηγές απέχουν περιττό πολλαπλάσιο του $\lambda/2$.

Να επιλέξετε τη σωστή πρόταση και να δικαιολογήσετε την επιλογή σας.

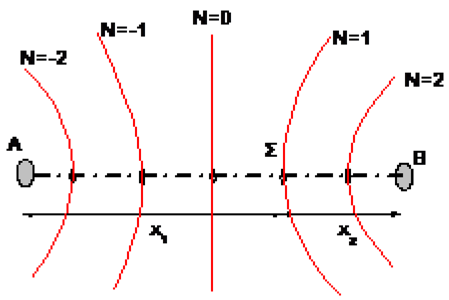
<u>Λύση</u>

Σωστή απάντηση: (β)

Έστω Α και Β τα σημεία της επιφάνειας όπου βρίσκονται οι πηγές. Αν (Σ) σημείο ενίσχυσης επί του ΑΒ το οποίο απέχει από τις πηγές κατά x_1 και x_2 αντίστοιχα, τότε θα πρέπει να επαληθεύει τη συνθήκη ενισχυτικής συμβολής: $x_1 - x_2 = N\lambda,\ N = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, ...$

Επίσης: $x_1 + x_2 = AB$

Προσθέτοντας κατά μέλη τις δύο αυτές εξισώσεις προκύπτει: $x_1 = \dfrac{N\lambda + AB}{2}$



Το σημείο (Σ) βρίσκεται μεταξύ των πηγών άρα: $0 < x_1 < AB \Rightarrow 0 < \dfrac{N\lambda + AB}{2} < AB \Rightarrow -\dfrac{AB}{\lambda} < N < \dfrac{AB}{\lambda}$

Το διάστημα στο οποίο παίρνει τιμές ο ακέραιος N έχει συμμετρικά άκρα ως προς το 0, άρα το πλήθος των τιμών του N εκατέρωθεν του 0 θα είναι άρτιο. Στο σύνολο ανήκει όμως και το 0, άρα το σύνολο των ακεραίων του διαστήματος είναι περιττό. Άρα και το αντίστοιχο πλήθος των υπερβολών ενίσχυσης που τέμνουν το τμήμα ΑΒ θα είναι περιττό.

Ερώτηση 7.

Σε ένα γραμμικό ελαστικό μέσο διαδίδονται προς αντίθετες κατευθύνσεις δύο εγκάρσια αρμονικά κύματα με το ίδιο πλάτος A και το ίδιο μήκος κύματος λ, με αποτέλεσμα στη χορδή να έχει δημιουργηθεί στάσιμο κύμα. Τα σημεία Α και Β του μέσου είναι κοιλίες ενώ $AB = 3\lambda$.

Μεταξύ των Α και Β εμφανίζονται:

α. 6 κοιλίες.

β) 6 δεσμοί.

γ) 5 δεσμοί.

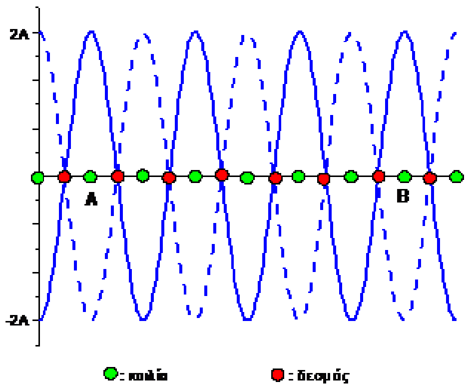
Να επιλέξετε τη σωστή πρόταση και να δικαιολογήσετε την επιλογή σας.

<u>Λύση</u>

Σωστή απάντηση: (β)

Τα Α και Β είναι κοιλίες, άρα: $x_A = N\frac{\lambda}{2}$ και $x_B = (N+\kappa)\frac{\lambda}{2}$, όπου κ ο αριθμός των κοιλιών (άρα και των δεσμών που προηγούνται από αυτές) που υπάρχουν μέχρι και το Β)

Οπότε αφαιρώντας έχουμε: $x_B - x_A = \kappa\frac{\lambda}{2} \Rightarrow 3\lambda = \kappa\frac{\lambda}{2} \Rightarrow \kappa = 6$



Ερώτηση 8.

Σε ένα γραμμικό ελαστικό μέσο διαδίδονται προς αντίθετες κατευθύνσεις δύο εγκάρσια αρμονικά κύματα με πλάτος $A = 0,2\ \mathrm{m}$ και συχνότητα $f = 5\ \mathrm{Hz}$. Τα κύματα διαδίδονται με ταχύτητα $u = 2\ \mathrm{m/s}$ και δημιουργούν στάσιμο κύμα, με κοιλία στο σημείο $O(x = 0)$, για το οποίο γνωρίζουμε ότι τη χρονική στιγμή $t = 0$ διέρχεται από τη θέση ισορροπίας του με θετική ταχύτητα.

Το στάσιμο κύμα έχει εξίσωση:

α) $y = 0,4\sigma\upsilon\nu(5\pi x)\eta\mu(10\pi t)$ (S.I.)

β) $y = 0,4\sigma\upsilon\nu(10\pi x)\eta\mu(5\pi t)$ (S.I.)

γ) $y = 0,4\sigma\upsilon\nu(5\pi x)\eta\mu(5\pi t)$ (S.I.)

Να επιλέξετε τη σωστή πρόταση και να δικαιολογήσετε την απάντηση σας.

<u>Λύση</u>

Σωστή απάντηση: (α)

Από την εξίσωση της ταχύτητα διάδοσης των κυμάτων έχουμε: $u = \lambda f \Rightarrow \lambda = 0,4\ \mathrm{m}$. Η εξίσωση του στάσιμου κύματος είναι:

$$y = 2A\sigma\upsilon\nu\left(2\pi\frac{x}{\lambda}\right)\eta\mu\left(2\pi\frac{t}{T}\right) \Rightarrow y = 0,4\sigma\upsilon\nu(5\pi x)\eta\mu(10\pi t)$$

Ερώτηση 9.

Κατά μήκος μίας ελαστικής χορδής που ταυτίζεται με τον άξονα x΄Ox έχει δημιουργηθεί στάσιμο κύμα, ως αποτέλεσμα της συμβολής δύο αντίθετα διαδιδόμενων αρμονικών κυμάτων με το ίδιο πλάτος και την ίδια συχνότητα. Τα σημεία Α και Β της χορδής είναι διαδοχικά σημεία στα οποία εμφανίζονται κοιλίες σε συμφωνία φάσης.

Μεταξύ των Α και Β υπάρχουν:

α) δύο δεσμοί.

β) ένας δεσμός.

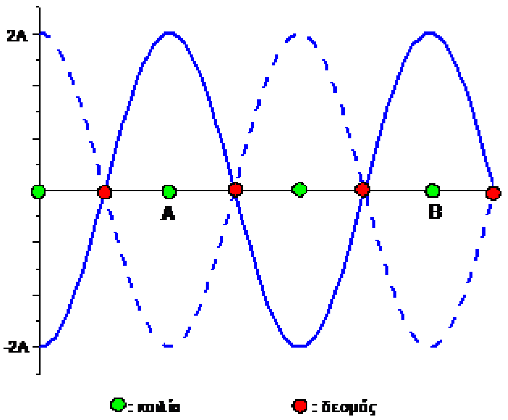
γ) τρείς δεσμοί.

Να επιλέξετε τη σωστή πρόταση και να δικαιολογήσετε την απάντηση σας.

<u>Λύση</u>

Σωστή απάντηση: (α)

Δύο διαδοχικές κοιλίες απέχουν κατά $\lambda/2$ και ταλαντώνονται σε αντίθεση φάσης. Άρα οι κοιλίες Α, Β ανήκουν σε ατράκτους μεταξύ των οποίων μεσολαβεί μία ακόμα, η οποία ορίζεται από δύο δεσμούς. Συνεπώς μεταξύ των Α και Β παρεμβάλλονται δύο δεσμοί.



Ερώτηση 10.

Σε ένα γραμμικό ελαστικό μέσο διαδίδονται προς αντίθετες κατευθύνσεις δύο εγκάρσια αρμονικά κύματα με ίσα πλάτη και ίσες συχνότητες. Τα κύματα συμβάλλουν και δημιουργούν στάσιμο κύμα. Δύο υλικά σημεία Κ, Λ του μέσου απέχουν μεταξύ τους απόσταση $\frac{\lambda}{4}$. Η διαφορά φάσης με την οποία ταλαντώνονται τα σημεία Κ και Λ μπορεί να είναι ίση με:

α) 0.

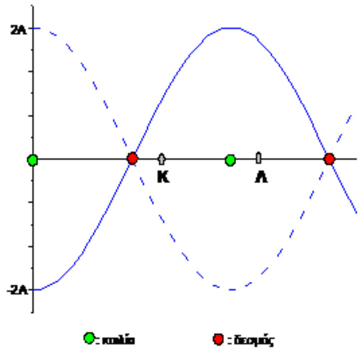
β) $\pi/4$.

γ) $\pi/2$.

Να επιλέξετε τη σωστή πρόταση και να δικαιολογήσετε την απάντηση σας.

<u>Λύση</u>

Σωστή απάντηση: (α)



Η απόσταση μεταξύ δύο διαδοχικών δεσμών είναι $\frac{\lambda}{2}$.

Τα Κ, Λ επειδή απέχουν μεταξύ τους $\frac{\lambda}{4}$, μπορεί είτε να βρίσκονται στην ίδια άτρακτο (μεταξύ δύο διαδοχικών δεσμών) είτε εκατέρωθεν ενός δεσμού. Σε περίπτωση που τα Κ και Λ βρίσκονται εκατέρωθεν ενός δεσμού, η διαφορά φάσης των ταλαντώσεών τους είναι ίση με π. Η απάντηση αυτή όμως δεν περιλαμβάνεται στις επιλογές μας. Άρα τα Κ, Λ ανήκουν στην ίδια άτρακτο και βρίσκονται σε συμφωνία φάσης.

Ερώτηση 11.

Σε ένα γραμμικό ελαστικό μέσο διαδίδονται προς αντίθετες κατευθύνσεις δύο εγκάρσια αρμονικά κύματα με πλάτος A και μήκος κύματος $\lambda = 1{,}2\ m$. Τα κύματα συμβάλλουν και δημιουργούν στάσιμο κύμα, με κοιλία στο σημείο $O(x = 0)$. Τα υλικά σημεία Ο και $A(x_A > 0)$ είναι διαδοχικά σημεία με μέγιστο πλάτος ταλάντωσης που βρίσκονται σε συμφωνία φάσης.

Η συντεταγμένη της θέσης του σημείου Α είναι:

α) $x_A = 0{,}3\ m$.

β) $x_A = 0{,}6\ m$.

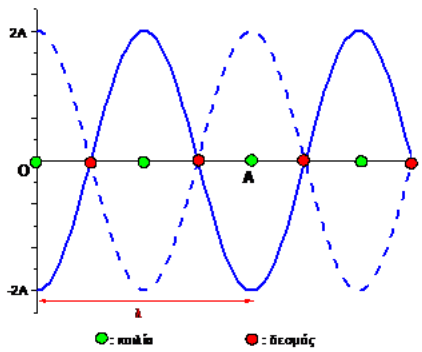
γ) $x_A = 1{,}2\ m$.

Να επιλέξετε τη σωστή πρόταση και να δικαιολογήσετε την απάντηση σας.

<u>Λύση</u>

Σωστή απάντηση: (γ)

Δύο διαδοχικές κοιλίες απέχουν κατά $\lambda / 2$ και ταλαντώνονται σε αντίθεση φάσης. Άρα οι κοιλίες Ο και Α ανήκουν σε ατράκτους μεταξύ των οποίων μεσολαβεί μία ακόμα, συνεπώς απέχουν κατά $\lambda = 1{,}2\ m$.



Ερώτηση 12.

Σε ένα γραμμικό ελαστικό μέσο διαδίδονται προς αντίθετες κατευθύνσεις δύο εγκάρσια αρμονικά κύματα με πλάτος Α και μήκος κύματος λ. Το σημείο Α του μέσου είναι δεσμός ενώ το σημείο Β είναι κοιλία. Μεταξύ των Α και Β εμφανίζονται τρείς κοιλίες.

Η απόσταση μεταξύ των Α και Β ισούται με:

α) $\frac{5}{4}\lambda$.

β) $\frac{7}{4}\lambda$.

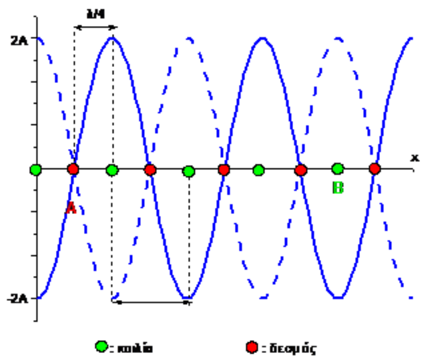
γ) $\frac{7}{2}\lambda$.

Να επιλέξετε τη σωστή πρόταση και να δικαιολογήσετε την απάντηση σας.

<u>Λύση</u>

Σωστή απάντηση: (β)

Δύο διαδοχικές κοιλίες απέχουν $\lambda/2$, άρα η απόσταση μεταξύ των 4 κοιλιών είναι $\frac{3\lambda}{2}$ (βλέπε και σχήμα). Μία κοιλία από τον πλησιέστερο δεσμό απέχει $\lambda/4$. Μεταξύ των Α και Β παρεμβάλλονται τρεις κοιλίες, άρα τα Α, Β απέχουν κατά $\frac{3}{2}\lambda + \frac{\lambda}{4} = \frac{7}{4}\lambda$.



Ερώτηση 13.

Δύο σύγχρονες κυματικές πηγές Π_1, Π_2 βρίσκονται στα σημεία (Α) και (Β) αντίστοιχα της ελαστικής επιφάνειας ενός υγρού. Οι πηγές ταλαντώνονται κάθετα στην επιφάνεια του υγρού με το ίδιο πλάτος Α, παράγοντας κύματα με μήκος κύματος λ. Αν $(AB) = 2,4\lambda$, τότε μεταξύ των (Α) και (Β) και επί του (ΑΒ) το πλήθος των σημείων απόσβεσης είναι:

α) 4.

β) 5.

γ) 6.

Να επιλέξετε τη σωστή πρόταση και να δικαιολογήσετε την απάντηση σας.

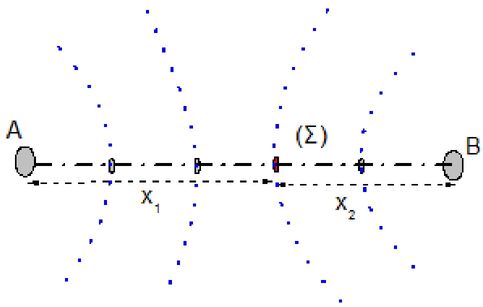
<u>Λύση</u>

Σωστή απάντηση: (α)

Αν (Σ) σημείο απόσβεσης επί του ΑΒ το οποίο απέχει από τις πηγές κατά x_1 και x_2 αντίστοιχα, τότε θα πρέπει να επαληθεύει τη συνθήκη ακυρωτικής συμβολής: $x_1 - x_2 = (2N+1)\dfrac{\lambda}{2}, N = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \ldots$

Επίσης: $x_1 + x_2 = AB$

Προσθέτοντας κατά μέλη τις δύο αυτές εξισώσεις προκύπτει: $x_1 = \dfrac{(2N+1)\dfrac{\lambda}{2} + AB}{2}$



Το σημείο (Σ) βρίσκεται μεταξύ των πηγών άρα:

$$0 < x_1 < AB \Rightarrow 0 < \frac{(2N+1)\dfrac{\lambda}{2} + AB}{2} < AB \Rightarrow -AB < (2N+1)\frac{\lambda}{2} < AB \Rightarrow -2,4\lambda < (2N+1)\frac{\lambda}{2} < 2,4\lambda \Rightarrow$$
$$-4,8 < 2N+1 < 4,8 \Rightarrow -2,9 < N < 1,9$$

Άρα ο ακέραιος N μπορεί να πάρει τις τιμές $N = -2, -1, 0, +1$, καθεμιά από τις οποίες αντιστοιχεί με μια υπερβολή απόσβεσης. Συνολικά το ΑΒ τέμνεται από 4 υπερβολές απόσβεσης.

Ερώτηση 14.

