ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1°: ΜΗΧΑΝΙΚΕΣ – ΗΛΕΚΤΡΙΚΕΣ ΤΑΛΑΝΤΩΣΕΙΣ

ΕΝΟΤΗΤΑ 1.1: ΠΕΡΙΟΔΙΚΟ ΦΑΙΝΟΜΕΝΟ – ΑΠΛΗ ΑΡΜΟΝΙΚΗ ΤΑΛΑΝΤΩΣΗ (ΚΙΝΗΜΑΤΙΚΗ ΚΑΙ ΔΥΝΑΜΙΚΗ ΠΡΟΣΕΓΓΙΣΗ)

ΛΥΜΕΝΑ ΘΕΜΑΤΑ

ΘΕΜΑ Β

Ερώτηση 1.

Δύο σώματα με μάζες $m_1 = 2m$ και $m_2 = m$ αντίστοιχα, εκτελούν Α.Α.Τ. και έχουν την ίδια γωνιακή συχνότητα. Ποια από τις παρακάτω σχέσεις για τις σταθερές επαναφοράς D_1 και D_2 αντίστοιχα των δύο συστημάτων είναι σωστή;

α) $D_1 = \frac{D_2}{2}$.

β) $D_1 = 2 \cdot D_2$.

γ) $D_1 = D_2$.

Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

<u>Λύση</u>

Σωστή απάντηση είναι η β.

Αιτιολόγηση: Από την εκφώνηση έχουμε $\omega_1 = \omega_2 \Rightarrow \frac{2\pi}{T_1} = \frac{2\pi}{T_2} \Rightarrow T_1 = T_2 \Rightarrow$

(Από τη σχέση $T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{D}}$)

$$2\pi\sqrt{\frac{m_1}{D_1}} = 2\pi\sqrt{\frac{m_2}{D_2}} \Rightarrow$$

$$\frac{m_1}{D_1} = \frac{m_2}{D_2} \Rightarrow$$

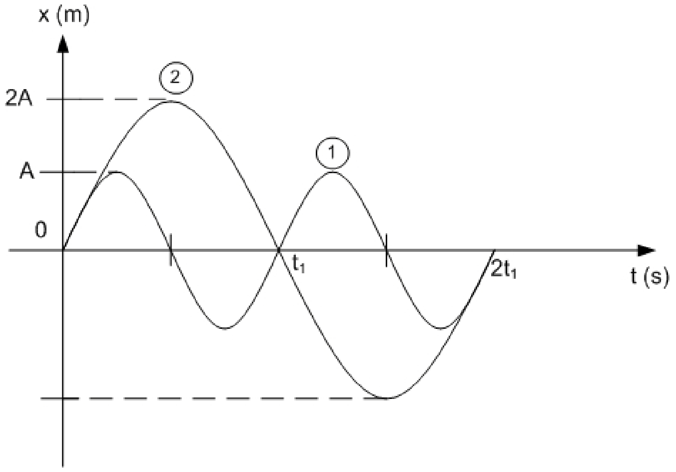
$$m_1 \cdot D_2 = m_2 \cdot D_1 \Rightarrow$$

$$2 \cdot m \cdot D_2 = m \cdot D_1 \Rightarrow$$

$D_1 = 2 \cdot D_2$ Άρα σωστή απάντηση είναι η β.

Ερώτηση 2.

Στο παρακάτω διάγραμμα απομάκρυνσης-χρόνου φαίνονται οι γραφικές παραστάσεις για δύο σώματα 1 και 2 τα οποία εκτελούν Α.Α.Τ.



Ποιά από τις παρακάτω σχέσεις για τις μέγιστες επιταχύνσεις ταλάντωσης των δύο σωμάτων είναι σωστή;

α) $\alpha_{max_1} = \dfrac{\alpha_{max_2}}{2}$

β) $\alpha_{max_1} = \alpha_{max_2}$

γ) $\alpha_{max_1} = 2 \cdot \alpha_{max_2}$

Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

<u>Λύση</u>

Σωστή απάντηση είναι η γ.

Αιτιολόγηση: Από το διάγραμμα προκύπτει ότι το σώμα 2 έχει διπλάσια περίοδο από το σώμα 1. Δηλαδή $T_2 = 2 \cdot T_1$ (1)

Επίσης το σώμα 2 έχει διπλάσιο πλάτος ταλάντωσης από το σώμα 1. Δηλαδή $A_2 = 2 \cdot A_1$ (2)

Η μέγιστη επιτάχυνση υπολογίζεται από τη σχέση $\alpha_{max} = \omega^2 \cdot A$

Άρα εφαρμόζοντας ξεχωριστά για το κάθε σώμα και διαιρώντας κατά μέλη καταλήγουμε:

$$\frac{\alpha_{max_1}}{\alpha_{max_2}} = \frac{\omega_1^2 \cdot A_1}{\omega_2^2 \cdot A_2} \Rightarrow (\omega = \frac{2\pi}{T})$$

$$\frac{\alpha_{max_1}}{\alpha_{max_2}} = \frac{(\frac{2\pi}{T_1})^2 \cdot A_1}{(\frac{2\pi}{T_2})^2 \cdot A_2} \Rightarrow$$ (Απλοποιώ και κάνω το σύνθετο κλάσμα απλό)

$$\frac{\alpha_{max_1}}{\alpha_{max_2}} = \frac{T_2^2 \cdot A_1}{T_1^2 \cdot A_2} \Rightarrow$$ (από τις σχέσεις (1) και (2) με αντικατάσταση)

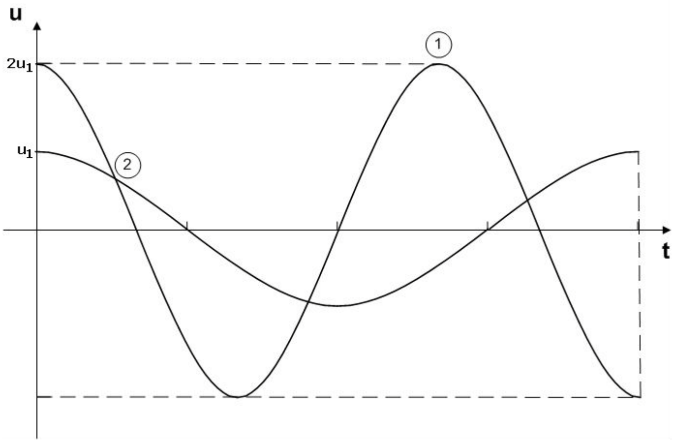
$$\frac{\alpha_{max_1}}{\alpha_{max_2}} = \frac{(2 \cdot T_1)^2 \cdot A_1}{T_1^2 \cdot 2A_1} \Rightarrow$$

$$\frac{\alpha_{max_1}}{\alpha_{max_2}} = 2 \Rightarrow \alpha_{max_1} = 2 \cdot \alpha_{max_2}$$

Άρα σωστή απάντηση είναι η γ.

Ερώτηση 3.

Δύο σώματα 1 και 2 με ίσες μάζες εκτελούν Α.Α.Τ. Στο παρακάτω σχήμα φαίνονται τα διαγράμματα ταχύτητας-χρόνου για τα δύο σώματα.



Ο λόγος της μέγιστης δύναμης επαναφοράς του σώματος 1 προς τη μέγιστη δύναμη επαναφοράς του σώματος 2 είναι:

α) 3

β) 9

γ) $1/3$

Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

<u>Λύση</u>

Σωστή απάντηση είναι η α.

Από το διάγραμμα προκύπτει ότι $T_2 = 1,5 \cdot T_1$ (1) και ότι $u_{max_1} = 2 \cdot u_{max_2}$ (2)

Από τη σχέση (2) έχουμε $u_{max_1} = 2 \cdot u_{max_2} \Rightarrow (u_{max} = \omega \cdot A)$

$$\omega_1 \cdot A_1 = 2 \cdot \omega_2 \cdot A_2 \Rightarrow (\omega = \frac{2\pi}{T})$$

$$\frac{2\pi}{T_1} \cdot A_1 = 2 \cdot \frac{2\pi}{T_2} \cdot A_2 \Rightarrow$$

$A_1 \cdot T_2 = 2 \cdot A_2 \cdot T_1 \Rightarrow$ (Λόγω της σχέσης (1))

$$A_1 \cdot 1,5 \cdot T_1 = 2 \cdot A_2 \cdot T_1 \Rightarrow$$

$A_1 = \frac{4}{3} \cdot A_2$ (3)

Άρα επειδή $F_{max} = m \cdot a_{max}$ ή

$F_{max} = m \cdot \omega^2 \cdot A$ ή

$$F_{max} = \frac{m \cdot (2\pi)^2}{T^2} \cdot A \quad (4)$$

Εφαρμόζω τη σχέση (4) ξεχωριστά για το κάθε σώμα και διαιρώ κατά μέλη:

$$\frac{F_{max_1}}{F_{max_2}} = \frac{\cancel{m}_1 \cdot \frac{(2\pi)^2}{T_1^2} \cdot A_1}{\cancel{m}_2 \cdot \frac{(2\pi)^2}{T_2^2} \cdot A_2} \Rightarrow$$ (Απλοποιούμε και κάνουμε το σύνθετο κλάσμα απλό)

$$\frac{F_{max_1}}{F_{max_2}} = \frac{T_2^2 \cdot A_1}{T_1^2 \cdot A_2} \Rightarrow$$ (Από τις σχέσεις (1) και (3))

$$\frac{F_{max_1}}{F_{max_2}} = \frac{(1,5 \cdot T_1)^2 \cdot \frac{4}{3} \cdot A_2}{T_1^2 \cdot A_2} \Rightarrow$$

$$\frac{F_{max_1}}{F_{max_2}} = 3$$

Άρα σωστή απάντηση είναι η α.

Ερώτηση 4.

Σώμα μάζας m εκτελεί Α.Α.Τ. με περίοδο Τ και πλάτος Α. Τετραπλασιάζουμε το πλάτος της ταλάντωσής του και διπλασιάζουμε τη μάζα του ενώ διατηρούμε αμετάβλητη τη σταθερά επαναφοράς D. Ο ρυθμός μεταβολής της ορμής στις ακραίες θέσεις θα:

α) τετραπλασιαστεί.

β) υποτετραπλασιαστεί.

γ) διπλασιαστεί.

Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

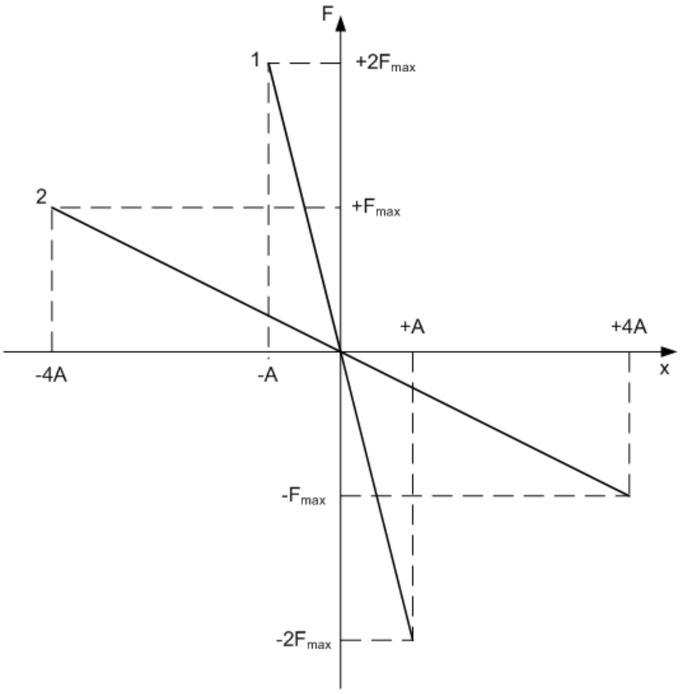
<u>Λύση</u>

Σωστή απάντηση είναι η α.

Αιτιολόγηση: Ο ρυθμός μεταβολής της ορμής είναι ίσος με τη συνισταμένη δύναμη $F = \frac{\Delta P}{\Delta t}$. Σε μια Α.Α.Τ. η συνισταμένη των δυνάμεων που ασκούνται στο σώμα είναι η δύναμη επαναφοράς η οποία στις ακραίες θέσεις είναι μέγιστη. Ισχύει για τη μέγιστη δύναμη επαναφοράς η σχέση $F_{max} = D \cdot A$. Το D παραμένει σταθερό, το Α τετραπλασιάζεται άρα η μέγιστη δύναμη επαναφοράς τετραπλασιάζεται και επομένως και ο ρυθμός μεταβολής της ορμής στις ακραίες θέσεις. Άρα σωστή απάντηση είναι η α.

Ερώτηση 5.

Δύο σώματα με μάζες $m_1 = m$ και $m_2 = 4m$ εκτελούν Α.Α.Τ. Στο παρακάτω σχήμα φαίνονται οι γραφικές παραστάσεις δύναμης επαναφοράς, απομάκρυνσης για τα δύο σώματα.



Ο λόγος των συχνοτήτων ταλάντωσης των δύο σωμάτων $\frac{f_1}{f_2}$ είναι ίσος με:

α) $2\cdot\sqrt{2}$

β) $\sqrt{2}$

γ) $4\cdot\sqrt{2}$

Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

<u>Λύση</u>

Σωστή απάντηση είναι η γ.

Αιτιολόγηση: Η κλίση της γραφικής παράστασης μας δίνει τη σταθερά της επαναφοράς της ταλάντωσης.

Άρα για το σύστημα 1 έχουμε: $D_1 = \frac{2\cdot F_{max}}{A}$ (1).

Ομοίως για το σύστημα 2 έχουμε:

$$D_2 = \frac{F_{max}}{4 \cdot A} \quad (2)$$

Διαιρώντας κατά μέλη τις σχέσεις (1) και (2) προκύπτει: $\frac{D_1}{D_2} = \frac{\frac{2 \cdot F_{max}}{A}}{\frac{F_{max}}{4 \cdot A}} \Rightarrow$

$$\frac{D_1}{D_2} = 8 \quad (3)$$

Άρα ο λόγος των συχνοτήτων υπολογίζεται:

$\frac{f_1}{f_2} = \frac{\frac{1}{T_1}}{\frac{1}{T_2}} = \frac{T_2}{T_1} = \frac{2\pi \cdot \sqrt{\frac{m_2}{D_2}}}{2\pi \cdot \sqrt{\frac{m_1}{D_1}}} = \sqrt{\frac{m_2 \cdot D_1}{m_1 \cdot D_2}} \Rightarrow$ (Αντικαθιστώντας $m_1 = m, m_2 = 4m$ και $\frac{D_1}{D_2} = 8$)

$$\frac{f_1}{f_2} = \sqrt{\frac{4 \cdot \cancel{m}}{\cancel{m}} \cdot 8} = \sqrt{32} = 4\sqrt{2}$$

Άρα σωστή απάντηση είναι η γ.

Ερώτηση 6.

Σώμα εκτελεί Α.Α.Τ. με περίοδο $T = 4\,s$. Η συχνότητα μεγιστοποίησης του μέτρου του ρυθμού μεταβολής της ταχύτητας είναι f' ίση με:

α) $4Hz$

β) $2Hz$

γ) $0,5Hz$

Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

<u>Λύση</u>

Σωστή απάντηση είναι η γ.

Αιτιολόγηση: Ο ρυθμός μεταβολής της ταχύτητας είναι η επιτάχυνση. Η επιτάχυνση γίνεται μέγιστη στις ακραίες θέσεις άρα κάθε μισή περίοδο. Άρα ο χρόνος μεγιστοποίησης του ρυθμού μεταβολής της ταχύτητας είναι $T' = \frac{T}{2} = 2\,s$ και η αντίστοιχη συχνότητα $f' = \frac{1}{T'} = \frac{1}{2} = 0,5\,Hz$ Άρα σωστή απάντηση είναι η γ.

Ερώτηση 7.

Ένας απλός αρμονικός ταλαντωτής ταλαντώνεται, με πλάτος ταχύτητας $υ_{max}$, πλάτος επιτάχυνσης $α_{max}$ και αρχική φάση $φ_0$. Σε ένα τυχαίο σημείο της τροχιάς του έχει ταχύτητα μέτρου υ και επιτάχυνση μέτρου α. Η σχέση που συνδέει τη στιγμιαία ταχύτητα υ με τη στιγμιαία επιτάχυνση α, είναι η:

α) $\frac{υ^2}{υ_{max}^2} + \frac{a^2}{a_{max}^2} = 1$

β) $\frac{υ^2}{υ_{max}^2} - \frac{a^2}{a_{max}^2} = 1$

γ) $\frac{υ}{υ_{max}} - \frac{a}{a_{max}} = 1$

Να επιλέξτε τη σωστή απάντηση και να αιτιολογήσετε την επιλογή σας.

<u>Λύση</u>

Σωστή απάντηση είναι η (α).

Η χρονική εξίσωση της ταχύτητας σε μια απλή αρμονική ταλάντωση είναι: $υ = υ_{max} συν(ωt + φ_0)$ και της επιτάχυνσης: $α = -α_{max} ημ(ωt + φ_0)$.

Λύνουμε ως προς τους περιεχόμενους τριγωνομετρικούς αριθμούς: $συν(ωt + φ_0) = \frac{υ}{υ_{max}}$

και $ημ(ωt + φ_0) = -\frac{α}{α_{max}}$.

Τις υψώνουμε στο τετράγωνο: $συν^2(ωt + φ_0) = \frac{υ^2}{υ_{max}^2}$ και $ημ^2(ωt + φ_0) = \frac{α^2}{α_{max}^2}$.

Τις προσθέτουμε κατά μέλη: $συν^2(ωt + φ_0) + ημ^2(ωt + φ_0) = \frac{υ^2}{υ_{max}^2} + \frac{α^2}{α_{max}^2}$. Το 1ο μέλος, με βάση τώρα την τριγωνομετρική ταυτότητα: $ημ^2θ + συν^2θ = 1$, είναι ίσο με τη μονάδα.

Έτσι, έχουμε τελικά: $\frac{υ^2}{υ_{max}^2} + \frac{α^2}{α_{max}^2} = 1$.

ΘΕΜΑ Γ

Άσκηση 1.

Σώμα εκτελεί Α.Α.Τ. και η ταχύτητα μεταβάλλεται σύμφωνα με τη σχέση $u = 2\cdot\sigma\upsilon\nu 4\pi t$ (S.I.).

Να υπολογιστεί:

α) Η απόσταση των δύο ακραίων θέσεων.

β) Η επιτάχυνση όταν η απομάκρυνση του σώματος είναι $x = +A$.

γ) Η ταχύτητα τη χρονική στιγμή $t = \frac{1}{12}s$.

δ) Αν η μάζα του ταλαντούμενου σώματος είναι $m = 0,2\,kg$ να υπολογιστεί η σταθερά επαναφοράς του συστήματος και ο ρυθμός μεταβολής της ορμής τη χρονική στιγμή κατά την οποία η απομάκρυνση είναι $x = -\frac{A}{2}$.

Δίνεται $\sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}$ και $\pi^2 \simeq 10$

<u>Λύση</u>

Από την εξίσωση της ταχύτητας προκύπτει ότι:

$\upsilon_{max} = 2\,m/s$

$\omega = 4\pi\,rad/s$

Άρα $\upsilon_{max} = \omega\cdot A \Rightarrow 2\frac{m}{s} = 4\pi\frac{rad}{s}\cdot A \Rightarrow A = \frac{1}{2\pi}m$

α) Επομένως οι δύο ακραίες θέσεις απέχουν $d = 2\cdot A = 2\cdot\frac{1}{2\pi}m = \frac{1}{\pi}m$

β) Όταν είναι $x = +A$ τότε

$$a = -a_{max} \Rightarrow a = -\omega^2\cdot A \Rightarrow a = -(4\pi\frac{rad}{s})^2\cdot\frac{1}{2\pi}m \Rightarrow a = -8\pi\,m/s^2$$

γ) Τη χρονική στιγμή $t = \frac{1}{12}s$, η ταχύτητα είναι (στο S.I.):

$\upsilon = 2\sigma\upsilon\nu 4\pi t$

$$\upsilon = 2\sigma\upsilon\nu 4\pi \frac{1}{12}$$

$$\upsilon = 2\sigma\upsilon\nu \frac{\pi}{3}$$

$$\upsilon = 2\cdot\frac{1}{2} = 1\,m/s$$

δ) Η σταθερά επαναφοράς υπολογίζεται από τη σχέση:

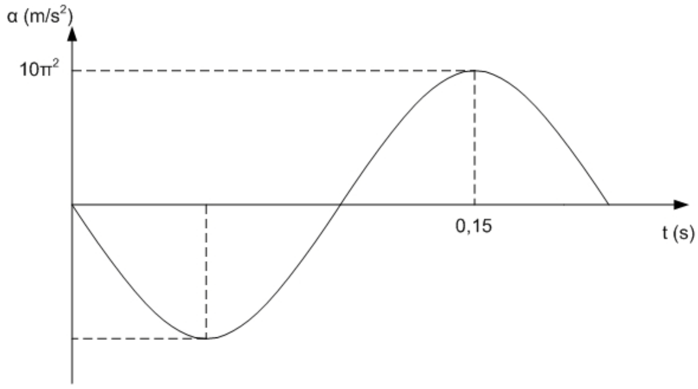
$$D = m\cdot\omega^2 = 0,2kg\cdot(4\pi\frac{rad}{s})^2 = 3,2\cdot 10\frac{N}{m} = 32\,\frac{N}{m}$$

Ο ρυθμός μεταβολής της ορμής είναι ίσος με τη δύναμη επαναφοράς

$$\frac{dp}{dt} = F = -D\cdot x = -32\,\frac{N}{m}\cdot(-\frac{\frac{1}{2\pi}}{2}m) \Rightarrow \frac{dp}{dt} = +\frac{8}{\pi}\,N$$

Άσκηση 2.

Σώμα εκτελεί Α.Α.Τ. Στο παρακάτω σχήμα φαίνεται η γραφική παράσταση επιτάχυνσης-χρόνου:



Να υπολογιστούν:

α) Το πλάτος της ταλάντωσης.

β) Η συχνότητα και η γωνιακή συχνότητα.

γ) Να βρεθεί η εξίσωση ταχύτητας-χρόνου και να σχεδιαστεί το αντίστοιχο ποσοτικό διάγραμμα.

δ) Να κάνετε το διάγραμμα επιτάχυνσης-απομάκρυνσης (ποσοτικό).

Λύση

Από το διάγραμμα προκύπτει ότι:

$\frac{3 \cdot T}{4} = 0{,}15\text{s} \Rightarrow T = 0{,}2\,\text{s}$ και $a_{max} = 10\pi^2\ \text{m}/\text{s}^2$

α) $a_{max} = \omega^2 \cdot A \Rightarrow a_{max} = \frac{(2\pi)^2}{T^2} \cdot A \Rightarrow 10\pi^2 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} = \frac{4\pi^2}{(0{,}2\text{s})^2} \cdot A \Rightarrow A = 0{,}1\,\text{m}$

β) $f = \frac{1}{T} = \frac{1}{0{,}2\text{s}} = 5\,\text{Hz}$

$\omega = 2\pi f = 2\pi \cdot 5\ \text{Hz} = 10\pi\ \text{rad}/\text{s}$

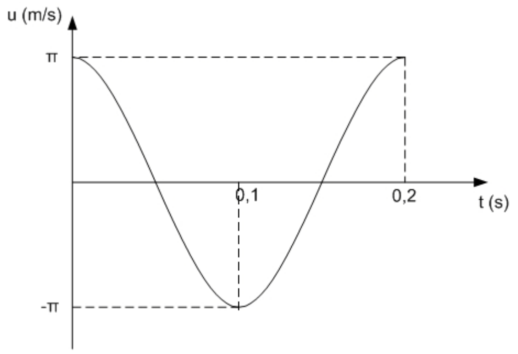
γ) $\upsilon_{max} = \omega \cdot A = 10\pi \frac{\text{rad}}{\text{s}} \cdot 0{,}1\text{m} = \pi\ \text{m}/\text{s}$

Άρα η εξίσωση της ταχύτητας είναι:

$\upsilon = \upsilon_{max} \cdot \sigma\upsilon\nu\omega t \Rightarrow$

$\upsilon = \pi \cdot \sigma\upsilon\nu 10\pi t$ (S.I.)

