**ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1$^{\text{ο}}$: ΜΗΧΑΝΙΚΕΣ – ΗΛΕΚΤΡΙΚΕΣ ΤΑΛΑΝΤΩΣΕΙΣ**

**ΕΝΟΤΗΤΑ 1.1: ΠΕΡΙΟΔΙΚΟ ΦΑΙΝΟΜΕΝΟ – ΑΠΛΗ ΑΡΜΟΝΙΚΗ ΤΑΛΑΝΤΩΣΗ (ΚΙΝΗΜΑΤΙΚΗ ΚΑΙ ΔΥΝΑΜΙΚΗ ΠΡΟΣΕΓΓΙΣΗ)**

**ΣΗΜΕΙΩΣΕΙΣ**

$x = A \cdot \eta\mu\omega t$

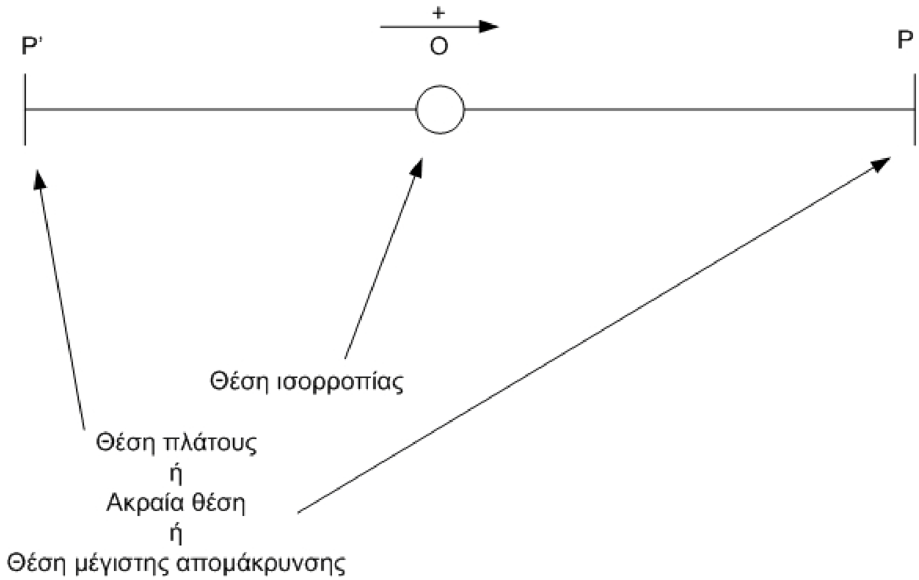
$F = -D \cdot x$ → **ΙΚΑΝΗ ΚΑΙ ΑΝΑΓΚΑΙΑ ΣΥΝΘΗΚΗ ΓΙΑ ΝΑ ΚΑΝΕΙ ΕΝΑ ΣΩΜΑ Α.Α.Τ.**

| Περίοδος |
| --- |
| $T \rightarrow 1s$<br>$T = \frac{t}{N}$<br>Ν είναι ο αριθμός των ταλαντώσεων που έχει κάνει το σώμα σε χρόνο t |

| Συχνότητα |
| --- |
| $f \rightarrow 1Hz = 1s^{-1}$<br>$f = \frac{N}{t}$<br>Η συχνότητα και η περίοδος είναι μεγέθη αντίστροφα: $f \cdot T = 1$ |

| Σχέση Συχνότητας - Περιόδου |
| --- |
| $f = \frac{1}{T}$ |

| Γωνιακή Συχνότητα |
| --- |
| $\omega \rightarrow 1\frac{rad}{s}$<br>$\omega = 2\pi \cdot f$ ή $\omega = \frac{2\pi}{T}$<br>Το ω είναι μονόμετρο μέγεθος και δεν έχει κάποια φυσική σημασία |




| χρόνος | φάση |
|---|---|
| t | Φ |
| 0 | 0 |
| T/4 | π/2 |
| T/2 | π |
| 3T/4 | 3π/2 |
| T | 2π |

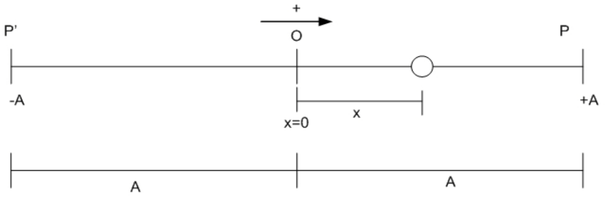
Απομάκρυνση

$x \rightarrow 1\,m$

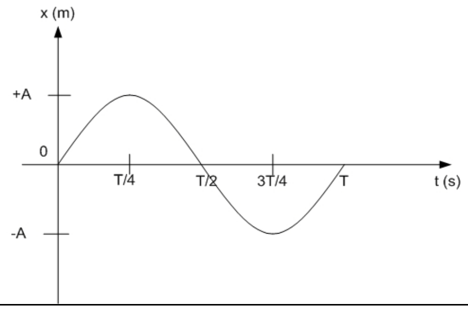
$x = A \cdot ημωt$

Το Α είναι η μέγιστη απομάκρυνση και ονομάζεται ΠΛΑΤΟΣ της ταλάντωσης.