Δύο σύγχρονες κυματικές πηγές Π_1, Π_2 βρίσκονται στα σημεία (Α) και (Β) αντίστοιχα της ελαστικής επιφάνειας ενός υγρού. Οι πηγές ταλαντώνονται κάθετα στην επιφάνεια του υγρού με το ίδιο πλάτος A, παράγοντας κύματα με μήκος κύματος λ.

Αν $(AB)=2,4\lambda$, τότε μεταξύ των (Α) και (Β) και επί του (ΑΒ) το πλήθος των σημείων ενίσχυσης είναι:

α) 3.

β) 4.

γ) 5.

Να επιλέξετε τη σωστή πρόταση και να δικαιολογήσετε την απάντηση σας.

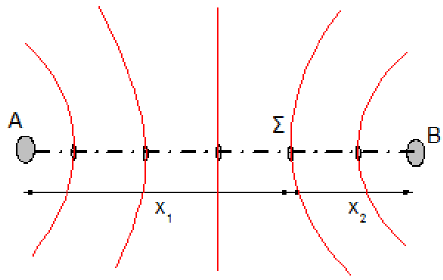
<u>Λύση</u>

Σωστή απάντηση: (γ)

Αν (Σ) σημείο ενίσχυσης επί του ΑΒ το οποίο απέχει από τις πηγές κατά x_1 και x_2 αντίστοιχα, τότε θα πρέπει να επαληθεύει τη συνθήκη ενισχυτικής συμβολής: $x_1 - x_2 = N\lambda,\ N = 0, \pm1, \pm2, \pm3, \ldots$

Επίσης: $x_1 + x_2 = AB$

Προσθέτοντας κατά μέλη τις δύο αυτές εξισώσεις προκύπτει:
$x_1 = \dfrac{N\lambda + AB}{2}$



Το σημείο (Σ) βρίσκεται μεταξύ των πηγών άρα:

$$0 < x_1 < AB \Rightarrow 0 < \frac{N\lambda + AB}{2} < AB \Rightarrow 0 < N\lambda + 2,4\lambda < 4,8\lambda \Rightarrow -2,4\lambda < N\lambda < 2,4\lambda \Rightarrow -2,4 < N < 2,4$$

Άρα ο ακέραιος N μπορεί να πάρει τις τιμές $N = 0, \pm1, \pm2$, καθεμιά από τις οποίες αντιστοιχεί με μια υπερβολή ενίσχυσης. Συνολικά το ΑΒ τέμνεται από 5 υπερβολές ενίσχυσης.

Ερώτηση 15.

Δύο σύγχρονες κυματικές πηγές Π_1, Π_2 βρίσκονται στα σημεία (Α) και (Β) αντίστοιχα της ελαστικής επιφάνειας ενός υγρού. Οι πηγές ταλαντώνονται κάθετα στην επιφάνεια του υγρού με το ίδιο πλάτος A, παράγοντας κύματα με μήκος κύματος λ. Τα κύματα των πηγών συμβάλλουν σε σημείο (Σ) της επιφάνειας με χρονική διαφορά $\Delta t = T$.

Η μέγιστη ταχύτητα του υλικού σημείου (Σ) μετά τη συμβολή των κυμάτων είναι:

α) ίση με τη μέγιστη ταχύτητα της ταλάντωσης των πηγών.

β) διπλάσια από τη μέγιστη ταχύτητα της ταλάντωσης των πηγών.

γ) τριπλάσια από τη μέγιστη ταχύτητα της ταλάντωσης των πηγών.

Να επιλέξετε τη σωστή απάντηση και να δικαιολογήσετε την επιλογή σας.

<u>Λύση</u>

Σωστή απάντηση: (β)

Είναι $\Delta t = T$ άρα $r_2 - r_1 = \lambda$. Άρα:

$$A_\Sigma{}' = 2A\left|\sigma\upsilon\nu\left(\pi\frac{r_1 - r_2}{\lambda}\right)\right| = 2A\left|\sigma\upsilon\nu\left(\pi\frac{-\lambda}{\lambda}\right)\right| = 2A\left|\sigma\upsilon\nu\left(-\pi\right)\right| = 2A$$

Η μέγιστη ταχύτητα ταλάντωσης του σημείου (Σ) μετά τη συμβολή των κυμάτων σε αυτό είναι:

$u_{\max(\Sigma)} = \omega A_\Sigma{}' = 2\omega A = 2u_{\max(\Pi)}$ όπου $u_{\max(\Pi)}$ η μέγιστη ταχύτητα ταλάντωσης των πηγών.

Ερώτηση 16.

Δύο σύγχρονες κυματικές πηγές Π_1, Π_2 βρίσκονται στα σημεία (Α) και (Β) αντίστοιχα της ήρεμης επιφάνειας ενός υγρού. Οι πηγές ταλαντώνονται κάθετα στην επιφάνεια του υγρού με το ίδιο πλάτος A, παράγοντας κύματα με μήκος κύματος λ.

Η απόσταση μεταξύ δύο διαδοχικών σημείων απόσβεσης που ανήκουν στο τμήμα (ΑΒ) ισούται με:

α) λ.

β) $\dfrac{\lambda}{2}$.

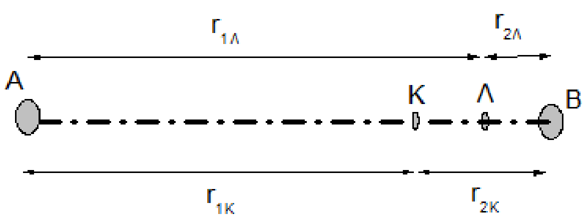
γ) $\dfrac{\lambda}{4}$.

Να επιλέξετε τη σωστή απάντηση και να δικαιολογήσετε την επιλογή σας.

<u>Λύση</u>

Σωστή απάντηση: (β)

Έστω Κ, Λ δύο διαδοχικά σημεία απόσβεσης του τμήματος ΑΒ που συνδέει τις πηγές. Αν r_{1K}, r_{2K} οι αποστάσεις του σημείου Κ από τις κυματικές πηγές και αντίστοιχα $r_{1\Lambda}, r_{2\Lambda}$ του σημείου Λ, τότε η συνθήκη απόσβεσης για το κάθε σημείο γράφεται:



$$r_{1K} - r_{2K} = (2N+1)\frac{\lambda}{2},\ N = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots$$

και $r_{1\Lambda} - r_{2\Lambda} = (2N'+1)\dfrac{\lambda}{2},\ N' = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm \dots$

Τα σημεία Κ, Λ είναι διαδοχικά σημεία απόσβεσης άρα $N' = N + 1$.

Αφαιρώντας κατά μέλη της παραπάνω έχουμε:

$$r_{1\Lambda} - r_{1K} - r_{2\Lambda} + r_{2K} = [2(N+1)+1]\frac{\lambda}{2} - (2N+1)\frac{\lambda}{2} \Rightarrow$$

$$2(K\Lambda) = \lambda \Rightarrow (K\Lambda) = \frac{\lambda}{2}$$

Ερώτηση 17.

Κατά μήκος μιας οριζόντιας ελαστικής χορδής μήκους $L = 3,6\,\text{m}$ της οποίας τα άκρα είναι ακλόνητα στερεωμένα σε ακίνητα εμπόδια, έχει δημιουργηθεί στάσιμο κύμα ως αποτέλεσμα της συμβολής δύο αντίθετα διαδιδόμενων αρμονικών κυμάτων με το ίδιο πλάτος και την ίδια συχνότητα f. Τα κύματα διαδίδονται με ταχύτητα $7,2\,\text{m/s}$. Αν μεταξύ των άκρων της χορδής εμφανίζονται 4 δεσμοί, τότε η συχνότητα των κυμάτων είναι:

α) $f = 2,5\,\text{Hz}$.

β) $f = 5\,\text{Hz}$.

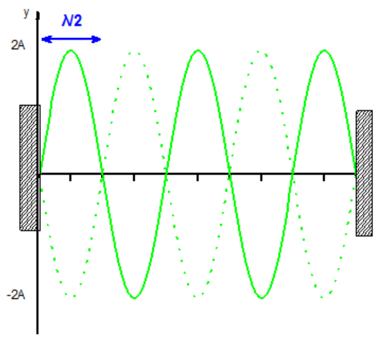
γ) $f = 7,5\,\text{Hz}$.

Να επιλέξετε τη σωστή απάντηση και να δικαιολογήσετε την επιλογή σας.

<u>Λύση</u>

Σωστή απάντηση: (β)

Τα άκρα της χορδής είναι δεσμοί αφού είναι ακίνητα. Η απόσταση δύο διαδοχικών δεσμών ισούται με $\lambda/2$, άρα:



$$L = \frac{5}{2}\lambda \Rightarrow \lambda = \frac{2 \cdot 3,6}{5}\,\text{m} \Rightarrow \lambda = 1,44\ \text{m}$$

Άρα: $u = \lambda f \Rightarrow f = \dfrac{u}{\lambda} = \dfrac{7,2\,\text{m/s}}{1,44\ \text{m}} = 5\,\text{Hz}$

Συνεπώς σωστή απάντηση είναι η (β).

Ερώτηση 18.

Κατά μήκος μίας ελαστικής χορδής που ταυτίζεται με τον άξονα x'Ox έχει δημιουργηθεί στάσιμο κύμα, ως αποτέλεσμα της συμβολής δύο αντίθετα διαδιδόμενων αρμονικών κυμάτων με το ίδιο πλάτος $A = 0,4\,\text{m}$ και το ίδιο μήκος κύματος λ. Το στάσιμο κύμα έχει εξίσωση $y = 2A\sigma\upsilon\nu\left(2\pi\dfrac{x}{\lambda}\right)\eta\mu\left(2\pi\dfrac{t}{T}\right)$. Η απομάκρυνση του σημείου $A(x_A = \lambda/3)$ τη χρονική στιγμή που το σημείο $B(x_B = 6\lambda/5)$ βρίσκεται σε μέγιστη θετική απομάκρυνση ισούται με:

α) $0,4\,\text{m}$.

β) $-0,4\,\text{m}$.

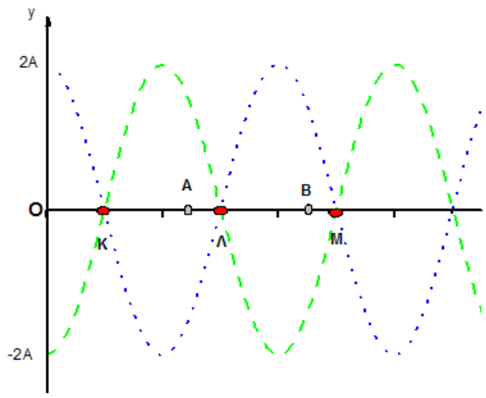
γ) $0,2\,\text{m}$.

Να επιλέξετε τη σωστή απάντηση και να δικαιολογήσετε την επιλογή σας.

<u>Λύση</u>

Σωστή απάντηση: (β)

Το σημείο Α ανήκει στην άτρακτο μεταξύ των δεσμών $K(x_K = \lambda/4)$ και $\Lambda(x_\Lambda = 3\lambda/4)$. Αντίστοιχα το σημείο Β ανήκει στην άτρακτο μεταξύ των δεσμών $\Lambda(x_\Lambda = 3\lambda/4)$ και $M(x_M = 5\lambda/4)$. Συνεπώς τα Α, Β βρίσκονται σε αντίθεση φάσης. Άρα όταν το σημείο $B(x_B = 6\lambda/5)$ βρίσκεται σε μέγιστη θετική απομάκρυνση το Α θα βρίσκεται στην ακραία αρνητική θέση. Η απομάκρυνση υπολογίζεται ως εξής:



$$y_A = 2A\sigma\upsilon\nu\left(2\pi\frac{x_A}{\lambda}\right) = 2\cdot 0,4\sigma\upsilon\nu\left(2\pi\frac{\frac{\lambda}{3}}{\lambda}\right) \Rightarrow$$

$$y_A = 0,8\sigma\upsilon\nu\left(\frac{2\pi}{3}\right) \Rightarrow y_A = -0,4\,\text{m}$$

Ερώτηση 19.

Κατά μήκος μίας ελαστικής χορδής που ταυτίζεται με τον άξονα x΄Ox έχει δημιουργηθεί στάσιμο κύμα, ως αποτέλεσμα της συμβολής δύο αντίθετα διαδιδόμενων αρμονικών κυμάτων ίδιας συχνότητας και ίδιου πλάτους, έτσι ώστε στο σημείο $O(x=0)$ να δημιουργείται κοιλία. Τα σημεία $A(x_A = 4,5\lambda)$ και $B(x_B = 6\lambda)$:

α) ταλαντώνονται σε αντίθεση φάσης.

β) ταλαντώνονται σε συμφωνία φάσης.

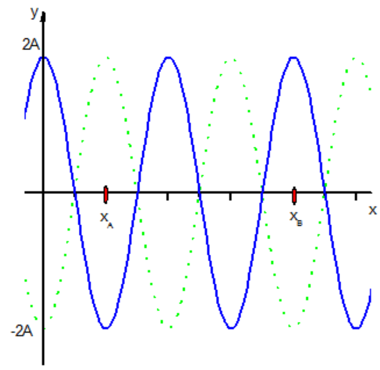
γ) είναι ακίνητα.

Να επιλέξετε τη σωστή απάντηση και να δικαιολογήσετε την επιλογή σας.

Λύση

Σωστή απάντηση: (α)

Το σημείο Α ικανοποιεί τη συνθήκη κοιλιών $x = k\dfrac{\lambda}{2}$ για $k=9$. Ομοίως το σημείο Β ικανοποιεί τη συνθήκη κοιλιών για $k=12$. Μεταξύ αυτών των κοιλιών παρεμβάλλονται άλλες δύο $(k=10, k=11)$ άρα οι κοιλίες Α και Β ανήκουν σε ατράκτους που ταλαντώνονται σε αντίθεση φάσης.



ΘΕΜΑ Γ

Άσκηση 1.

Σε ένα γραμμικό ελαστικό μέσο το οποίο ταυτίζεται με τον οριζόντιο άξονα x'Ox διαδίδονται ταυτόχρονα δύο εγκάρσια αρμονικά κύματα με εξισώσεις: $y_1 = 0,25\eta\mu 2\pi(t - x)$ (S.I.) και $y_2 = 0,25\eta\mu 2\pi(t + x)$ (S.I.). Τα κύματα συμβάλλουν και δημιουργούν στάσιμο κύμα.

α) Να γράψετε την εξίσωση του στάσιμου κύματος.

β) Να γράψετε την εξίσωση της ταχύτητας σε συνάρτηση με το χρόνο, των σημείων Α($x_A = 0,5\text{ m}$) και Β($x_B = 1\text{ m}$).

γ) Να σχεδιάσετε το στιγμιότυπο του τμήματος ΑΔ της χορδής, όπου $\Delta(x_\Delta = 1,75\text{ m})$ τη χρονική στιγμή $t_1 = 1,25\text{ s}$ σε κατάλληλα βαθμολογημένο σύστημα αξόνων.

δ) Να υπολογίσετε την απομάκρυνση του σημείου $Z\left(x_Z = \frac{5}{6}\text{ m}\right)$ όταν η απομάκρυνση του σημείου Α είναι μέγιστη θετική.

<u>Λύση</u>

α) Τα διαδιδόμενα κύματα έχουν πλάτος $A = 0,25\text{ m}$, γωνιακή συχνότητα $\omega = 2\pi\text{ rad/s}$ και μήκος κύματος $\lambda = 1\text{ m}$. Άρα η εξίσωση του στάσιμου κύματος γράφεται:

$$y = 2A\sigma\upsilon\nu\left(2\pi\frac{x}{\lambda}\right)\cdot\eta\mu\left(2\pi\frac{t}{T}\right) \Rightarrow y = 0,5\sigma\upsilon\nu(2\pi x)\cdot\eta\mu(2\pi t)\ \text{(S.I.)}.$$

β) Η απομάκρυνση από τη θέση ισορροπίας του σημείου Α περιγράφεται από την:

$$y_A = 0,5\cdot\sigma\upsilon\nu(2\pi x_A)\cdot\eta\mu(2\pi t) \Rightarrow y_A = -0,5\cdot\eta\mu(2\pi t)\ \text{(S.I.)}$$

ή ισοδύναμα

$$y_A = 0,5\cdot\eta\mu(2\pi t + \pi)\ \text{(S.I.)}.$$

Προφανώς το Α είναι κοιλία σε αντίθετη φάση με αυτή που δημιουργείται στο σημείο Ο $(x = 0)$.