και το αντίστοιχο διάγραμμα είναι:



δ) $a = -a_{max} \cdot \eta\mu\omega t \ (a_{max} = \omega^2 \cdot A)$

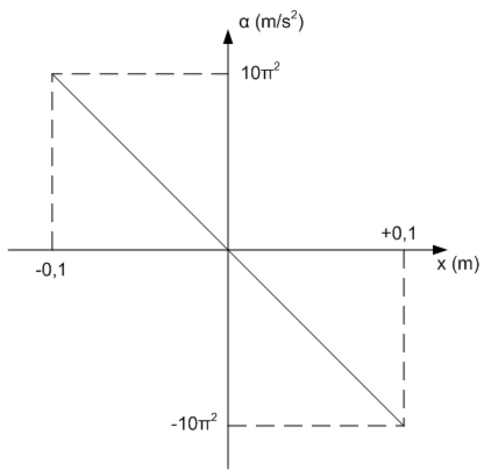
$a = -\omega^2 \cdot A \cdot \eta\mu\omega t \ (x = A \cdot \eta\mu\omega t)$

$a = -\omega^2 \cdot x$

$a = -(10\pi)^2 \cdot x$

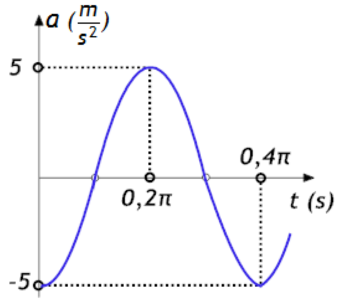
$a = -100\pi^2 \cdot x$ (S.I.)

Το διάγραμμα επιτάχυνσης-απομάκρυνσης είναι:



Άσκηση 3.

Στο παρακάτω διάγραμμα παριστάνεται η επιτάχυνση ενός σώματος μάζας $m = 2kg$, σε συνάρτηση με το χρόνο, που εκτελεί απλή αρμονική ταλάντωση.



α) Να υπολογίσετε τη γωνιακή συχνότητα ω και το πλάτος ταλάντωσης A.

β) Να γράψετε την εξίσωση που δίνει τη φάση της ταλάντωσης φ σε συνάρτηση με το χρόνο t.

γ) Να παραστήσετε γραφικά την επιτάχυνση α σε συνάρτηση με την απομάκρυνση x, σε κατάλληλα βαθμολογημένους άξονες.

δ) Να υπολογίσετε την αλγεβρική τιμή της ορμής του σώματος τη χρονική στιγμή $t_1 = \frac{\pi}{30}s$. Δίνεται ότι: $\eta\mu\frac{2\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$ και $\sigma\upsilon\nu\frac{2\pi}{3} = -\frac{1}{2}$.

Λύση

α) Όπως φαίνεται απ' το διάγραμμα, η μέγιστη επιτάχυνση της απλής αρμονικής ταλάντωσης είναι: $\alpha_{max} = 5\ m/s^2$ και η περίοδος $T = 0,4\pi\ s$.

Βρίσκουμε τη γωνιακή συχνότητα ω:

$$T = \frac{2\pi}{\omega} \Rightarrow 0,4\pi\ s = \frac{2\pi\ rad}{\omega} \Rightarrow \omega = \frac{2}{0,4}rad/s = \frac{20}{4}rad/s \Rightarrow \omega = 5\frac{rad}{s}.$$

Από τη σχέση μέγιστης επιτάχυνσης α_{max} – πλάτους A:

$$\alpha_{max} = \omega^2 A \Rightarrow A = \frac{\alpha_{max}}{\omega^2} = \frac{5}{25}m = \frac{1}{5}m \Rightarrow A = 0,2m.$$

β) Γνωρίζουμε ότι η φάση μιας απλής αρμονικής ταλάντωσης είναι η: $\varphi = \omega t + \varphi_0$, οπότε πρέπει να υπολογίσουμε την αρχική φάση της ταλάντωσης.

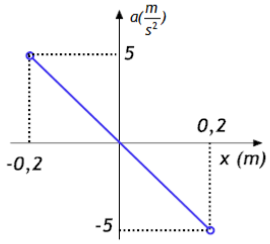
Από την εξίσωση επιτάχυνσης – χρόνου: $\alpha = -\alpha_{max}\eta\mu(\omega t + \varphi_0)$, για t=0 όπως φαίνεται από το διάγραμμα είναι $\alpha_{\alpha\rho\chi} = -\alpha_{max}$. Με αντικατάσταση στην εξίσωση επιτάχυνσης α - χρόνου t:

$-\alpha_{max} = -\alpha_{max}\eta\mu\varphi_0 \Rightarrow \eta\mu\varphi_0 = 1 \Rightarrow \varphi_0 = 2k\pi + \frac{\pi}{2}$. Επειδή η αρχική φάση είναι μεταξύ 0 και 2π, θέτουμε k=0, οπότε τελικά: $\varphi_0 = \frac{\pi}{2}$.

Οπότε η χρονική εξίσωση της φάσης της ταλάντωσης γίνεται: $\varphi = 5t + \frac{\pi}{2}$ (στο S.I.).

γ) Γνωρίζουμε ότι η σχέση επιτάχυνσης α – απομάκρυνσης x, σε μια απλή αρμονική ταλάντωση είναι η: $\alpha = -\omega^2 \cdot x \Rightarrow \alpha = -25 \cdot x$, που είναι μια πρωτοβάθμια συνάρτηση με πεδίο ορισμού: $-A \le x \le A \Rightarrow -0,2\ m \le x \le 0,2\ m$ και κλίση $-\omega^2$.

Η γραφική παράσταση φαίνεται στο παρακάτω διάγραμμα:



δ) Η ορμή είναι $p = m \cdot \upsilon$, οπότε αρκεί να βρούμε την ταχύτητα τη χρονική στιγμή $t_1 = \frac{\pi}{30}s$.

Η εξίσωση της ταχύτητας είναι: $\upsilon = \upsilon_{max}\sigma\upsilon\nu(\omega t + \varphi_0) = \omega A\sigma\upsilon\nu(\omega t + \varphi_0)$ και αντικαθιστώντας έχουμε (S.I.):

$$\upsilon = 5 \cdot 0,2\sigma\upsilon\nu(5\frac{\pi}{30} + \frac{\pi}{2})m/s = 1 \cdot \sigma\upsilon\nu(\frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{2})m/s = ... = \sigma\upsilon\nu(\frac{2\pi}{3})m/s = -\frac{1}{2}\frac{m}{s}.$$

Άρα η αλγεβρική τιμή της ορμής είναι: $p = 2(-\frac{1}{2})kg\frac{m}{s} \Rightarrow p = -1\ kg\frac{m}{s}$.

Ημερομηνία τροποποίησης: 20/07/2011

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1^{ο}: ΜΗΧΑΝΙΚΕΣ - ΗΛΕΚΤΡΙΚΕΣ ΤΑΛΑΝΤΩΣΕΙΣ

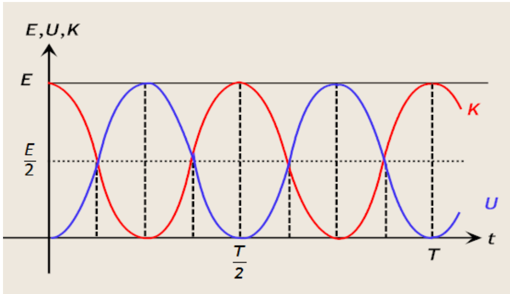
ΕΝΟΤΗΤΑ 1.2: ΑΠΛΗ ΑΡΜΟΝΙΚΗ ΤΑΛΑΝΤΩΣΗ (ΕΝΕΡΓΕΙΑΚΗ ΠΡΟΣΕΓΓΙΣΗ, ΑΡΧΙΚΗ ΦΑΣΗ, ΣΥΣΤΗΜΑ ΕΛΑΤΗΡΙΟΥ ΣΩΜΑΤΟΣ, ΟΡΜΗ)

ΛΥΜΕΝΑ ΘΕΜΑΤΑ

ΘΕΜΑ Β

Ερώτηση 1.

Ένα σώμα εκτελεί απλή αρμονική ταλάντωση με αρχική φάση μηδέν. Η γραφική παράσταση δείχνει τις μεταβολές της κινητικής Κ, της δυναμικής U και της ολικής ενέργειας Ε, σε συνάρτηση με το χρόνο.



Η κινητική του ενέργεια Κ εξισώνεται με τη δυναμική του ενέργεια U, 120 φορές ανά λεπτό. Η συχνότητα της ταλάντωσης είναι:

α) 30 Hz.

β) 2 Hz.

γ) 0,5 Hz.

Να επιλέξετε τις σωστή απάντηση και να αιτιολογήσετε την επιλογή σας

Λύση

Σωστή απάντηση είναι η γ.

Όπως φαίνεται απ' το κοινό διάγραμμα U – t και Κ – t, τα σημεία τομής, είναι οι στιγμές όπου εξισώνονται η κινητική ενέργεια Κ με τη δυναμική ενέργεια U. Αυτό συμβαίνει 4 φορές σε κάθε περίοδο, μιας και στο διάγραμμα έχουμε 4 σημεία τομής ανά περίοδο ταλάντωσης.

Άρα το σώμα εκτελεί $N_{ταλ} = \frac{120}{4} = 30$ ταλαντώσεις ανά λεπτό.

Επομένως με βάση τον ορισμό της συχνότητας: $f = \dfrac{N_{\tau\alpha\lambda}}{\Delta t} = \dfrac{30\ \tau\alpha\lambda}{1\ \min} = \dfrac{30\ \tau\alpha\lambda}{60\ s} \Rightarrow f = 0{,}5\ Hz$

Ερώτηση 2.

Σύστημα ελατηρίου σταθεράς k - μάζας m εκτελεί απλή αρμονική ταλάντωση περιόδου T και συχνότητας f. Αντικαθιστούμε τη μάζα με άλλη $m' = \frac{m}{4}$ και διπλασιάζουμε το πλάτος της ταλάντωσης: $A' = 2A$.

Α) Για τη συχνότητα f' ισχύει:

α) $f' = 2f$.

β) $f' = f$.

γ) $f' = \frac{f}{2}$.

Β) Η ενέργεια της ταλάντωσης E' :

α) παραμένει η ίδια.

β) διπλασιάζεται.

γ) τετραπλασιάζεται.

Να επιλέξετε τις σωστές απαντήσεις και να αιτιολογήσετε τις επιλογές σας.

Λύση

Α) Σωστή απάντηση είναι η α.

Β) Σωστή απάντηση είναι η γ.

Η σταθερά ταλάντωσης D του συστήματος ελατηρίου k - μάζας m, είναι ίση με k, δηλαδή είναι ανεξάρτητη της μάζας του ταλαντούμενου σώματος και του πλάτους ταλάντωσης. Συνεπώς και στις δύο περιπτώσεις: $D' = D = k$.

Α) Η περίοδος μιας απλής αρμονικής ταλάντωσης δίνεται από τη σχέση:

$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{D}} = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$ και η συχνότητα είναι το αντίστροφο της περιόδου: $f = \frac{1}{T} \Rightarrow f = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k}{m}}$. Όπως φαίνεται απ’ αυτήν η συχνότητα δεν εξαρτάται από το πλάτος ταλάντωσης.

Με την αλλαγή της μάζας, η συχνότητα γίνεται: $f' = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k}{m'}} = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k}{\frac{m}{4}}} = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{4k}{m}}$.

Βγάζουμε το 4 από τη ρίζα και: $f' = 2\cdot\frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k}{m}}$, δηλαδή $f' = 2f$.

Β) Η ενέργεια ταλάντωσης υπολογίζεται από τη σχέση: $E = \frac{1}{2}DA^2 \Rightarrow E = \frac{1}{2}kA^2$, δηλαδή είναι ανεξάρτητη της μάζας m και ανάλογη του τετραγώνου του πλάτους. Άρα:

$E' = \frac{1}{2}kA'^2 = \frac{1}{2}k(2A)^2 = 4\cdot\frac{1}{2}kA^2 \Rightarrow E' = 4E$.

Ερώτηση 3.

Δύο σημειακά σώματα, που έχουν ίσες μάζες $(m_1 = m_2 = m)$, εκτελούν απλή αρμονική ταλάντωση. Οι συχνότητες των δύο ταλαντώσεων ικανοποιούν τη σχέση $f_1 > f_2$ και τα πλάτη τη σχέση $A_2 < A_1$. Οι ενέργειες ταλάντωσης E_1 και E_2 των δύο σωμάτων 1 και 2 αντίστοιχα ικανοποιούν τη σχέση:

α) $E_1 = E_2$.

β) $E_1 > E_2$.

γ) $E_2 > E_1$.

Να επιλέξετε τις σωστή απάντηση και να αιτιολογήσετε την επιλογή σας.

<u>Λύση</u>

Σωστή απάντηση είναι η β.

Η ολική ενέργεια μιας απλής αρμονικής ταλάντωσης υπολογίζεται από τη σχέση:

$E = \frac{1}{2}DA^2 = \frac{1}{2}m\omega^2A^2 = \frac{1}{2}m4\pi^2f^2A^2 \Rightarrow E = 2m\pi^2f^2A^2$. Παρατηρούμε ότι η ολική ενέργεια είναι ανάλογη τόσο του τετραγώνου της συχνότητας όσο και του πλάτους. Άρα αφού η πρώτη ταλάντωση έχει μεγαλύτερη συχνότητα και μεγαλύτερο πλάτος, θα έχει και μεγαλύτερη ενέργεια, δηλαδή: $E_1 > E_2$.

Ερώτηση 4.

Σώμα εκτελεί αμείωτη απλή αρμονική ταλάντωση, πλάτους Α. Σε κάποια θέση της τροχιάς του, η κινητική ενέργεια είναι το 50% της ολικής του ενέργειας και η δύναμη επαναφοράς έχει θετική τιμή. Η απομάκρυνση του σώματος από τη θέση ισορροπίας, ισούται με:

α) $-\frac{\sqrt{3}}{2}A$.

β) $\frac{\sqrt{2}}{2}A$.

γ) $-\frac{\sqrt{2}}{2}A$.

Να επιλέξετε τη σωστή απάντηση και να αιτιολογήσετε την επιλογή σας.

<u>Λύση</u>

Σωστή απάντηση είναι η γ.

Η ολική ενέργεια Ε μιας αμείωτης απλής αρμονικής ταλάντωσης διατηρείται:

$K + U = E \Rightarrow K = E - U$.

Εφόσον η κινητική ενέργεια είναι το 50% της ολικής του ενέργειας: $K = \frac{50}{100}E = \frac{1}{2}E$.

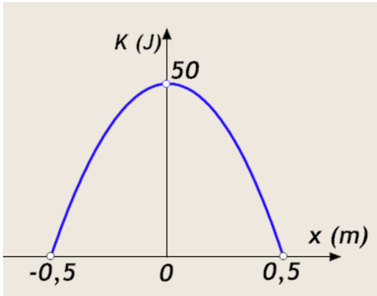
Εξισώνοντας τα 2^α μέλη έχουμε: $E - U = \frac{1}{2}E \Rightarrow U = E - \frac{1}{2}E \Rightarrow U = \frac{1}{2}E$.

Αλλά $E = \frac{1}{2}DA^2$ και $U = \frac{1}{2}Dx^2$, οπότε η προηγούμενη σχέση δίνει: $\frac{1}{2}D \cdot x^2 = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}D \cdot A^2$ και απλοποιώντας έχουμε: $x^2 = \frac{1}{2}A^2 \Rightarrow x = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}A \Rightarrow x = \pm\frac{\sqrt{2}}{2}A$.

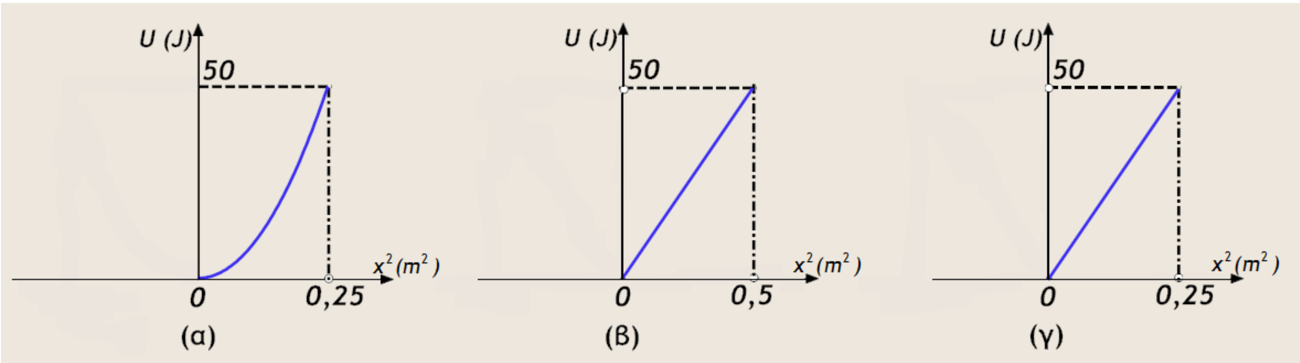
Γνωρίζουμε ότι η δύναμη επαναφοράς μιας απλής αρμονικής ταλάντωσης είναι πάντα αντίθετη της απομάκρυνσης (λόγω της συνθήκης της ταλάντωσης: $\Sigma F = -D \cdot x$). Με βάση το δεδομένο ότι η δύναμη επαναφοράς έχει θετική τιμή, συμπεραίνουμε ότι η απομάκρυνση x είναι αρνητική. Άρα από τις δύο πιθανές λύσεις της απομάκρυνσης, επιλέγουμε την αρνητική, δηλαδή: $x = -\frac{\sqrt{2}}{2}A$

Ερώτηση 5.

Στο σχήμα φαίνεται η γραφική παράσταση της κινητικής ενέργειας K ενός σώματος που εκτελεί απλή αρμονική ταλάντωση σε συνάρτηση με την απομάκρυνση x από τη Θέση Ισορροπίας του.



Η γραφική παράσταση της δυναμικής ενέργειας U σε συνάρτηση με το τετράγωνο της απομάκρυνσης x^2 είναι η:



Να επιλέξετε τις σωστή γραφική παράσταση και να αιτιολογήσετε την επιλογή σας.

<u>Λύση</u>

Σωστή απάντηση είναι η γ.

Η κινητική ενέργεια ενός αρμονικού ταλαντωτή, μεγιστοποιείται στη Θέση Ισορροπίας του $(x = 0)$. Από το διάγραμμα φαίνεται ότι το σημείο αυτό είναι το σημείο τομής με τον κατακόρυφο άξονα $(0, 50\ J)$, άρα η μέγιστη κινητική ενέργεια είναι: $K_{max} = 50\ J$. Όμως, με βάση την <u>Αρχή Διατήρησης της Ενέργειας</u> η μέγιστη κινητική ενέργεια είναι ίση και με τη μέγιστη δυναμική ενέργεια: $K_{max} = U_{max} = E$, οπότε: $U_{max} = 50\ J$.

Ο μηδενισμός της κινητικής ενέργειας γίνεται στα δύο ακρότατα ($x = -A$ και $x = +A$). Από το διάγραμμα φαίνεται ότι αυτό συμβαίνει στα σημεία τομής με τον οριζόντιο άξονα

$(-0,5,\ 0)$ και $(+0,5,\ 0)$, που είναι τα ακρότατα της ταλάντωσης. Άρα το πλάτος ταλάντωσης είναι: $A = 0,5\ m$.

Η δυναμική ενέργεια της ταλάντωσης υπολογίζεται από τη σχέση: $U = \frac{1}{2}Dx^2 = \frac{D}{2}x^2$.

Από αυτήν προκύπτει ότι η δυναμική ενέργεια U είναι ανάλογη του τετραγώνου της απομάκρυνσης, άρα η γραφική παράσταση είναι γραμμική.

Ο πίνακας τιμών είναι:

$x^2\ (m^2)$	$(-0,5)^2 = 0,25$	0	$(+0,5)^2 = 0,25$
$U\ (J)$	50	0	50

Τα παραπάνω αποδίδονται σωστά στη γραφική παράσταση (γ).

Ερώτηση 6.

Σε μία Α.Α.Τ. η κινητική ενέργεια γίνεται ίση με τη δυναμική ενέργεια ταλάντωσης κατά τη διάρκεια μίας περιόδου:

α) Δύο φορές.

β) Μία φορά.

γ) Τέσσερις φορές.

Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

Λύση

Σωστή απάντηση είναι η γ.

Γνωρίζουμε ότι: $K = U$.

Από την Αρχή Διατήρησης της Ενέργειας Ταλάντωσης προκύπτει:

$$E = K + U \overset{(K=U)}{\Rightarrow} E = U + U \Rightarrow$$

$$E = 2 \cdot U \Rightarrow \frac{1}{2} \cdot D \cdot A^2 = 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot D \cdot x^2 \Rightarrow$$

$$A^2 = 2 \cdot x^2 \Rightarrow x^2 = \frac{A^2}{2} \Rightarrow$$

$$x = \pm \frac{A}{\sqrt{2}} \Rightarrow x = \pm \frac{A\sqrt{2}}{2}$$

Άρα η κινητική ενέργεια γίνεται ίση με τη δυναμική ενέργεια τέσσερις φορές κατά τη διάρκεια μίας περιόδου.

Ερώτηση 7.

Σώμα εκτελεί Α.Α.Τ. και τη χρονική στιγμή $t=0$ βρίσκεται στη θέση ισορροπίας και η ταχύτητά του έχει αρνητικό πρόσημο. Η αρχική φάση είναι:

α) 0.

β) $\frac{\pi}{2}$.

γ) π.

Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

Λύση

Σωστή απάντηση είναι η γ.