Το γινόμενο $ω \cdot t$ ονομάζεται φάση.




| t | x |
|---|---|
| 0 | 0 |
| T/4 | +A |
| T/2 | 0 |
| 3T/4 | -A |
| T | 0 |



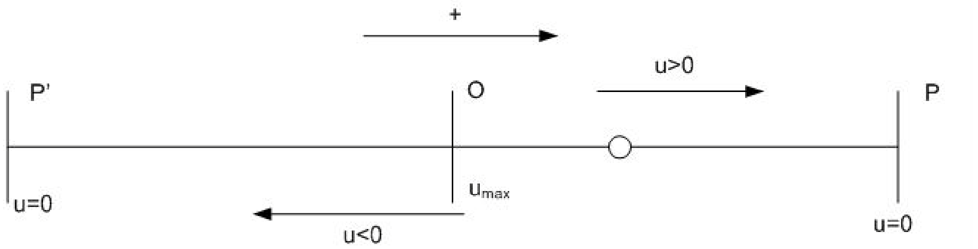
Ταχύτητα

$u \rightarrow 1 m/s$

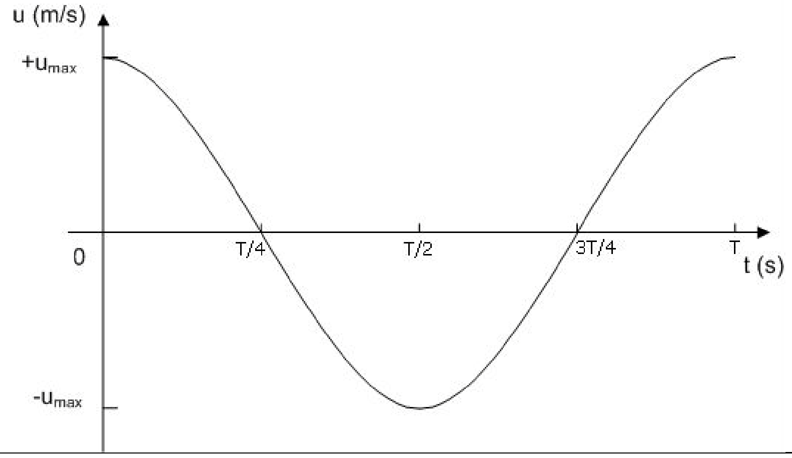
$u = u_{max} \cdot συνωt$

Το $u_{max}$ είναι η μέγιστη ταχύτητα και ονομάζεται ΠΛΑΤΟΣ ΤΗΣ ΤΑΧΥΤΗΤΑΣ

$u_{max} = ω \cdot A$




| t | u |
|---|---|
| 0 | $+u_{max}$ |
| T/4 | 0 |
| T/2 | $-u_{max}$ |
| 3T/4 | 0 |
| T | $+u_{max}$ |



Επιτάχυνση

$a \rightarrow 1 m/s^2$

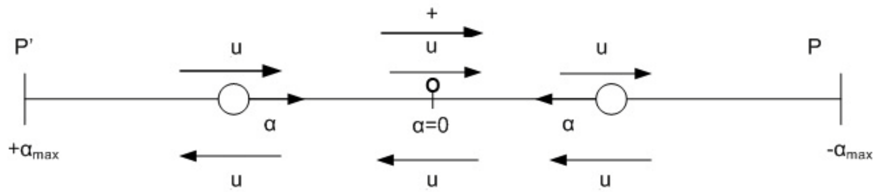
$a = -a_{max} \cdot \eta\mu\omega t$

Το $\alpha_{max}$ είναι η μέγιστη επιτάχυνση και ονομάζεται ΠΛΑΤΟΣ ΤΗΣ ΕΠΙΤΑΧΥΝΣΗΣ

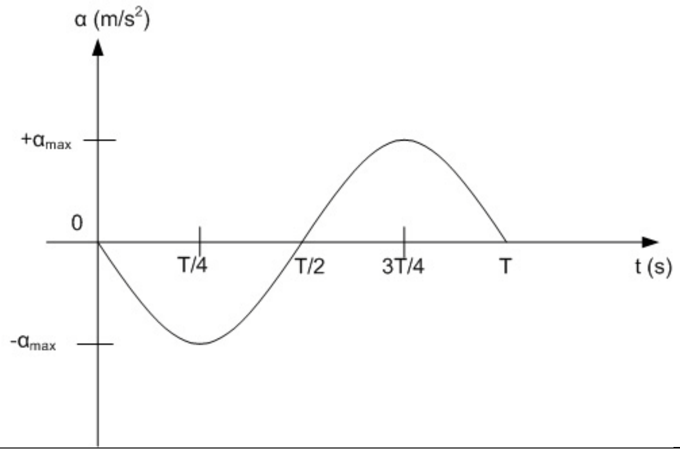
$\alpha_{max} = \omega^2 \cdot A$

ή

$\alpha_{max} = \omega^2 \cdot A = \omega \cdot \omega \cdot A = \omega \cdot u_{max}$