Άρα η ταχύτητα του θα περιγράφεται από την:

$$u_A = \omega A_A\sigma\upsilon\nu(\omega t + \phi_0) \Rightarrow u_A = \pi\cdot\sigma\upsilon\nu(2\pi t + \pi)\ \text{(S.I.)}$$

ή ισοδύναμα $u_A = -\pi\cdot\sigma\upsilon\nu(2\pi t)$ (S.I.).

Αντίστοιχα, για το σημείο Β είναι:

$y_B = 0,5 \cdot συν(2πx_B) \cdot ημ(2πt) \Rightarrow y_B = 0,5 \cdot ημ(2πt)$ (S.I.

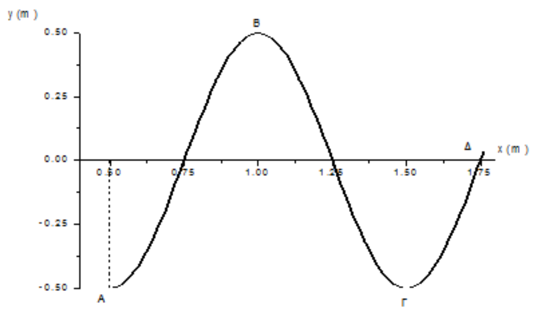
και $u_B = π \cdot συν(2πt)$ (S.I.) .

Εναλλακτικά, τα Α, Β είναι διαδοχικές κοιλίες άρα θα έχουν αντίθετες ταχύτητες $u_A = -u_B$

γ) Τη χρονική στιγμή $t_1 = 1,25$ s η εξίσωση του στάσιμου γράφεται:

$y = 0,5 \cdot συν(2πx) \cdot ημ(2π \cdot 1,25) \Rightarrow y = 0,5 \cdot συν(2πx)$ (S.I.) .

Από τη γραφική παράσταση $y = f(x)$ επιλέγουμε το τμήμα από $x = 0,5$ m έως $x = 1,75$ m, άρα το ζητούμενο στιγμιότυπο είναι:



δ) Τα Α, Ζ θα βρίσκονται σε αντίθεση φάσης αφού ανήκουν σε διαδοχικές ατράκτους. Όταν το Α αποκτά τη μέγιστη θετική απομάκρυνση τότε το Ζ θα αποκτά τη δική του μέγιστη αρνητική απομάκρυνση. Δηλαδή $y_Z = -A_z$, όπου

$$A_Z = 2A\left|συν\left(2π\frac{x_Z}{λ}\right)\right| = 0,25 \text{ m}$$

άρα $y_Z = -0,25$ m .

Εναλλακτικά έχουμε ότι για $y_A = 0,5 \Rightarrow ημ(2πt + π) = 1 \Rightarrow t = \dfrac{4k-1}{4}, k = 1, 2, 3, \dots$

τότε: $y_Z = 0,5 \cdot συν(2πx_Z) \cdot ημ(2πt) \Rightarrow y_Z = 0,5 \cdot συν\left(\dfrac{5π}{3}\right) \cdot ημ\left((4k-1)\dfrac{π}{2}\right) \Rightarrow$

$$y_Z = 2 \cdot 0,25συν\left(\frac{5π}{3}\right)\text{m} = 0,5συν\left(2π - \frac{π}{3}\right)\text{m} = 0,5συν\left(\frac{π}{3}\right)\text{m} = 0,5 \cdot \frac{1}{2}\text{m} \Rightarrow y_Z = 0,25 \text{ m}$$

Άσκηση 2.

Δύο σύγχρονες κυματικές πηγές Π_1 και Π_2 βρίσκονται στα σημεία Α και Β αντίστοιχα, της ελαστικής επιφάνειας ενός υγρού και απέχουν κατά $AB = 4,4\,m$. Τη χρονική στιγμή $t = 0$ οι πηγές ξεκινούν να ταλαντώνονται κάθετα στην επιφάνεια του υγρού, με την απομάκρυνση τους να περιγράφεται από την εξίσωση $y = A\eta\mu(20\pi t)\,(S.I.)$. Τα παραγόμενα κύματα έχουν μήκος κύματος $\lambda = 0,4\,m$. Σημείο (Δ) απέχει κατά $r_1 = 2,8\,m$ από την πηγή Π_1 και κατά $r_2 = 7,2\,m$ από την πηγή Π_2. Το πλάτος ταλάντωσης του σημείου (Δ) μετά τη συμβολή των κυμάτων σε αυτό ισούται με $A_\Delta = 1\,m$.

α) Να εξετάσετε εάν στο σημείο (Δ) συμβαίνει ενίσχυση ή απόσβεση των κυμάτων.

β) Να υπολογίσετε το πλάτος A των κυμάτων.

γ) Να γράψετε την εξίσωση απομάκρυνσης του σημείου (Δ) σε συνάρτηση με το χρόνο, μετά τη συμβολή των κυμάτων σε αυτό.

δ) Να σχεδιάσετε σε κατάλληλα βαθμολογημένο σύστημα αξόνων τη γραφική παράσταση της ταχύτητας ταλάντωσης σε συνάρτηση με το χρόνο του σημείου (Μ), το οποίο είναι το μέσο του ΑΒ.

Λύση

α) Είναι $|r_1 - r_2| = |2,8\,m - 7,2\,m| = 4,4\,m = 11\lambda$. Δηλαδή το σημείο (Δ) ικανοποιεί τη συνθήκη ενίσχυσης $|r_1 - r_2| = N\cdot\lambda$ για ακέραιο $N = 11$. Συνεπώς το σημείο (Δ) είναι σημείο ενίσχυσης.

β) Για τα σημεία ενίσχυσης, άρα και το (Δ), ισχύει $A_\Delta = 2A \Rightarrow A = 0,5\,m$.

γ) Από την εξίσωση ταλάντωσης των πηγών έχουμε: $\omega = 20\pi\,rad/s$ άρα $f = 10\,Hz$ ενώ από τη θεμελιώδη κυματική εξίσωση: $u = \lambda f = 4\,m/s$

Στο (Δ) φτάνει πρώτο το κύμα από την πλησιέστερη πηγή, την Π_1, έστω τη χρονική στιγμή t_1 ώστε:

$$t_1 = \frac{r_1}{u} = 0,7\,s$$

Αντίστοιχα, το κύμα από την απομακρυσμένη πηγή Π_2 φτάνει στο (Δ) τη χρονική στιγμή

$$t_2 = \frac{r_2}{u} = 1,8\,s$$

Άρα η συμβολή των κυμάτων συμβαίνει για $t \geq t_2 = 1,8\,s$.

Είναι:

$$y_\Delta = 2A\sigma\upsilon\nu\left(2\pi\frac{r_1-r_2}{2\lambda}\right)\eta\mu2\pi\left(\frac{t}{T}-\frac{r_1+r_2}{2\lambda}\right) \Rightarrow y_\Delta = 2\cdot0,5\sigma\upsilon\nu\left(\pi\frac{4,4}{0,4}\right)\eta\mu2\pi\left(\frac{t}{0,1}-\frac{10}{0,8}\right) \Rightarrow$$

$$y_\Delta = \sigma\upsilon\nu(11\pi)\eta\mu2\pi(10t-12,5) \Rightarrow y_\Delta = -\eta\mu\pi\left(20t-25\right)\ (S.I.)$$

δ) Το (Μ) ισαπέχει από τα Α, Β άρα τα κύματα φτάνουν ταυτόχρονα σε αυτό τη χρονική στιγμή t_M ώστε:

$$t_M = \frac{\frac{AB}{2}}{u} = 0,55\ s$$

Συνεπώς για $t \geq t_M = 0,55\ s$ είναι:

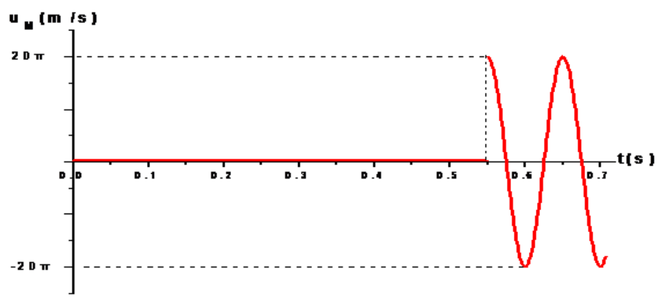
$$y_M = 2A\sigma\upsilon\nu\left(2\pi\frac{r_{1M}-r_{2M}}{2\lambda}\right)\eta\mu2\pi\left(\frac{t}{T}-\frac{r_{1M}+r_{2M}}{2\lambda}\right) \Rightarrow y_M = \sigma\upsilon\nu0\cdot\eta\mu2\pi\left(\frac{t}{T}-\frac{AB}{2\lambda}\right) \Rightarrow$$

$$\boxed{y_M = \eta\mu\pi\left(20t-11\right)\ (S.I.)}$$

Άρα η ταχύτητα ταλάντωσης του σημείου Μ θα περιγράφεται από την:

$$u_M = \omega A_M\sigma\upsilon\nu\pi(20t-11) \Rightarrow u_M = 20\pi\sigma\upsilon\nu\pi(20t-11)\ (S.I.)$$

Η γραφική παράσταση της συνάρτησης αυτής είναι:



Άσκηση 3.

Δύο εγκάρσια αρμονικά κύματα ίδιου πλάτους $A = 0,2\ \text{m}$ και ίδιου μήκους κύματος $\lambda = 0,4\ \text{m}$ διαδίδονται με αντίθετες κατευθύνσεις και ταχύτητα $2\ \text{m/s}$ σε χορδή η οποία ταυτίζεται με τον οριζόντιο άξονα x΄Ox. Τα κύματα συμβάλλουν και δημιουργούν στάσιμο κύμα με κοιλία στο σημείο $O(x = 0)$.

α) Να γράψετε τις εξισώσεις των κυμάτων που δημιούργησαν το στάσιμο κύμα.

β) Να γράψετε την εξίσωση του στάσιμου κύματος.

γ) Να γράψετε την εξίσωση της απομάκρυνσης σε συνάρτηση με το χρόνο, των σημείων $A(x_A = 1,2\ \text{m})$ και $B(x_B = 1,9\ \text{m})$.

δ) Να σχεδιάσετε το στιγμιότυπο του τμήματος ΑΒ της χορδής τις χρονικές στιγμές $t_0 = 0$ και $t_1 = 0,15\ \text{s}$.

<u>Λύση</u>

α) Είναι: $u = \lambda f \Rightarrow f = 5\ \text{Hz}$ και $T = 0,2\ \text{s}$.

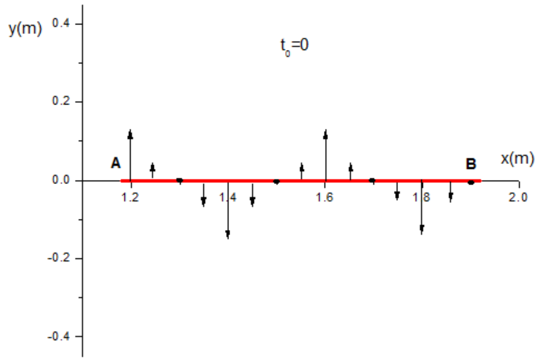
Άρα: $$\begin{cases} y_1 = A\eta\mu 2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda}\right) \\ y_2 = A\eta\mu 2\pi\left(\frac{t}{T} + \frac{x}{\lambda}\right) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y_1 = 0,2\eta\mu 2\pi\left(5t - 2,5x\right) \\ y_2 = 0,2\eta\mu 2\pi\left(5t + 2,5x\right) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y_1 = 0,2\eta\mu 5\pi\left(2t - x\right) \\ y_2 = 0,2\eta\mu 5\pi\left(2t + x\right) \end{cases} \quad \text{(S.I.)}$$

β) $y = 2A\sigma\upsilon\nu\left(2\pi\frac{x}{\lambda}\right)\eta\mu\left(2\pi\frac{t}{T}\right) \Rightarrow y = 0,4\sigma\upsilon\nu(5\pi x)\eta\mu(10\pi t)$ (S.I.)

γ) Για το σημείο $A(x_A = 1,2\ \text{m})$: $y_A = 0,4\sigma\upsilon\nu(5\pi \cdot 1,2)\eta\mu(10\pi t) \Rightarrow y_A = 0,4\eta\mu(10\pi t)$ *(κοιλία)*

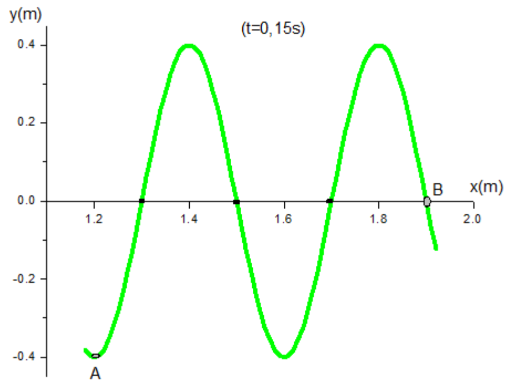
Για το σημείο $B(x_B = 1,9\ \text{m})$: $y_B = 0,4\sigma\upsilon\nu(5\pi \cdot 1,9)\eta\mu(10\pi t) \Rightarrow y_B = 0$ *(δεσμός)*

δ) Για $t = 0$ είναι $y = 0$ για κάθε σημείο της χορδής ενώ για την ταχύτητα της κοιλίας Α είναι $u_A > 0$. Άρα το ζητούμενο στιγμιότυπο είναι:



Αντίστοιχα, για $t = 0{,}15\,s$, η εξίσωση του στάσιμου είναι: $y = -0{,}4\sigma\upsilon\nu(5\pi x)$ (S.I.)

Το τμήμα της γραφικής παράστασης αυτής, για $x_A \le x \le x_B$ είναι το ζητούμενο στιγμιότυπο. Η κοιλία $A(x_A = 1{,}2\,m)$ την χρονική στιγμή $t = 0{,}15\,s$ βρίσκεται σε απομάκρυνση: $y_A = -0{,}4\sigma\upsilon\nu(5\pi \cdot 1{,}2)m = -0{,}4\,m$, δηλαδή στην ακραία αρνητική απομάκρυνση. Με δεδομένο ότι δύο διαδοχικές κοιλίες βρίσκονται σε αντίθεση φάσης, σχεδιάζουμε το ζητούμενο στιγμιότυπο:



ΘΕΜΑ Δ

Πρόβλημα 1.

Δύο σύγχρονες κυματικές πηγές Π_1, Π_2 βρίσκονται στα σημεία Α και Β αντίστοιχα της επιφάνειας ενός υγρού. Οι πηγές απέχουν μεταξύ τους κατά $d = 2\ m$ και ταλαντώνονται κάθετα στην επιφάνεια του υγρού, σύμφωνα με την $y_0 = 0,2\eta\mu(3\pi t)$ (S.I.). Τα παραγόμενα κύματα διαδίδονται με ταχύτητα $u = 1,2\ m/s$. Σημείο (Γ) της επιφάνειας του υγρού απέχει απόσταση $r_1 = 3m$ από την Π_1 και $r_2\ (r_2 < r_1)$ από την Π_2. Στο σημείο (Γ) τα κύματα φτάνουν με χρονική διαφορά $\Delta t = 1\ s$.

α) Να υπολογίσετε την απόσταση r_2.

β) Να εξετάσετε αν το σημείο (Γ) είναι σημείο ενίσχυσης ή απόσβεσης.

γ) Να γράψετε την εξίσωση της απομάκρυνσης του σημείου (Γ) σε σχέση με το χρόνο και να σχεδιάσετε την αντίστοιχη γραφική παράσταση σε κατάλληλα βαθμολογημένο σύστημα αξόνων.

δ) Να υπολογίσετε το πλήθος των σημείων ενίσχυσης που βρίσκονται πάνω στο ευθύγραμμο τμήμα ΑΒ.

ε) Αν (Δ) σημείο του τμήματος ΑΒ, το οποίο ανήκει στην ίδια υπερβολή ενίσχυσης ή απόσβεσης με το σημείο (Γ) και (Ζ) σημείο του ΑΒ το οποίο είναι το πλησιέστερο στην πηγή Π_1 σημείο ενίσχυσης, να υπολογίσετε την απόσταση (ΔΖ).