Τη χρονική στιγμή $t=0$ το σώμα είναι στη θέση ισορροπίας δηλαδή $x=0$ και η ταχύτητά του είναι αρνητική $u<0$. Από την εξίσωση της απομάκρυνσης για $t=0$ και $x=0$ προκύπτει:

$$x=A\cdot\eta\mu(\omega\cdot t+\varphi_0)\Rightarrow 0=A\cdot\eta\mu\varphi_0\Rightarrow\ \eta\mu\varphi_0=0$$

Άρα $\varphi_0=2\cdot k\cdot\pi+0$ ή $\varphi_0=2\cdot k\cdot\pi+\pi$

Επειδή $0\le\varphi_0<2\pi$ προκύπτει ότι:

Για την 1η λύση $0\le 2\cdot k\cdot\pi<2\pi$ άρα για $k=0$ το $\varphi_0=0$

Για τη 2η λύση $0\le 2\cdot k\cdot\pi+\pi<2\pi$ άρα για $k=0$ το $\varphi_0=\pi$

Η εξίσωση της ταχύτητας για $t=0$ και $\varphi_0=0$ είναι:

$$u=u_{max}\cdot\sigma\upsilon\nu(\omega\cdot t+\varphi_0)\Rightarrow\ u=u_{max}\cdot\sigma\upsilon\nu 0\quad(\sigma\upsilon\nu 0=1)$$

Άρα $u>0$

Η εξίσωση της ταχύτητας για $t=0$ και $\varphi_0=\pi$ είναι:

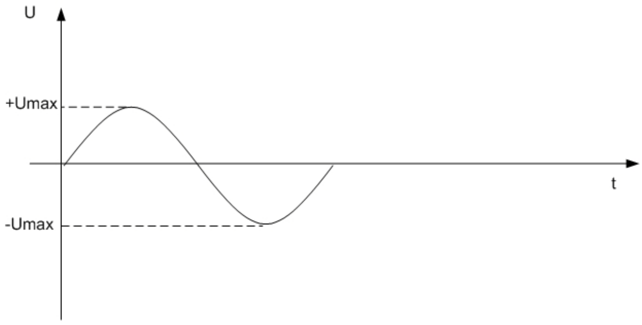
$$u=u_{max}\cdot\sigma\upsilon\nu(\omega\cdot t+\varphi_0)\Rightarrow\ u=u_{max}\cdot\sigma\upsilon\nu\pi\quad(\sigma\upsilon\nu\pi=-1)$$

Άρα $u<0$

Έτσι καταλήγουμε ότι η αρχική φάση είναι: $\varphi_0=\pi$

Ερώτηση 8.

Σώμα εκτελεί Α.Α.Τ. και στο παρακάτω σχήμα δίνεται το διάγραμμα ταχύτητας-χρόνου. Η αρχική φάση ταλάντωσης είναι:



α) $\frac{3\pi}{2}$.

β) $\frac{\pi}{2}$.

γ) π.

Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

<u>Λύση</u>

Σωστή απάντηση είναι η α.

Από το διάγραμμα ταχύτητας-χρόνου παρατηρούμε ότι τη χρονική στιγμή $t=0$ η ταχύτητα είναι μηδέν. Άρα το σώμα βρίσκεται σε μία από τις δύο ακραίες θέσεις. Επειδή η ταχύτητα μετά από $\frac{T}{4}$ είναι $+u_{max}$ καταλήγουμε ότι το σώμα τη χρονική στιγμή $t=0$ βρίσκεται στο $-A$. Άρα από την εξίσωση της απομάκρυνσης για $t=0$ και $x=-A$ προκύπτει η αρχική φάση της ταλάντωσης.

$$x = A\cdot\eta\mu(\omega t+\varphi_0) \Rightarrow \quad -A = A\cdot\eta\mu\varphi_0 \Rightarrow$$

$$\eta\mu\varphi_0 = -1 \Rightarrow \varphi_0 = 2\cdot k\cdot\pi + \frac{3\pi}{2}$$

Επειδή $0 \le \varphi_0 < 2\pi \Rightarrow 0 \le 2k\pi + \frac{3\pi}{2} < 2\pi$

Άρα για $k=0$ το $\varphi_0 = \frac{3\pi}{2}$

Ερώτηση 9.

Σώμα εκτελεί Α.Α.Τ. και τη χρονική στιγμή $t = 0$ βρίσκεται στη θέση $x = +\frac{A}{2}$ όπου A το πλάτος της ταλάντωσης και επιβραδύνεται. Η αρχική φάση της ταλάντωσης είναι:

α) $\frac{\pi}{3}$.

β) $\frac{2\pi}{3}$.

γ) $\frac{\pi}{6}$.

Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

<u>Λύση</u>

Σωστή απάντηση είναι η γ.

Τη χρονική στιγμή $t = 0$ το σώμα βρίσκεται στη θέση $x = \frac{A}{2}$. Αφού επιβραδύνεται κινείται προς το $+A$, άρα η ταχύτητά του είναι θετική $(u > 0)$. Από την εξίσωση της απομάκρυνσης για $t = 0$ και $x = +\frac{A}{2}$ προκύπτει:

$$x = A \cdot \eta\mu(\omega t + \varphi_0) \Rightarrow \quad +\frac{A}{2} = A \cdot \eta\mu\varphi_0 \Rightarrow \quad \eta\mu\varphi_0 = \frac{1}{2}.$$

Άρα $\varphi_0 = 2 \cdot k \cdot \pi + \frac{\pi}{6}$ ή $\varphi_0 = 2 \cdot k \cdot \pi + (\pi - \frac{\pi}{6}) = 2 \cdot k \cdot \pi + \frac{5\pi}{6}$

Επειδή $0 \le \varphi_0 < 2\pi$ προκύπτει ότι:

για την 1η λύση: $0 \le 2 \cdot k \cdot \pi + \frac{\pi}{6} < 2\pi$ άρα για $k = 0$ το $\varphi_0 = \frac{\pi}{6}$

για τη 2η λύση: $0 \le 2 \cdot k \cdot \pi + \frac{5\pi}{6} < 2\pi$ άρα για $k = 0$ το $\varphi_0 = \frac{5\pi}{6}$

Η εξίσωση της ταχύτητας για $t = 0$ και $\varphi_0 = \frac{\pi}{6}$ είναι:

$$u = u_{max} \cdot \sigma\upsilon\nu(\omega t + \varphi_0) \Rightarrow \quad u = u_{max} \cdot \sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{6} \quad (\sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{6} > 0)$$

Άρα $u > 0$

Η εξίσωση ταχύτητας για $t = 0$ και $\varphi_0 = \frac{5\pi}{6}$ είναι:

$u = u_{max} \cdot \sigma\upsilon\nu(\omega t + \varphi_0) \Rightarrow \quad u = u_{max} \cdot \sigma\upsilon\nu(\frac{5\pi}{6}) \;\; (\sigma\upsilon\nu\frac{5\pi}{6} < 0)$

Άρα $u < 0$

Επομένως $\varphi_0 = \frac{\pi}{6}$

Ερώτηση 10.

Να υπολογιστεί η απομάκρυνση σε μια Α.Α.Τ. όταν η δυναμική ενέργεια και η κινητική ενέργεια είναι ίσες.

Λύση

Από τη διατήρηση της ενέργειας ταλάντωσης έχουμε:

$E = K + U$ (όμως $K = U$) $\Rightarrow$

$E = U + U \Rightarrow E = 2U \Rightarrow$

$$\frac{1}{2} \cdot D \cdot A^2 = 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot D \cdot x^2 \Rightarrow$$

$$x^2 = \frac{A^2}{2} \Rightarrow \quad x = \pm \frac{A}{\sqrt{2}} \Rightarrow$$

$$x = \pm \frac{A\sqrt{2}}{2}$$

Ερώτηση 11.

Ένα σώμα συνδέεται στο ελεύθερο άκρο ενός ελατηρίου του οποίου το άλλο άκρο είναι ακλόνητα στερεωμένο. Το σύστημα εκτελεί Α.Α.Τ. με πλάτος ταλάντωσης A_1. Η σταθερά επαναφοράς του συστήματος είναι D. Αντικαθιστούμε το σώμα με ένα άλλο τετραπλάσιας μάζας το οποίο εκτελεί επίσης Α.Α.Τ. αλλά με διπλάσιο πλάτος. Η σχέση που συνδέει την ενέργεια ταλάντωσης E_1 του πρώτου σώματος με την αντίστοιχη ενέργεια ταλάντωσης E_2 του δεύτερου σώματος είναι:

α) $E_2 = 4E_1$.

β) $E_2 = 16E_1$.

γ) $E_2 = \dfrac{E_1}{4}$.

Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

<u>Λύση</u>

Για τις ενέργειες E_1 και E_2 των δύο σωμάτων ισχύει:

$$\begin{cases} E_1 = \dfrac{1}{2} \cdot D_1 \cdot A_1^2 \\ E_2 = \dfrac{1}{2} \cdot D_2 \cdot A_2^2 \end{cases}$$ Διαιρώ κατά μέλη

$$\frac{E_1}{E_2} = \frac{\frac{1}{2} \cdot D_1 \cdot A_1^2}{\frac{1}{2} \cdot D_2 \cdot A_2^2}$$ (επειδή $D_1 = D_2 = D$) $\Rightarrow$

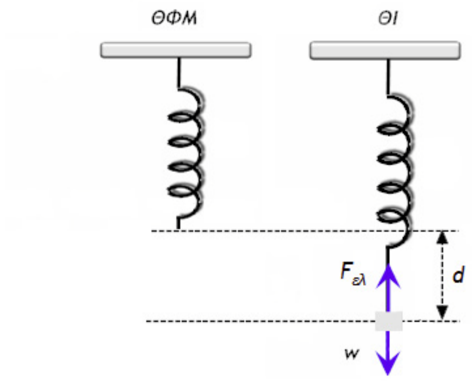
$$\frac{E_1}{E_2} = \frac{A_1^2}{(2A_1)^2}$$ (επειδή $A_2 = 2 \cdot A_1$) $\Rightarrow$

$$\frac{E_1}{E_2} = \frac{1}{4} \Rightarrow E_2 = 4E_1$$

Άρα σωστή απάντηση είναι η α.

Ερώτηση 12.

Δύο σώματα με μάζες m_1 και m_2 συνδέονται στο ελεύθερο κάτω άκρο δύο κατακόρυφων ελατηρίων των οποίων τα πάνω άκρα είναι σταθερά στερεωμένα. Για τις σταθερές των δύο ελατηρίων ισχύει $K_1 = 4K_2$. Παρατηρούμε ότι το πρώτο ελατήριο, όταν ισορροπεί το σώμα, έχει επιμηκυνθεί κατά d_1, ενώ το δεύτερο κατά $d_2 = 2d_1$. Ποια από τις παρακάτω σχέσεις ισχύει για τις συχνότητες ταλάντωσης των δύο σωμάτων (Θεωρούμε ότι και τα δύο σώματα εκτελούν Α.Α.Τ.).



α) $f_1 = \sqrt{2} \cdot f_2$.

β) $f_1 = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot f_2$.

γ) $f_1 = 4 \cdot f_2$.

Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

<u>Λύση</u>

Η συνθήκη που ισχύει στη θέση ισορροπίας για το κάθε σύστημα είναι:

$m_1 \cdot g = K_1 \cdot d_1$ (1)

$m_2 \cdot g = K_2 \cdot d_2$ (2)

Διαιρώ τις (1) και (2) κατά μέλη:

$$\frac{m_1 \cdot g}{m_2 \cdot g} = \frac{K_1 \cdot d_1}{K_2 \cdot d_2} \Rightarrow (K_1 = 4K_2 \text{ και } d_2 = 2d_1)$$

$$\frac{m_1}{m_2} = \frac{4 \cdot K_2 \cdot d_1}{K_2 \cdot 2 \cdot d_1} \Rightarrow m_1 = 2m_2 \text{ Άρα}$$

$$T_1 = 2\pi\sqrt{\frac{m_1}{K_1}} \quad (3)$$

$$T_2 = 2\pi\sqrt{\frac{m_2}{K_2}} \quad (4)$$

Διαιρώ τις (3) και (4) κατά μέλη:

$$\frac{T_1}{T_2} = \frac{2\pi\sqrt{\frac{m_1}{K_1}}}{2\pi\sqrt{\frac{m_2}{K_2}}} \Rightarrow$$

$$\frac{T_1}{T_2} = \sqrt{\frac{m_1 \cdot K_2}{m_2 \cdot K_1}} \Rightarrow (m_1 = 2m_2 \text{ και } K_1 = 4K_2)$$

$$\frac{T_1}{T_2} = \sqrt{\frac{2m_2 \cdot K_2}{m_2 \cdot 4 \cdot K_2}} \Rightarrow \quad \frac{T_1}{T_2} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

Άρα

$$\frac{T_1}{T_2} = \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \frac{\frac{1}{f_1}}{\frac{1}{f_2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \quad \frac{f_2}{f_1} = \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \quad \frac{f_1}{f_2} = \sqrt{2}$$

Άρα $f_1 = \sqrt{2} \cdot f_2$ και σωστή απάντηση είναι η α.

Ερώτηση 13.

Ένα σώμα εκτελεί Α.Α.Τ. Τη χρονική στιγμή t η απομάκρυνση του σώματος από τη θέση ισορροπίας είναι $x = -\frac{A}{2}$ όπου A το πλάτος της ταλάντωσης. Ο λόγος της κινητικής προς τη δυναμική ενέργεια ταλάντωσης τη χρονική στιγμή t είναι:

α) $\frac{1}{2}$.

β) $\frac{1}{4}$.

γ) 3.

Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

Λύση

Για να υπολογίσουμε το λόγο εργαζόμαστε ως εξής:

$$\frac{K}{U} = \frac{E-U}{U} \text{ (επειδή } E = K+U \Rightarrow K = E-U\text{)} \Rightarrow$$

$$\frac{K}{U} = \frac{\frac{1}{2}DA^2 - \frac{1}{2}Dx^2}{\frac{1}{2}Dx^2} \Rightarrow$$

$$\frac{K}{U} = \frac{\frac{1}{2}D(A^2 - x^2)}{\frac{1}{2}Dx^2} \Rightarrow$$

$$\frac{K}{U} = \frac{A^2 - x^2}{x^2} (x = -\frac{A}{2}) \Rightarrow$$

$$\frac{K}{U} = \frac{A^2 - \frac{A^2}{4}}{\frac{A^2}{4}} \Rightarrow$$

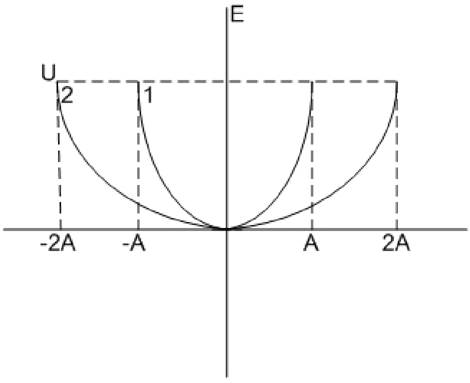
$$\frac{K}{U} = \frac{\frac{3A^2}{4}}{\frac{A^2}{4}} \Rightarrow$$

$$\frac{K}{U} = 3$$

Άρα σωστή απάντηση είναι η γ.

Ερώτηση 14.

Δύο σώματα με ίσες μάζες $m_1 = m_2$ εκτελούν Α.Α.Τ. Στο παρακάτω σχήμα φαίνονται τα διαγράμματα $U - x$ για τα δύο συστήματα. Ο λόγος των περιόδων ταλάντωσης $\frac{T_1}{T_2}$ είναι ίσος με:



α) 2.

β) $\frac{1}{2}$.

γ) $\frac{1}{4}$.

Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

Λύση

Τα δύο συστήματα έχουν την ίδια ενέργεια ταλάντωσης. Δηλαδή:

$$E_1 = E_2 \Rightarrow$$

$$\frac{1}{2} \cdot D_1 \cdot A_1^2 = \frac{1}{2} \cdot D_2 \cdot A_2^2 \quad (A_2 = 2A \text{ και } A_1 = A) \Rightarrow$$

$$D_1 \cdot A^2 = D_2 \cdot 4 \cdot A^2 \Rightarrow$$

$$D_1 = 4D_2$$

Άρα ο λόγος των περιόδων υπολογίζεται:

$$\frac{T_1}{T_2} = \frac{2\pi\sqrt{\frac{m_1}{D_1}}}{2\pi\sqrt{\frac{m_2}{D_2}}} \Rightarrow$$

$$\frac{T_1}{T_2}=\sqrt{\frac{m_1 \cdot D_2}{m_2 \cdot D_1}} \quad (m_1=m_2 \text{ και } D_1=4D_2) \Rightarrow$$

$$\frac{T_1}{T_2}=\sqrt{\frac{D_2}{4 \cdot D_2}} \Rightarrow$$

$$\frac{T_1}{T_2}=\frac{1}{2}$$

Άρα σωστή απάντηση είναι η β.

Ερώτηση 15.

Μικρό σώμα μάζας m εκτελεί Α.Α.Τ. Τη χρονική στιγμή $t=0$ βρίσκεται στη θέση $x=+\frac{A}{2}$ και επιταχύνεται. Η αρχική του φάση είναι:

α) $\frac{\pi}{6}$.

β) $\frac{5\pi}{6}$.

γ) $\frac{\pi}{3}$.

Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

<u>Λύση</u>

Τη χρονική στιγμή $t=0$ έχουμε $x=+\frac{A}{2}$ δηλαδή $x>0$. Επειδή το σώμα επιταγχύνεται σημαίνει πως κατευθύνεται προς τη θέση ισορροπίας. Άρα πηγαίνει από το $+A$ στη θέση ισορροπίας και γι'αυτό η ταχύτητα είναι αρνητική, $u<0$. Η εξίσωση της απομάκρυνσης είναι:

$x=A\cdot\eta\mu(\omega t+\varphi_0)$ (για $t=0$ και $x=+\frac{A}{2}$) $\Rightarrow$ $+\frac{A}{2}=A\cdot\eta\mu\varphi_0$

Για $\eta\mu\varphi_0=\frac{1}{2}$ προκύπτει:

$\varphi_0=2\cdot k\cdot\pi+\frac{\pi}{6}$ ή $\varphi_0=2\cdot k\cdot\pi+(\pi-\frac{\pi}{6})=2\cdot k\cdot\pi+\frac{5\pi}{6}$

Επειδή $0\le\varphi_0<2\pi$ προκύπτει ότι $k=0$

Άρα $\varphi_0=\frac{\pi}{6}$ ή $\varphi_0=\frac{5\pi}{6}$

Από την εξίσωση της ταχύτητας για $t=0$ προκύπτει:

$u=u_{max}\cdot\sigma\upsilon\nu(\omega t+\varphi_0)\Rightarrow$

$u=u_{max}\cdot\sigma\upsilon\nu\varphi_0\Rightarrow$

Άρα αν $\varphi_0=\frac{\pi}{6}$ τότε $u>0$

και αν $\varphi_0 = \frac{5\pi}{6}$ τότε $u < 0$

Άρα η αρχική φάση είναι $\varphi_0 = \frac{5\pi}{6}$ και σωστή απάντηση είναι η β.

Ερώτηση 16.

Να βρεθεί ο λόγος της κινητικής ενέργειας προς τη δυναμική ενέργεια ταλάντωσης ενός σώματος το οποίο εκτελεί Α.Α.Τ. όταν η ταχύτητά του είναι η μισή της μέγιστης ταχύτητας ταλάντωσης.

Λύση

$\frac{K}{U} = \frac{K}{E-K}$ (επειδή $E = K + U \Rightarrow U = E - K) \Rightarrow$

$$\frac{K}{U} = \frac{\frac{1}{2}m \cdot u^2}{\frac{1}{2}m \cdot u_{max}^2 - \frac{1}{2}m \cdot u^2} \Rightarrow$$

$\frac{K}{U} = \frac{\frac{1}{2}m \cdot u^2}{\frac{1}{2}m \cdot (u_{max}^2 - u^2)}$ όμως ($u = \frac{u_{max}}{2}) \Rightarrow$

$$\frac{K}{U} = \frac{\frac{u_{max}^2}{4}}{u_{max}^2 - \frac{u_{max}^2}{4}} \Rightarrow$$

$$\frac{K}{U} = \frac{\frac{u_{max}^2}{4}}{\frac{3u_{max}^2}{4}} \Rightarrow$$

$$\frac{K}{U} = \frac{1}{3}$$

ΘΕΜΑ Δ

Πρόβλημα 1.

Σφαίρα μάζας $m = 1\,kg$ ισορροπεί δεμένη στο πάνω άκρο κατακόρυφου ιδανικού ελατηρίου σταθεράς $k = 400\,N/m$, του οποίου το κάτω άκρο είναι στερεωμένο στο δάπεδο. Ανεβάζουμε τη σφαίρα κατακόρυφα προς τα πάνω και την αφήνουμε ελεύθερη, οπότε αυτή εκτελεί απλή αρμονική ταλάντωση με πλάτος $A = 0,5\,m$.

α) Να υπολογίσετε τη γωνιακή συχνότητα ω καθώς και το μέτρο της μέγιστης ταχύτητας $υ_{max}$ της σφαίρας.

β) Να γράψετε τις εξισώσεις της απομάκρυνσης και της ταχύτητας της σφαίρας σε συνάρτηση με το χρόνο. Θεωρήστε θετική φορά την προς τα πάνω και ως χρονική στιγμή $t = 0$, η στιγμή που περνά από τη θέση ισορροπίας της με φορά κίνησης προς τα κάτω.

γ) Να γράψετε την εξίσωση της δύναμης ελατηρίου στη σφαίρα σε συνάρτηση με την απομάκρυνση x. Στη συνέχεια να υπολογίσετε το μέτρο της δύναμης ελατηρίου στα δύο ακρότατα της ταλάντωσης.

δ) Να υπολογίσετε το ρυθμό μεταβολής της κινητικής ενέργειας της σφαίρας τη χρονική στιγμή $t_1 = \frac{T}{8}$.

Δίνεται η επιτάχυνση της βαρύτητας: $g = 10\,m/s^2$.

<u>Λύση</u>

α) Η γωνιακή συχνότητα ω υπολογίζεται απ' τη σχέση: $\omega = \frac{2\pi}{T} = \sqrt{\frac{D}{m}}$. Επειδή η σφαίρα εκτελεί απλή αρμονική ταλάντωση δεμένη στο κατακόρυφο ελατήριο, ισχύει ότι: $D = k$, οπότε: $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}} = \sqrt{\frac{400}{1}} rad/s \Rightarrow \omega = 20\frac{rad}{s}$.

Το μέτρο της μέγιστης ταχύτητας ταλάντωσης ισούται με: $υ_{max} = \omega \cdot A = 20 rad/s \cdot 0,5 m \Rightarrow$ $υ_0 = 10\ m/s$.

β) Για να βρω τη χρονική εξίσωση της απομάκρυνσης, αρκεί να ξέρω το πλάτος A, τη γωνιακή συχνότητα ω και την αρχική φάση $φ_0$. Γνωρίζοντας ήδη τα A και ω, αρκεί να βρω την αρχική φάση $φ_0$.

Θέτω στη χρονική εξίσωση της απομάκρυνσης: t=0 και $x_{αρχ}$=0, οπότε: $0 = A \cdot ημ(ω \cdot 0 + φ_0) \Rightarrow ημφ_0 = 0 \Rightarrow φ_0 = 0$ ή $φ_0 = π$.

Επιπλέον, με βάση την εκφώνηση, η ταχύτητα ($υ = υ_{max}συνφ_0$) είναι αρνητική. Επειδή $υ = υ_{max}συν0 > 0$ και $υ = υ_{max}συνπ < 0$, δεχόμαστε ως αρχική φάση την $φ_0 = π$.

Άρα οι ζητούμενες εξισώσεις είναι: $x = 0,5 \cdot ημ(20t + π)$ και $υ = 10 \cdot συν(20t + π)$ (και οι δύο στο S.I.).