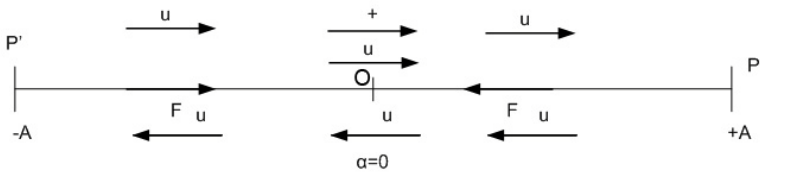



| t | x |
|---|---|
| 0 | 0 |
| T/4 | $-\alpha_{max}$ |
| T/2 | 0 |
| 3T/4 | $+\alpha_{max}$ |
| T | 0 |

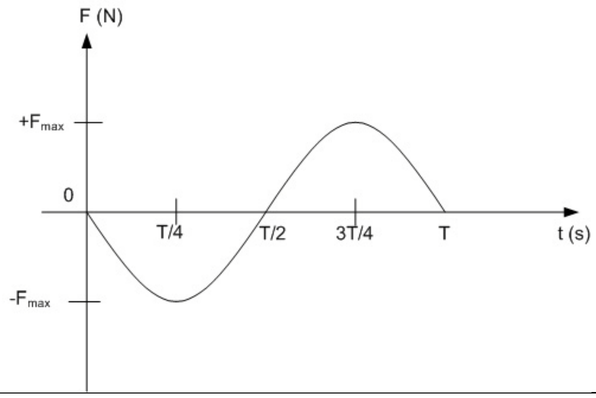



- Όταν το σώμα κινείται από τη Θέση Ισορροπίας προς τις ακραίες θέσεις επιβραδύνεται.
- Όταν το σώμα κινείται από τις ακραίες θέσεις προς τη Θέση Ισορροπίας επιταχύνεται.

| Δύναμη Επαναφοράς |
|---|
| $F \rightarrow 1\,N$<br>$F = -F_{max} \cdot ημωt$<br>Το $F_{max}$ είναι η μέγιστη δύναμη επαναφοράς και ονομάζεται ΠΛΑΤΟΣ ΤΗΣ ΔΥΝΑΜΗΣ<br>$F_{max} = m \cdot α_{max}$<br>ή<br>$F_{max} = m \cdot ω^2 \cdot A$ |




| t | F |
|---|---|
| 0 | 0 |
| T/4 | $-F_{max}$ |
| T/2 | 0 |
| 3T/4 | $+F_{max}$ |
| T | 0 |



Σύμφωνα με όλα τα προηγούμενα καταλήγουμε στον παρακάτω πίνακα:

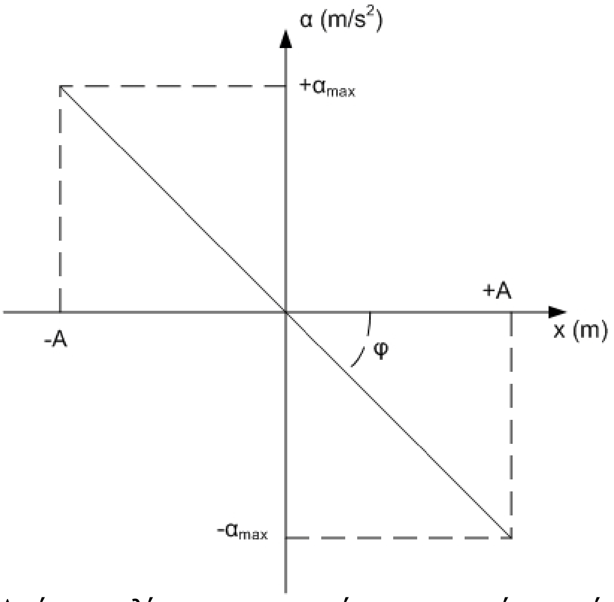
| t | x | u | α | F | φ |
|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 0 | $+u_{max}$ | 0 | 0 | 0 |
| T/4 | +A | 0 | $-\alpha_{max}$ | $-F_{max}$ | π/2 |
| T/2 | 0 | $-u_{max}$ | 0 | 0 | π |
| 3T/4 | -A | 0 | $+\alpha_{max}$ | $+F_{max}$ | 3π/2 |
| T | 0 | $+u_{max}$ | 0 | 0 | 2π |

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| $x=-A$ | $\alpha=+\alpha_{max}$ | $F=+F_{max}$ | $u=0$ | Θ.Π. | |
| $x=0$ | $\alpha=0$ | $F=0$ | $u=\pm u_{max}$ | Θ.Π. | + |
| $x=+A$ | $\alpha=-\alpha_{max}$ | $F=-F_{max}$ | $u=0$ | Θ.Π. | |