Λύση

α) Αφού $r_2 < r_1$ στο σημείο (Γ) πρώτα φτάνει το κύμα από την πηγή Π_2, έστω τη χρονική στιγμή t_2 και στη συνέχεια φτάνει το κύμα από την Π_1, έστω τη χρονική στιγμή t_1, με $t_1 > t_2$ ώστε $t_1 = t_2 + \Delta t$. Για την ταχύτητα διάδοσης του κύματος από την Π_1 μέχρι το σημείο Γ ισχύει:

$$u = \frac{r_1}{t_1} \Rightarrow t_1 = 2,5\ s$$

Άρα: $t_2 = t_1 - \Delta t \Rightarrow t_2 = 1,5\ s$. Συνεπώς $u = \frac{r_2}{t_2} \Rightarrow r_2 = 1,8\ m$.

β) Από την εξίσωση ταλάντωσης των πηγών προκύπτει: $A = 0,2\ m$ και $\omega = 3\pi\ rad/s$ ή $f = \frac{\omega}{2\pi} = 1,5\ Hz$.

Σύμφωνα με τη θεμελιώδη κυματική εξίσωση: $u = \lambda f$ ή $\lambda = 0,8\ m$.

Η συμβολή των κυμάτων συμβαίνει στο σημείο (Γ) από τη στιγμή που έχουν φτάσει και τα δύο κύματα, δηλαδή για $t \geq 2{,}5\,s$. Τότε

$A'_{\Gamma} = 2A\left|\sigma\upsilon\nu\left(\pi\frac{r_1 - r_2}{\lambda}\right)\right| = 2A\left|\sigma\upsilon\nu\left(\pi\frac{1{,}2}{0{,}8}\right)\right| = 2A\left|\sigma\upsilon\nu\left(\frac{3\pi}{2}\right)\right| \Rightarrow A'_{\Gamma} = 0$. Συνεπώς το σημείο (Γ) είναι σημείο απόσβεσης.

Εναλλακτικά, μπορούμε να εξετάσουμε αν υπάρχει ακέραιος αριθμός $N = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \ldots$, *ο οποίος να επαληθεύει τη συνθήκη απόσβεσης ή τη συνθήκη ενίσχυσης. Για να επαληθεύει το σημείο (Γ) τη συνθήκη απόσβεσης θα πρέπει:* $r_1 - r_2 = (2N+1)\frac{\lambda}{2} \Rightarrow 3m - 1{,}8m = (2N+1)\frac{0{,}8m}{2} \Rightarrow N = 1$ *ο οποίος είναι ακέραιος, άρα το σημείο Γ είναι σημείο απόσβεσης.*

γ) Μέχρι να φτάσει το πρώτο κύμα (εν προκειμένω από την πηγή Π_2) το (Γ) παραμένει ακίνητο, άρα για $0 \leq t \leq 1{,}5\,s$ είναι $y_r = 0$.

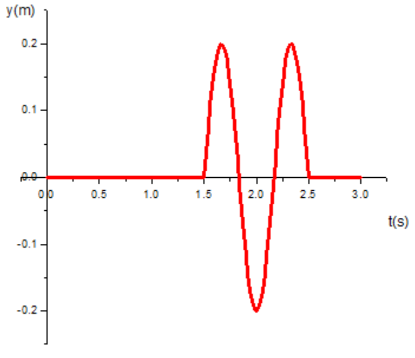
Από τη στιγμή που το υλικό σημείο (Γ) ξεκινά να ταλαντώνεται, λόγω της διαταραχής που προέρχεται από την πηγή Π_2 και μέχρι να φτάσει και το δεύτερο κύμα, οπότε θα συμβεί η συμβολή, η απομάκρυνση του (Γ) θα είναι: $y_{\Gamma} = A\eta\mu 2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{r_2}{\lambda}\right)$ ή $y_{\Gamma} = 0{,}2\eta\mu\pi(3t - 4{,}5)$ (S. I.) για $1{,}5\,s < t \leq 2{,}5\,s$.

Στο χρονικό διάστημα αυτό το σημείο (Γ) εκτελεί $\nu = \frac{\Delta t}{T} = 1{,}5$ ταλαντώσεις.

Από τη στιγμή που συμβαίνει η συμβολή δείξαμε ότι καθίσταται σημείο απόσβεσης, άρα για $t > 2{,}5\,s$ θα είναι $y_{\Gamma} = 0$.

Συνοψίζοντας:

$$\boxed{y_{\Gamma} = \begin{cases} 0,\ 0 \leq t \leq 1{,}5\,s \\ 0{,}2\eta\mu\pi(3t - 4{,}5),\ 1{,}5\,s < t \leq 2{,}5\,s \\ 0,\ t > 2{,}5\,s \end{cases}}$$



δ) Αν (Σ) σημείο ενίσχυσης επί του ΑΒ το οποίο απέχει από τις πηγές x_1 και x_2 αντίστοιχα, τότε είναι:

$x_1 - x_2 = N\lambda, N = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \ldots$ ενώ $x_1 + x_2 = d$.

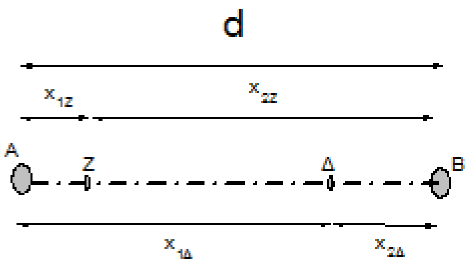
Προσθέτοντας κατά μέλη τις δύο αυτές εξισώσεις προκύπτει: $x_1 = \dfrac{N\lambda + d}{2}$.

Το σημείο (Σ) βρίσκεται μεταξύ των πηγών άρα:

$$0 < x_1 < d \Rightarrow 0 < \frac{N\lambda + d}{2} < d \Rightarrow -\frac{d}{\lambda} < N < \frac{d}{\lambda} \Rightarrow -2,5 < N < 2,5$$

Άρα ο ακέραιος Ν μπορεί να πάρει τις τιμές $N = 0, \pm 1, \pm 2$, καθεμιά από τις οποίες αντιστοιχεί με μια υπερβολή ενίσχυσης. Συνολικά το ΑΒ τέμνεται από 5 υπερβολές ενίσχυσης.

ε) Το (Δ) ανήκει στην ίδια υπερβολή με το (Γ), άρα η διαφορά των αποστάσεων του (Δ) από τις κυματικές πηγές ταυτίζεται με την αντίστοιχη του Γ. Δηλαδή, αν $x_{1\Delta}$ και $x_{2\Delta}$ οι αποστάσεις του Δ από τις πηγές Π_1 και Π_2 αντίστοιχα, τότε:



$x_{1\Delta} - x_{2\Delta} = r_1 - r_2 = 1,2\ m$.Συγχρόνως:
$x_{1\Delta} + x_{2\Delta} = d = 2m$.

Προσθέτοντας κατά μέλη:

$2x_{1\Delta} = 3,2\ m \Rightarrow x_{1\Delta} = 1,6\ m$.

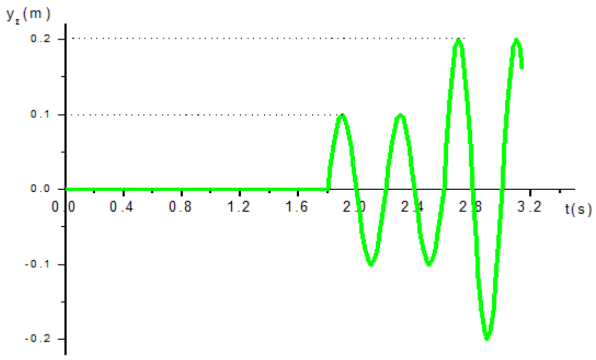
Για το σημείο (Ζ) του (ΑΒ) το οποίο είναι σημείο ενίσχυσης και απέχει x_{1Z} και x_{2Z} από τις Π_1, Π_2 αντίστοιχα, θα ισχύει: $x_{1Z} = \dfrac{N\lambda + d}{2}$ με $N = 0, \pm 1, \pm 2$.

Αν το (Ζ) είναι το πλησιέστερο προς την Π_1 σημείο ενίσχυσης τότε πρέπει η τιμή της x_{1Z} να είναι η μικρότερη επιτρεπτή, άρα $N = -2$ και $x_{1Z} = 0,2\ m$.

Άρα η ζητούμενη απόσταση θα είναι: $D = x_{1\Delta} - x_{1Z} = 1,4\ m$.

Πρόβλημα 2.

Δύο σύγχρονες κυματικές πηγές Π_1 και Π_2 βρίσκονται στα σημεία Α και Β αντίστοιχα, της ήρεμης επιφάνειας ενός υγρού και απέχουν κατά $d = 0,65\,m$. Τη χρονική στιγμή $t = 0$ οι πηγές ξεκινούν να ταλαντώνονται κάθετα στην επιφάνεια του υγρού, με την απομάκρυνση τους να περιγράφεται από την εξίσωση $y = A\eta\mu\omega t$. Τα παραγόμενα κύματα έχουν μήκος κύματος $\lambda = 0,2\,m$. Στο ακόλουθο διάγραμμα παρουσιάζεται η χρονική εξέλιξη της απομάκρυνσης ενός σημείου (Σ) της επιφάνειας, το οποίο απέχει κατά r_1 από την πηγή Π_1 και κατά r_2 από την πηγή Π_2, με $r_1 > r_2$.



α) Να υπολογίσετε τις αποστάσεις r_1 και r_2.

β) Ένας σημειακός φελλός, μάζας $m = 1\,g$, βρίσκεται στο σημείο Σ της επιφάνειας. Να γράψετε την εξίσωση της δυναμικής ενέργειας του φελλού εξαιτίας της ταλάντωσής του σε συνάρτηση με το χρόνο.

γ) Να υπολογίσετε τον αριθμό υπερβολών ενίσχυσης που τέμνουν το ευθύγραμμο τμήμα ΑΒ.

δ) Να υπολογίσετε την απομάκρυνση του σημείου (Σ) από τη θέση ισορροπίας του, τη χρονική στιγμή t' κατά την οποία το σημείο Μ, το οποίο είναι το μέσο του ΑΒ, βρίσκεται σε ακραία αρνητική απομάκρυνση για τέταρτη φορά.

(Θεωρήστε ότι $\pi^2 = 10$).

Λύση

α) Από το δοθέν διάγραμμα διαπιστώνουμε ότι στο σημείο (Σ) το κύμα από την πλησιέστερη πηγή (την Π_2) φτάνει τη χρονική στιγμή $t_2 = 1,8\,s$, οπότε και το (Σ) ξεκινά να ταλαντώνεται με πλάτος $A = 0,1\,m$ και περίοδο $T = 0,4\,s$. Τη χρονική στιγμή $t_1 = 2,6\,s$ στο (Σ) φτάνει και το δεύτερο κύμα (από την Π_1) και τα κύματα συμβάλλοντας αναγκάζουν το (Σ) να ταλαντωθεί με πλάτος $A_\Sigma = 0,2\,m = 2A$. Άρα το (Σ) είναι σημείο ενίσχυσης.

Η ταχύτητα διάδοσης των κυμάτων είναι: $u = \frac{\lambda}{T} = 0,5\ m/s$

Συνεπώς: $r_2 = ut_2 = 0,9\ m$ και $r_1 = ut_1 = 1,3\ m$

β) Η απομάκρυνση του σημείου (Σ) σε συνάρτηση με το χρόνο περιγράφεται στο S.I. από την:

$$y_\Sigma = \begin{cases} 0 \ ,\ 0 \le t < 1,8\ s \\ A\eta\mu 2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{r_2}{\lambda}\right) \ ,\ 1,8\ s \le t < 2,6\ s \\ 2A\sigma\upsilon\nu\left(2\pi\frac{r_1 - r_2}{2\lambda}\right)\eta\mu 2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{r_1 + r_2}{2\lambda}\right) \ ,\ t \ge 2,6\ s \end{cases} \Rightarrow$$

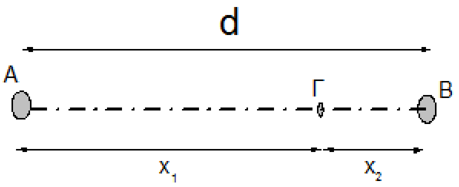
$$y_\Sigma = \begin{cases} 0 \ ,\ 0 \le t < 1,8\ s \\ 0,1\eta\mu\pi(5t - 9) \ ,\ 1,8\ s \le t < 2,6\ s \\ 0,2\eta\mu\pi(5t - 11) \ ,\ t \ge 2,6\ s \end{cases}$$

Η δυναμική ενέργεια ταλάντωσης του υλικού σημείου είναι:

$$U_\Sigma = \frac{1}{2}Dy_\Sigma^2 = \frac{1}{2}m\omega^2 y_\Sigma^2 \Rightarrow U_\Sigma = \frac{1}{2}10^{-3}(5\pi)^2 \cdot \begin{cases} 0 \ ,\ 0 \le t < 1,8\ s \\ (0,1\eta\mu\pi(5t - 9))^2 \ ,\ 1,8\ s \le t < 2,6\ s \\ (0,2\eta\mu\pi(5t - 11))^2 \ ,\ t \ge 2,6\ s \end{cases} \Rightarrow$$

$$U_\Sigma = \begin{cases} 0 \ ,\ 0 \le t < 1,8\ s \\ 1,25 \cdot 10^{-3}\eta\mu^2\left[\pi(5t - 9)\right] \ ,\ 1,8\ s \le t < 2,6\ s\ (S.I.) \\ 5 \cdot 10^{-3}\eta\mu^2\left[\pi(5t - 11)\right] \ ,\ t \ge 2,6\ s \end{cases}$$

γ) Αν Γ σημείο ενίσχυσης του ΑΒ, το οποίο απέχει κατά x_1 από το Α και κατά x_2 από το Β τότε: $x_1 - x_2 = k \cdot \lambda$



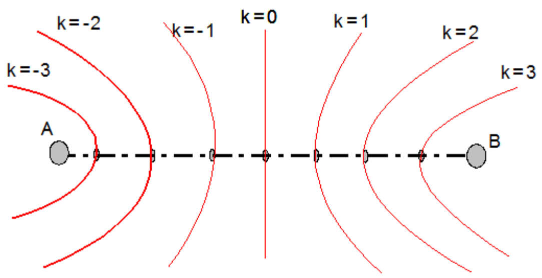
Συγχρόνως: $x_1 + x_2 = d = 0,65\ m$

Προσθέτοντας κατά μέλη: $x_1 = \frac{k\lambda + d}{2}$

Επίσης:

$0 \le x_1 \le d \Rightarrow 0 \le \frac{k\lambda + d}{2} \le d \Rightarrow -\frac{d}{\lambda} \le k \le \frac{d}{\lambda} \Rightarrow -3,25 \le k \le 3,25$. Άρα: $k = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3$

Κάθε ακέραιος αντιστοιχεί σε μία υπερβολή ενίσχυσης, άρα υπάρχουν *7 υπερβολές* ενίσχυσης που τέμνουν το ΑΒ.



δ) Το (Μ) ισαπέχει από τα Α, Β άρα τα κύματα φτάνουν ταυτόχρονα σε αυτό τη χρονική στιγμή t_M ώστε:

$$t_M = \frac{\frac{AB}{2}}{u} = 0,65\,s$$

Το Μ φτάνει σε ακραία αρνητική απομάκρυνση για τέταρτη φορά τη χρονική στιγμή $t' = t_M + 3T + \frac{3}{4}T = 2,15\,s$

Από τον κλάδο της $y_\Sigma = f(t)$ για αυτή τη χρονική στιγμή έχουμε:

$$y_\Sigma = 0,1\eta\mu\pi(5 \cdot 2,15 - 9)\,m \Rightarrow y_\Sigma = 0,1\eta\mu\frac{7\pi}{4}\,m \Rightarrow y_\Sigma = -0,05\sqrt{2}\,m$$

Πρόβλημα 3.

Δύο σύγχρονες κυματικές πηγές Π_1 και Π_2 βρίσκονται στα σημεία Α και Β αντίστοιχα, της ελαστικής επιφάνειας ενός υγρού και απέχουν κατά $d = 0,4\,m$. Τη χρονική στιγμή $t = 0$ οι πηγές ξεκινούν να ταλαντώνονται κάθετα στην επιφάνεια του υγρού, με την απομάκρυνση τους να περιγράφεται από την εξίσωση $y = 0,4\eta\mu 10\pi t\,(S.I.)$. Τα παραγόμενα κύματα έχουν μήκος κύματος $\lambda = 0,1\,m$. Σημείο (Σ) της επιφάνειας απέχει κατά r_1 από την πηγή Π_1 και κατά r_2 από την πηγή Π_2, με $r_1 > r_2$. Τα κύματα φτάνουν στο (Σ) με χρονική διαφορά $\Delta t = 0,7\,s$.