γ) Τοποθετούμε τη σφαίρα σε μια τυχαία θέση θετικής απομάκρυνσης x. Οι δυνάμεις που ασκούνται είναι το βάρος w, που είναι κατακόρυφο προς τα κάτω (άρα έχει αρνητική αλγεβρική τιμή, γιατί θετική φορά είναι η προς τα πάνω) και η $F_{ελ}$, η οποία τοποθετείται αυθαίρετα στη θετική φορά. Η συνισταμένη τους είναι η δύναμη επαναφοράς και θα ικανοποιεί τη Συνθήκη της απλής αρμονικής ταλάντωσης:

$ΣF = -D \cdot x \Rightarrow F_{ελ} - w = -k \cdot x \Rightarrow F_{ελ} = mg - k \cdot x$ και αντικαθιστώντας στο S.I.: $F_{ελ} = 10 - 400 \cdot x$.

Στο κάτω ακρότατο της ταλάντωσης, η σφαίρα έχει απομάκρυνση $χ = -A$, οπότε αντικαθιστώντας στη σχέση που βρήκαμε, έχουμε: $F_{ελ,(-A)} = 10N - 400N/m \cdot (-0,5)m = (10 + 200)N \Rightarrow F_{ελ,(-A)} = +210\ N$. Το πρόσημο (+) δείχνει ότι η $F_{ελ}$ έχει φορά προς τα πάνω.

Στο πάνω ακρότατο, η σφαίρα έχει απομάκρυνση $x = +A$, οπότε αντικαθιστώντας στη σχέση που βρήκαμε, έχουμε: $F_{ελ,(+A)} = 10N - 400N/m \cdot 0,5m = (10 - 200)N \Rightarrow$ $F_{ελ,(+A)} = -190\ N$. Το πρόσημο (-) δείχνει ότι η $F_{ελ}$ έχει φορά προς τα κάτω.

Σχόλιο: Παρατηρήστε ότι και στις δύο περιπτώσεις, η $F_{ελ}$ έχει φορά προς τη Θ.Φ.Μ., όπως αναμέναμε.

δ) Ο ρυθμός μεταβολής της κινητικής ενέργειας υπολογίζεται ως εξής:

$$\frac{dK}{dt} = \frac{dW_{ΣF}}{dt} = \frac{ΣF \cdot dx}{dt} = ΣF\frac{dx}{dt} = ΣF \cdot υ = -k \cdot x \cdot υ .$$

Αρκεί λοιπόν να υπολογίσω την απομάκρυνση και την ταχύτητα τη χρονική στιγμή $t_1 = \frac{T}{8}$.

Η απομάκρυνση: $x_1 = 0,5ημ(ωt_1 + π) = 0,5ημ(\frac{2π}{\cancel{T}} \cdot \frac{\cancel{T}}{8} + π) = 0,5ημ(\frac{π}{4} + π) = -0,5\frac{\sqrt{2}}{2}m$

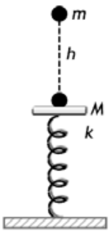
και η ταχύτητα: $υ_1 = 10συν(ωt_1 + π) = 10συν(\frac{2π}{\cancel{T}} \cdot \frac{\cancel{T}}{8} + π) = 10συν(\frac{π}{4} + π) = -10\frac{\sqrt{2}}{2}m/s$.

Έτσι τη χρονική στιγμή t_1, $\frac{dK}{dt} = -400N/m \cdot (-0,5\frac{\sqrt{2}}{2})m \cdot (-10\frac{\sqrt{2}}{2})m/s \Rightarrow$

$\frac{dK}{dt} = -1000\frac{J}{s}$

Πρόβλημα 2.

Δίσκος μάζας $M = 1\,kg$ είναι συνδεδεμένος στο πάνω άκρο κατακόρυφου ιδανικού ελατηρίου σταθεράς $k = 200\,N/m$. Το κάτω άκρο του ελατηρίου στερεώνεται σε ακλόνητο σημείο του δαπέδου. Από ύψος $h = 0{,}15\,m$ πάνω από το δίσκο αφήνεται να πέσει ελεύθερο ένα σφαιρίδιο πλαστελίνης μάζας $m = 1\,kg$, το οποίο συγκρούεται με το δίσκο μετωπικά και πλαστικά. Το συσσωμάτωμα εκτελεί απλή αρμονική ταλάντωση. Θεωρείστε την αντίσταση του αέρα και τη διάρκεια της κρούσης αμελητέες.



α) Να υπολογίσετε το μέτρο της ταχύτητας του σφαιριδίου ελάχιστα πριν την κρούση.

β) Να υπολογίσετε το πλάτος της ταλάντωσης του συστήματος. Δίνεται η $g = 10\,m/s^2$.

γ) Να υπολογίσετε το μέτρο της δύναμης επαναφοράς καθώς και το μέτρο της δύναμης του ελατηρίου στο κατώτερο σημείο της ταλάντωσης του συσσωματώματος.

δ) Να γράψετε την εξίσωση της δυναμικής ενέργειας ταλάντωσης του συσσωματώματος σε συνάρτηση με το χρόνο.

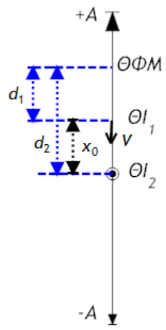
<u>Λύση</u>

α) Κατά τη διάρκεια της ελεύθερης πτώσης της σφαίρας η <u>Μηχανική της ενέργεια διατηρείται</u>. Θεωρώντας ως θέση (0) την αρχική, όπου αφήνεται ελεύθερο το σφαιρίδιο (άρα $K_0 = 0$), ως θέση (1) ελάχιστα πριν κτυπήσει στο δίσκο και ως επίπεδο αναφοράς το δίσκο (άρα $U_1 = 0$), έχουμε:

$$K_0 + U_0 = K_1 + U_1 \Rightarrow 0 + mgh = \frac{1}{2}m\upsilon_1^2 + 0 \Rightarrow \cancel{m}\upsilon_1^2 = 2\cancel{m}gh \Rightarrow \upsilon_1^2 = 2gh \Rightarrow$$
$$\upsilon_1 = \sqrt{2gh} = \sqrt{2 \cdot 10m/s^2 \cdot 0{,}15m} \Rightarrow \upsilon_1 = \sqrt{3}\,{}^{m}\!/_{s}\,.$$

β) Εφαρμόζω τη <u>Διατήρηση της ολικής Ορμής</u> ($p_{ολ} = p'_{ολ}$) για την πλαστική κρούση των $m - M$, για να βρω την ταχύτητα του συσσωματώματος, αμέσως μετά την κρούση. Θεωρώντας θετική τη φορά προς τα κάτω έχουμε:

$$m\upsilon_1 + M \cdot 0 = (m + M)V \Rightarrow V = \frac{mu_1}{m + M} \Rightarrow V = \frac{1kg \cdot \sqrt{3}m/s}{1kg + 1kg} \Rightarrow V = \frac{\sqrt{3}}{2}\,{}^{m}\!/_{s}$$



Ο δίσκος μάζας Μ ισορροπούσε, πριν την κρούση, στη θέση ισορροπίας 1 ($ΘΙ_1$), η οποία απέχει d_1 από τη Θέση Φυσικού Μήκους (ΘΦΜ) του ελατηρίου. Στη θέση αυτή <u>ισχύει η συνθήκη ισορροπίας</u>:

$$\Sigma F = 0 \Rightarrow F_{\varepsilon\lambda,(1)} - Mg = 0 \Rightarrow F_{\varepsilon\lambda,(1)} = Mg \Rightarrow kd_1 = Mg \Rightarrow$$

$$d_1 = \frac{Mg}{k} \Rightarrow d_1 = \frac{1kg \cdot 1\cancel{0} m/s^2}{20\cancel{0} N/m} \Rightarrow d_1 = \frac{1}{20} m =$$

$$= 0,05 \text{ m}$$

Το συσσωμάτωμα που δημιουργείται μετά την κρούση εκτελεί απλή αρμονική ταλάντωση με D=k=200 N/m γύρω από Νέα Θέση Ισορροπίας ($ΘΙ_2$), η οποία βρίσκεται κάτω απ' τη $ΘΙ_1$ και απέχει απόσταση d_2 από τη ΘΦΜ.

Στη Θ.Ι.$_2$ <u>ισχύει η συνθήκη ισορροπίας</u>:

$$\Sigma F = 0 \Rightarrow F_{\varepsilon\lambda,(2)} - (M+m)g = 0 \Rightarrow F_{\varepsilon\lambda,(2)} = (M+m)g \Rightarrow kd_2 = (M+m)g \Rightarrow$$

$$d_2 = \frac{(m+M)}{k} g = \frac{2kg \cdot 1\cancel{0} m/s^2}{20\cancel{0} N/m} \Rightarrow d_2 = \frac{1}{10} \text{ m} = 0,1 \text{ m} .$$

Για την αρμονική ταλάντωση του συσσωματώματος, εφαρμόζω τη <u>Διατήρηση της Ενέργειας</u>, εξισώνοντας την κινητική και δυναμική ενέργεια της ταλάντωσης στη θέση της κρούσης (που είναι η θέση εκκίνησης της ταλάντωσης) με την ολική ενέργεια Ε της ταλάντωσης. Αμέσως μετά την κρούση, το συσσωμάτωμα απέχει $x_o = d_2 - d_1 = \frac{1}{10} - \frac{1}{20} = \frac{1}{20}$ m, από τη $ΘΙ_2$ και έχει ταχύτητα V, άρα:

$$U + K = E \Rightarrow \frac{1}{2}kx_o{}^2 + \frac{1}{2}(m+M)V^2 = \frac{1}{2}kA^2 \Rightarrow kx_o{}^2 + V^2(m+M) = kA^2 \Rightarrow$$

$$A^2 = \frac{kx_o{}^2 + (m+M)V^2}{k} = \frac{\cancel{k}x_o{}^2}{\cancel{k}} + \frac{(m+M)V^2}{k} \Rightarrow$$

$$A=\sqrt{x_0^2+\frac{(m+M)V^2}{k}}=\sqrt{0,05^2m^2+\frac{2kg\cdot\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2m^2/s^2}{200N/m}}=\sqrt{\frac{1}{400}+\frac{2\frac{3}{4}}{200}}m=$$

$$=\sqrt{\frac{1}{400}+\frac{3}{400}}m=\sqrt{\frac{4}{400}}m==\frac{1}{10}m\Rightarrow A=0,1\,m\,.$$

<u>Σχόλιο</u>: Προσέξτε τη διαφορά στις δυναμικές ενέργειες:

✓Δυναμική ενέργεια ταλάντωσης: $U=\frac{1}{2}Dx^2$, όπου το x μετριέται από τη ΘΙ,

✓Δυναμική ενέργεια ελατηρίου: $U_{\varepsilon\lambda}=\frac{1}{2}kl^2$, όπου το l μετριέται από τη ΘΦΜ του ελατηρίου,

✓ Βαρυτική δυναμική ενέργεια: $U_{\beta\alpha\rho}=mg\cdot h$, όπου h είναι το ύψος του σώματος από ορισμένο επίπεδο αναφοράς.

Η Δυναμική ενέργεια της ταλάντωσης «εμπεριέχει» τη δυναμική ενέργεια ελατηρίου και τη βαρυτική δυναμική ενέργεια.

γ) Το μέτρο της δύναμης επαναφοράς δίνεται από τη σχέση: $F=D\cdot x=k\cdot x$, (θυμηθείτε ότι στο παράδειγμα 1, του σχολικού βιβλίου, έχουμε αποδείξει ότι D=k) δηλαδή είναι ανάλογο της απομάκρυνσης x από τη $ΘΙ_2$, συνεπώς γίνεται μέγιστο στα ακρότατα της ταλάντωσης. Έτσι: $F_{max}=k\cdot A=200N/m\cdot 0,1m\Rightarrow F_{max}=20\ N$.

Η Δύναμη του ελατηρίου έχει μέγιστο μέτρο στη θέση που το ελατήριο εμφανίζει τη μέγιστη απόσταση από τη Θ.Φ.Μ. του, δηλαδή στην κατώτερη θέση της ταλάντωσης. Άρα:

$$F_{\varepsilon\lambda,max}=k\cdot\Delta l_{max}=200N/m\left(d_2+A\right)m=200\left(0,1+0,1\right)N\Rightarrow F_{\varepsilon\lambda,max}=40\ N\,.$$

δ) Η δυναμική ενέργεια της ταλάντωσης δίνεται από τη σχέση: $U=\frac{1}{2}Dx^2=\frac{1}{2}kx^2$. Συνεπώς, χρειάζεται να βρούμε τη χρονική εξίσωση της απομάκρυνσης: $x=A\eta\mu(\omega t+\varphi_0)$. Ήδη γνωρίζουμε το πλάτος A=0,1 m, οπότε πρέπει να βρούμε τη γωνιακή συχνότητα ω και την αρχική φάση φ_0.

Η γωνιακή συχνότητα: $\omega=\sqrt{\frac{D}{M+m}}=\sqrt{\frac{200}{2}}\,{rad}/{s}=\sqrt{100}\,{rad}/{s}\Rightarrow\omega=10\,{rad}/{s}$.

Για την αρχική φάση, θέτω στην χρονική εξίσωση της απομάκρυνσης: $x = A\eta\mu(\omega t + \varphi_0)$, $t = 0$ και $x = 0,05m$, επειδή το συσσωμάτωμα κινείται προς τα κάτω πρέπει η ταχύτητα να είναι αρνητική, οπότε:

$$0,05 = 0,1\eta\mu\varphi_0 \Rightarrow \eta\mu\varphi_0 = \frac{0,05}{0,1} = \frac{1}{2} \Rightarrow \eta\mu\varphi_0 = \eta\mu\frac{\pi}{6} \Rightarrow \varphi_0 = 2k\pi + \frac{\pi}{6} \text{ ή } \varphi_0 = 2k\pi + \pi - \frac{\pi}{6}.$$

Επειδή για την αρχική φάση πρέπει να ισχύει: $0 \leq \varphi_0 < 2\pi$, θα είναι και στις δύο λύσεις το k=0, δηλαδή: $\varphi_0 = \frac{\pi}{6}$ ή $\varphi_0 = \pi - \frac{\pi}{6} = \frac{5\pi}{6}$.

Η 1η λύση δίνει για την ταχύτητα: $\upsilon = \upsilon_{max}\sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{6} > 0$ και (φυσικά) η 2η

$\upsilon = \upsilon_{max}\sigma\upsilon\nu\frac{5\pi}{6} < 0$. Συνεπώς δεχόμαστε τη 2η λύση: $\varphi_0 = \frac{5\pi}{6}$.

Η εξίσωση της απομάκρυνσης είναι: $x = 0,1\eta\mu(10t + \frac{5\pi}{6})$ (στο S.I.) και αντικαθιστώντας στη σχέση της δυναμικής ενέργειας ταλάντωσης, βρίσκουμε τελικά:

$$U = \frac{1}{2}kx^2 = \frac{1}{2}200 \cdot 0,01\eta\mu^2(10t + \frac{5\pi}{6}) = 1 \cdot \eta\mu^2(10t + \frac{5\pi}{6}) \Rightarrow U = \eta\mu^2(10t + \frac{5\pi}{6}) \text{ (στο S.I.).}$$

Ημερομηνία τροποποίησης: 20/07/2011

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1ο: ΜΗΧΑΝΙΚΗ ΣΤΕΡΕΟΥ ΣΩΜΑΤΟΣ

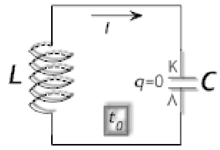
ΕΝΟΤΗΤΑ 2: ΗΛΕΚΤΡΙΚΕΣ ΤΑΛΑΝΤΩΣΕΙΣ

ΛΥΜΕΝΑ ΘΕΜΑΤΑ

ΘΕΜΑ Β

Ερώτηση 1.

Το ιδανικό κύκλωμα *LC* του σχήματος εκτελεί αμείωτες ηλεκτρικές ταλαντώσεις, με περίοδο *T*. Τη χρονική στιγμή t_0 ο πυκνωτής είναι αφόρτιστος και το κύκλωμα διαρρέεται από ρεύμα με τη φορά που έχει σχεδιαστεί στο σχήμα.



Τη χρονική στιγμή $t_1 = t_0 + \frac{T}{2}$, η ένταση του ρεύματος θα είναι:

α) μέγιστη με τη φορά του σχήματος.
β) μηδέν.
γ) μέγιστη με φορά αντίθετη από αυτήν του σχήματος.

Να επιλέξετε τη σωστή πρόταση. Να αιτιολογήσετε την επιλογή σας.

<u>Λύση</u>

Σωστή απάντηση είναι η (γ).
Επειδή τη χρονική στιγμή t_0, ο πυκνωτής είναι αφόρτιστος, το ρεύμα στο κύκλωμα είναι μέγιστο.

Γνωρίζουμε ότι το ρεύμα μετά από $\frac{T}{4}$ θα μηδενιστεί. Αμέσως μετά θα αλλάξει φορά και θα μεγιστοποιηθεί σε επιπλέον χρονικό διάστημα $\frac{T}{4}$. Έτσι τη χρονική στιγμή $t_1 = t_0 + \frac{2T}{4} = t_0 + \frac{T}{2}$ η ένταση του ρεύματος γίνεται μέγιστη με φορά αντίθετη της αρχικής.
Συνεπώς, Σωστή απάντηση είναι η (γ).

Ερώτηση 2.

Ένα ιδανικό κύκλωμα *LC* (1) έχει πυκνωτή με χωρητικότητα *C* και πηνίο με συντελεστή αυτεπαγωγής *L*, ενώ ένα άλλο ιδανικό κύκλωμα *LC* (2) έχει τον ίδιο πυκνωτή, αλλά πηνίο με συντελεστή αυτεπαγωγής 4*L*. Φορτίζουμε τον πυκνωτή του κυκλώματος (1) με πηγή τάσης *V* και τον πυκνωτή του κυκλώματος (2) με πηγή τάσης 2*V* και τα διεγείρουμε ώστε να εκτελούν αμείωτες ηλεκτρικές ταλαντώσεις.

Ο λόγος των πλατών των εντάσεων των ρευμάτων στα δύο κυκλώματα $\frac{I_1}{I_2}$ ισούται με:

α) $\frac{1}{2}$.

β) 1.

γ) 2.

Ποια είναι η σωστή πρόταση; Να αιτιολογήσετε την επιλογή σας.

Λύση

Σωστή απάντηση είναι η (β).

Γνωρίζουμε ότι το πλάτος έντασης ρεύματος I με το πλάτος φορτίου Q, συνδέονται με τη σχέση: $I = \omega \cdot Q$. Αλλά η γωνιακή συχνότητα ισούται με: $\omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi}{2\pi\sqrt{LC}} = \frac{1}{\sqrt{LC}}$ και το πλάτος φορτίου ισούται με: $Q = CV$. Έτσι το πλάτος έντασης ρεύματος θα υπολογιστεί απ' τη σχέση: $I = \frac{CV}{\sqrt{LC}}$.

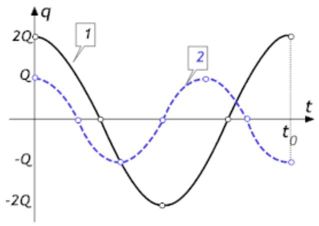
Εφαρμόζουμε τον τύπο αυτό για κάθε κύκλωμα: $I_1 = \frac{CV}{\sqrt{LC}}$ και

$I_2 = \frac{C \cdot 2V}{\sqrt{4LC}} = \frac{C \cdot 2V}{2\sqrt{LC}} = \frac{2}{2} \cdot \frac{CV}{\sqrt{LC}} = \frac{CV}{\sqrt{LC}}$. Άρα $I_1 = I_2$ και ο ζητούμενος λόγος $\frac{I_1}{I_2} = 1$.

Συνεπώς, Σωστή απάντηση είναι η (β).

Ερώτηση 3.

Στο σχήμα φαίνονται οι γραφικές παραστάσεις των χρονικών εξισώσεων φορτίου q - t , στη χρονική διάρκεια 0 έως t_0, για δύο ιδανικά κυκλώματα LC. Οι συντελεστές αυτεπαγωγής των πηνίων στα δύο κυκλώματα συνδέονται με τη σχέση L_2=4L.



Η σχέση που συνδέει τις χωρητικότητες των δύο πυκνωτών είναι η:

α) $C_2 = \frac{C}{9}$.

β) $C_2 = \frac{C}{4}$.

γ) $C_2 = \frac{C}{3}$.

Ποια είναι η σωστή πρόταση; Να αιτιολογήσετε την επιλογή σας.

<u>Λύση</u>

Σωστή απάντηση είναι η (α).

Απ' το διάγραμμα φαίνεται (εστιάζοντας στον οριζόντιο άξονα των t) ότι στη διάρκεια 0 – t_0 γίνεται μια πλήρης ταλάντωση στο κύκλωμα (1) και μιάμιση στο κύκλωμα (2). Άρα: $T_1 = \frac{3}{2}T_2$. Αντικαθιστώντας σ' αυτήν την σχέση τον τύπο που δίνει την περίοδο ταλάντωσης$\left(T = 2\pi\sqrt{LC}\right)$, έχουμε:

$\cancel{2}\cancel{\pi}\sqrt{LC} = \frac{3}{2}\cancel{2}\cancel{\pi}\sqrt{L_2C_2} \Rightarrow \sqrt{LC} = \frac{3}{2}\sqrt{4LC_2}$. Συνεχίζουμε υψώνοντας στο τετράγωνο: $\cancel{L}C = \frac{9}{\cancel{4}}\cancel{4}\cancel{L}C_2 \Rightarrow C_2 = \frac{C}{9}$.

Συνεπώς, Σωστή απάντηση είναι η (α).

ΘΕΜΑ Γ

Άσκηση 1.

Ιδανικό κύκλωμα περιλαμβάνει πυκνωτή χωρητικότητας *C=40μF*, ιδανικό πηνίο με συντελεστή αυτεπαγωγής *L*=4mH και διακόπτη, που είναι αρχικά ανοικτός. Φορτίζουμε τον πυκνωτή σε τάση *V*=100V και τη χρονική στιγμή *t*=0 κλείνουμε το διακόπτη, οπότε το κύκλωμα εκτελεί αμείωτες ηλεκτρικές ταλαντώσεις.

α) Να υπολογίσετε τη γωνιακή συχνότητα της ταλάντωσης.

β) Να υπολογίσετε την μέγιστη τιμή της έντασης του ρεύματος που διαρρέει το πηνίο.

γ) Να γράψετε τις εξισώσεις q=f(t) και i=f(t).

δ) Να υπολογίσετε την (ολική) ενέργεια της ταλάντωσης.

<u>Λύση</u>

α) Η γωνιακή συχνότητα βρίσκεται από τη σχέση

$$\omega = \frac{1}{\sqrt{LC}} = \frac{1}{\sqrt{40 \cdot 10^{-6} \cdot 4 \cdot 10^{-3}}} \mathrm{rad/s} \Rightarrow \omega = 2500 \mathrm{rad/s}$$

β) Γνωρίζουμε ότι $I = \omega Q$

$$Q = VC = 100\mathrm{V} \cdot 40 \cdot 10^{-6}\mathrm{F} \Rightarrow Q = 4 \cdot 10^{-3}\mathrm{C}$$

Άρα $I = \omega Q = 2500 \mathrm{rad/s} \cdot 4 \cdot 10^{-3}\mathrm{C} = 10\mathrm{A}$

γ) Επειδή τη χρονική στιγμή t=0 ο πυκνωτής έχει μέγιστο φορτίο, δεν υπάρχει αρχική φάση. Οπότε οι ζητούμενες σχέσεις θα είναι : $q = Q\sigma\upsilon\nu\omega t = 4 \cdot 10^{-3} \sigma\upsilon\nu 2500t$ (SI)

$i = -I\eta\mu\omega t = -10\eta\mu 2500t$ (SI)

δ) Η ολική ενέργεια της ταλάντωσης υπολογίζεται είτε ως μέγιστη ενέργεια ηλεκτρικού πεδίου του πυκνωτή, είτε ως μέγιστη ενέργεια μαγνητικού πεδίου του πηνίου:

$$E = \frac{LI^2}{2} = \frac{4 \cdot 10^{-3}\,\mathrm{H} \cdot 10^2\,\mathrm{A}^2}{2} \Rightarrow E = 0,2\mathrm{J}$$ ή

$$U_E = \frac{CV^2}{2} = \frac{40 \cdot 10^{-6}\mathrm{F} \cdot (100)^2\,\mathrm{V}^2}{2} \Rightarrow U_E = 0,2\mathrm{J}$$

Άσκηση 2.