Η απομάκρυνση, η επιτάχυνση και η δύναμη επαναφοράς είναι μηδέν στη Θέση Ισορροπίας και μέγιστες (κατά απόλυτη τιμή) στις θέσεις πλάτους. Η ταχύτητα είναι μέγιστη (κατά απόλυτη τιμή) στη Θέση Ισορροπίας και μηδέν στις θέσεις πλάτους. Η απομάκρυνση και η επιτάχυνση έχουν πάντα αντίθετο πρόσημο.

| Σχέση απομάκρυνσης - ταχύτητας |
| --- |
| $x = A \cdot ημωt \Rightarrow ημωt = \frac{x}{A}$ (i)<br>$u = u_{max} \cdot συνωt \Rightarrow συνωt = \frac{u}{u_{max}}$ (ii)<br>Ισχύει ότι:<br>$ημ^2ωt + συν^2ωt = 1$<br>άρα από τις (i) και (ii)<br>$\frac{x^2}{A^2} + \frac{u^2}{u_{max}^2} = 1$<br>$\frac{x^2}{A^2} + \frac{u^2}{(ω \cdot A)^2} = 1$<br>$\frac{ω^2 x^2}{ω^2 A^2} + \frac{u^2}{ω^2 A^2} = 1$<br>$\frac{ω^2 x^2 + u^2}{ω^2 A^2} = 1$<br>$ω^2 \cdot x^2 + u^2 = ω^2 \cdot A^2$<br>$u^2 = ω^2 \cdot A^2 - ω^2 \cdot x^2$<br>$u^2 = ω^2 \cdot (A^2 - x^2)$<br>$u = \pm ω \cdot \sqrt{A^2 - x^2}$<br>Η παραπάνω σχέση στην οποία καταλήξαμε πρέπει πάντα να την αποδεικνύουμε αν θέλουμε να τη χρησιμοποιήσουμε. |

| Σχέση επιτάχυνσης - απομάκρυνσης |
|---|
| Γνωρίζουμε ότι: <br> $\alpha = -\alpha_{max} \cdot \eta\mu\omega t \ (\alpha_{max} = \omega^2 \cdot A)$ <br> $\alpha = -\omega^2 A \cdot \eta\mu\omega t \ (x = A \cdot \eta\mu\omega t)$ <br> $\alpha = -\omega^2 \cdot x$ |

| Γραφική Παράσταση Επιτάχυνσης - Απομάκρυνσης |
|---|
|   <br> Από την κλίση της παραπάνω γραφικής παράστασης (κατά απόλυτη τιμή) υπολογίζω το τετράγωνο της γωνιακής συχνότητας $\lvert \varepsilon\varphi\varphi \rvert = \omega^2$ |

| Σχέση επιτάχυνσης - ταχύτητας |
|---|
| $\alpha = -\alpha_{max} \cdot \eta\mu\omega t \Rightarrow \eta\mu\omega t = \dfrac{-\alpha}{\alpha_{max}}$ (i)<br>$u = u_{max} \cdot \sigma\upsilon\nu\omega t \Rightarrow \sigma\upsilon\nu\omega t = \dfrac{u}{u_{max}}$ (ii)<br>Ισχύει ότι: $\eta\mu^2\omega t + \sigma\upsilon\nu^2\omega t = 1$ άρα από τις (i) και (ii)<br>$\left(\dfrac{-\alpha}{\alpha_{max}}\right)^2 + \left(\dfrac{u}{u_{max}}\right)^2 = 1$<br>$\dfrac{\alpha^2}{\alpha_{max}^2} + \dfrac{u^2}{u_{max}^2} = 1$<br>$\dfrac{\alpha^2}{\left(\omega^2 \cdot A\right)^2} + \dfrac{u^2}{\left(\omega \cdot A\right)^2} = 1$<br>$\dfrac{\alpha^2}{\omega^4 \cdot A^2} + \dfrac{u^2}{\omega^2 \cdot A^2} = 1$<br>$\dfrac{\alpha^2}{\omega^4 \cdot \left(A^2\right)} + \dfrac{\omega^2 \cdot u^2}{\omega^4 \left(A^2\right)} = 1$<br>$\dfrac{\alpha^2 + \omega^2 \cdot u^2}{\omega^4 \cdot \left(A^2\right)} = 1$<br>$\alpha^2 + \omega^2 \cdot u^2 = \omega^4 \cdot A^2$<br>$\alpha^2 = \omega^4 \cdot A^2 - \omega^2 \cdot u^2$<br>$\alpha^2 = \omega^2 \cdot (\omega^2 \cdot A^2 - u^2)$<br>$\alpha^2 = \omega^2 \cdot (u_{max}^2 - u^2)$<br>$\alpha = \pm\omega \cdot \sqrt{u_{max}^2 - u^2}$<br>Η παραπάνω σχέση στην οποία καταλήξαμε πρέπει <u>πάντα</u> να την αποδεικνύουμε αν θέλουμε να τη χρησιμοποιήσουμε. |

Δύναμη Επαναφοράς - Σταθερά Επαναφοράς

Σύμφωνα με τον 2ο Νόμο του Newton (Θεμελιώδης Νόμος της Μηχανικής) ισχύει:

$F = m \cdot a \ (a = -a_{max} \cdot \eta\mu\omega t)$

$F = -m \cdot a_{max} \cdot \eta\mu\omega t \ (a_{max} = \omega^2 \cdot A)$

$F = -m \cdot \omega^2 \cdot A \cdot \eta\mu\omega t \ (x = A \cdot \eta\mu\omega t)$

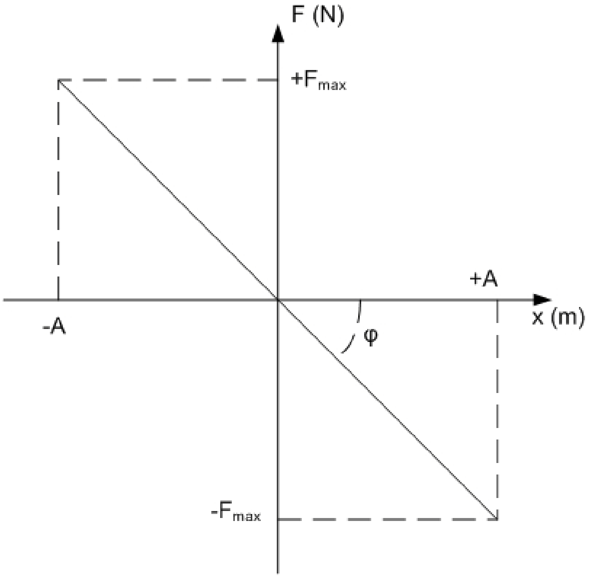
$F = -m \cdot \omega^2 \cdot x$

Θέτω $D = m \cdot \omega^2$ και καταλήγουμε:

$F = -D \cdot x$ **ΙΚΑΝΗ ΚΑΙ ΑΝΑΓΚΑΙΑ ΣΥΝΘΗΚΗ ΓΙΑ ΝΑ ΚΑΝΕΙ ΕΝΑ ΣΩΜΑ Α.Α.Τ.**

Το D ονομάζεται σταθερά επαναφοράς και εξαρτάται από το ταλαντούμενο σύστημα. Μονάδα μέτρησης για το D είναι το 1 N/m.

Γραφική παράσταση Δύναμης Επαναφοράς - Απομάκρυνσης




Από την κλίση της παραπάνω γραφικής παράστασης (κατά απόλυτη τιμή) υπολογίζω τη σταθερά επαναφοράς $|\epsilon\phi\phi| = D$

**Υπολογισμός Περιόδου Απλής Αρμονικής Ταλάντωσης**

$$D = m \cdot \omega^2 \ (\omega = \frac{2\pi}{T})$$

$$D = m \cdot \left(\frac{2\pi}{T}\right)^2$$

$$D = m \cdot \frac{(2\pi)^2}{T^2}$$

$$T^2 \cdot D = m \cdot (2\pi)^2$$

$$T^2 = \frac{m \cdot (2\pi^2)}{D}$$

$$T = \sqrt{\frac{m \cdot (2\pi)^2}{D}}$$

$$T = 2\pi \cdot \sqrt{\frac{m}{D}}$$

Η περίοδος εξαρτάται από τη μάζα του ταλαντούμενου σώματος και από τη σταθερά επαναφοράς του συστήματος.