α) Να υπολογίσετε το πλάτος ταλάντωσης του σημείου (Σ) μετά τη συμβολή των κυμάτων σε αυτό.

β) Η υπερβολή σταθερής διαφοράς αποστάσεων στην οποία ανήκει το (Σ) τέμνει το ευθύγραμμο τμήμα ΑΒ που συνδέει τις πηγές σε σημείο (Γ). Να υπολογίσετε την απόσταση του (Γ) από το σημείο (Μ) το οποίο είναι το μέσο του ΑΒ.

γ) Να υπολογίσετε το πλήθος σημείων ενίσχυσης του τμήματος ΜΓ.

δ) Να υπολογίσετε τη χρονική στιγμή κατά την οποία το μέσο Μ φτάνει σε απομάκρυνση $0,4\,m$ για πρώτη φορά.

<u>Λύση</u>

Από την εξίσωση ταλάντωσης των πηγών είναι: $\omega = 10\pi\,rad/s$ άρα $f = 5\,Hz$ και $T = 0,2\,s$.

α) Τα κύματα φτάνουν στο (Σ) με χρονική διαφορά $\Delta t = 0,7\,s$. Οι χρονικές στιγμές άφιξης είναι: $t_1 = \frac{r_1}{u}$ και $t_2 = \frac{r_2}{u}$ όπου $u = \frac{\lambda}{T}$

Συνεπώς $r_1 - r_2 = ut_1 - ut_2 = \frac{\lambda}{T}\Delta t \Rightarrow r_1 - r_2 = 0,35\,m$. Άρα $r_1 - r_2 = 3,5\lambda$

Προφανώς το (Σ) είναι σημείο απόσβεσης καθώς ικανοποιείται η συνθήκη απόσβεσης, αφού η διαφορά των αποστάσεων του (Σ) από τις πηγές ισούται με περιττό πολλαπλάσιο του $\lambda/2$.

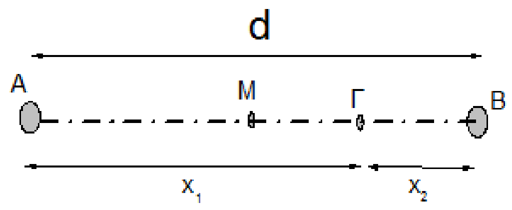
β) Το (Γ) θα είναι και αυτό σημείο απόσβεσης. Αν απέχει κατά x_1 από το Α και κατά x_2 από το Β τότε: $x_1 - x_2 = r_1 - r_2 = 0,35\,m$

Συγχρόνως: $x_1 + x_2 = d = 0,4\,m$

Προσθέτοντας κατά μέλη: $x_1 = 0,375\ \text{m}$

ενώ $x_2 = 0,025\ \text{m}$

Άρα $M\Gamma = x_1 - d/2 = 0,175\ \text{m}$



γ) Αν Δ σημείο ενίσχυσης του ΑΒ, το οποίο απέχει κατά x_1' από το Α και κατά x_2' από το Β τότε: $x_1' - x_2' = N\cdot\lambda$

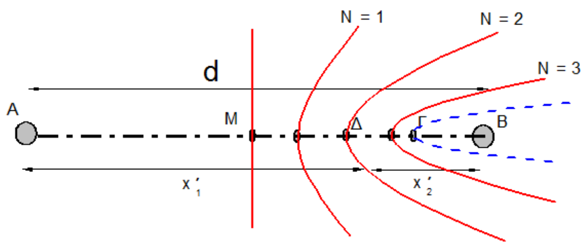
Συγχρόνως: $x_1' + x_2' = d$

Προσθέτοντας κατά μέλη: $x_1' = \dfrac{N\lambda + d}{2}$

Επίσης το (Δ) βρίσκεται μεταξύ των (Μ) και (Γ) άρα:

$0,2\ \text{m} < x_1' < 0,375\ \text{m} \Rightarrow 0,2\ \text{m} < \dfrac{N\lambda + d}{2} < 0,375\ \text{m} \Rightarrow 0 < N < 3,5$. Άρα: $N = 1, 2, 3$

Κάθε ακέραιος αντιστοιχεί σε μία υπερβολή ενίσχυσης, άρα υπάρχουν *3 υπερβολές ενίσχυσης* που τέμνουν το ΜΓ.



δ) Το Μ ξεκινά να ταλαντώνεται τη χρονική στιγμή t_M ώστε $t_M = \dfrac{d/2}{u} = 0,4\ \text{s}$ και επειδή ισαπέχει από τα Α και Β προφανώς είναι σημείο ενίσχυσης, άρα ταλαντώνεται με πλάτος $A_M = 2A$. Για $t \geq t_M$ η απομάκρυνση του σημείου Μ σε συνάρτηση με το χρόνο είναι:

$$y_M = 2A\sigma\upsilon\nu\left(\pi\frac{r_{1M} - r_{2M}}{\lambda}\right)\eta\mu 2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{r_{1M} + r_{2M}}{2\lambda}\right) \Rightarrow$$

$$y_M = 0,8\eta\mu 2\pi(5t - 2)\ \text{(S.I.)}$$

Όταν το σημείο Μ φτάνει σε απομάκρυνση $y = 0,4\ \text{m}$ για πρώτη φορά θα πρέπει:

$$y_M = 0,4 \Rightarrow 0,8\eta\mu 2\pi\left(5t-2\right) = 0,4 \Rightarrow \eta\mu 2\pi\left(5t-2\right) = 0,5 \Rightarrow \begin{cases} 2\pi(5t-2) = 2k\pi + \dfrac{\pi}{6} \\ 2\pi(5t-2) = 2k\pi + \dfrac{5\pi}{6} \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} t = \dfrac{12k+25}{60}\,s \\ t = \dfrac{12k+29}{60}\,s \end{cases}$$

Από τις άπειρες αυτές λύσεις ζητάμε τη μικρότερη για την οποία $t \geq t_M$. Άρα η ζητούμενη χρονική στιγμή είναι για $\kappa = 0$:

$$t = \frac{5}{12}\,s$$

Πρόβλημα 4.

Σε μία οριζόντια ελαστική χορδή (ΟΛ) μήκους L, έχει δημιουργηθεί στάσιμο κύμα, ως αποτέλεσμα της συμβολής δύο εγκάρσιων αρμονικών κυμάτων με το ίδιο πλάτος και την ίδια συχνότητα, που διαδίδονται όμως σε αντίθετες κατευθύνσεις στη χορδή. Το δεξί άκρο (Λ) της χορδής είναι στερεωμένο σε ακλόνητο εμπόδιο, ενώ το αριστερό άκρο $O(x_o = 0)$ είναι ελεύθερο και ταλαντώνεται με πλάτος $0,2\,m$. Μεταξύ των σημείων (Ο) και (Λ) εμφανίζονται 3 ακίνητα σημεία, ενώ η μέγιστη οριζόντια απόσταση μεταξύ δύο κοιλιών της χορδής ισούται με $1,2\,m$.

α) Να υπολογίσετε το μήκος L της χορδής.

β) Να προσδιορίσετε τις θέσεις των ακίνητων σημείων.

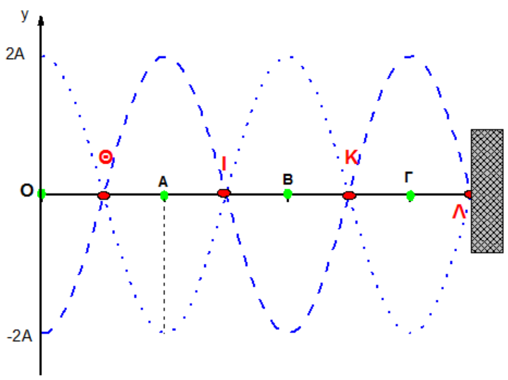
γ) Να υπολογίσετε την ελάχιστη οριζόντια απόσταση μεταξύ δύο σημείων της χορδής, τα οποία ταλαντώνονται με πλάτος $0,1\,m$.

δ) Έστω ότι μεταβάλλουμε τη συχνότητα ταλάντωσης του Ο, με αποτέλεσμα μεταξύ των (Ο) και (Λ) να εμφανίζονται 6 ακίνητα σημεία. Να υπολογίσετε το ποσοστό μεταβολής της συχνότητας.

<u>Λύση</u>

α) Το σημείο (Λ) θα είναι δεσμός, άρα συνολικά εμφανίζονται 4 δεσμοί. Μεταξύ δύο διαδοχικών δεσμών εμφανίζεται μία κοιλία η οποία ισαπέχει από τους δεσμούς. Άρα στη χορδή εμφανίζονται 4 κοιλίες και η μέγιστη απόσταση μεταξύ δύο κοιλιών της χορδής θα είναι ίση με $3\frac{\lambda}{2}$.

Άρα $3\frac{\lambda}{2} = 1,2\,m \Rightarrow \lambda = 0,8\,m$



Δύο διαδοχικοί δεσμοί απέχουν κατά $\lambda/2$ άρα η απόσταση μεταξύ του πλησιέστερου στο Ο δεσμού (σημείο Θ) και του δεσμού (Λ) θα ισούται με $3\frac{\lambda}{2}$. Η απόσταση του Ο από τον πλησιέστερο δεσμό (σημείο Θ) ισούται με $\lambda/4$. Συνεπώς $L = 3\frac{\lambda}{2} + \frac{\lambda}{4} = \frac{7\lambda}{4} = 1,4\,m$.

β) Ο πρώτος δεσμός βρίσκεται σε απόσταση $\lambda/4$ από το Ο, ο δεύτερος σε απόσταση $\lambda/2+\lambda/4$ κ.ο.κ.

Άρα: $$\begin{cases} x_\Theta = \dfrac{\lambda}{4} = 0,2\ \text{m} \\ x_I = 3\dfrac{\lambda}{4} = 0,6\ \text{m} \\ x_K = 5\dfrac{\lambda}{4} = 1\ \text{m} \\ x_\Lambda = 7\dfrac{\lambda}{4} = 1,4\ \text{m} \end{cases}$$

γ) Πρέπει: $$A' = A \Rightarrow 2A\left|\sigma\upsilon\nu\left(2\pi\frac{x}{\lambda}\right)\right| = A \Rightarrow \begin{cases} \sigma\upsilon\nu\left(2\pi\dfrac{x}{\lambda}\right) = \dfrac{1}{2} \\ \sigma\upsilon\nu\left(2\pi\dfrac{x}{\lambda}\right) = -\dfrac{1}{2} \end{cases}$$

Από τις λύσεις των εξισώσεων δεκτές γίνονται όσες ικανοποιούν τη σχέση $0 < x < L = 1,4\ \text{m}$

Άρα: $$\begin{cases} x = \dfrac{2}{15}\ \text{m} \\ x = \dfrac{4}{15}\ \text{m} \\ x = \dfrac{8}{15}\ \text{m} \\ x = \dfrac{10}{15}\ \text{m} \\ x = \dfrac{14}{15}\ \text{m} \\ x = \dfrac{16}{15}\ \text{m} \\ x = \dfrac{20}{15}\ \text{m} \end{cases}$$. Συνεπώς η ζητούμενη απόσταση ισούται με $d = \dfrac{2}{15}\ \text{m}$

δ) Θα πρέπει:

$$L = 6\frac{\lambda'}{2} + \frac{\lambda'}{4} = \frac{13\lambda}{4} \Rightarrow \lambda' = \frac{4L}{13}$$

Άρα το ζητούμενο ποσοστό είναι

$$\Pi\% = \frac{f' - f}{f}100\% = \frac{\frac{u}{\lambda'} - \frac{u}{\lambda}}{\frac{u}{\lambda}}100\% = \frac{\frac{4L}{7} - \frac{4L}{13}}{\frac{4L}{13}}100\% = \frac{6}{7}100\% \Rightarrow \Pi\% = \frac{6}{7}\cdot 100\% = 85,71\%$$

Πρόβλημα 5.

Δύο εγκάρσια αρμονικά κύματα πλάτους A και μήκους κύματος λ διαδίδονται με αντίθετες κατευθύνσεις σε γραμμικό ελαστικό μέσο το οποίο ταυτίζεται με τον οριζόντιο άξονα x΄Ox. Το κάθε κύμα αναγκάζει το σημείο $O(x=0)$ σε ταλάντωση της μορφής $y = A\eta\mu\omega t$. Τα κύματα συμβάλλουν και δημιουργούν στάσιμο κύμα με εξίσωση $y = 0,4\sigma\upsilon\nu(10\pi x)\eta\mu(40\pi t)$.

α) Να γράψετε τις εξισώσεις των κυμάτων που δημιούργησαν το στάσιμο.

β) Να γράψετε την εξίσωση της ταχύτητας του υλικού σημείου $\Delta(x_\Delta > 0)$ της χορδής σε συνάρτηση με το χρόνο, αν το Δ είναι κοιλία και μεταξύ του Ο και του Δ παρεμβάλλονται τρείς δεσμοί.

γ) Να σχεδιάσετε το στιγμιότυπο του τμήματος ΟΔ της χορδής, τη χρονική στιγμή $t = 0$.

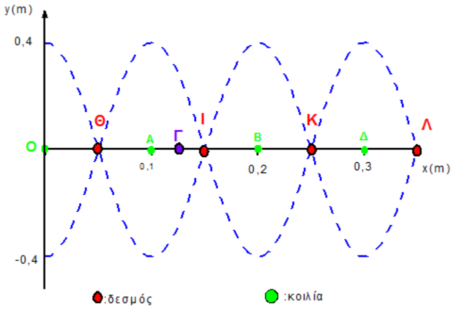
δ) Να εξετάσετε αν το σημείο Δ και το υλικό σημείο $\Gamma(x_\Gamma = 0,125\,m)$ βρίσκονται σε συμφωνία ή αντίθεση φάσης.

<u>Λύση</u>

α) Από την εξίσωση του στάσιμου κύματος $y = 0,4\sigma\upsilon\nu(10\pi x)\eta\mu(40\pi t)$ έχουμε: $A = 0,2\,m, \lambda = 0,2\,m$ και $T = 0,05\,s$. Άρα οι εξισώσεις των κυμάτων είναι:

$$\begin{cases} y_1 = A\eta\mu 2\pi\left(\dfrac{t}{T} - \dfrac{x}{\lambda}\right) \\ y_2 = A\eta\mu 2\pi\left(\dfrac{t}{T} + \dfrac{x}{\lambda}\right) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y_1 = 0,2\eta\mu 2\pi(20t - 5x) \\ y_2 = 0,2\eta\mu 2\pi(20t + 5x) \end{cases} (S.I.)$$

β) Δύο διαδοχικοί δεσμοί απέχουν κατά $\lambda/2 = 0,1\,m$ ενώ ένας δεσμός απέχει από την πλησιέστερη κοιλία κατά $\lambda/4 = 0,05\,m$. Άρα: $x_\Delta = 3\dfrac{\lambda}{2} = 0,3\,m$



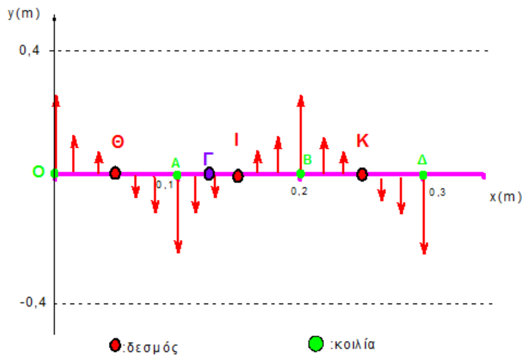
Η απομάκρυνση του Δ από τη θέση ισορροπίας του σε συνάρτηση με το χρόνο περιγράφεται από την:

$$y_\Delta = 0,4\sigma\upsilon\nu(3\pi)\eta\mu(40\pi t) \Rightarrow y_\Delta = -0,4\eta\mu(40\pi t) \Rightarrow y_\Delta = 0,4\eta\mu(40\pi t + \pi) \text{ (S.I.)}$$

Η ταχύτητα ταλάντωσης είναι ίση με:

$$u_\Delta = \omega A_\Delta \sigma\upsilon\nu(40\pi t + \pi) \Rightarrow u_\Delta = -16\pi\sigma\upsilon\nu(40\pi t) \text{ (S.I.)}$$

γ) Την χρονική στιγμή $t = 0$ είναι $y = 0$ για κάθε σημείο, δηλαδή η χορδή είναι οριζόντια. Στο σημείο Δ αντιστοιχεί κοιλία, η οποία είναι η τρίτη στη σειρά από το Ο, στο οποίο σχηματίζεται κοιλία και το οποίο για $t = 0$ έχει θετική ταχύτητα. Τα ζητούμενο στιγμιότυπο είναι:



δ) Είναι:

$$y_\Gamma = 0,4\sigma\upsilon\nu(1,25\pi)\eta\mu(40\pi t) \Rightarrow y_\Gamma = -0,2\sqrt{2}\eta\mu(40\pi t) \Rightarrow y_\Gamma = 0,2\sqrt{2}\eta\mu(40\pi t + \pi) \text{ (S.I.)}$$

ενώ:

$$u_\Gamma = 8\pi\sqrt{2}\sigma\upsilon\nu(40\pi t + \pi) \Rightarrow u_\Gamma = -8\pi\sqrt{2}\sigma\upsilon\nu(40\pi t) \text{ (S.I.)}$$

Συγκρίνοντας με τις αντίστοιχες εξισώσεις του Δ, τα σημεία Γ, Δ βρίσκονται σε συμφωνία φάσης.