Σε ένα ιδανικό ηλεκτρικό κύκλωμα LC το πηνίο έχει συντελεστή αυτεπαγωγής $L = 4\ mH$, ενώ ο πυκνωτής έχει χωρητικότητα $C = 160\ \mu F$. Στο κύκλωμα υπάρχει διακόπτης Δ, ο οποίος αρχικά είναι ανοικτός. Ο πυκνωτής φορτίζεται πλήρως και τη χρονική στιγμή $t = 0$ ο διακόπτης κλείνει, οπότε το κύκλωμα κάνει αμείωτη ηλεκτρική ταλάντωση. Η ολική ενέργεια του κυκλώματος είναι $E = 2 \cdot 10^{-5}\ J$.

Να υπολογίσετε:

α) Την περίοδο T της ταλάντωσης.

β) Τη μέγιστη τιμή της έντασης του ρεύματος στο κύκλωμα.

γ) Το φορτίο του πυκνωτή τη χρονική στιγμή t_1, κατά την οποία η ενέργεια του ηλεκτρικού πεδίου του πυκνωτή γίνεται για δεύτερη φορά ίση με την ενέργεια του μαγνητικού πεδίου στο πηνίο.

δ) Την παραπάνω χρονική στιγμή t_1.

<u>Λύση</u>

Αρχικά μετατρέπουμε στο SI τα δεδομένα μας:

$$L = 4\ mH \Rightarrow L = 4 \cdot 10^{-3}\ H$$

$$C = 160\ \mu F \Rightarrow C = 160 \cdot 10^{-6}\ F$$

α) Η περίοδος ταλάντωσης υπολογίζεται από τη σχέση $T = 2\pi\sqrt{LC}$.

Με αντικατάσταση των τιμών, έχουμε:

$$T = 2\pi\sqrt{LC} = 2\pi\sqrt{4 \cdot 10^{-3} H \cdot 160 \cdot 10^{-6} F} = 2\pi\sqrt{4 \cdot 16 \cdot 10 \cdot 10^{-8}}\ s \Rightarrow$$

$$\boxed{T = 16\pi \cdot 10^{-4}\ s}$$

β) Από τον τύπο της ολικής ενέργειας $E = \frac{1}{2}LI^2$ έχουμε:

$$I^2 = \frac{2E}{L} \Rightarrow I^2 = \frac{2 \cdot 2 \cdot 10^{-5} J}{4 \cdot 10^{-3} H} \Rightarrow I^2 = 10^{-2} A^2$$

$$\boxed{I = 0{,}1\ A}$$

γ) Αφού οι ενέργειες U_E και U_B πρέπει να είναι ίσες, θα ισχύει:

$U_E = U_B$

Επειδή ψάχνουμε φορτίο q, το οποίο υπάρχει στην εξίσωση της U_E, θα κρατήσουμε την U_E και θα αλλάξουμε την U_B με $E - U_E$, από την αρχή διατήρησης της ενέργειας:

$$U_E = E - U_E \Rightarrow 2U_E = E \Rightarrow 2\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{q^2}{C} = \frac{1}{2}\frac{Q^2}{C} \Rightarrow q^2 = \frac{Q^2}{2} \Rightarrow |q| = \frac{Q}{\sqrt{2}} \Rightarrow |q| = \frac{Q\sqrt{2}}{2} \Rightarrow$$

$$|q| = \frac{Q\sqrt{2}}{2} \quad (1)$$

Από τον τύπο $E = \frac{1}{2}\frac{Q^2}{C}$ υπολογίζουμε το πλάτος φορτίου Q:

$$Q^2 = 2\cdot E\cdot C = 2\cdot 2\cdot 10^{-5}\,J\cdot 160\cdot 10^{-6}\,F = 4\cdot 16\cdot 10^{-10}\,C^2 \Rightarrow$$

$$Q = 8\cdot 10^{-5}\,C \quad (2)$$

Από τις (1) και (2), έχουμε: $|q| = \frac{8\cdot 10^{-5}\cdot\sqrt{2}C}{2} \Rightarrow$

$$\boxed{|q| = 4\sqrt{2}\cdot 10^{-5}\,C}$$

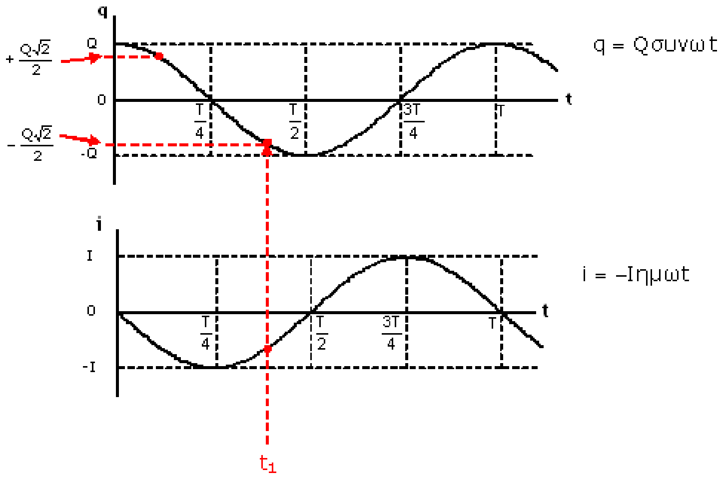
δ) Αν θεωρήσουμε ότι μελετάμε το φορτίο του οπλισμού που τη στιγμή $t = 0$ ήταν θετικά φορτισμένος, τότε ισχύει: $t = 0 \rightarrow q = +Q$ και $i = 0$. Τότε η εξίσωση $q = Q\cdot\eta\mu(\omega t + \phi_0)$ γράφεται $q = Q\cdot\sigma\upsilon\nu\omega t$, ενώ η εξίσωση $i = I\cdot\sigma\upsilon\nu(\omega t + \phi_0)$ γράφεται $i = -I\cdot\eta\mu\omega t$.

Αρχικά υπολογίζουμε τη γωνιακή συχνότητα ω: $\omega = \frac{2\pi}{T} \Rightarrow \omega = \frac{2\pi}{16\pi\cdot 10^{-4}s} \Rightarrow \omega = \frac{10^4}{8}\frac{rad}{s}$.

Από το ερώτημα γ) γνωρίζουμε ότι όταν οι ενέργειες U_E και U_B είναι ίσες, το φορτίο του πυκνωτή πρέπει να είναι ίσο με: $|q| = \frac{Q\sqrt{2}}{2} \Rightarrow q = \pm\frac{Q\sqrt{2}}{2}$

Από τις γραφικές παραστάσεις $q - t$ και $i - t$ φαίνεται ότι τη στιγμή t_1 κατά την οποία $U_E = U_B$ για 2η φορά ισχύει ότι: $q = -\frac{Q\sqrt{2}}{2}$

$i < 0$



Επομένως, θα έχουμε:

$$-\frac{Q\sqrt{2}}{2}=Q\cdot\sigma\upsilon\nu\omega t\Rightarrow\sigma\upsilon\nu\omega t=-\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$i<0\Rightarrow -I\cdot\eta\mu\omega t<0\Rightarrow \eta\mu\omega t>0$$

Η τριγωνομετρική επίλυση δίνει:

$$\omega t=2k\pi+\frac{3\pi}{4}\Rightarrow\frac{2\pi}{T}t=2k\pi+\frac{3\pi}{4}\Rightarrow t=\left(2k\pi+\frac{3\pi}{4}\right)\cdot\frac{T}{2\pi}\Rightarrow t=\frac{2k\pi T}{2\pi}+\frac{3\pi T}{8\pi}\Rightarrow t=kT+\frac{3T}{8}$$

Επειδή βρισκόμαστε στην 1η περίοδο ταλάντωσης, πρέπει $0\le t_1<T$:

$$0\le t<T\Rightarrow 0\le kT+\frac{3T}{8}<T\Rightarrow -\frac{3T}{8}\le kT<T-\frac{3T}{8}\Rightarrow -\frac{3T}{8}\le kT<\frac{5T}{8}\Rightarrow -\frac{3}{8}\le k<\frac{5}{8}$$

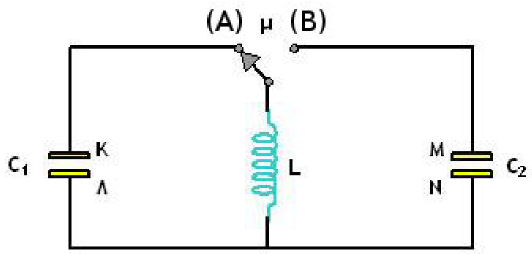
Ο μόνος ακέραιος που ικανοποιεί την παραπάνω ανισωτική σχέση είναι: $k=0$.

Άρα: $t_1=kT+\frac{3T}{8}\Rightarrow t_1=\frac{3T}{8}\Rightarrow t_1=\frac{3\cdot 16\,\pi\cdot 10^{-4}\,s}{8}\Rightarrow$

$$\boxed{t_1=6\pi\cdot 10^{-4}\ s}$$

Άσκηση 3.

Στο κύκλωμα του σχήματος το πηνίο έχει συντελεστή αυτεπαγωγής $L = 10\,mH$, ο πυκνωτής 1 έχει χωρητικότητα $C_1 = 4\,\mu F$, ενώ ο πυκνωτής 2 έχει χωρητικότητα $C_2 = 16\,\mu F$. Αρχικά ο μεταγωγός μ βρίσκεται στη θέση (Α) και το κύκλωμα LC_1 εκτελεί αμείωτη ηλεκτρική ταλάντωση με ολική ενέργεια $E_1 = 8 \cdot 10^{-6}\,J$, ενώ ο πυκνωτής 2 είναι αφόρτιστος.



Τη χρονική στιγμή t_1 ο πυκνωτής 1 είναι πλήρως φορτισμένος, με τον οπλισμό Κ να είναι θετικά φορτισμένος. Τη χρονική στιγμή, όπου $t_2 = t_1 + \frac{3T_1}{4}$, όπου T_1 η περίοδος της ηλεκτρικής ταλάντωσης του κυκλώματος LC_1, μεταφέρουμε ακαριαία τον μεταγωγό στη θέση (Β) χωρίς να προκληθεί σπινθήρας και το κύκλωμα LC_2 ξεκινά αμείωτη ηλεκτρική ταλάντωση.

Να υπολογίσετε:

α) το πλάτος φορτίου Q_1 στον πυκνωτή 1.

β) το πλάτος της έντασης I_2 στο κύκλωμα LC_2.

γ) τη μέγιστη ΗΕΔ από αυτεπαγωγή στα άκρα του πηνίου στο κύκλωμα LC_2.

Να εξηγήσετε:

δ) ποιός από τους οπλισμούς M, N του πυκνωτή 2 φορτίζεται πρώτος θετικά, όταν το κύκλωμα LC_2 ξεκινήσει ηλεκτρική ταλάντωση.

<u>Λύση</u>

Αρχικά μετατρέπουμε στο SI τα δεδομένα μας:

$L = 10\,mH \Rightarrow L = 10^{-2}\,H$

$C_1 = 4\,\mu F \Rightarrow C_1 = 4 \cdot 10^{-6}\,F$

$C_2 = 16\,\mu F \Rightarrow C_2 = 16 \cdot 10^{-6}\,F$

α) Από τον τύπο της ολικής ενέργειας $E_1 = \frac{1}{2}\cdot\frac{Q_1^2}{C_1}$ έχουμε:

$$Q_1^2 = 2E_1C_1 = 2\cdot 8\cdot 10^{-6}\,J\cdot 4\cdot 10^{-6}\,F \Rightarrow$$

$$\boxed{Q_1 = 8\cdot 10^{-6}\ C}$$

β) Επειδή τη στιγμή t_1 ο πυκνωτής C_1 είναι πλήρως φορτισμένος με θετικό τον οπλισμό Κ, θα ισχύει:

χρονική στιγμή	**φορτίο οπλισμού Κ**	**ένταση ρεύματος**
t_1	$+Q_1$	0
$t_1 + \frac{T_1}{4}$	0	$-I_1$ (δεξιόστροφη)
$t_1 + \frac{2\cdot T_1}{4}$	$-Q_1$	0
$t_2 = t_1 + \frac{3\cdot T_1}{4}$	0	$+I_1$ (αριστερόστροφη)

Επομένως, την στιγμή $t_2 = t_1 + \frac{3T_1}{4}$ που μετακινείται ο μεταγωγός, όλη η ενέργεια του κυκλώματος LC_1 βρίσκεται στο πηνίο ώς ενέργεια μαγνητικού πεδίου.

Αυτή η ενέργεια μεταφέρεται στο κύκλωμα LC_2 και είναι η ολική ενέργεια ταλάντωσης του νέου κυκλώματος.

Το κύκλωμα LC_2 ξεκινά με μέγιστη ένταση ρεύματος I_2, η οποία, λόγω αυτεπαγωγής είναι ίση με την ένταση ρεύματος στο κύκλωμα LC_1 τη στιγμή t_2 που μετακινήθηκε ο μεταγωγός, δηλαδή:

$$I_2 = I_1 (= I)$$

Το (κοινό) πλάτος έντασης I μπορεί να υπολογιστεί ως εξής:

$$E_2 = E_1 = 8\cdot 10^{-6}\,J \Rightarrow \frac{1}{2}LI^2 = 8\cdot 10^{-6}\,J \Rightarrow I^2 = \frac{2\cdot 8\cdot 10^{-6}\,J}{10^{-2}\,H} \Rightarrow$$

$$\boxed{I = 4\cdot 10^{-2}\ A}$$

γ) Η μέγιστη ΗΕΔ από αυτεπαγωγή ισούται με την μέγιστη τάση V_{max} στα άκρα του πυκνωτή. Ισχύει:

$$Q_2 = C_2 \cdot V_{max} \Rightarrow \frac{I}{\omega_2} = C_2 \cdot E_{αυτ,max,2} \Rightarrow$$

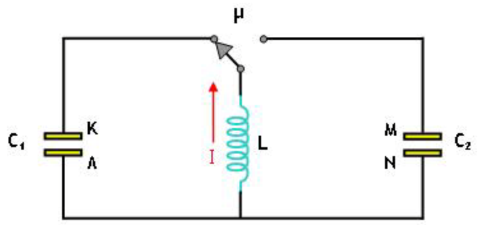
$$E_{αυτ,max,2} = \frac{I}{\frac{1}{\sqrt{LC_2}} \cdot C_2} \Rightarrow E_{αυτ,max,2} = I\sqrt{\frac{L}{C_2}} \Rightarrow$$

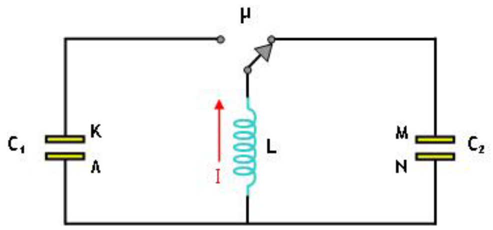
$$E_{αυτ,max,2} = 4 \cdot 10^{-2}\,A \cdot \sqrt{\frac{10^{-2}\,H}{16 \cdot 10^{-6}\,F}} \Rightarrow$$

$$E_{αυτ,max,2} = 10^{-2} \cdot \sqrt{10^4}\,V \Rightarrow$$

$$\boxed{E_{αυτ,max,2} = 1\,V}$$

δ) Τη χρονική στιγμή $t_2 = t_1 + \frac{3T_1}{4}$ κατά την οποία ο μεταγωγός στρέφεται δεξιά, το ρεύμα στο πηνίο έχει τη φορά του σχήματος:





Λόγω αυτεπαγωγής, το πηνίο διατηρεί στιγμιαία τη φορά και την τιμή της έντασης του ρεύματος.

Επειδή η συμβατική φορά ρεύματος δηλώνει φορά κίνησης θετικών φορτίων, ο οπλισμός Μ θα φορτιστεί πρώτος θετικά.

ΘΕΜΑ Δ

Πρόβλημα 1.

Πυκνωτής χωρητικότητας *C* φορτίζεται από ηλεκτρική πηγή συνεχούς τάσης που έχει Ηλεκτρεγερτική Δύναμη *E*=50 V. Στη συνέχεια αποσυνδέουμε την πηγή φόρτισης και συνδέουμε τα άκρα του με αγωγούς μηδενικής αντίστασης σε ιδανικό πηνίο, που έχει συντελεστή αντεπαγωγής *L*=0,5 H, μέσω διακόπτη. Τη χρονική στιγμή *t*=0 κλείνουμε το διακόπτη, οπότε το κύκλωμα αρχίζει να εκτελεί ηλεκτρικές ταλαντώσεις συχνότητας $f = \frac{500}{\pi} Hz$.

α) Να υπολογίσετε τη χωρητικότητα *C* του πυκνωτή.

β) Να γράψετε τις εξισώσεις του φορτίου του πυκνωτή και της έντασης του ρεύματος που διαρρέει το κύκλωμα σε συνάρτηση με το χρόνο.

γ) Να υπολογίσετε τις χρονικές στιγμές που μηδενίζεται η τάση αυτεπαγωγής του πηνίου στο χρονικό διάστημα από 0 έως 2π 10^{-3} s .

δ) Να υπολογίσετε την ένταση του ρεύματος τις στιγμές, που το φορτίο του πυκνωτή έχει τιμή $5\sqrt{3}\cdot 10^{-5} C$ και το ρεύμα έχει φορά προς τον αρχικά αρνητικά φορτισμένο οπλισμό του πυκνωτή.

<u>Λύση</u>

α) $f = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}} \Rightarrow f^2 = \frac{1}{4\pi^2 LC} \Leftrightarrow C = \frac{1}{4\pi^2 L f^2} = \frac{1}{4\pi^2 0,5H \cdot \left(\frac{500}{\pi} s^{-1}\right)^2} \Leftrightarrow C = 2\mu F$

$$Q = V_C C = EC = 50V \cdot 2 \cdot 10^6 F \Rightarrow Q = 10^{-4} C$$

$$I = \omega Q = 2\pi f \cdot Q = 2\pi \frac{500}{\pi} s^{-1} \cdot 10^{-4} C \Rightarrow I = 0,1A$$

β) Αφού ο πυκνωτής είναι πλήρως φορτισμένος τη στιγμή t=0, η ταλάντωση δεν θα έχει αρχική φάση, άρα οι εξισώσεις του φορτίου και της έντασης του ρεύματος, γράφονται αντίστοιχα:

$q = Q\sigma\upsilon\nu\omega t = 10^{-4}\sigma\upsilon\nu 1000t$ (SI)

$i = -I\eta\mu\omega t = -0,1\eta\mu 1000t$ (SI)

γ) Η τάση αυτεπαγωγής στο πηνίο μηδενίζεται τις χρονικές στιγμές στις οποίες μηδενίζεται η τάση στον πυκνωτή, άρα και το φορτίο, αφού τα δύο στοιχεία έχουν κοινά άκρα (V_C=V_L). Σε μια ηλεκτρική ταλάντωση χωρίς αρχική φάση αυτό συμβαίνει τις χρονικές στιγμές Τ/4 και 3Τ/4.

Η περίοδος υπολογίζεται ως εξής: $T=\dfrac{1}{f}=\dfrac{1}{\frac{500}{\pi}} \Rightarrow T=\dfrac{\pi}{500}s$

Άρα η τάση αυτεπαγωγής μηδενίζεται τις στιγμές t_1=0,5π 10^{-3} s και

t_2=1,5π 10^{-3}s.

δ) Επειδή στην άσκηση δε δίνεται η χρονική στιγμή, αλλά το φορτίο, για να βρούμε την ένταση του ρεύματος θα δουλέψουμε ενεργειακά, δηλαδή θα εφαρμόσουμε τη διατήρηση της ενέργειας για την ταλάντωση:

$$E=U_E+U_B \Rightarrow \frac{Q^2}{2C}=\frac{q^2}{2C}+\frac{Li^2}{2} \Leftrightarrow \frac{Q^2-q^2}{2C}=\frac{Li^2}{2}$$

$$\Leftrightarrow i^2=\frac{Q^2-q^2}{LC} \Leftrightarrow i^2=\omega^2\left(Q^2-q^2\right) \Leftrightarrow i=\pm\omega\sqrt{Q^2-q^2}$$

$$i=\pm 1000\sqrt{10^{-8}-0,75\cdot 10^{-8}}A=\pm 0,05A$$

Επειδή το ρεύμα έχει φορά προς τον αρχικά φορτισμένο αρνητικά οπλισμό του πυκνωτή, θα έχει αρνητικό πρόσημο. Άρα: $i=-0,05A$

Μεθοδολογία:

Η σχέση $i=\pm\omega\sqrt{Q^2-q^2}$ δεν υπάρχει στο σχολικό βιβλίο και πρέπει να αποδεικνύεται πριν χρησιμοποιηθεί. Γενικά σε μια άσκηση όταν δε δίνεται η χρονική στιγμή, αλλά το φορτίο, θα δουλεύουμε ενεργειακά για να βρούμε την ένταση του ρεύματος και όχι με τις εξισώσεις $i=f(t)$ και $q=f(t)$.

Πρόβλημα 2.

Ιδανικό κύκλωμα περιλαμβάνει πυκνωτή χωρητικότητας *C*, ιδανικό πηνίο με συντελεστή αυτεπαγωγής *L* και διακόπτη, που είναι αρχικά ανοικτός. Φορτίζουμε τον πυκνωτή με φορτίο *Q*=$\frac{1}{2\pi}$ mC και τη χρονική στιγμή *t*=0 κλείνουμε το διακόπτη, οπότε το κύκλωμα εκτελεί αμείωτες ηλεκτρικές ταλαντώσεις με περίοδο *T*=1 ms.

α) Να βρείτε τη μέγιστη ένταση του ρεύματος στο κύκλωμα.

β) Να υπολογίσετε το φορτίο του πυκνωτή τις στιγμές, που η ένταση του ρεύματος έχει τιμή $\frac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{A}$.

γ) Να βρείτε ποιες χρονικές στιγμές στη διάρκεια της 1ης περιόδου, η ενέργεια μαγνητικού πεδίου στο πηνίο είναι ίση με το 75% της ολικής ενέργειας του κυκλώματος;

δ) Να υπολογίσετε το ρυθμό μεταβολής της έντασης του ρεύματος $\frac{di}{dt}$ στο κύκλωμα τη χρονική στιγμή t=T/3.