**ΣΥΓΚΕΝΤΡΩΤΙΚΗ ΘΕΩΡΙΑ - ΤΥΠΟΛΟΓΙΟ**

- Περιοδικό φαινόμενο ονομάζεται το φαινόμενο που επαναλαμβάνεται αναλλοίωτα σε ίσα χρονικά διαστήματα.
- Περιοδική κίνηση έχουμε όταν το περιοδικό φαινόμενο περιλαμβάνει κίνηση.
- Ταλάντωση ονομάζεται η περιοδική κίνηση η οποία γίνεται παλινδρομικά μεταξύ δύο ακραίων θέσεων.
- Γραμμική ταλάντωση είναι η ταλάντωση η οποία πραγματοποιείται πάνω σε μία ευθεία γραμμή.
- Απλή Αρμονική Ταλάντωση ονομάζεται μια ειδική περίπτωση γραμμικής ταλάντωσης στην οποία η απομάκρυνση απο το μέσο της τροχιάς δίνεται από τη σχέση: $x = A\eta\mu\omega t$.
- Περίοδος (Τ) ονομάζεται ο χρόνος που απαιτείται για να ολοκληρωθεί το περιοδικό φαινόμενο.
- Συχνότητα (f) ονομάζεται το φυσικό μέγεθος που μας δηλώνει πόσες φορές επαναλαμβάνεται το περιοδικό φαινόμενο στη μονάδα του χρόνου .
- Η Συχνότητα και η περίοδος είναι μεγέθη αντίστροφα.
- Ένα σώμα έχει κάνει μια πλήρη ταλάντωση αν περάσει από όλες τις θέσεις και καταλήξει στην θέση από την οποία ξεκίνησε.
- Ο χρόνος για να μεταβεί το σώμα σε μια Α.Α.Τ. από την θέση ισορροπίας σε μία ακραία θέση και αντίστροφα είναι Τ/4.
- Ο χρόνος για να μεταβεί το σώμα σε μία Α.Α.Τ. από την μία ακραία θέση στην άλλη είναι Τ/2.
- Απομάκρυνση (x) ονομάζεται η απόσταση του σώματος από την θέση ισορροπίας.
- Πλάτος (Α) της ταλάντωσης ονομάζεται η μέγιστη απομάκρυνση.
- Η θέση ισορροπίας απέχει απόσταση Α από τις ακραίες θέσεις .
- Οι ακραίες θέσεις απέχουν μεταξύ τους απόσταση 2Α.
- Σε μία πλήρη ταλάντωση το σώμα έχει διανύσει τροχιά μήκους 4Α.
- Πλάτος της ταχύτητας $(u_{max})$ ονομάζεται η μέγιστη ταχύτητα.
- Πλάτος της επιτάχυνσης $(a_{max})$ ονομάζεται η μέγιστη επιτάχυνση.
- Όταν το σώμα κινείται από την θέση ισορροπίας προς μία ακραία θέση επιβραδύνεται
- Όταν το σώμα κινείται από μια ακραία θέση προς την θέση ισορροπίας επιταχύνεται.
- Δύναμη επαναφοράς $(F)$ ονομάζεται η συνισταμένη των δυνάμεων που ασκούνται σε ένα σώμα το οποίο εκτελεί Α.Α.Τ.
- Πλάτος της δύναμης $\left(F_{max}\right)$ ονομάζεται η μέγιστη δύναμη επαναφοράς
- Η δύναμη επαναφοράς και η επιτάχυνση είναι ομόρροπα διανύσματα .
- Η απομάκρυνση, η επιτάχυνση και η δύναμη επαναφοράς είναι μηδέν στην θέση ισορροπίας και μέγιστη στις ακραίες θέσεις .
- Η ταχύτητα είναι μέγιστη στην θέση ισορροπίας και μηδέν στις ακραίες θέσεις.
- Η απομάκρυνση και η επιτάχυνση έχουν πάντα αντίθετο πρόσημο.
- Η σχέση $F = -Dx$ είναι ικανή και αναγκαία συνθήκη για να κάνει ένα σώμα Α.Α.Τ.
- Η σταθερά αναλογίας D ονομάζεται σταθερά επαναφοράς

- Το κέντρο της τροχιάς σε μία Α.Α.Τ. ονομάζεται θέση ισορροπίας (Θ.Ι.) επειδή σε εκείνο το σημείο η δύναμη επαναφοράς είναι μηδενική.

| **Φυσικό μέγεθος** | **Σύμβολο** | **Μονάδα Μέτρησης** |
|---|---|---|
| Αριθμός Ταλαντώσεων | $N$ | – |
| Χρόνος | $t$ | $s$ |
| Περίοδος | $T$ | $s$ |
| Συχνότητα | $f$ | $Hz$ |
| Γωνιακή συχνότητα | $\omega$ | $rad/s$ |
| Απομάκρυνση | $x$ | $m$ |
| Πλάτος | $A$ | $m$ |
| Ταχύτητα | $u$ | $m/s$ |
| Πλάτος της Ταχύτητας | $u_{max}$ | $m/s$ |
| Επιτάχυνση | $\alpha$ | $m/s^2$ |
| Πλάτος της Επιτάχυνσης | $\alpha_{max}$ | $m/s^2$ |
| Δύναμη Επαναφοράς | $F$ | $N$ |
| Πλάτος της Δύναμης Επαναφοράς | $F_{max}$ | $N$ |
| Μάζα | $m$ | $Kg$ |
| Σταθερά Επαναφοράς | $D$ | $N/m$ |

| **Τυπολόγιο** | | | |
|---|---|---|---|
| $T=\frac{t}{N}$ | $f=\frac{N}{t}$ | $T=\frac{1}{f}$ | $f=\frac{1}{T}$ |
| $\omega=2\cdot\pi f$ | $\omega=2\cdot\frac{\pi}{T}$ | | |
| $x=A\cdot\eta\mu\omega t$ | | | |
| $u=u_{max}\cdot\sigma\upsilon\nu\omega t$ | $u_{max}=\omega\cdot A$ | | |
| $\alpha=-\alpha_{max}\cdot\eta\mu\omega t$ | $\alpha_{max}=\omega^2\cdot A$ | | |
| $F=-F_{max}\cdot\eta\mu\omega t$ | $F_{max}=m\cdot\alpha_{max}$ | $F_{max}=m\cdot\omega^2\cdot A$ | |
| $F=-D\cdot x$ | $F_{max}=D\cdot A$ | | |
| $D=m\cdot\omega^2$ | | | |
| $T=2\cdot\pi\sqrt{\frac{m}{D}}$ | | | |