Ισοδύναμα: Τα Γ, Δ ανήκουν σε ατράκτους μεταξύ των οποίων παρεμβάλλεται άλλη μία. Άρα βρίσκονται σε συμφωνία φάσης.

Ημερομηνία τροποποίησης: 21/07/2011

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2^{Ο}: ΚΥΜΑΤΑ

ΕΝΟΤΗΤΑ 3: ΗΛΕΚΤΡΟΜΑΓΝΗΤΙΚΑ ΚΥΜΑΤΑ

ΛΥΜΕΝΑ ΘΕΜΑΤΑ

ΘΕΜΑ Β

Ερώτηση 1.

Δίνεται η εξίσωση της έντασης του ηλεκτρικού πεδίου $E = 4\cdot 10^{-2}\eta\mu 4\cdot 10^{6}\pi(3\cdot 10^{8}t - x)$ ενός ηλεκτρομαγνητικού κύματος το οποίο διαδίδεται στο κενό, με ταχύτητα $c = 3\cdot 10^{8} m/s$. Ποια από τις ακόλουθες προτάσεις είναι η σωστή;

Η ακτινοβολία ανήκει:

α) στο ορατό φάσμα.

β) στο υπεριώδες φάσμα.

γ) στο υπέρυθρο φάσμα.

Να δικαιολογήσετε την απάντηση σας.

Λύση

Η σωστή απάντηση είναι η (α).

Είναι $E = 4\cdot 10^{-2}\eta\mu 4\cdot 10^{6}\pi(3\cdot 10^{8}t - x) \Rightarrow E = 4\cdot 10^{-2}\eta\mu 2\pi(6\cdot 10^{14}t - 2\cdot 10^{6}x)$ (S.I.)

Από τη σύγκριση της εξίσωσης που προέκυψε με τη γενική εξίσωση $E = E_{max}\cdot\eta\mu\left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda}\right)$ προκύπτει:

$f = 6\cdot 10^{14} Hz$ και $\lambda = 5\cdot 10^{-7} m = 500 nm$

Η τιμή αυτού του μήκους κύματος ανήκει στο ορατό φάσμα.

Ερώτηση 2.

Ηλεκτρομαγνητικό κύμα διαδίδεται σε υλικό με ταχύτητα $2\cdot 10^{8}\,\mathrm{m/s}$. Ποιο από τα παρακάτω ζεύγη εξισώσεων μπορεί να περιγράφει το κύμα;

α) $\begin{cases} E = 8\cdot 10^{-4}\,\eta\mu 2\pi(6\cdot 10^{14}t - 6\cdot 10^{6}x) \\ B = 4\cdot 10^{-12}\,\eta\mu 2\pi(6\cdot 10^{14}t - 6\cdot 10^{6}x) \end{cases}$ (S.I.).

β) $\begin{cases} E = 8\cdot 10^{-4}\,\eta\mu\pi(24\cdot 10^{14}t - 12\cdot 10^{6}x) \\ B = 4\cdot 10^{-12}\,\eta\mu\pi(24\cdot 10^{14}t - 12\cdot 10^{6}x) \end{cases}$ (S.I.).

γ) $\begin{cases} E = 4\cdot 10^{-4}\,\eta\mu 2\pi(12\cdot 10^{14}t - 6\cdot 10^{6}x) \\ B = 4\cdot 10^{-12}\,\eta\mu 2\pi(12\cdot 10^{14}t - 6\cdot 10^{6}x) \end{cases}$ (S.I.).

Να δικαιολογήσετε την απάντηση σας.

<u>Λύση</u>

Η σωστή απάντηση είναι η (β).

Ένα ζεύγος εξισώσεων για να αναφέρεται στο ίδιο ηλεκτρομαγνητικό κύμα, θα πρέπει η ταχύτητα που προκύπτει από τη σχέση $u = \frac{E}{B} = \frac{E_{max}}{B_{max}}$ να είναι ίση με την ταχύτητα που προκύπτει από τα στοιχεία της φάσης του κύματος $(u = \lambda f)$.

Από τη σύγκριση των δοθεισών εξισώσεων με τη γενική εξίσωση προκύπτει:

$$f_1 = 6\cdot 10^{14}\ \mathrm{Hz},\ \lambda_1 = \frac{1}{6}\cdot 10^{-6}\ \mathrm{m}$$

$$f_2 = 12\cdot 10^{14}\ \mathrm{Hz},\ \lambda_2 = \frac{1}{6}\cdot 10^{6}\ \mathrm{m}$$

$$f_3 = 12\cdot 10^{14}\ \mathrm{Hz},\ \lambda_3 = \frac{1}{6}\cdot 10^{6}\ \mathrm{m}$$

Η αντικατάσταση στη θεμελιώδη εξίσωση της κυματικής $u = \lambda f$, για κάθε μία από τις τρεις περιπτώσεις δίνει:

$$u_1 = \left(\frac{1}{6}\cdot 10^{-6}\,\mathrm{m}\right)\cdot\left(6\cdot 10^{14}\,\mathrm{Hz}\right) = 1\cdot 10^{8}\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$$

$$u_2 = \left(\frac{1}{6}\cdot 10^{-6}\,\mathrm{m}\right)\cdot\left(12\cdot 10^{14}\,\mathrm{Hz}\right) = 2\cdot 10^{8}\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$$

$$u_3 = \left(\frac{1}{6}\cdot 10^{-6}\,\mathrm{m}\right)\cdot\left(12\cdot 10^{14}\,\mathrm{Hz}\right) = 2\cdot 10^{8}\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$$

Υπολογίζουμε το πηλίκο $\frac{E_{max}}{B_{max}}$ για κάθε ζεύγος εξισώσεων:

$$u_1 = \frac{8 \cdot 10^{-4}}{4 \cdot 10^{-12}} \frac{m}{s} \Rightarrow u_1 = 2 \cdot 10^{8} \frac{m}{s}$$

$$u_2 = \frac{8 \cdot 10^{-4}}{4 \cdot 10^{-12}} \frac{m}{s} \Rightarrow u_1 = 2 \cdot 10^{8} \frac{m}{s}$$

$$u_3 = \frac{4 \cdot 10^{-4}}{4 \cdot 10^{-12}} \frac{m}{s} \Rightarrow u_1 = 1 \cdot 10^{8} \frac{m}{s}$$

Παρατηρούμε ότι οι δύο τρόποι υπολογισμού της ταχύτητας δίνει το ίδιο αποτέλεσμα μόνο στο β΄ ζεύγος εξισώσεων.

Ερώτηση 3.

Δύο διαφορετικά ηλεκτρομαγνητικά κύματα, συχνοτήτων f_1 και f_2, ώστε $f_1 = 4f_2$, διαδίδονται σε διαφορετικά υλικά με ταχύτητες c_1 και $c_2 = 2c_1$ αντίστοιχα. Ποια από τις ακόλουθες προτάσεις είναι η σωστή;

Τα μήκη κύματος των ακτινοβολιών στα υλικά που διαδίδονται θα ικανοποιούν τη σχέση:

α) $\lambda_1 = \lambda_2$.

β) $4\lambda_1 = \lambda_2$.

γ) $8\lambda_1 = \lambda_2$.

Να δικαιολογήσετε την απάντηση σας.

<u>Λύση</u>

Η σωστή απάντηση είναι η (γ).

Αιτιολόγηση: Είναι $c = \lambda f \Rightarrow \lambda = \dfrac{c}{f}$

Άρα:

$$\frac{\lambda_1}{\lambda_2} = \frac{\frac{c_1}{f_1}}{\frac{c_2}{f_2}} = \frac{c_1 \cdot f_2}{c_2 \cdot f_1} = \frac{c_1 . f_2}{2c_1 \cdot 4f_2} = \frac{1}{8} \Rightarrow \lambda_2 = 8\lambda_1$$

Ερώτηση 4.

Μονοχρωματική ακτινοβολία με μήκος κύματος λ διαδίδεται σε υλικό, με ταχύτητα υ. Αν η ίδια ακτινοβολία διαδιδόταν στο κενό, τότε το μήκος κύματος λ΄ θα ήταν:

α) μεγαλύτερο του λ.

β) μικρότερο του λ.

γ) ίσο του λ.

<u>Λύση</u>

Η σωστή απάντηση είναι η (α).

Αιτιολόγηση: Από τη θεμελιώδη κυματική εξίσωση που είναι $u = \lambda f$ στο υλικό μέσο και $c = \lambda' f$ στο κενό προκύπτει ότι η ταχύτητα διάδοσης είναι μεγαλύτερη στο κενό, ενώ η συχνότητα της ακτινοβολίας δεν εξαρτάται από το μέσο διάδοση.

Άρα το μήκος κύματος στο κενό θα είναι μεγαλύτερο από το αντίστοιχο στο υλικό μέσο.

Ερώτηση 5.

Μονοχρωματική ακτινοβολία με μήκος κύματος $\lambda = 9 \cdot 10^{-7}\,\mathrm{m}$ διαδίδεται σε υλικό, με ταχύτητα $2,7 \cdot 10^{8}\,\mathrm{m/s}$. Αν η ίδια ακτινοβολία διαδιδόταν στο κενό, τότε το μήκος κύματος λ΄ θα ήταν:

α) $2,7 \cdot 10^{8}\,\mathrm{m}$.

β) $9 \cdot 10^{-7}\,\mathrm{m}$.

γ) $10 \cdot 10^{-7}\,\mathrm{m}$.

Δίνεται η ταχύτητα διάδοσης στο κενό $c = 3 \cdot 10^{8}\,\mathrm{m/s}$.

Λύση

Η σωστή απάντηση είναι η (γ).

Αιτιολόγηση:

Στο υλικό: $u = \lambda \cdot f \Rightarrow f = \dfrac{2,7 \cdot 10^{8}}{9 \cdot 10^{-7}}\,\mathrm{Hz} = 3 \cdot 10^{14}\,\mathrm{Hz}$

Στο κενό: $c = \lambda' \cdot f \Rightarrow \lambda' = \dfrac{3 \cdot 10^{8}}{3 \cdot 10^{14}}\,\mathrm{m} = 10 \cdot 10^{-7}\,\mathrm{m}$

Ερώτηση 6.

Ηλεκτρομαγνητικό κύμα διαδίδεται σε υλικό μέσο με ταχύτητα μέτρου $2{\cdot}10^{8}\ \frac{m}{s}$. Ποια από τις παρακάτω εξισώσεις μπορεί να περιγράφει την εξίσωση της έντασης του ηλεκτρικού πεδίου κατά τη διάδοση του στον οριζόντιο άξονα;

α) $E = E_{max} \cdot \eta\mu 2\pi\left(10^{14} t - \frac{10^{6}}{3} x\right)$ (S. I.)

β) $E = E_{max} \cdot \eta\mu\pi\left(2{\cdot}10^{14} t - 5{\cdot}10^{5} x\right)$ (S. I.)

γ) $E = E_{max} \cdot \eta\mu 2\pi\left(10^{14} t - 5{\cdot}10^{5} x\right)$ (S. I.)

Να επιλέξετε τη σωστή πρόταση και να δικαιολογήσετε την απάντηση σας.

<u>Λύση</u>

Η σωστή απάντηση είναι η (γ).

Αιτιολόγηση:

Η εξίσωση της έντασης του ηλεκτρικού πεδίου κατά τη διάδοση του στον οριζόντιο άξονα είναι:

$$E = E_{max} \cdot \eta\mu 2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda}\right) \Rightarrow E = E_{max}\eta\mu 2\pi\left(\frac{1}{T} t - \frac{1}{\lambda} x\right) \Rightarrow E = E_{max}\eta\mu 2\pi\left(ft - \frac{1}{\lambda} x\right).$$

Επίσης, η δοθείσα εξίσωση της β απάντησης γράφεται ως εξής:

$$E = E_{max}\eta\mu 2\pi\left(10^{14} t - \frac{5}{2} 10^{5} x\right)$$

Από τη σύγκριση των δοθεισών εξισώσεων με τη γενική εξίσωση προκύπτει:

$f_1 = 10^{14}\ Hz, \lambda_1 = 3{\cdot}10^{-6}\ m$

$f_2 = 10^{14}\ Hz, \lambda_2 = 4{\cdot}10^{-6}\ m$

$f_3 = 10^{14}\ Hz, \lambda_3 = 0,2{\cdot}10^{-5}\ m$

Η αντικατάσταση στη θεμελιώδη εξίσωση της κυματικής, $u = \lambda f$, για κάθε μία από τις τρεις περιπτώσεις δίνει:

$u_1 = 3{\cdot}10^{-6}\ m{\cdot}10^{14}\ Hz = 3{\cdot}10^{8}\ m/s$

$u_2 = 4{\cdot}10^{-6}\ m{\cdot}10^{14}\ Hz = 4{\cdot}10^{8}\ m/s$

$$u_3 = 0,2 \cdot 10^{-5}\ m \cdot 10^{14}\ Hz = 2 \cdot 10^{8}\ m/s$$

Άρα σωστή είναι η απάντηση (γ).

Ερώτηση 7.

Η εξίσωση η οποία περιγράφει την ένταση του ηλεκτρικού πεδίου κατά τη διάδοση του στον οριζόντιο άξονα ενός υλικού μέσου είναι: $E = 2 \cdot 10^{-2} \cdot ημ2\pi\left(10^{14} t - 5 \cdot 10^{5} x\right)$ (S. I.) . Το πλάτος της έντασης του διαδιδόμενου μαγνητικού πεδίου ισούται με:

α) $B_{max} = 10^{-10}$ T

β) $B_{max} = \frac{2}{3} 10^{-10}$ T

γ) $B_{max} = 1,5 \cdot 10^{-10}$ T

Να επιλέξετε τη σωστή πρόταση και να δικαιολογήσετε την απάντησή σας.

<u>Λύση</u>

Η σωστή απάντηση είναι η (α).

Αιτιολόγηση:

Από τη σύγκριση της δοθείσας εξίσωσης $E = 2 \cdot 10^{-2} \cdot ημ2\pi\left(10^{14} t - 5 \cdot 10^{5} x\right)$ (S. I.) με τη γενική εξίσωση του ηλεκτρικού πεδίου για το ηλεκτρομαγνητικό κύμα υπολογίζουμε ότι:

$$\begin{cases} E_{max} = 2 \cdot 10^{-2} \ \frac{V}{m} \\ f = 10^{14} \ Hz \\ \lambda = 2 \cdot 10^{-6} \ m \end{cases}$$

Η ταχύτητα διάδοσης της ακτινοβολίας είναι: $u = \lambda f \Rightarrow u = 2 \cdot 10^{8} \ \frac{m}{s}$

Πρέπει: $u = \frac{E_{max}}{B_{max}} \Rightarrow B_{max} = \frac{2 \cdot 10^{-2} \ \frac{V}{m}}{2 \cdot 10^{8} \ \frac{m}{s}} \Rightarrow B_{max} = 10^{-10}$ T

ΘΕΜΑ Γ

Άσκηση 1.

Μονοχρωματική ακτινοβολία συχνότητας $f = \frac{2}{3} \cdot 10^{15}\ \mathrm{Hz}$ διαδίδεται στην οριζόντια διεύθυνση, εντός υλικού μέσου με ταχύτητα $u = 2 \cdot 10^{8}\ \frac{m}{s}$.