<u>Λύση</u>

α) I=ωQ=$\frac{2\pi}{T}$ Q= 2π $\frac{1}{2\pi\cdot10^{-3}\mathrm{s}}\cdot10^{-3}\mathrm{C}\Rightarrow \mathrm{I}=1\mathrm{A}$

β) Εφαρμόζουμε τη διατήρηση της ενέργειας για την ταλάντωση

$$\mathrm{E}=\mathrm{U_E}+\mathrm{U_B}\Rightarrow\frac{\mathrm{Q}^2}{2\mathrm{C}}=\frac{\mathrm{q}^2}{2\mathrm{C}}+\frac{\mathrm{Li}^2}{2}\Leftrightarrow\frac{\mathrm{Q}^2-\mathrm{q}^2}{2\mathrm{C}}=\frac{\mathrm{Li}^2}{2}$$

Λύνοντας ως προς q βρίσκουμε:

$$\mathrm{q}=\pm\sqrt{\mathrm{Q}^2-\frac{\mathrm{i}^2}{\omega^2}}=\pm\sqrt{\frac{10^{-6}}{4\pi^2}-\frac{0,75\cdot10^{-6}}{4\pi^2}}\mathrm{C}\Rightarrow\mathrm{q}=\pm\frac{10^{-3}}{4\pi}\mathrm{C}$$

Επειδή ζητά το φορτίο του πυκνωτή, κρατάμε μόνο τη θετική τιμή, άρα:

$$\mathrm{q}=\frac{10^{-3}}{4\pi}\mathrm{C}$$

γ) Ισχύει $\mathrm{U_B}=\frac{3\mathrm{E}}{4}$

Άρα, $\mathrm{E}=\mathrm{U_E}+\mathrm{U_B}\Rightarrow\mathrm{E}=\mathrm{U_E}+\frac{3\mathrm{E}}{4}\Rightarrow\mathrm{U_E}=\frac{\mathrm{E}}{4}\Rightarrow\mathrm{E}\sigma\upsilon\nu^2\omega\mathrm{t}=\frac{\mathrm{E}}{4}\Rightarrow\sigma\upsilon\nu\omega\mathrm{t}=\pm\frac{1}{2}$

Λύνοντας την τριγωνομετρική εξίσωση βρίσκουμε τέσσερεις λύσεις για την πρώτη περίοδο, ως εξής:

$$\sigma\upsilon\nu\omega t=\frac{1}{2}\Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu\omega t=\sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{3}\Leftrightarrow\begin{cases}\omega t=2\kappa\pi+\dfrac{\pi}{3}\Rightarrow\dfrac{2\pi}{T}t=\dfrac{\pi}{3}\Rightarrow t=\dfrac{T}{6}(\kappa=0)\\ \omega t=2\kappa\pi-\dfrac{\pi}{3}\Rightarrow\dfrac{2\pi}{T}t=2\pi-\dfrac{\pi}{3}\Rightarrow t=\dfrac{5T}{6}(\kappa=1)\end{cases}$$

και

$$\sigma\upsilon\nu\omega t=-\frac{1}{2}\Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu\omega t=\sigma\upsilon\nu\frac{2\pi}{3}\Leftrightarrow\begin{cases}\omega t=2\kappa\pi+\dfrac{2\pi}{3}\Rightarrow\dfrac{2\pi}{T}t=\dfrac{2\pi}{3}\Rightarrow t=\dfrac{2T}{6}(\kappa=0)\\ \omega t=2\kappa\pi-\dfrac{2\pi}{3}\Rightarrow\dfrac{2\pi}{T}t=2\pi-\dfrac{2\pi}{3}\Rightarrow t=\dfrac{4T}{6}(\kappa=1)\end{cases}$$

Έτσι καταλήγουμε στις τέσσερεις απαντήσεις:

T/6, 2T/6, 4T/6 και 5T/6, δηλαδή, $t_1=10^{-3}/6$ s, $t_2=10^{-3}/3$ s, $t_3=2\cdot 10^{-3}/3$ s και $t_4=5\cdot 10^{-3}/6$ s.

δ) Ισχύει $E_{\alpha\upsilon\tau}=-L\dfrac{di}{dt}\Leftrightarrow\dfrac{di}{dt}=\dfrac{-E_{\alpha\upsilon\tau}}{L}=\dfrac{-V_C}{L}=\dfrac{-q}{LC}\Rightarrow\dfrac{di}{dt}=-\omega^2 q$ (1)

Το q θα το βρούμε από την εξίσωση του φορτίου με το χρόνο. Επειδή τη χρονική στιγμή t=0 ο πυκνωτής είναι πλήρως φορτισμένος η ταλάντωση δεν έχει αρχική φάση και η εξίσωση του φορτίου γράφεται

$q=Q\sigma\upsilon\nu\omega t$ ή $q=\dfrac{10^{-3}}{2\pi}\cdot\sigma\upsilon\nu 2\pi 10^3 t$. Με αντικατάσταση του t παίρνουμε:

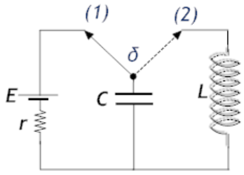
$$q=\frac{10^{-3}}{2\pi}C\cdot\sigma\upsilon\nu\left(2\cdot 1000\pi\frac{10^{-3}}{3}\right)=\frac{10^{-3}}{2\pi}C\sigma\upsilon\nu\frac{2\pi}{3}\Rightarrow q=\frac{10^{-3}}{2\pi}C\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)\Rightarrow q=-\frac{10^{-3}}{4\pi}C$$

Με αντικατάσταση στην σχέση (1) παίρνουμε:

$$\frac{di}{dt}=-(2000\pi\, rad/s)^2\cdot\left(-\frac{10^{-3}}{4\pi}C\right)\Rightarrow\frac{di}{dt}=1000\pi\ A/s$$

Πρόβλημα 3.

Στο κύκλωμα του σχήματος η ηλεκτρική πηγή έχει ΗΕΔ E=20 V, ο πυκνωτής χωρητικότητα C=2 μF και το πηνίο συντελεστή αυτεπαγωγής L=80 mH.



1) Αρχικά ο μεταγωγός διακόπτης βρίσκεται στη θέση (1).

α) Πόση είναι η ένταση του ρεύματος στο κύκλωμα και πόση η τάση στα άκρα του πυκνωτή;

β) Να υπολογίσετε την ενέργεια ηλεκτρικού πεδίου που είναι αποθηκευμένη στον πυκνωτή.

2) Τη χρονική στιγμή t=0 μετακινούμε ακαριαία το διακόπτη στη θέση (2), χωρίς να δημιουργηθεί σπινθήρας (δηλαδή χωρίς απώλεια ενέργειας), οπότε «αποκόπτεται» η ηλεκτρική πηγή και το ιδανικό κύκλωμα L-C αρχίζει να εκτελεί αμείωτες ηλεκτρικές ταλαντώσεις.

α) Να γράψετε τις εξισώσεις του φορτίου q του πυκνωτή καθώς και του ρυθμού μεταβολής του $\frac{dq}{dt}$ σε συνάρτηση με το χρόνο t.

β) Να υπολογίσετε την απόλυτη τιμή της τάσης στα άκρα του πυκνωτή τη χρονική στιγμή που η ενέργεια στο μαγνητικό πεδίο του πηνίου ισούται με U_B=3 10^{-4} J.

<u>Λύση</u>

1)

α) Επειδή ο πυκνωτής λειτουργεί σαν ανοικτός διακόπτης, ο κλάδος που τον περιέχει δεν διαρρέεται από ρεύμα. Άρα i=0 και η τάση στα άκρα του πυκνωτή είναι ίση με την ΗΕΔ της πηγής, V=E=20V.

β) Η ενέργεια του ηλεκτρικού πεδίου του πυκνωτή δίνεται από τη σχέση:

$$U_E = \frac{CV^2}{2} = \frac{2\cdot10^{-6}F\cdot(20V)^2}{2} \Rightarrow U_E = 4\cdot10^{-4} J$$

2)

α) Οι ζητούμενες εξισώσεις είναι:

$q=Q\sigma\upsilon\nu(\omega t+\varphi_0)$, $i=-I\,\eta\mu(\omega t+\varphi_0)$

Το αρχικό (μέγιστο) φορτίο του πυκνωτή υπολογίζεται ως εξής:
$Q = VC = EC = 20V \cdot 2 \cdot 10^{-6} F \Rightarrow Q = 4 \cdot 10^{-5} C$.

Η κυκλική συχνότητα ω υπολογίζεται ως εξής:
$$\omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi}{2\pi\sqrt{LC}} \Rightarrow \omega = \frac{1}{\sqrt{LC}} = \frac{1}{\sqrt{2 \cdot 10^{-6} H \cdot 80 \cdot 10^{-3} F}} \Rightarrow \omega = 2500 rad/s$$

Το μέγιστο ρεύμα της ταλάντωσης είναι: $I=\omega Q=2500 rad/s \; 4 \; 10^{-5}$ C ή I=0,1A

Τη στιγμή t=0 ο πυκνωτής είναι πλήρως φορτισμένος και ο πάνω οπλισμός Δ έχει μέγιστο θετικό φορτίο, άρα η ταλάντωση δεν θα έχει αρχική φάση, και οι εξισώσεις του φορτίου και της έντασης του ρεύματος (ισχύει, βέβαια, i=Δq/Δt), γράφονται αντίστοιχα:

$q = Q\sigma\upsilon\nu\omega t = 4 \cdot 10^{-5}\sigma\upsilon\nu 2500t$ (SI)

$i = -I\eta\mu\omega t = -0,1\eta\mu 2500t$ (SI)

β) Θα εφαρμόσουμε τη διατήρηση της ενέργειας για την ταλάντωση. Η ενέργεια της ταλάντωσης είναι ίση με την ενέργεια του πυκνωτή τη χρονική στιγμή t=0, δηλαδή:

$$E = U_{E(max)} = 4 \cdot 10^{-4} J$$

Έχουμε:

$$E = U_E + U_B \Rightarrow 4 \cdot 10^{-4} = \frac{CV^2}{2} + 3 \cdot 10^{-4} \Rightarrow 10^{-4} = \frac{2 \cdot 10^{-6} V^2}{2} \Rightarrow |V| = 10V$$

Ημερομηνία τροποποίησης: 14/7/2011

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1^{ο}: ΜΗΧΑΝΙΚΕΣ ΚΑΙ ΗΛΕΚΤΡΙΚΕΣ ΤΑΛΑΝΤΩΣΕΙΣ

ΕΝΟΤΗΤΑ 3: ΦΘΙΝΟΥΣΕΣ ΤΑΛΑΝΤΩΣΕΙΣ

ΛΥΜΕΝΑ ΘΕΜΑΤΑ

ΘΕΜΑ Β

Ερώτηση 1.

Στον πίνακα που ακολουθεί δίνονται οι μέγιστες απομακρύνσεις μιας μηχανικής ταλάντωσης για δύο χρονικές στιγμές.

Χρόνος (s)	0	1	2	3
Μέγιστη απομάκρυνση(cm)	A_0=;	A_1=12	A_2=9	A_3=;

Αν γνωρίζουμε ότι η περίοδος της ταλάντωσης είναι $1\mathrm{s}$ και η δύναμη αντίστασης είναι της μορφής $F=-bu$ να συμπληρωθεί ο πίνακας.

Λύση

Σε μια φθίνουσα μηχανική ταλάντωση, στην οποία η δύναμη αντίστασης είναι της μορφής $F=-bu$, ο λόγος διαδοχικών μέγιστων απομακρύνσεων προς την ίδια κατεύθυνση είναι σταθερός, άρα ισχύει

$\frac{A_0}{A_1}=\frac{A_1}{A_2}=\frac{A_2}{A_3}$ ή $\frac{A_0}{12}=\frac{12}{9}=\frac{9}{A_3}$ (όλα τα μεγέθη είναι σε cm)

Από την 1^{η} ισότητα παίρνουμε $A_0=\frac{12^2}{9}=16\mathrm{cm}$

Από την 2^{η} ισότητα παίρνουμε $A_3=\frac{9^2}{12}=6,75\mathrm{cm}$

Ερώτηση 2.

Ένα σύστημα ξεκινά φθίνουσες ταλαντώσεις με αρχική ενέργεια 100J και αρχικό πλάτος A_0. Το έργο της δύναμης αντίστασης μετά από Ν ταλαντώσεις είναι 84J. Άρα το πλάτος ταλάντωσης μετά από Ν ταλαντώσεις είναι:

α) $\frac{A_0}{4}$.

β) $\frac{A_0}{16}$.

γ) $\frac{4A_0}{10}$.

Να επιλέξετε τη σωστή απάντηση. Να δικαιολογήσετε την επιλογή σας.

Λύση

Σωστή απάντηση είναι η (γ).

Μετά από Ν ταλαντώσεις στο ταλαντούμενο σύστημα έχει απομείνει ενέργεια ίση με $E = 100J - 84J \Rightarrow E = 16J$

Η αρχική ενέργεια της ταλάντωσης βρίσκεται από τη σχέση $E_0 = \frac{1}{2}DA_0^2$

Η ενέργεια της ταλάντωσης μετά από Ν ταλαντώσεις βρίσκεται από τη σχέση $E = \frac{1}{2}DA^2$

Σχηματίζουμε το πηλίκο των δύο ενεργειών

$$\frac{E_0}{E} = \frac{A_0^2}{A^2} \quad \text{η} \quad \frac{100}{16} = \left(\frac{A_0}{A}\right)^2 \quad \text{η} \quad \frac{10}{4} = \frac{A_0}{A} \quad \text{η} \quad A = \frac{4}{10}A_0$$

Συνεπώς, σωστή απάντηση είναι η (γ).

ΘΕΜΑ Γ

Άσκηση 1.

Σώμα μάζας 1kg εκτελεί φθίνουσα ταλάντωση και το πλάτος μειώνεται με το χρόνο σύμφωνα με τη σχέση $A = 0,1e^{-\Lambda t}$ (S.I.). Τη στιγμή $t = 0$ η ενέργεια της ταλάντωσης του σώματος είναι ίση με 2J, ενώ τη στιγμή t_1 το πλάτος της ταλάντωσης είναι το μισό του αρχικού.

Να βρεθούν:

α) Το πλάτος της ταλάντωσης τη χρονική στιγμή $t_2 = 4t_1$.

β) Η περίοδος Τ της ταλάντωσης.

γ) Το ποσοστό % της αρχικής ενέργειας που μετετράπη σε θερμότητα κατά τη διάρκεια της φθίνουσας ταλάντωσης από την αρχή μέχρι τη χρονική στιγμή $t = 2t_1$.

Λύση

α) Από την εξίσωση που δίνει το πλάτος της φθίνουσας ταλάντωσης στο (S.I.) υπολογίζουμε τη σταθερά Λ:

$$A = 0,1 \cdot e^{-\Lambda t} \Rightarrow \frac{0,1}{2} = 0,1 \cdot e^{-\Lambda t_1} \Rightarrow \frac{1}{2} = e^{-\Lambda t_1} \Rightarrow \ln\frac{1}{2} = \ln e^{-\Lambda t_1} \Rightarrow -\ln 2 = -\Lambda t_1 \Rightarrow \Lambda = \frac{\ln 2}{t_1}$$

$$A = 0,1 \cdot e^{-\Lambda t} \Rightarrow A_2 = 0,1 \cdot e^{-\Lambda t_2} \Rightarrow A_2 = 0,1 \cdot e^{-\frac{\ln 2}{t_1} \cdot 4t_1} \Rightarrow A_2 = 0,1 \cdot e^{-4\ln 2} \Rightarrow A_2 = 0,1 \cdot e^{\ln 2^{-4}} \Rightarrow$$

$$A_2 = 0,1 \cdot 2^{-4} \Rightarrow A_2 = \frac{0,1}{2^4} \Rightarrow$$

$$\boxed{A_2 = \frac{1}{160}\ m}$$

β) $E_0 = \frac{1}{2} D \cdot A_0^2 \Rightarrow D = \frac{2E_0}{A_0^2} \Rightarrow D = \frac{2 \cdot 2J}{(0,1m)^2} \Rightarrow D = 400\,\frac{N}{m}$

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{D}} \Rightarrow T = 2\pi\sqrt{\frac{1kg}{400\,\frac{N}{m}}} \Rightarrow$$

$$\boxed{T = \frac{\pi}{10}\ s}$$

γ) $A = 0,1 \cdot e^{-\Lambda t} \Rightarrow A = 0,1 \cdot e^{-\Lambda \cdot 2t_1} \Rightarrow A = 0,1 \cdot e^{-\frac{\ln 2}{t_1} \cdot 2t_1} \Rightarrow A = 0,1 \cdot e^{-2\ln 2} \Rightarrow A = 0,1 \cdot e^{\ln 2^{-2}} \Rightarrow$

$$A = 0{,}1 \cdot 2^{-2} \Rightarrow A = \frac{0{,}1}{2^2} \Rightarrow A = \frac{1}{40}\,\mathrm{m}\left(= \frac{A_0}{4}\right)$$

$$\Pi\,\% = \frac{E_0 - E}{E_0} \cdot 100\,\% = \frac{\frac{1}{2}DA_0^2 - \frac{1}{2}DA^2}{\frac{1}{2}DA_0^2} \cdot 100\,\% = \frac{A_0^2 - A^2}{A_0^2} \cdot 100\,\% \Rightarrow \Pi\,\% = \frac{A_0^2 - \frac{A_0^2}{16}}{A_0^2} \cdot 100\,\%$$

$$= \frac{\frac{15A_0^2}{16}}{A_0^2} \cdot 100\,\% = \frac{15}{16} \cdot 100\,\% \Rightarrow$$

$$\boxed{\Pi\% = 93{,}75\%}$$

Άσκηση 2.

Το πλάτος μιας φθίνουσας ταλάντωσης μειώνεται εκθετικά με το χρόνο σύμφωνα με τη σχέση $A = A_0 e^{-\Lambda t}$ και υποδιπλασιάζεται σε χρόνο $t = 5s$.

α) Ποια είναι η τιμή της σταθεράς Λ της ταλάντωσης;

β) Πόσος χρόνος χρειάζεται ώστε το πλάτος της ταλάντωσης να μείνει το 1/8 του αρχικού;

γ) Ποιο κλάσμα της αρχικής του ενέργειας χάνει το ταλαντούμενο σύστημα στο χρονικό διάστημα που πρέπει να περάσει για να γίνει το πλάτος το 1/8 του αρχικού;

Δίνεται $\ln 2 = 0,7$.

<u>Λύση</u>

Για να λύσουμε τις ασκήσεις αυτές χρειάζεται να επιλύσουμε τη λογαριθμική εξίσωση $A = A_0 e^{-\Lambda t}$ δύο φορές. Συνήθως την πρώτη φορά ως προς Λ και τη δεύτερη ως προς Α ή ως προς t, ανάλογα με τα ζητούμενα της άσκησης. Έτσι, δουλεύουμε ως εξής:

α) $A = A_0 e^{-\Lambda t} \Rightarrow \dfrac{A_0}{2} = A_0 e^{-\Lambda t} \Rightarrow \dfrac{1}{2} = e^{-\Lambda t}$

Εδώ, πριν λογαριθμήσουμε, προτείνεται να κατεβάζουμε το $e^{-\Lambda t}$ στον παρονομαστή για να παίρνουμε θετικό εκθέτη. Μας διευκολύνει στην λογαρίθμηση. Συνεχίζουμε:

$$\frac{1}{2} = \frac{1}{e^{\Lambda t}} \Rightarrow 2 = e^{\Lambda t} \Rightarrow \ln 2 = \ln e^{\Lambda t} \Rightarrow \ln 2 = \Lambda t \Rightarrow \Lambda = \frac{\ln 2}{t} = \frac{\ln 2}{5} = \frac{0,7}{5} \Rightarrow$$

Λ=0,14s^{-1}

β) Για να βρούμε τον χρόνο t θα επιλύσουμε τη λογαριθμική εξίσωση $A = A_0 e^{-\Lambda t}$ για δεύτερη φορά, χρησιμοποιώντας το Λ που βρήκαμε προηγουμένως:

$$A = A_0 e^{-\Lambda t} \Rightarrow \frac{A_0}{8} = A_0 e^{-\Lambda t} \Rightarrow \frac{1}{8} = e^{-\Lambda t} \Rightarrow \frac{1}{8} = \frac{1}{e^{\Lambda t}} \Rightarrow 8 = e^{\Lambda t} \Rightarrow \ln 8 = \ln e^{\Lambda t} \Rightarrow \ln 2^3 = \Lambda t \Rightarrow$$

$$3\ln 2 = \frac{\ln 2}{5s} t \Rightarrow t = 15s$$

Παρατηρούμε ότι ο αριθμός που βρίσκεται μέσα στο λογάριθμο (εδώ το 8), γράφεται ως δύναμη ενός μικρότερου αριθμού (εδώ του 2). Αυτή είναι συνηθισμένη πρακτική στις ασκήσεις αυτού του τύπου.

γ) Όταν το πλάτος της ταλάντωσης γίνει το 1/8 του αρχικού, το κλάσμα της αρχικής ενέργειας που έχει χάσει το ταλαντούμενο σύστημα βρίσκεται από τη σχέση:

$$\frac{E_0 - E}{E_0} = \frac{\frac{1}{2}DA_0^2 - \frac{1}{2}DA^2}{\frac{1}{2}DA_0^2} = \frac{A_0^2 - \frac{A_0^2}{8^2}}{A_0^2} = \frac{63}{64}$$

Ημερομηνία τροποποίησης: 15/7/2011

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1^{Ο}: ΜΗΧΑΝΙΚΕΣ – ΗΛΕΚΤΡΙΚΕΣ ΤΑΛΑΝΤΩΣΕΙΣ

ΕΝΟΤΗΤΑ 4: ΕΞΑΝΑΓΚΑΣΜΕΝΕΣ ΤΑΛΑΝΤΩΣΕΙΣ

ΛΥΜΕΝΑ ΘΕΜΑΤΑ

ΘΕΜΑ Β

Ερώτηση 1.

Ένα σύστημα εκτελεί εξαναγκασμένη ταλάντωση πλάτους Α και συχνότητας f=15Hz. Η ιδιοσυχνότητα του συστήματος είναι 17 Hz. Αν η συχνότητα του διεγέρτη γίνει 16Hz τότε το πλάτος της εξαναγκασμένης ταλάντωσης:

α) θα γίνει μικρότερο από Α.

β) θα γίνει μεγαλύτερο από Α.

γ) θα παραμείνει Α.

Να επιλέξετε τη σωστή απάντηση. Να δικαιολογήσετε την επιλογή σας.

Λύση

Σωστή πρόταση είναι η (β).

Γνωρίζουμε ότι καθώς η συχνότητα του διεγέρτη πλησιάζει στην ιδιοσυχνότητα του ταλαντούμενου συστήματος, το πλάτος της εξαναγκασμένης ταλάντωσης αυξάνεται. Στην περίπτωσή μας η συχνότητα ταλάντωσης αυξάνεται από τα 15Hz στα 16Hz, δηλαδή πλησιάζουμε προς την ιδιοσυχνότητα f_0=17 Hz.

Συνεπώς σωστή πρόταση είναι η (β).

Ερώτηση 2.

Ένα σύστημα εκτελεί εξαναγκασμένη ταλάντωση συχνότητας $f = 30Hz$ και πλάτους Α. Η ιδιοσυχνότητα του συστήματος είναι 25 Hz. Αν αυξήσουμε τη σταθερά απόσβεσης b του συστήματος χωρίς να μεταβάλλουμε τη συχνότητα του διεγέρτη, τότε:

α) το πλάτος της εξαναγκασμένης ταλάντωσης θα μειωθεί.