*Ημερομηνία τροποποίησης: 20/07/2011*

**ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1$^{ο}$: ΜΗΧΑΝΙΚΕΣ – ΗΛΕΚΤΡΙΚΕΣ ΤΑΛΑΝΤΩΣΕΙΣ**

**ΕΝΟΤΗΤΑ 1.2: ΑΠΛΗ ΑΡΜΟΝΙΚΗ ΤΑΛΑΝΤΩΣΗ (ΕΝΕΡΓΕΙΑΚΗ ΠΡΟΣΕΓΓΙΣΗ, ΑΡΧΙΚΗ ΦΑΣΗ, ΣΥΣΤΗΜΑ ΕΛΑΤΗΡΙΟΥ ΣΩΜΑΤΟΣ, ΟΡΜΗ)**

**ΣΗΜΕΙΩΣΕΙΣ**

## ΣΥΓΚΕΝΤΡΩΤΙΚΗ ΘΕΩΡΙΑ - ΤΥΠΟΛΟΓΙΟ

- Η δυναμική ενέργεια ταλάντωσης $(U)$ είναι ανάλογη του τετραγώνου της απομάκρυνσης.
- Η δυναμική ενέργεια ταλάντωσης είναι μηδέν στη θέση ισορροπίας και μέγιστη στις ακραίες θέσεις.
- Η κινητική ενέργεια ταλάντωσης $(K)$ είναι ανάλογη του τετραγώνου της ταχύτητας του ταλαντευόμενου σώματος.
- Η κινητική ενέργεια ταλάντωσης είναι μέγιστη στη θέση ισορροπίας και μηδέν στις ακραίες θέσεις.
- Η ενέργεια ταλάντωσης $(E)$ παραμένει σταθερή σε μία Α.Α.Τ. και είναι πάντα ίση με το άθροισμα της κινητικής και της δυναμικής ενέργειας ταλάντωσης.
- Η ενέργεια ταλάντωσης είναι ίση με τη μέγιστη δυναμική ενέργεια $(U_{max})$.
- Η ενέργεια ταλάντωσης είναι ίση με τη μέγιστη κινητική ενέργεια $(K_{max})$.
- Η κινητική και η δυναμική ενέργεια ταλάντωσης γίνονται ίσες τέσσερις φόρες στη χρονική διάρκεια μίας περιόδου.
- Αν τη χρονική στιγμή $t=0$ το σώμα βρίσκεται στη θέση ισορροπίας δηλαδή $x=0$ και η ταχύτητά του είναι θετική $(u>0)$ τότε δεν έχουμε αρχική φάση ή η αρχική φάση είναι μηδέν $(\varphi_0=0)$.
- Αν τη χρονική στιγμή $t=0$ το σώμα βρίσκεται σε τυχαία θέση $x$, τότε έχουμε αρχική φάση διάφορη του μηδέν $(\varphi_0 \neq 0)$.
- Η αρχική φάση $(\varphi_0)$ είναι η φάση τη χρονική στιγμή $t=0$.
- Η αρχική φάση παίρνει τιμές $0 \leq \varphi_0 < 2\pi$.
- Για τον υπολογισμό της αρχικής φάσης σε μία Α.Α.Τ. πρέπει να γνωρίζουμε την απομάκρυνση αλλά και το πρόσημο της ταχύτητας τη χρονική στιγμή $t=0$.
- Για να αποδείξουμε ότι ένα σύστημα κάνει Α.Α.Τ. πάντα θα παίρνουμε θετική τη φορά από τη θέση ισορροπίας προς την τυχαία θέση ταλάντωσης.

| Φυσικό Μέγεθος | Σύμβολο | Μονάδα Μέτρησης |
|---|---|---|
| Δυναμική Ενέργεια | $U$ | $J$ |
| Κινητική Ενέργεια | $K$ | $J$ |
| Ενέργεια Ταλάντωσης | $E$ | $J$ |
| Μέγιστη Δυναμική Ενέργεια | $U_{max}$ | $J$ |
| Μέγιστη Κινητική Ενέργεια | $K_{max}$ | $J$ |
| Φάση | $\varphi$ | rad |
| Αρχική Φάση | $\varphi_0$ | rad |
| Σταθερά του Ελατηρίου | $K$ | $\frac{N}{m}$ |
| Πλάτος της Ταχύτητας | $u_{max}$ | $\frac{m}{s}$ |

| Τυπολόγιο | | | |
|---|---|---|---|
| $U = \frac{1}{2} \cdot D \cdot x^2$ | $U = E \cdot \eta\mu^2 \omega t$ | $U_{max} = \frac{1}{2} \cdot D \cdot A^2$ | |
| $K = \frac{1}{2} \cdot m \cdot u^2$ | $K = E \cdot \sigma\upsilon\nu^2 \omega t$ | $K_{max} = \frac{1}{2} \cdot m \cdot u_{max}^2$ | |
| $E = K + U$ | $E = \frac{1}{2} \cdot m \cdot u^2 + \frac{1}{2} \cdot D \cdot x^2$ | $E = \frac{1}{2} \cdot D \cdot A^2$ | $E = \frac{1}{2} \cdot m \cdot u_{max}^2$ |
| $\varphi = \omega t + \varphi_0$ | | | |
| $F_{\epsilon\lambda} = -K \cdot x$ | | | |