Η μέγιστη τιμή της έντασης του μαγνητικού πεδίου είναι $B_{max} = 2 \cdot 10^{-10}\ T$. Η ακτινοβολία εξέρχεται από το υλικό στο κενό, με αποτέλεσμα η μέγιστη ένταση του μαγνητικού πεδίου να αυξηθεί κατά 2%, σε σχέση με την τιμή που είχε κατά τη διάδοση της ακτινοβολίας στο υλικό.

α) Να γράψετε τις εξισώσεις της έντασης του ηλεκτρικού και του μαγνητικού πεδίου κατά τη διάδοση της ακτινοβολίας στο υλικό μέσο.

β) Να εξετάσετε εάν η ακτινοβολία ανήκει στο ορατό φάσμα.

γ) Να γράψετε την εξίσωση της έντασης του ηλεκτρικού πεδίου κατά τη διάδοση της ακτινοβολίας στο κενό.

<u>Λύση</u>

α) Είναι: $u = \lambda f \Rightarrow \lambda = 3 \cdot 10^{-7}\ m$ και $\frac{E_{max}}{B_{max}} = u \Rightarrow E_{max} = 4 \cdot 10^{-2}\ \frac{V}{m}$

Συνεπώς: $E = E_{max}\eta\mu 2\pi(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda}) \Rightarrow E = 4 \cdot 10^{-2}\eta\mu\frac{2\pi}{3} \cdot 10^{7}(2 \cdot 10^{8}t - x)\ (S.I.)$

Αντίστοιχα: $B = B_{max}\eta\mu 2\pi(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda}) \Rightarrow B = 2 \cdot 10^{-10}\eta\mu\frac{2\pi}{3} \cdot 10^{7}(2 \cdot 10^{8}t - x)\ (S.I.)$

β) Στο κενό είναι: $c = \lambda_0 f \Rightarrow \lambda_0 = 450 \cdot 10^{-9}\ m$. Άρα ανήκει στο ορατό φάσμα.

γ) $B'_{max} = 1,02 \cdot B_{max} \Rightarrow B'_{max} = 2,04 \cdot 10^{-10}\ T$ και $\frac{E'_{max}}{B'_{max}} = c \Rightarrow E'_{max} = 6,12 \cdot 10^{-2}\ \frac{V}{m}$.

Άρα: $E' = E'_{max}\eta\mu 2\pi(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda_0}) \Rightarrow E' = 6,12 \cdot 10^{-2}\eta\mu\frac{4\pi}{3} \cdot 10^{7}\left(10^{8}t - \frac{x}{3}\right)(S.I.)$

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2^{Ο}: ΚΥΜΑΤΑ

ΕΝΟΤΗΤΑ 4: ΑΝΑΚΛΑΣΗ ΚΑΙ ΔΙΑΘΛΑΣΗ ΤΟΥ ΦΩΤΟΣ

ΛΥΜΕΝΑ ΘΕΜΑΤΑ

ΘΕΜΑ Β

Ερώτηση 1.

Μονοχρωματική ακτίνα φωτός προσπίπτει σε ανακλαστική επιφάνεια, έτσι ώστε η προσπίπτουσα ακτίνα να είναι κάθετη στην ανακλώμενη. Η γωνία ανάκλασης ισούται με:

α) 30^0.

β) 45^o.

γ) 60^o.

Να δικαιολογήσετε την επιλογή σας.

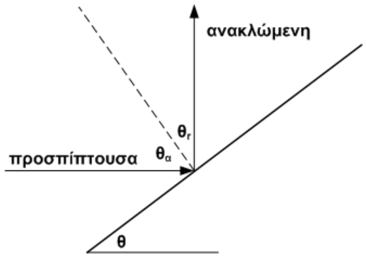
Λύση

Η σωστή απάντηση είναι η (β):

Επειδή : $\theta_\alpha + \theta_r = 90^o$ και $\theta_\alpha = \theta_r$ θα είναι: $\theta_r = 45^0$

Ερώτηση 2.

Οριζόντια μονοχρωματική ακτίνα φωτός προσπίπτει σε επίπεδη ανακλαστική επιφάνεια, η οποία σχηματίζει γωνία θ με τον ορίζοντα. Αν η ανακλώμενη δέσμη είναι κατακόρυφη τότε η γωνία θ ισούται με:



α) 30^0.

β) 45^o.

γ) 60^o.

Να δικαιολογήσετε την επιλογή σας.

<u>Λύση</u>

Η σωστή απάντηση είναι η (β):

Είναι: $\theta_\alpha + \theta_r = 90^0$ & $\theta_\alpha = \theta_r$ Άρα: $\theta_\alpha = 45^0$

Ακόμα: $\theta_\alpha + \theta = 90^\circ \Rightarrow \theta = 45^\circ$

Ερώτηση 3.

Μονοχρωματική ακτίνα φωτός διαδίδεται σε οπτικό μέσο (Α) και διέρχεται σε οπτικό μέσο (Β). Το πηλίκο του πλάτους της έντασης του ηλεκτρικού πεδίου προς το πλάτος της έντασης του μαγνητικού πεδίου όταν το φως διαδίδεται στο μέσο (Α) είναι μεγαλύτερο από το αντίστοιχο όταν διαδίδεται στο μέσο (Β). Ο δείκτης διαθλάσεως του μέσου (Α) σε σχέση με τον αντίστοιχο του μέσου (Β) είναι:

α) μεγαλύτερος.

β). μικρότερος.

γ) ίσος.

Να δικαιολογήσετε την επιλογή σας.

<u>Λύση</u>

Η σωστή απάντηση είναι η (β):

Γνωρίζουμε ότι $u = \frac{E_{max}}{B_{max}}$ άρα στο μέσο (Α) η ακτίνα διαδίδεται με μεγαλύτερη ταχύτητα σε σχέση με την αντίστοιχη στο μέσο (Β), δηλαδή $u_A > u_B$. Είναι $n = \frac{c}{u}$ συνεπώς $n_A < n_B$

Ερώτηση 4.

Μονοχρωματική ακτίνα φωτός που διαδίδεται σε οπτικό μέσο (Α) προσπίπτει στη διαχωριστική επιφάνεια με οπτικό μέσο (Β). Η προσπίπτουσα με την ανακλώμενη ακτίνα σχηματίζουν γωνία 120^0 ενώ η διαθλώμενη εκτρέπεται κατά 30^o σε σχέση με την προσπίπτουσα. Αν $n_b > n_\alpha$ τότε ο λόγος $\frac{n_\alpha}{n_b}$ ισούται με:

α) $\frac{\sqrt{2}}{2}$.

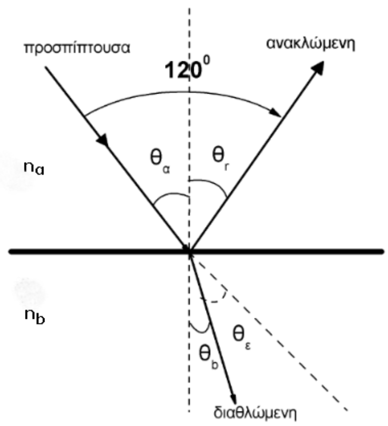
β) $\frac{\sqrt{3}}{3}$.

γ) $\frac{1}{2}$.

Να δικαιολογήσετε την επιλογή σας.

Δίνονται: $ημ30^0=\frac{1}{2}$, $ημ60^0=\frac{\sqrt{3}}{2}$

<u>Λύση</u>



Η σωστή απάντηση είναι η (β):

$θ_α+θ_r=120^o$ άρα $θ_α=60^o$.

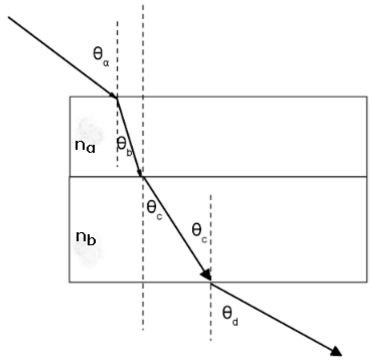
Ακόμα: $θ_b+θ_ε= θ_α \Rightarrow$

$θ_b=30^0$.

Άρα: $n_\alpha ημθ_\alpha = n_b ημθ_b \Rightarrow \frac{n_\alpha}{n_b} = \frac{\sqrt{3}}{3}$

Ερώτηση 5.

Δύο παράλληλα πλακίδια έχουν δείκτες διαθλάσεως n_α και n_b αντίστοιχα. Μονοχρωματική ακτίνα φωτός προσπίπτει στην επιφάνεια του ενός και ακολουθεί την πορεία του σχήματος. Για τις γωνίες θ_α και θ_d ισχύει:



α) $\theta_\alpha=\theta_d$.

β) $\theta_\alpha<\theta_d$.

γ) $\theta_\alpha>\theta_d$.

Να δικαιολογήσετε την επιλογή σας.

<u>Λύση</u>

Η σωστή απάντηση είναι η (α):

Από το νόμο του Snell στα τρία σημεία πρόσπτωσης είναι:

$$\eta\mu\theta_b=\frac{\eta\mu\theta_\alpha}{n_a},$$

$$\eta\mu\theta_c=\frac{n_\alpha\eta\mu\theta_b}{n_b},$$

$$\eta\mu\theta_d=n_b\eta\mu\theta_c\Rightarrow\eta\mu\theta_d=n_b\frac{n_\alpha}{n_b}\eta\mu\theta_b\Rightarrow\eta\mu\theta_d=n_\alpha\eta\mu\theta_b\Rightarrow\eta\mu\theta_d=\eta\mu\theta_\alpha\Rightarrow\theta_\alpha=\theta_d.$$

Ερώτηση 6.

Μονοχρωματική ακτίνα φωτός προσπίπτει κάθετα σε διαφανές πλακίδιο πάχους d και δείκτη διαθλάσεως $n_α$. Εξερχόμενη από το πλακίδιο προσπίπτει ομοίως κάθετα σε δεύτερο διαφανές πλακίδιο πάχους 2d και δείκτη διαθλάσεως n_b. Ο χρόνος διάδοσης της ακτίνας στο πρώτο πλακίδιο είναι ίσος με τον αντίστοιχο στο δεύτερο πλακίδιο. Ο λόγος $\frac{n_α}{n_b}$ ισούται με:

α) $\frac{1}{4}$.

β) 4.

γ) 2.

Να δικαιολογήσετε την επιλογή σας.

<u>Λύση</u>

Η σωστή απάντηση είναι η (γ):

$$\begin{cases} u_A = \dfrac{d}{\Delta t_A} \\ u_B = \dfrac{2d}{\Delta t_B} \end{cases} \Rightarrow \frac{u_A}{u_B} = \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{\frac{c}{n_α}}{\frac{c}{n_b}} = \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{n_α}{n_b} = 2$$

Ερώτηση 7.

Μονοχρωματική ακτίνα φωτός προσπίπτει σε πρίσμα του οποίου η τομή είναι ορθογώνιο ισοσκελές τρίγωνο. Το φως προσπίπτει κάθετα στη μία κάθετη πλευρά του πρίσματος και διαθλάται κατά την έξοδό της από το πρίσμα. Η κρίσιμη γωνία της ακτινοβολίας για το συγκεκριμένο πρίσμα ισούται με 40^o. Η εξερχόμενη ακτίνα σε σχέση με την προσπίπτουσα σχηματίζει γωνία:

α) 60^o.

β) 180^o.

γ) 90^o.

Να δικαιολογήσετε την επιλογή σας.

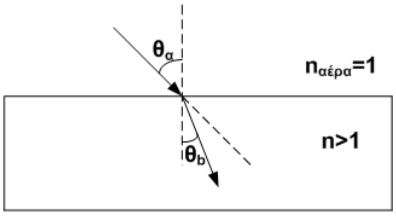
<u>Λύση</u>

Η σωστή απάντηση είναι η (γ):

Κατά την είσοδο της ακτίνας στο πρίσμα το φως δεν εκτρέπεται αφού η γωνία πρόσπτωσης είναι ορθή. Στη συνέχεια συναντά την υποτείνουσα της τομής του πρίσματος υπό γωνία πρόσπτωσης $45^o > 40^o$. Συνεπώς ανακλάται ολικά και συναντά την άλλη κάθετη πλευρά, προσπίπτοντας κάθετα σε αυτή. Άρα, κατά την έξοδο από το πρίσμα, η ακτίνα δεν αλλάζει πορεία. Η ζητούμενη γωνία μεταξύ της προσπίπτουσας και της εξερχόμενης ακτίνας ισούται με 90^o.

Ερώτηση 8.

Μονοχρωματική φωτεινή ακτίνα μεταβαίνει από τον αέρα σε οπτικό μέσο με δείκτη διαθλάσεως n (n>1). Η διαθλώμενη ακτίνα:



α) εκτρέπεται σε σχέση με την προσπίπτουσα ώστε η γωνία διάθλασης να είναι μεγαλύτερη της γωνίας πρόσπτωσης.

β) έχει μήκος κύματος μικρότερο από το αντίστοιχο της προσπίπτουσας.

γ) ενδέχεται να είναι παράλληλη στη διαχωριστική επιφάνεια των δύο οπτικών μέσων.

Να επιλέξετε τη σωστή πρόταση και να δικαιολογήσετε την επιλογή σας.

<u>Λύση</u>

Η σωστή απάντηση είναι η (β):

Σύμφωνα με το νόμο του Snell, αν θ_a η γωνία πρόσπτωσης και θ_b η γωνία διάθλασης τότε ισχύει:

$$\eta\mu\theta_a = n\cdot\eta\mu\theta_b \Rightarrow \frac{\eta\mu\theta_a}{\eta\mu\theta_b} = n$$

Όμως $n > 1 \Rightarrow \dfrac{\eta\mu\theta_a}{\eta\mu\theta_b} > 1 \Rightarrow \eta\mu\theta_a > \eta\mu\theta_b \Rightarrow \theta_a > \theta_b$

Συνεπώς η πρόταση (α) απορρίπτεται.

Αν η πρόταση (γ) ήταν σωστή τότε θα έπρεπε η γωνία διάθλασης να ισούται με 90^0. Τότε θα ισχύει:

$$\eta\mu\theta_a = n\cdot\eta\mu\theta_b \Rightarrow \eta\mu\theta_a = n\cdot\eta\mu 90^0 \Rightarrow \eta\mu\theta_a = n$$

Άτοπο διότι n>1.

Η πρόταση (β) είναι η σωστή καθώς αν λ_0 το μήκος κύματος της ακτινοβολίας κατά τη διάδοση της στο κενό και λ αντίστοιχα κατά τη διάδοση της ακτινοβολίας στο υλικό μέσο, τότε για την ταχύτητα διάδοσης σε κάθε μέσο ισχύει:

$$\begin{cases} c = \lambda_0 f \\ u = \lambda f \end{cases} \Rightarrow \frac{c}{u} = \frac{\lambda_0}{\lambda} = n > 1 \Rightarrow \lambda_0 > \lambda$$

Ερώτηση 9.

Ένας μαθητής παρατηρεί ένα ψάρι που κολυμπά στη γυάλα του. Ο μαθητής βλέπει το ψάρι:

α) σε μικρότερο βάθος από αυτό στο οποίο βρίσκεται το ψάρι.

β) στη θέση που πράγματι βρίσκεται το ψάρι.

γ) σε μεγαλύτερο βάθος από αυτό στο οποίο βρίσκεται το ψάρι.

<u>Λύση</u>

Η σωστή απάντηση είναι η (α):

Οι φωτεινές ακτίνες που ανακλώνται στο ψάρι κατευθύνονται στα μάτια του παρατηρητή, ο οποίος θεωρώντας ότι το φως διαδίδεται ευθύγραμμα νομίζει ότι το ψάρι βρίσκεται στην προέκταση των διαθλώμενων ακτίνων. Το φως διερχόμενο από το νερό στον αέρα που είναι οπτικά αραιότερο μέσο, εκτρέπεται της πορείας του όπως φαίνεται στο σχήμα. Έτσι, το ψάρι βρίσκεται σε βάθος μεγαλύτερο από αυτό που νομίζει ο παρατηρητής, αφού οι προεκτάσεις των διαθλώμενων ακτίνων τέμνονται μεταξύ τους σε μικρότερη απόσταση.

Ερώτηση 10.

Μονοχρωματική φωτεινή ακτίνα που διαδίδεται στον αέρα προσπίπτει πλάγια στην ήρεμη επιφάνεια μιας λίμνης.

α) Η φωτεινή ακτίνα είναι δυνατό να υποστεί ολική ανάκλαση.

β) Το μήκος κύματος της διαθλώμενης ακτίνας είναι μεγαλύτερο από το αντίστοιχο της προσπίπτουσας.