β) η συχνότητα της εξαναγκασμένης ταλάντωσης θα γίνει λίγο μικρότερη από $30Hz$.

γ) η συχνότητα της εξαναγκασμένης ταλάντωσης θα γίνει λίγο μικρότερη από $25Hz$.

Να επιλέξετε τη σωστή απάντηση. Να δικαιολογήσετε την επιλογή σας.

<u>Λύση</u>

Σωστή πρόταση είναι η (α).

Η συχνότητα μιας εξαναγκασμένης ταλάντωσης είναι πάντα ίση με τη συχνότητα του διεγέρτη, οπότε και μετά την αλλαγή της σταθεράς απόσβεσης b η συχνότητα ταλάντωσης θα παραμείνει $25Hz$.

Από το διάγραμμα του πλάτους Α μιας εξαναγκασμένης ταλάντωσης σε συνάρτηση με τη συχνότητα f του διεγέρτη για διάφορες τιμές της b (Σχ. 1.28, σελ. 23, του Σχολικού Βιβλίου), βλέπουμε ότι αύξηση της b προκαλεί μείωση του πλάτους ταλάντωσης.

Άρα σωστή πρόταση είναι η (α).

ΘΕΜΑ Γ

Άσκηση 1.

Σύστημα κατακόρυφου ελατηρίου-σώματος που παρουσιάζει μικρή απόσβεση εκτελεί εξαναγκασμένη ταλάντωση. Η συχνότητα του διεγέρτη είναι $f = \frac{5}{\pi}\mathrm{Hz}$. Η μάζα του ταλαντούμενου σώματος είναι $m = 1\mathrm{kg}$ και η σταθερά του ελατηρίου είναι $k = 400\mathrm{N/m}$.

α) Να υπολογιστεί η συχνότητα του διεγέρτη ώστε να έχουμε συντονισμό.

β) Αν αυξήσουμε σταδιακά τη συχνότητα του διεγέρτη από την τιμή $f = \frac{5}{\pi}$ Hz ως την τιμή $f = \frac{12}{\pi}$ Hz, να περιγράψετε τι συμβαίνει σε σχέση με το πλάτος της εξαναγκασμένης ταλάντωσης.

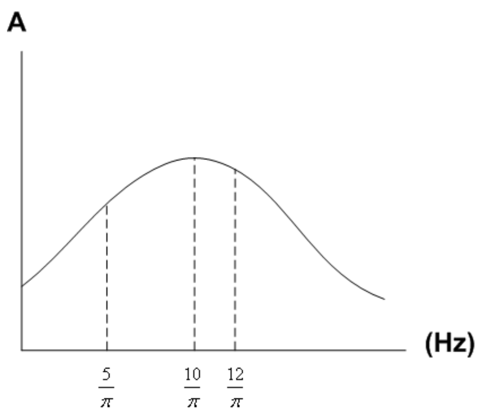
<u>Λύση</u>

α) Για να έχουμε συντονισμό πρέπει η συχνότητα του διεγέρτη να γίνει ίση με την ιδιοσυχνότητα του συστήματος. Δηλαδή:

$$f = f_0 = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k}{m}} \Rightarrow f = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{400\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{m}}}{1\mathrm{kg}}} \Rightarrow f = \frac{20}{2\pi}\mathrm{Hz} \Rightarrow f = \frac{10}{\pi}\mathrm{Hz}.$$

Άρα συντονισμό έχουμε όταν η συχνότητα του διεγέρτη είναι $f = \frac{10}{\pi}\mathrm{Hz}$.

β) Το διάγραμμα πλάτους της εξαναγκασμένης ταλάντωσης σε συνάρτηση με τη συχνότητα του διεγέρτη είναι:



Όταν η συχνότητα του διεγέρτη είναι $\frac{10}{\pi}\mathrm{Hz}$ έχουμε συντονισμό και μέγιστο πλάτος ταλάντωσης. Άρα αν η συχνότητα του διεγέρτη πάρει τιμές από $\frac{5}{\pi}\mathrm{Hz}$ έως $\frac{10}{\pi}\mathrm{Hz}$ τότε το πλάτος της ταλάντωσης αυξάνεται, και στη συνέχεια για τις τιμές $\frac{10}{\pi}\mathrm{Hz}$ έως $\frac{12}{\pi}\mathrm{Hz}$ μειώνεται.

Άσκηση 2.

Σύστημα ελατηρίου-σώματος εκτελεί εξαναγκασμένη ταλάντωση. Το σύστημα παρουσιάζει σταθερά απόσβεσης b. Το σώμα περνάει από τη θέση ισορροπίας κάθε $0,5\,s$. Η μάζα του σώματος είναι $m = 1\,kg$ και η σταθερά του ελατηρίου $k = 400\ N/m$.

Να υπολογιστεί:

α) Η συχνότητα f του διεγέρτη.

β) Η ιδιοσυχνότητα f_0 του συστήματος.

γ) Η σταθερά του ελατηρίου, το οποίο θα αντικαταστήσει το αρχικό ώστε να επιτευχθεί συντονισμός.

Δίνεται $\pi^2 = 10$.

<u>Λύση</u>

α) Το σύστημα εκτελεί εξαναγκασμένη ταλάντωση. Άρα ταλαντώνεται με τη συχνότητα f του διεγέρτη. Κάθε $0,5\,s$ περνάει από τη θέση ισορροπίας, χρόνος που αντιστοιχεί στη μισή περίοδο.

$\frac{T}{2} = 0,5s \Rightarrow T = 1\,s$ άρα $f = \frac{1}{T} = 1\,Hz$.

β) Η ιδιοσυχνότητα υπολογίζεται από τον τύπο:

$$f_0 = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k}{m}} \Rightarrow f_0 = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{400\frac{N}{m}}{1kg}} \Rightarrow f_0 = \frac{10}{\pi}\,Hz .$$

γ) Αφού δε μεταβάλλουμε τη συχνότητα του διεγέρτη, για να πετύχουμε συντονισμό πρέπει να αλλάξει η ιδιοσυχνότητα του συστήματος. Για να συμβεί αυτό, αφού η μάζα m είναι σταθερή, χρησιμοποιούμε ένα άλλο ελατήριο με σταθερά k' την οποία θα υπολογίσουμε από τη σχέση: $f = f_{0'}$

$$f = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k'}{m}} \Rightarrow k' = 4\pi^2 f^2 m \Rightarrow k' = 4\pi^2 (1Hz)^2 \cdot 1kg \Rightarrow k' = 40\ \frac{N}{m} .$$

Δηλαδή πρέπει να τοποθετηθεί ένα ελατήριο σταθεράς $k' = 40\ \frac{N}{m}$.

Άσκηση 3.

Κύκλωμα LC χρησιμοποιείται για τη λήψη ραδιοφωνικών κυμάτων. Ένας ραδιοφωνικός σταθμός εκπέμπει σε συχνότητα $f = 103\,\text{MHz}$. Ο συντελεστής αυτεπαγωγής του πηνίου είναι $L = 2\,\text{mH}$.

α) Να υπολογιστεί η χωρητικότητα C του πυκνωτή για την οποία συντονίζεται ο δέκτης στο συγκεκριμένο σταθμό.

β) Πόσο πρέπει να μεταβληθεί η χωρητικότητα C του πυκνωτή για να ακούσουμε ένα σταθμό που εκπέμπει σε συχνότητα $f' = 100\,\text{MHz}$;

Δίνεται $\pi^2 = 10$.

<u>Λύση</u>

α) Συντονισμό έχουμε όταν $f = f_0$.

$$f = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}} \Rightarrow C = \frac{1}{4\pi^2 f^2 L} \Rightarrow C = \frac{1}{4\cdot 10\left(103\cdot 10^6\,\text{Hz}\right)^2 \cdot 2\cdot 10^{-3}\,\text{H}} \Rightarrow$$

$$C = 11,7\cdot 10^{-16}\,\text{F}$$

β) Στη συνέχεια η χωρητικότητα πρέπει να γίνει:

$f' = f_0'$.

$$f' = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC'}} \Rightarrow \sqrt{LC'} = \frac{1}{2\pi f'} \Rightarrow LC' = \frac{1}{4\pi^2 \cdot f'^2} \Rightarrow C' = \frac{1}{4\cdot 10\cdot 2\cdot 10^{-3}\,\text{H}\cdot\left(100\cdot 10^6\,\text{Hz}\right)^2} \Rightarrow$$

$$C' = \frac{1}{8\cdot 10^{14}}\,\text{F} \Rightarrow C' = 0,125\cdot 10^{-14}\,\text{F} \Rightarrow C' = 12,5\cdot 10^{-16}\,\text{F}$$

Άρα η μεταβολή είναι:

$$\Delta C = C' - C = \left(12,5\cdot 10^{-16} - 11,7\cdot 10^{-16}\right)\text{F} \Rightarrow$$

$$\Delta C = 0,8\cdot 10^{-16}\,\text{F}.$$

Ημερομηνία τροποποίησης: 15/7/2011

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1^{ο}: ΜΗΧΑΝΙΚΕΣ – ΗΛΕΚΤΡΙΚΕΣ ΤΑΛΑΝΤΩΣΕΙΣ

ΕΝΟΤΗΤΑ 5: ΣΥΝΘΕΣΗ ΤΑΛΑΝΤΩΣΕΩΝ

ΛΥΜΕΝΑ ΘΕΜΑΤΑ

ΘΕΜΑ Β

Ερώτηση 1.

Ένα σώμα εκτελεί κίνηση που προέρχεται από τη σύνθεση δύο απλών αρμονικών ταλαντώσεων ίδιας διεύθυνσης, γύρω από το ίδιο σημείο, με εξισώσεις $x_1 = 0,3\eta\mu 2\pi t$ και $x_2 = 0,4\eta\mu\left(2\pi t + \dfrac{\pi}{2}\right)$ (όλα τα μεγέθη στο S.I.).

Το πλάτος της σύνθετης ταλάντωσης, είναι:

α) $0,1\text{m}$.

β) $0,5\text{m}$.

γ) $0,7\text{m}$.

Ποιό από τα παραπάνω είναι το σωστό; Να δικαιολογήσετε την απάντησή σας.

<u>Λύση</u>

Σωστή απάντηση η (β).

Εφόσον η συχνότητα των δύο Α.Α.Τ. είναι ίδια (αφού έχουν ίδια γωνιακή συχνότητα $\omega = 2\pi \text{ rad/s}$) και η διαφορά φάσης των δύο ταλαντώσεων είναι φ=π/2, το σώμα θα εκτελέσει μία νέα ταλάντωση που το πλάτος της δίνεται από τον τύπο:

$$A = \sqrt{A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2\sigma\upsilon\nu\varphi} \xrightarrow{\varphi=\frac{\pi}{2}} A = \sqrt{A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2\sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{2}} \Rightarrow A = \sqrt{A_1^2 + A_2^2}$$

Αν αντικαταστήσουμε A_1=0,3m και A_2=0,4m προκύπτει:

$$A = \sqrt{(0,3\text{m})^2 + (0,4\text{m})^2} = \sqrt{0,09\text{m}^2 + 0,16\text{m}^2} = \sqrt{0,25\text{m}^2} = 0,5\text{m}$$

Ερώτηση 2.

Ένα σώμα μάζας m=1kg εκτελεί κίνηση που προέρχεται από τη σύνθεση δύο απλών αρμονικών ταλαντώσεων ίδιας διεύθυνσης, γύρω από το ίδιο σημείο, με εξισώσεις $x_1 = 0,8\eta\mu 10t$ και $x_2 = 0,2\eta\mu\left(10t+\pi\right)$. (όλα τα μεγέθη στο S.I.) Η ενέργεια της σύνθετης ταλάντωσης είναι:

α) 18J.

β) 34J.

γ) 50J.

Ποιό από τα παραπάνω είναι το σωστό; Να δικαιολογήσετε την απάντησή σας.

<u>Λύση</u>

Σωστή απάντηση η (α).

Εφόσον η συχνότητα των δύο Α.Α.Τ. είναι ίδια (αφού έχουν ίδια γωνιακή συχνότητα $\omega = 10\text{rad/s}$) και η διαφορά φάσης των δύο ταλαντώσεων είναι π rad (180^o) το σώμα θα εκτελέσει μια νέα Α.Α.Τ. με την ίδια γωνιακή συχνότητα $\omega = 10\text{rad/s}$ της οποίας το πλάτος είναι ίσο με τη διαφορά των πλατών.

Άρα $A = \left|A_1 - A_2\right| \Rightarrow A = \left|0,8\text{m} - 0,2\text{m}\right| = 0,6\text{m}$.

Η σταθερά ταλάντωσης είναι: $D = m\omega^2 \Rightarrow D = 1\text{kg}\cdot\left(10\frac{\text{rad}}{\text{s}}\right)^2 \Rightarrow D = 100\text{kg}\cdot\text{s}^{-2}$

Η ενέργεια της σύνθετης ταλάντωσης είναι:

$$E = \frac{1}{2}DA^2 \Rightarrow E = \frac{1}{2}100\text{kg}\cdot\text{s}^{-2}(0,6\text{m})^2 \Rightarrow E = 50\text{kg}\cdot\text{s}^{-2}\cdot 0,36\text{m}^2 \Rightarrow E = 18\text{J}$$

Ερώτηση 3.

Ένα σώμα εκτελεί κίνηση που προέρχεται από τη σύνθεση δύο απλών αρμονικών ταλαντώσεων ίδιας διεύθυνσης, με την ίδια συχνότητα και γύρω από το ίδιο σημείο. Η ολική ενέργεια της σύνθετης ταλάντωσης είναι ίση με το άθροισμα των ενεργειών των δύο ταλαντώσεων $\left(E = E_1 + E_2\right)$, όταν η διαφορά φάσης των δύο Α.Α.Τ. είναι:

α) 0^0.

β) 90^0.

γ) 180^0.

Ποιό από τα παραπάνω είναι το σωστό; Να δικαιολογήσετε την απάντησή σας.

<u>Λύση</u>

Σωστή απάντηση η (β)

Εφόσον η συχνότητα των δύο Α.Α.Τ. είναι ίδια το σώμα θα εκτελέσει μια νέα ταλάντωση που το πλάτος της δίνεται από τον τύπο: $A = \sqrt{A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2\sigma\upsilon\nu\varphi}$ (1)

Οι δύο επιμέρους ταλαντώσεις και η συνισταμένη ταλάντωση που προκύπτει, έχουν την ίδια σταθερά $D = m\omega^2$ αφού έχουν ίδια γωνιακή συχνότητα.

Η ολική ενέργεια δίνεται από τον τύπο:

$$E = \frac{1}{2}DA^2 \xrightarrow{(1)} E = \frac{1}{2}D\left(\sqrt{A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2\sigma\upsilon\nu\varphi}\right)^2 \Rightarrow E = \frac{1}{2}D\left(A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2\sigma\upsilon\nu\varphi\right) \Rightarrow$$

$$E = \frac{1}{2}DA_1^2 + \frac{1}{2}DA_2^2 + DA_1A_2\sigma\upsilon\nu\varphi \Rightarrow E = E_1 + E_2 + DA_1A_2\sigma\upsilon\nu\varphi$$

Για να ισχύει όμως $E = E_1 + E_2$ πρέπει

$DA_1A_2\sigma\upsilon\nu\varphi = 0 \Rightarrow \sigma\upsilon\nu\varphi = 0 \Rightarrow \varphi_1 = 90^o$ ή $\varphi_2 = 270^o$. Η $\varphi_2 = 270^o$ δεν περιλαμβάνεται στις επιλογές μας, οπότε απομένει ως σωστή επιλογή η $\varphi_1 = 90^o$.

Ερώτηση 4.

Σώμα εκτελεί κίνηση που προέρχεται από τη σύνθεση δύο απλών αρμονικών ταλαντώσεων ίδιου πλάτους και διεύθυνσης και γύρω από το ίδιο σημείο. Οι συχνότητες f_1 και f_2 $\left(f_2 > f_1\right)$ αντίστοιχα των δύο ταλαντώσεων διαφέρουν λίγο μεταξύ τους, με αποτέλεσμα να παρουσιάζεται διακρότημα. Αν η διαφορά των συχνοτήτων $(f_2 - f_1)$ μικρύνει, ο χρόνος που μεσολαβεί ανάμεσα σε δύο διαδοχικούς μηδενισμούς του πλάτους θα:

α) παραμείνει ο ίδιος.

β) μειωθεί.

γ) αυξηθεί.

Ποιό από τα παραπάνω είναι το σωστό; Να δικαιολογήσετε την απάντησή σας.

<u>Λύση</u>
Σωστή απάντηση η (γ).

Ο χρόνος που μεσολαβεί ανάμεσα σε δύο διαδοχικούς μηδενισμούς του πλάτους είναι ίσος με την περίοδο των διακροτημάτων T_Δ. Όμως $T_\Delta = \dfrac{1}{f_\Delta} = \dfrac{1}{\left|f_1 - f_2\right|} \xrightarrow{f_2 > f_1} T_\Delta = \dfrac{1}{f_2 - f_1}$.

Επειδή η διαφορά των συχνοτήτων μικραίνει, ο παρονομαστής του παραπάνω κλάσματος θα μικρύνει άρα η T_Δ θα αυξηθεί.

Ερώτηση 5.

Δύο διαπασών παράγουν ήχους με παραπλήσιες συχνότητες f_1 και f_2 με $\left(f_2 > f_1\right)$, οπότε παρατηρούνται 4 μέγιστα της έντασης του ήχου ανά δευτερόλεπτο. Αν $f_1 = 1000Hz$, η συχνότητα f_2 είναι:

α) $1002\ Hz$.

β) $1004\ Hz$.

γ) $1008\ Hz$.

Ποιό από τα παραπάνω είναι το σωστό; Να δικαιολογήσετε την απάντησή σας.

<u>Λύση</u>

Σωστή απάντηση η (β).

Εφόσον παρατηρούνται 4 μέγιστα του ήχου ανά δευτερόλεπτο, η συχνότητα του διακροτήματος είναι $f_\Delta = 4Hz$. Όμως $f_\Delta = f_2 - f_1$ (αφού $f_2 > f_1$) οπότε $f_2 = f_\Delta + f_1 \Rightarrow f_2 = 4Hz + 1000Hz \Rightarrow f_2 = 1004Hz$

Ερώτηση 6.

Ένα σώμα εκτελεί κίνηση που προέρχεται από τη σύνθεση δύο απλών αρμονικών ταλαντώσεων ίδιας διεύθυνσης, που γίνονται γύρω από το ίδιο σημείο με το ίδιο πλάτος Α και συχνότητες που διαφέρουν πολύ λίγο. Αν T_1 και T_2 είναι αντίστοιχα οι περίοδοι των δύο ταλαντώσεων, τότε η περίοδος T_Δ των διακροτημάτων δίνεται από τον τύπο:

α) $T_\Delta = |T_2 - T_1|$

β) $T_\Delta = \dfrac{T_2 + T_1}{2}$

γ) $T_\Delta = \dfrac{T_1 T_2}{|T_2 - T_1|}$

Ποιο από τα παραπάνω είναι το σωστό; Να δικαιολογήσετε την απάντησή σας.

<u>Λύση</u>

Σωστή απάντηση η (γ).

$$T_\Delta = \frac{1}{f_\Delta} \Rightarrow T_\Delta = \frac{1}{|f_1 - f_2|} \Rightarrow T_\Delta = \frac{1}{\left|\dfrac{1}{T_1} - \dfrac{1}{T_2}\right|} \Rightarrow T_\Delta = \frac{1}{\left|\dfrac{T_2 - T_1}{T_1 T_2}\right|} \Rightarrow T_\Delta = \frac{T_1 T_2}{|T_2 - T_1|}$$

ΘΕΜΑ Γ

Άσκηση 1.

Ένα σώμα μάζας m=0,2Kg εκτελεί κίνηση που προέρχεται από τη σύνθεση δύο απλών αρμονικών ταλαντώσεων ίδιας διεύθυνσης, γύρω από το ίδιο σημείο, με εξισώσεις $x_1 = 0,4\eta\mu\left(2\pi t+\frac{\pi}{6}\right)$ και $x_2 = 0,4\eta\mu\left(2\pi t+\frac{2\pi}{3}\right)$ (όλα τα μεγέθη στο S.I.).

α) Να υπολογισθεί η διαφορά φάσης των δύο ταλαντώσεων.
β) Να υπολογισθεί το πλάτος Α της συνισταμένης απλής αρμονικής ταλάντωσης που εκτελεί το σώμα.
γ) Να υπολογιστεί η περίοδος και η αρχική φάση της σύνθετης ταλάντωσης.
δ) Να γραφεί η εξίσωση της δύναμης επαναφοράς της ταλάντωσης, που εκτελεί το σώμα, σε συνάρτηση με το χρόνο.

Δίνεται: $\pi^2 \simeq 10$.

<u>Λύση</u>

α) Η διαφορά φάσης των δύο ταλαντώσεων είναι:

$$\varphi = \varphi_2 - \varphi_1 \Rightarrow \varphi = \left(2\pi t + \frac{2\pi}{3}\right) - \left(2\pi t + \frac{\pi}{6}\right) = \frac{2\pi}{3} - \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{2}$$

β) Εφόσον η συχνότητα των δύο Α.Α.Τ. είναι ίδια (αφού έχουν ίδια γωνιακή συχνότητα $\omega = 2\pi\ rad/s$) το σώμα θα εκτελέσει μια νέα Α.Α.Τ. που το πλάτος της δίνεται από τον τύπο:

Άρα $A = \sqrt{A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2\sigma\upsilon\nu\varphi} \xrightarrow{\varphi=\frac{\pi}{2}} A = \sqrt{A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2\sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{2}} \Rightarrow A = \sqrt{A_1^2 + A_2^2}$

Αν αντικαταστήσουμε τα πλάτη A_1=0,4m και A_2=0,4m έχουμε:

$$A = \sqrt{(0,4m)^2 + (0,4m)^2} = \sqrt{0,16m^2 + 0,16m^2} = \sqrt{2 \cdot 0,16m^2} = 0,4\sqrt{2}m\ .$$

γ) Παρατηρούμε ότι η γωνιακή συχνότητα της σύνθετης ταλάντωσης είναι ίδια με των δύο επιμέρους Α.Α.Τ., δηλαδή ω=2π rad/s. Η περίοδός της δίνεται από το τύπο:

$$T = \frac{2\pi}{\omega} \Rightarrow T = \frac{2\pi}{2\pi}s = 1s\ .$$

Για τη φάση της σύνθετης Α.Α.Τ. ξεκινάμε με τον τύπο: $\varepsilon\varphi\theta = \frac{A_2\eta\mu\varphi}{A_1 + A_2\sigma\upsilon\nu\varphi}$ με A_1 = A_2=0,4cm και φ=π/2 οπότε με αντικατάσταση προκύπτει

$$\varepsilon\varphi\theta = \frac{0,4\eta\mu90^o}{0,4 + 0,4\sigma\upsilon\nu90^o} \Rightarrow \varepsilon\varphi\theta = \frac{0,4}{0,4} \Rightarrow \varepsilon\varphi\theta = 1 \Rightarrow \theta = \frac{\pi}{4}rad$$

Η φάση αυτή είναι η διαφορά φάσης μεταξύ της φάσης της σύνθετης Α.Α.Τ. και της πρώτης από τις δοσμένες ταλαντώσεις, αυτής δηλαδή που έχει τη μικρότερη φάση $(\varphi = 2\pi t + \frac{\pi}{6})$

Η φάση της σύνθετης Α.Α.Τ. λοιπόν είναι $\varphi' = \varphi_1 + \theta \Rightarrow \varphi' = 2\pi t + \frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{4} \Rightarrow \varphi' = 2\pi t + \frac{5\pi}{12}$ (S.I.)