γ) Η γωνία διάθλασης θα είναι μικρότερη από τη γωνία πρόσπτωσης.

<u>Λύση</u>

Η σωστή απάντηση είναι η (γ):

Η ολική ανάκλαση είναι πιθανό να συμβεί μόνο όταν το φως διέρχεται από οπτικά πυκνότερο προς οπτικά αραιότερο μέσο. Συνεπώς η πρόταση (α) είναι λανθασμένη.

Αν λ_0 το μήκος κύματος της ακτινοβολίας κατά τη διάδοση της στον αέρα και λ αντίστοιχα κατά τη διάδοση της ακτινοβολίας στο νερό της λίμνης, τότε για την ταχύτητα διάδοσης σε κάθε μέσο ισχύει:

$$\begin{cases} c = \lambda_0 f \\ u = \lambda f \end{cases} \Rightarrow \frac{c}{u} = \frac{\lambda_0}{\lambda} = n > 1 \Rightarrow \lambda_0 > \lambda$$

Συνεπώς και η πρόταση (β) είναι λανθασμένη.

Σύμφωνα με το νόμο του Snell, αν θ_a η γωνία πρόσπτωσης και θ_b η γωνία διάθλασης τότε ισχύει:

$$\eta\mu\theta_a = n \cdot \eta\mu\theta_b \Rightarrow \frac{\eta\mu\theta_a}{\eta\mu\theta_b} = n$$

Όμως $n > 1 \Rightarrow \frac{\eta\mu\theta_a}{\eta\mu\theta_b} > 1 \Rightarrow \eta\mu\theta_a > \eta\mu\theta_b \Rightarrow \theta_a > \theta_b$

Άρα η πρόταση (γ) είναι η σωστή.

ΘΕΜΑ Γ

Άσκηση 1.

Μονοχρωματική δέσμη παράλληλων ακτίνων φωτός διαδίδεται στον αέρα όπου έχει μήκος κύματος $\lambda_0 = 600\text{nm}$. Η δέσμη συναντά την ήρεμη επιφάνεια μίας λίμνης υπό γωνία πρόσπτωσης 60^o, όπου μέρος της διαθλάται. Η γωνία διάθλασης ισούται με 30^0.

α) Να υπολογίσετε τη γωνία κατά την οποία η διαθλώμενη ακτίνα εκτρέπεται σε σχέση με την προσπίπτουσα, καθώς και το δείκτη διαθλάσεως του νερού.

β) Να υπολογίσετε το μήκος κύματος της ακτινοβολίας στο νερό.

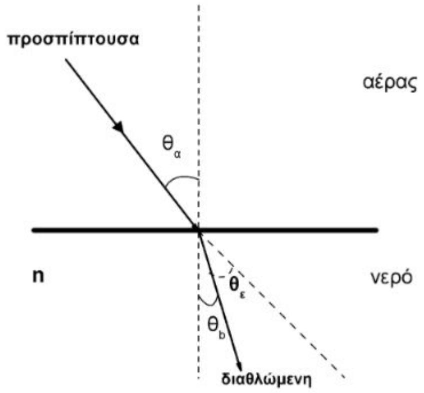
γ) Να υπολογίσετε την ταχύτητα διάδοσης της ακτινοβολίας στο νερό.

δ) Αν το φως διαδιδόταν από το νερό προς τον αέρα με την ίδια γωνία πρόσπτωσης να υπολογίσετε ποια θα ήταν τότε η γωνία εκτροπής της δέσμης.

Δίνεται η ταχύτητα διάδοσης του φωτός στο κενό: $c = 3 \cdot 10^8 \text{m/s}$.

Λύση

α) Σχεδιάζουμε την πορεία των ακτίνων:



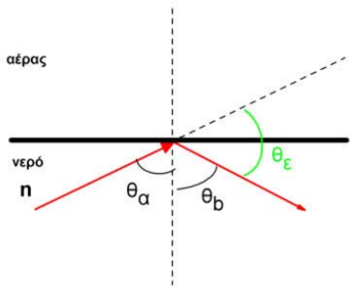
Αν θ_ε η γωνία εκτροπής της διαθλώμενης ακτίνας σε σχέση με τη διεύθυνση της προσπίπτουσας, τότε: $\theta_\alpha = \theta_b + \theta_\varepsilon \Rightarrow \theta_\varepsilon = 30^0$

Σύμφωνα με το νόμο του Snell θα είναι: $\eta\mu\theta_\alpha = n \cdot \eta\mu\theta_b \Rightarrow \eta\mu 60^0 = n \cdot \eta\mu 30^0 \Rightarrow n = \sqrt{3}$

β) Είναι: $n = \dfrac{\lambda_0}{\lambda} \Rightarrow \lambda = 200\sqrt{3}\ \text{nm}$

γ) Είναι: $n = \dfrac{c}{u} \Rightarrow u = \dfrac{c}{n} \Rightarrow u = \sqrt{3} \cdot 10^8\ \text{m/s}$

δ) Όταν το φώς διαδίδεται από οπτικά πυκνότερο προς οπτικά αραιότερο μέσο, πρέπει να ελέγχουμε αν συμβαίνει ολική ανάκλαση.



Η κρίσιμη γωνία ικανοποιεί τη σχέση: $\eta\mu\theta_{cr} = \dfrac{1}{n} \Rightarrow \eta\mu\theta_{cr} = \dfrac{\sqrt{3}}{3}$

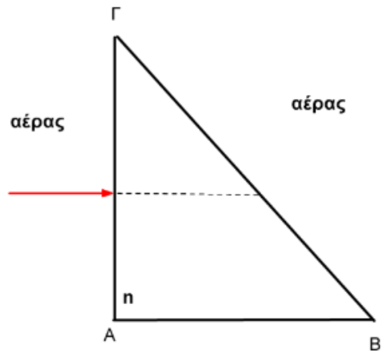
Είναι:

$$\eta\mu\theta_{cr}=\frac{\sqrt{3}}{3}<\frac{\sqrt{3}}{2}=\eta\mu 60^0 \Rightarrow \theta_{cr}<60^0$$

Άρα το φώς ανακλάται ολικά και η γωνία ανάκλασης ισούται με τη γωνία πρόσπτωσης. Η γωνία εκτροπής της ακτίνας ισούται με $\theta_{\varepsilon}=180^0\text{-}\theta_{\alpha}\text{-}\theta_{b}=60^0$

Άσκηση 2.

Μονοχρωματική ακτίνα φωτός διαδίδεται στο κενό με μήκος κύματος $\lambda_0 = 520\text{nm}$ και προσπίπτει σε γυάλινο πρίσμα του οποίου η τομή είναι ορθογώνιο ισοσκελές τρίγωνο ($AB = A\Gamma = 0,39\text{m}$). Το φώς προσπίπτει κάθετα στη μία κάθετη πλευρά του πρίσματος, στο μέσο αυτής και διαθλάται. Η κρίσιμη γωνία της ακτινοβολίας για το συγκεκριμένο πρίσμα ισούται με $40,5^o$ ($\eta\mu 40,5^o \approx 0,65$ και $\sigma\upsilon\nu 40,5^o \approx 0,76$).



Να υπολογίσετε:

α) τη γωνία κατά την οποία έχει εκτραπεί η εξερχόμενη από το πρίσμα ακτίνα σε σχέση με τη διεύθυνση της προσπίπτουσας στην πλευρά ΑΓ)

β) το μήκος κύματος της ακτινοβολίας όσο αυτή βρίσκεται εντός του πρίσματος.

γ) το χρόνο που χρειάζεται η ακτίνα από τη στιγμή που εισέρχεται στο πρίσμα μέχρι να εξέλθει.

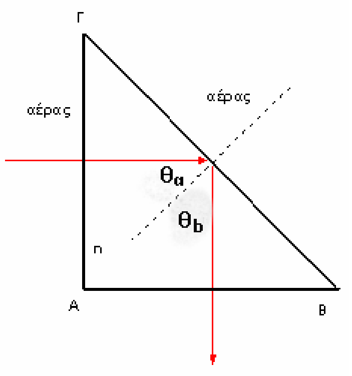
δ) τη γωνία που πρέπει να σχηματίζει η προσπίπτουσα δέσμη με την πλευρά ΑΓ, ώστε το φώς να διέρχεται εφαπτομενικά της ΒΓ)

Δίνονται: $c = 3\cdot 10^8 \text{m/s}$, $\eta\mu 7^0 = \frac{11}{130}\sqrt{2}$

<u>Λύση</u>

α) Αρχικά το φώς δεν εκτρέπεται

αφού η γωνία πρόσπτωσης είναι ορθή. Στη συνέχεια συναντά την υποτείνουσα της τομής του πρίσματος υπό γωνία πρόσπτωσης $45^o > 40,5^o$. Συνεπώς ανακλάται ολικά και συναντά την άλλη κάθετη πλευρά, προσπίπτοντας κάθετα σε αυτή. Άρα εξέρχεται χωρίς να αλλάξει πορεία. Η ζητούμενη γωνιακή εκτροπή ισούται με 90^o.

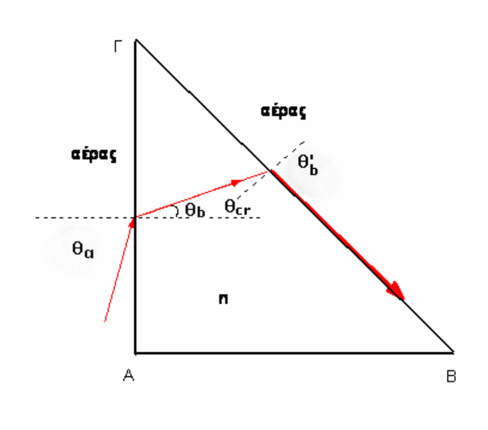


β) Είναι: $n = \frac{1}{\eta\mu\theta_{cr}} \Rightarrow n = \frac{1}{0,65} = \frac{20}{13}$. Ακόμα: $n = \frac{c}{u} = \frac{\lambda_0 f}{\lambda f} \Rightarrow \lambda = \frac{\lambda_0}{n} = 338\text{ nm}$

γ) Η φωτεινή ακτίνα διανύει μήκος $S = \frac{ΑΓ}{2} + \frac{ΑΒ}{2} = 0,39m$

Είναι: $n = \frac{c}{u} \Rightarrow u = 1,95 \cdot 10^8 \frac{m}{s}$ άρα:

$u = \frac{S}{\Delta t} \Rightarrow \Delta t = 2 \cdot 10^{-9} s = 2\ ns$



δ) Θα πρέπει το φώς να προσπίπτει στην πλευρά ΒΓ υπό γωνία πρόσπτωσης ίση με την κρίσιμη γωνία θ_{cr}.

Συνεπώς: $\theta_b = 45^0 - \theta_{cr}$

Ο νόμος του Snell κατά την πρόσπτωση του φωτός στην πλευρά ΑΓ του πρίσματος γράφεται:

$$ημθ_\alpha = n \cdot ημθ_b \Rightarrow ημθ_\alpha = n \cdot ημ(45^0 - \theta_{cr}) \Rightarrow$$

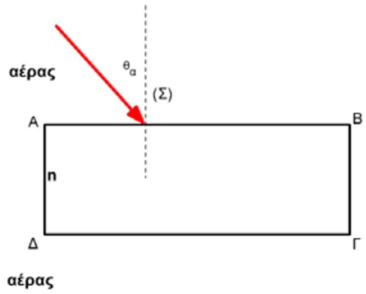
$$ημθ_\alpha = n \cdot (ημ45^0 συνθ_{cr} - ημθ_{cr} συν45^0) \Rightarrow ημθ_\alpha = \frac{11}{130}\sqrt{2} \Rightarrow \theta_\alpha = 7^0$$

Άρα η ζητούμενη γωνία είναι $\theta = 83^0$.

Άσκηση 3.

Μονοχρωματική φωτεινή ακτίνα διαδίδεται στον αέρα όταν προσπίπτει στην έδρα ΑΒ του πρίσματος του σχήματος υπό γωνία $\theta_\alpha = 45^0$.

Ο δείκτης διαθλάσεως ισούται με $n = \sqrt{2}$, ενώ το πρίσμα περιβάλλεται από αέρα.



α) Να υπολογίσετε τη γωνία μεταξύ ανακλώμενης και διαθλώμενης στο σημείο (Σ).

β) Να εξετάσετε αν το φώς προσπίπτοντας στην ΔΓ του πρίσματος, εξέρχεται στον αέρα.

γ) Να υπολογίσετε το ποσοστό μείωσης της ταχύτητας της ακτινοβολίας όταν αυτή εισέρχεται από τον αέρα στο πρίσμα.

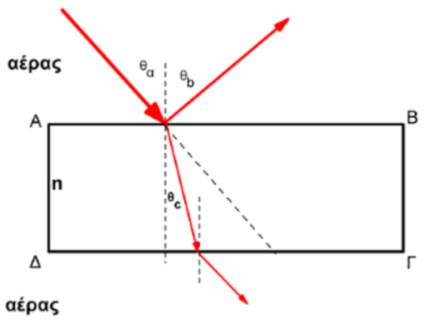
Δίνεται: $\dfrac{2-\sqrt{2}}{2} \simeq 0{,}29$

Λύση

α) Είναι: $\eta\mu\theta_\alpha = n \cdot \eta\mu\theta_c \Rightarrow \theta_c = 30^0$

Ακόμα: $\theta_b = \theta_\alpha$

Συνεπώς η ζητούμενη γωνία ισούται με: $\theta = 45^0 + 60^0 = 105^0$



β) Είναι: $\eta\mu\theta_{cr} = \dfrac{1}{n} \Rightarrow \theta_{cr} = 45^0$

Το φως προσπίπτει στην έδρα ΔΓ υπό γωνία πρόσπτωσης $\theta_c = 30^0 < \theta_{cr}$, άρα εξέρχεται στον αέρα.

γ) Είναι:

$$\frac{|\Delta u|}{u} \cdot 100\% = \frac{c-u}{c} \cdot 100\% = \frac{n-1}{n} \cdot 100\% = \frac{2-\sqrt{2}}{2} \cdot 100\% \Rightarrow \frac{|\Delta u|}{u} \cdot 100\% = 29\%$$

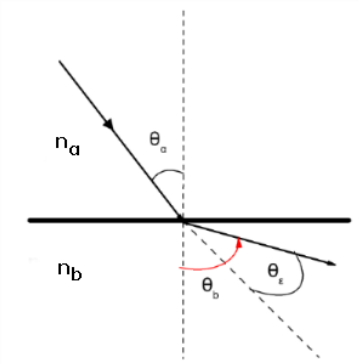
Άσκηση 4.

Μονοχρωματική ακτίνα φωτός διαδίδεται εντός γυάλινου πλακιδίου δείκτη διαθλάσεως $n_\alpha = 2$ το οποίο είναι βυθισμένο σε νερό. Το πλακίδιο είναι οπτικά πυκνότερο του νερού. Το φώς συναντά τη διαχωριστική επιφάνεια των μέσων υπό γωνία πρόσπτωσης $\theta_\alpha = 30^0$. Η κρίσιμη γωνία ισούται με $\theta_{cr} = 45^0$. Να υπολογίσετε:

α) το δείκτη διαθλάσεως του νερού.
β) τη γωνία διαθλάσεως και τη γωνία εκτροπής της ακτίνας.
γ) το ποσοστό μεταβολής του μήκους κύματος της ακτίνας, καθώς αυτή διέρχεται από το πλακίδιο στο νερό.
Δίνεται $\sqrt{2} = 1,41$.

<u>Λύση</u>

α) Είναι: $\eta\mu\theta_{cr} = \frac{n_b}{n_\alpha} \Rightarrow n_b = \sqrt{2}$



β) $n_\alpha \eta\mu\theta_\alpha = n_b \eta\mu\theta_b \Rightarrow \theta_b = 45^0$

και $\theta_b = \theta_\alpha + \theta_\varepsilon \Rightarrow \theta_\varepsilon = 15^0$

γ) $\frac{\Delta\lambda}{\lambda_\alpha} \cdot 100\% = \frac{\lambda_b - \lambda_\alpha}{\lambda_\alpha} \cdot 100\% = \frac{\frac{1}{n_b} - \frac{1}{n_\alpha}}{\frac{1}{n_\alpha}} \cdot 100\% = \frac{n_\alpha - n_b}{n_b} \cdot 100\% \Rightarrow \frac{\Delta\lambda}{\lambda_\alpha} \cdot 100\% = 41\%$

Ημερομηνία τροποποίησης: 16/11/2011