Άρα η αρχική φάση της σύνθετης Α.Α.Τ. είναι: $\frac{5\pi}{12}$ rad

δ) Η εξίσωση της απομάκρυνσης της σύνθετης Α.Α.Τ. δίνεται από τον τύπο:

$$x = A\eta\mu(\omega t + \theta) \Rightarrow x = 0{,}4\sqrt{2}\eta\mu(2\pi t + \frac{5\pi}{12}) \text{ (S.I.)} \quad (1)$$

Η σταθερά ταλάντωσης δίνεται από τον τύπο:

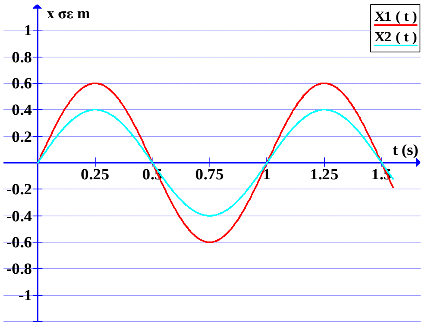
$$D = m\omega^2 \Rightarrow D = 0{,}2Kg\cdot(2\pi s^{-1})^2 \Rightarrow D = 0{,}2Kg\cdot 4\pi^2 s^{-2} \xrightarrow{\pi^2=10} D = 8Kg\cdot s^{-2}$$

Η δύναμη επαναφοράς δίνεται από τον τύπο:

$$F_{\varepsilon\pi} = -Dx \xrightarrow{(1)} F_{\varepsilon\pi} = -8\cdot 0\ 4{,}\sqrt{2}\eta\mu(2\pi t + \frac{5\pi}{12}) \Rightarrow F_{\varepsilon\pi} = -3{,}2\sqrt{2}\eta\mu(2\pi t + \frac{5\pi}{12}) \text{ (S.I.)}$$

Άσκηση 2.

Ένα σώμα μάζας m=1kg εκτελεί κίνηση που προέρχεται από τη σύνθεση δύο απλών αρμονικών ταλαντώσεων ίδιας διεύθυνσης, γύρω από το ίδιο σημείο και οι απομακρύνσεις τους παριστάνονται στο παρακάτω διάγραμμα.



α) Να υπολογισθεί η γωνιακή συχνότητα της συνισταμένης ταλάντωσης.

β) Να γραφούν οι εξισώσεις της απομάκρυνσης των δύο επιμέρους ταλαντώσεων, σε συνάρτηση με το χρόνο.

γ) Να γραφεί η εξίσωση της απομάκρυνσης της συνισταμένης ταλάντωσης και να παρασταθεί γραφικά στο ίδιο διάγραμμα με τις δύο προηγούμενες εξισώσεις.

δ) Να υπολογισθεί η κινητική ενέργεια του σώματος τη χρονική στιγμή $t = 1s$.

Δίνεται: $\pi^2 \simeq 10$.

<u>Λύση</u>

α) Από το παραπάνω διάγραμμα βλέπουμε ότι οι δύο Α.Α.Τ. έχουν ίδια περίοδο και ίση με T=1s. Άρα η γωνιακή συχνότητα των δύο επιμέρους ταλαντώσεων δίνεται από τον τύπο:

$$\omega = \frac{2\pi}{T} \Rightarrow \omega = \frac{2\pi \text{ rad}}{1s} \Rightarrow \omega = 2\pi \frac{\text{rad}}{s}$$

Εφόσον η συχνότητα των δύο Α.Α.Τ. είναι ίδια (αφού έχουν ίδια γωνιακή συχνότητα ω=2π rad/s) το σώμα θα εκτελέσει μια νέα Α.Α.Τ. που θα έχει την ίδια γωνιακή συχνότητα ω=2π rad/s.

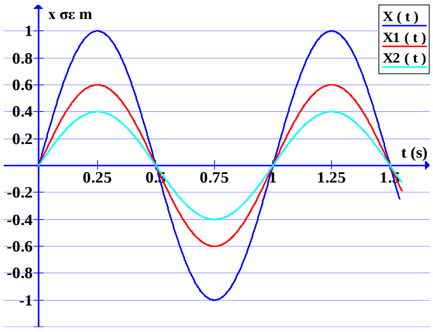
β) Από το παραπάνω διάγραμμα βλέπουμε ότι οι δύο Α.Α.Τ. έχουν πλάτη A_1=0,6m και A_2=0,4m, αντίστοιχα. Επίσης η αρχική φάση των δύο ταλαντώσεων είναι μηδέν, αφού τη χρονική στιγμή t=0 η απομάκρυνση τους είναι x=0, ενώ στη συνέχεια γίνεται και για τις δύο θετική.

Η εξίσωση της απομάκρυνσης με το χρόνο και για τις δύο Α.Α.Τ. είναι της μορφής $x = A\eta\mu\omega t$ άρα:

$x_1 = 0,6\eta\mu 2\pi t$ και $x_2 = 0,4\eta\mu 2\pi t$

γ) Εφόσον η συχνότητα των δύο Α.Α.Τ. είναι ίδια (αφού έχουν ίδια γωνιακή συχνότητα ω=2πrad/s) και η διαφορά φάσης των δύο ταλαντώσεων είναι μηδέν, το σώμα θα εκτελέσει μια νέα Α.Α.Τ. η οποία θα έχει την ίδια φάση και πλάτος ίσο με το άθροισμα των πλατών των δύο επιμέρους ταλαντώσεων.

Άρα $A = A_1 + A_2 \Rightarrow A = 0,6\text{m} + 0,4\text{m} = 1\text{m}$ και φάση ίση με 2πt. Η εξίσωση λοιπόν της σύνθετης ταλάντωσης είναι $x = \eta\mu 2\pi t$ (S.I.) (1)



δ) Η εξίσωση της κινητικής ενέργειας του σώματος είναι: $K = \frac{1}{2} m\omega^2 A^2 \sigma\upsilon\nu^2 \omega t$

οπότε με αντικατάσταση προκύπτει

$$K = \frac{1}{2} 1\text{kg} \cdot \left(2\pi \frac{\text{rad}}{\text{s}}\right)^2 (1\text{m})^2 \sigma\upsilon\nu^2 2\pi t \Rightarrow K = \frac{1}{2} 4\pi^2 \sigma\upsilon\nu^2 2\pi t \quad (\text{S.I.}) \xrightarrow{\pi^2 \simeq 10}$$

$$K = 20 \cdot \sigma\upsilon\nu^2 2\pi t \quad (\text{S.I.})$$

Τη χρονική στιγμή t=1s το σώμα έχει κινητική ενέργεια

$$K = 20 \cdot \sigma\upsilon\nu^2 (2\pi \cdot 1) \ (\text{S.I.}) \Rightarrow K = 20 \cdot 1\text{J} \Rightarrow K = 20\text{J}$$

Άσκηση 3.

Μικρό σώμα μάζας $m = 0,1\,kg$ εκτελεί κίνηση η οποία προέρχεται από τη σύνθεση δύο απλών ταλαντώσεων, οι οποίες γίνονται στην ίδια διεύθυνση και γύρω από την ίδια θέση ισορροπίας. Οι εξισώσεις της απομάκρυνσης σε σχέση με το χρόνο για τις δύο Α.Α.Τ. είναι $x_1 = 0,3\eta\mu 10\pi t$ και $x_2 = 0,4\eta\mu\left(10\pi t + \frac{\pi}{2}\right)$ και οι δύο εξισώσεις είναι στο (S.I.).

α) Να βρεθεί η εξίσωση της απομάκρυνσης για τη σύνθετη ταλάντωση.

β) Να βρεθεί η εξίσωση της δύναμης επαναφοράς συναρτήσει του χρόνου για τη σύνθετη ταλάντωση.

γ) Να υπολογιστεί η περίοδος της σύνθετης ταλάντωσης.

δ) Αν τη χρονική στιγμή t η απομάκρυνση της σύνθετης ταλάντωσης είναι $x = 0,25\,m$ να υπολογιστεί η ταχύτητα του σώματος.

Δίνεται $\epsilon\phi\frac{3\pi}{10} = \frac{4}{3}$ και $\pi^2 = 10$.

<u>Λύση</u>

α) Από τις εξισώσεις των επιμέρους ταλαντώσεων έχουμε:

$x_1 = 0,3\eta\mu 10\pi t$

Άρα $A_1 = 0,3\,m$ και $\omega = 10\pi\,rad/s$.

$x_2 = 0,4\eta\mu\left(10\pi t + \frac{\pi}{2}\right)$

Άρα $A_2 = 0,4\,m, \omega = 10\pi\,rad/s$ και $\phi = \frac{\pi}{2}$.

Για τη σύνθετη ταλάντωση προκύπτει:

$$A = \sqrt{A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2\sigma\upsilon\nu\phi}$$

$$A = \sqrt{0,3^2 + 0,4^2 + 2\cdot 0,3\cdot 0,4\cdot\sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{2}}m$$

$$A = \sqrt{0,09 + 0,16}m$$

$$A = \sqrt{0,25}m$$

$$A = \pm 0,5\,m$$

Άρα $A = 0,5\,m$

και $\epsilon\varphi\theta = \dfrac{A_2\eta\mu\varphi}{A_1 + A_2\sigma\upsilon\nu\varphi}$

$$\epsilon\varphi\theta = \frac{0,4\eta\mu\frac{\pi}{2}}{0,3+0,4\sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{2}}$$

$$\epsilon\varphi\theta = \frac{0,4}{0,3}$$

$$\epsilon\varphi\theta = \frac{4}{3} \Rightarrow \theta = \frac{3\pi}{10}$$

Η εξίσωση της απομάκρυνσης για τη σύνθετη ταλάντωση είναι:

$$x = A\eta\mu(\omega t + \theta)$$

$x = 0,5\eta\mu\left(10\pi t + \dfrac{3\pi}{10}\right)$ (S. I.)

β) Η μέγιστη δύναμη επαναφοράς είναι:

$$F_{MAX} = ma_{MAX}$$

$$F_{MAX} = m\omega^2 A$$

$$F_{MAX} = 0,1kg\left(10\pi\frac{rad}{s}\right)^2 0,5m$$

$$F_{MAX} = 50\,N\,.$$

Είναι όμως $F = -F_{MAX}\eta\mu(\omega t + \theta)$

Συνεπώς $F = -50\eta\mu\left(10\pi t + \dfrac{3\pi}{10}\right)N$

γ) Η σύνθετη ταλάντωση έχει την ίδια συχνότητα άρα και περίοδο με τις επιμέρους ταλαντώσεις.

$$\omega = \frac{2\pi}{T} \Rightarrow T = \frac{2\pi}{\omega} \Rightarrow T = \frac{2\pi}{10\pi\frac{rad}{s}} \Rightarrow T = \frac{1}{5}\,s\,.$$

δ) Από την Αρχή Διατήρησης της Ενέργειας Ταλάντωσης για τη σύνθετη ταλάντωση ισχύει:

$$E = K + U$$

$$\frac{1}{2}DA^2 = \frac{1}{2}m\upsilon^2 + \frac{1}{2}Dx^2$$

$$m\omega^2 A^2 = m\upsilon^2 + m\omega^2 x^2$$

$$\omega^2 A^2 = \upsilon^2 + \omega^2 x^2$$

$$\upsilon^2 = \omega^2 \left(A^2 - x^2\right)$$

$$\upsilon^2 = \left(10\pi \frac{rad}{s}\right)^2 \left[\left(0,5m\right)^2 - (0,25m)^2\right]$$

$$\upsilon^2 = 187,5 \frac{m^2}{s^2}$$

$$\upsilon = \pm\sqrt{187,5}\ m/s\ .$$

ΘΕΜΑ Δ

Πρόβλημα 1.

Ένα σώμα μάζας $m = 20g$ εκτελεί κίνηση που προέρχεται από τη σύνθεση δύο απλών αρμονικών ταλαντώσεων ίδιας διεύθυνσης, ίδιας συχνότητας και γύρω από το ίδιο σημείο. Η δεύτερη ταλάντωση έχει διπλάσιο πλάτος από την πρώτη και η φάση της προηγείται κατά γωνία $\varphi = 60^0$. Η πρώτη ταλάντωση έχει αρχική φάση μηδέν. Η συνισταμένη ταλάντωση έχει εξίσωση:

$x = \sqrt{7}\eta\mu\left(2\pi t + \theta\right)$ (x σε cm, t σε s).

α) Να υπολογισθεί η σταθερά D της σύνθετης ταλάντωσης

β) Να γραφούν οι εξισώσεις της απομάκρυνσης των δύο αρχικών ταλαντώσεων.

γ) Να συγκρίνετε την ενέργεια της σύνθετης ταλάντωσης με το άθροισμα των ενεργειών των δύο επιμέρους ταλαντώσεων.

δ) Να υπολογίσετε το λόγο της δυναμικής ενέργειας του σώματος προς την κινητική, τη χρονική στιγμή $t = 0$.

Δίνεται: $\pi^2 \simeq 10$.

Λύση

α) Η σύνθετη ταλάντωση έχει γωνιακή συχνότητα όπως φαίνεται από την εξίσωσή της απομάκρυνσης $\omega = 2\pi\dfrac{rad}{s}$.

Η σταθερά D της ταλάντωσης δίνεται από τον τύπο:

$$D = m\omega^2 \Rightarrow D = 0,02Kg\cdot(2\pi s^{-1})^2 \Rightarrow D = 0,02Kg\cdot 4\pi^2 s^{-2} \xrightarrow{\pi^2\simeq 10} D = 0,8Kg\cdot s^{-2}$$

β) Το πλάτος της σύνθετης Α.Α.Τ. δίνεται από τον τύπο: $A = \sqrt{A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2\sigma\upsilon\nu\varphi}$ (1)

Από την εκφώνηση έχουμε ότι: $A_2=2A_1$, $A = \sqrt{7}cm$ και η διαφορά φάσης φ των δύο επιμέρους ταλαντώσεων είναι φ=60° άρα:

$$A = \sqrt{A_1^2 + (2A_1)^2 + 2A_1(2A_1)\sigma\upsilon\nu 60^o} \Rightarrow A = \sqrt{A_1^2 + 4A_1^2 + 4A_1^2\frac{1}{2}} \Rightarrow A = \sqrt{A_1^2 + 4A_1^2 + 2A_1^2} \Rightarrow$$

$$A = \sqrt{7A_1^2} \xrightarrow{A=\sqrt{7}cm} \sqrt{7}cm = \sqrt{7}A_1 \Rightarrow A_1 = 1cm$$

Η εξίσωση της απομάκρυνσης με το χρόνο για τις δύο Α.Α.Τ. είναι της μορφής:

$x_1 = A_1\eta\mu\omega t$ και $x_2 = 2A_1\eta\mu(\omega t + \dfrac{\pi}{3})$, οπότε με αντικατάσταση προκύπτει:

$$x_1 = \eta\mu 2\pi t \text{ και } x_2 = 2\eta\mu\left(2\pi t + \frac{\pi}{3}\right) \quad (x \text{ σε cm},\ t \text{ σε s})$$

γ) Οι δύο επιμέρους ταλαντώσεις και η συνισταμένη ταλάντωση που προκύπτει, έχουν την ίδια σταθερά $D=m\omega^2$ αφού έχουν ίδια γωνιακή συχνότητα. Η ενέργεια της σύνθετης ταλάντωσης είναι:

$$E=\frac{1}{2}DA^2\overset{(1)}{\Rightarrow}E=\frac{1}{2}D\left(\sqrt{A_1^2+A_2^2+2A_1A_2\sigma\upsilon\nu\varphi}\right)^2\Rightarrow E=\frac{1}{2}D(A_1^2+A_2^2+2A_1A_2\,\sigma\upsilon\nu 60^o)$$

$$E=\frac{1}{2}DA_1^2+\frac{1}{2}DA_2^2+DA_1A_2\frac{1}{2}\Rightarrow E=E_1+E_2+\frac{1}{2}DA_1A_2$$

Επειδή $\frac{1}{2}DA_1A_2>0$ η ενέργεια της σύνθετης ταλάντωσης είναι μεγαλύτερη από το άθροισμα των ενεργειών των δύο επιμέρους ταλαντώσεων.

δ) Για την αρχική φάση θ της σύνθετης ταλάντωσης ισχύει: $\varepsilon\varphi\theta=\frac{A_2\eta\mu\varphi}{A_1+A_2\sigma\upsilon\nu\varphi}$

όπου $A_2=2A_1$ και $\varphi=60^o$ οπότε με αντικατάσταση προκύπτει

$$\varepsilon\varphi\theta=\frac{2A_1\eta\mu 60^o}{A_1+2A_1\sigma\upsilon\nu 60^o}\Rightarrow\varepsilon\varphi\theta=\frac{2\eta\mu 60^o}{1+2\sigma\upsilon\nu 60^o}\Rightarrow\varepsilon\varphi\theta=\frac{2\frac{\sqrt{3}}{2}}{1+2\frac{1}{2}}\Rightarrow\varepsilon\varphi\theta=\frac{\sqrt{3}}{2}\quad(2)$$

Η εξίσωση της δυναμικής ενέργειας του σώματος είναι: $U=\frac{1}{2}m\omega^2A^2\eta\mu^2(\omega t+\theta)$

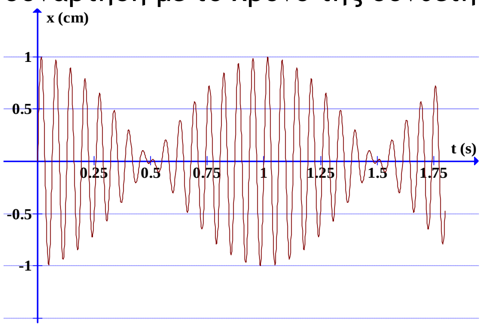
και η εξίσωση της κινητικής ενέργειας του σώματος είναι: $K=\frac{1}{2}m\omega^2A^2\sigma\upsilon\nu^2(\omega t+\theta)$

Ο λόγος τους είναι: $\frac{U}{K}=\frac{\frac{1}{2}m\omega^2A^2\eta\mu^2(\omega t+\theta)}{\frac{1}{2}m\omega^2A^2\sigma\upsilon\nu^2(\omega t+\theta)}\Rightarrow\frac{U}{K}=\frac{\eta\mu^2(\omega t+\theta)}{\sigma\upsilon\nu^2(\omega t+\theta)}\Rightarrow\frac{U}{K}=\varepsilon\varphi^2(\omega t+\theta)$

Αντικαθιστώντας t=0: $\frac{U}{K}=\varepsilon\varphi^2\theta\overset{(2)}{\Rightarrow}\frac{U}{K}=\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2\Rightarrow\frac{U}{K}=\frac{3}{4}\Rightarrow\frac{U}{K}=0,75$

Πρόβλημα 2.

Ένα σώμα εκτελεί κίνηση που προέρχεται από τη σύνθεση δύο απλών αρμονικών ταλαντώσεων, ίδιας διεύθυνσης, ίδιου πλάτους Α, που πραγματοποιούνται γύρω από το ίδιο σημείο με συχνότητες $f_1 = 16\text{Hz}$ και f_2 $(f_2 < f_1)$ αντίστοιχα, οι οποίες διαφέρουν λίγο μεταξύ τους. Στο σχήμα φαίνεται η γραφική παράσταση της απομάκρυνσης σε συνάρτηση με το χρόνο της σύνθετης κίνησης που εκτελεί το σώμα.



α) Να υπολογισθεί η συχνότητα και η περίοδος των διακροτημάτων καθώς και η συχνότητα f_2.

β) Να γραφούν οι εξισώσεις απομάκρυνσης των δύο επιμέρους ταλαντώσεων.

γ) Να γραφεί η εξίσωση του πλάτους της σύνθετης κίνησης.

δ) Να γραφεί η εξίσωση της απομάκρυνσης της σύνθετης κίνησης σε σχέση με το χρόνο.

<u>Λύση</u>

α) Τόσο από τη μορφή της γραφικής παράστασης x-t, όσο και από το δεδομένο ότι οι συχνότητες των επιμέρους Α.Α.Τ. διαφέρουν λίγο μεταξύ τους, συμπεραίνουμε ότι η κίνηση του σώματος παρουσιάζει διακροτήματα. Όπως φαίνεται από το διάγραμμα η περίοδος του διακροτήματος, δηλαδή ο χρόνος μεταξύ δύο διαδοχικών μηδενισμών του πλάτους είναι 1,5s – 0,5s = 1s. Δηλαδή T_Δ=1s. Άρα η συχνότητα τους είναι $f_\Delta = \frac{1}{T_\Delta} \Rightarrow f_\Delta = \frac{1}{1\text{s}} \Rightarrow f_\Delta = 1\text{Hz}$.

Όμως $f_\Delta = |f_1 - f_2| \xrightarrow{f_2<f_1} f_\Delta = f_1 - f_2 \Rightarrow f_2 = f_1 - f_\Delta \Rightarrow f_2 = 16\text{Hz} - 1\text{Hz} \Rightarrow f_2 = 15\text{Hz}$

β) Το μέγιστο πλάτος της σύνθετης κίνησης, όπως φαίνεται από το διάγραμμα είναι Α΄=2Α=1cm, οπότε η κάθε μια επιμέρους ταλάντωση έχει πλάτος Α=0,5cm. Άρα οι εξισώσεις της απομάκρυνσης της κάθε Α.Α.Τ. είναι:

$x_1 = A\eta\mu\omega_1 t$ και $x_2 = A\eta\mu\omega_2 t$ όπου $\omega_1 = 2\pi f_1 = 32\pi$ rad/s , $\omega_2 = 2\pi f_2 = 30\pi$ rad/s και Α=0,5 cm, άρα:

$x_1 = 0,5\eta\mu 32\pi t$ και $x_2 = 0,5\eta\mu 30\pi t$ (x σε cm, t σε sec)

γ) Η εξίσωση του πλάτους της σύνθετης κίνησης είναι: $A' = \left|2A\sigma\upsilon\nu\left(\frac{\omega_1 - \omega_2}{2} t\right)\right|$

όπου $\omega_1 = 2\pi f_1 = 32\pi$ rad/s, $\omega_2 = 2\pi f_2 = 30\pi$ rad/s και Α=0,5 cm. Άρα:

$A' = \left|2 \cdot 0,5 \cdot \sigma\upsilon\nu\left(\frac{|32\pi - 30\pi|}{2} t\right)\right| \Rightarrow A' = \left|\sigma\upsilon\nu\left(\frac{2\pi}{2} t\right)\right| \Rightarrow A' = |\sigma\upsilon\nu\pi t|$ (Α' σε cm, t σε s)

δ) Η γωνιακή συχνότητα ω της σύνθετης κίνησης είναι:

$$\omega = \frac{\omega_1 + \omega_2}{2} \Rightarrow \omega = \frac{32\pi + 30\pi}{2}\frac{\text{rad}}{\text{s}} \Rightarrow \omega = 31\pi\frac{\text{rad}}{\text{s}}$$

Άρα η εξίσωση της απομάκρυνσης της σύνθετης κίνησης θα είναι:

$x = \sigma\upsilon\nu(\pi t)\eta\mu(31\pi)$ (S.I.)

Ημερομηνία τροποποίησης: 15/7/2011