*Ημερομηνία τροποποίησης: 20/07/2011*

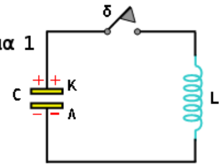
**ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1ο: ΜΗΧΑΝΙΚΕΣ - ΗΛΕΚΤΡΙΚΕΣ ΤΑΛΑΝΤΩΣΕΙΣ**

**ΕΝΟΤΗΤΑ 2: ΗΛΕΚΤΡΙΚΕΣ ΤΑΛΑΝΤΩΣΕΙΣ**

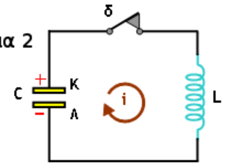
**ΣΗΜΕΙΩΣΕΙΣ**

Στο κύκλωμα του Σχήματος 1 ο πυκνωτής είναι φορτισμένος με φορτίο Q. Όταν κλείσουμε το διακόπτη δ, το κύκλωμα διαρρέεται από ρεύμα και ο πυκνωτής εκφορτίζεται (Σχήμα 2). Ταυτόχρονα το πηνίο, λόγω του φαινομένου της αυτεπαγωγής, συμπεριφέρεται σαν πηγή ΗΕΔ. Έτσι, όταν το φορτίο του πυκνωτή είναι μηδέν (Σχήμα 3), το φαινόμενο εξελίσσεται και ο πυκνωτής αρχίζει να φορτίζεται αντίθετα (Σχήμα 4) μέχρι να αποκτήσει φορτίο –Q (Σχήμα 5). Στη συνέχεια το φαινόμενο εξελίσσεται ακριβώς αντίστροφα με αποτέλεσμα το κύκλωμα να επανέλθει στην αρχική του κατάσταση. Το φαινόμενο είναι περιοδικό και ονομάζεται ηλεκτρική ταλάντωση. Συνέπεια του φαινομένου αυτού είναι η περιοδική μεταβολή φυσικών ποσοτήτων όπως το ηλεκτρικό φορτίο q του πυκνωτή, η ένταση του ηλεκτρικού ρεύματος i, η ενέργεια του ηλεκτρικού πεδίου $U_E$ του πυκνωτή και η ενέργεια του μαγνητικού πεδίου $U_B$ του πηνίου. Σε ένα κύκλωμα πηνίου – πυκνωτή (LC) χωρίς ωμική αντίσταση (ιδανικό κύκλωμα) μπορεί να δημιουργηθεί αμείωτη ηλεκτρική ταλάντωση. Το γεγονός ότι ο πυκνωτής δεν εκφορτίζεται αμέσως, όπως επίσης και το ότι το ρεύμα στο κύκλωμα δε γίνεται μέγιστο αμέσως, οφείλεται στο **φαινόμενο της αυτεπαγωγής**.

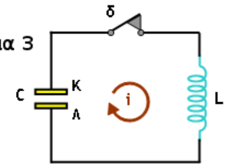
Σχήμα 1



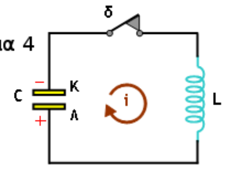

Σχήμα 2



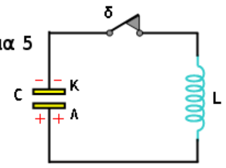

Σχήμα 3




Σχήμα 4




Σχήμα 5



| ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΕΙΣ | |
|---|---|
| • Όταν ο πυκνωτής έχει μέγιστο φορτίο, η ένταση του ηλεκτρικού ρεύματος στο κύκλωμα είναι μηδέν.<br>• Όταν ο πυκνωτής είναι αφόρτιστος, η ένταση του ηλεκτρικού ρεύματος στο κύκλωμα είναι μέγιστη.<br>• Η ένταση του ηλεκτρικού ρεύματος στο κύκλωμα αυξάνεται (ο πυκνωτής εκφορτίζεται) όταν τα μεγέθη $q$ και $i$ είναι ετερόσημα.<br>• Η περίοδος μιας ηλεκτρικής ταλάντωσης εξαρτάται μόνο από τη χωρητικότητα και την αυτεπαγωγή του κυκλώματος.<br>• Η ηλεκτρική ταλάντωση ενός κυκλώματος LC παρουσιάζει αναλογίες με την Α.Α.Τ. ενός σώματος.<br>• Η γενική μορφή των εξισώσεων $q=f(t)$ και $i=f(t)$ είναι ανάλογη με αυτή των εξισώσεων $x=f(t)$ και $\upsilon=f(t)$ στη μηχανική ταλάντωση. | $T=2\pi\sqrt{LC}$<br>$f=\frac{1}{2\pi\sqrt{LC}}$<br>$\omega=\frac{1}{\sqrt{LC}}$<br>$q=Q\cdot\eta\mu(\omega t+\phi_0)$<br>$i=I\cdot\sigma\upsilon\nu(\omega t+\phi_0)$ |

**Η εξίσωση του φορτίου:** $q = Q \cdot συνωt$

Η προηγούμενη εξίσωση ισχύει όταν για $t = 0 \rightarrow q = +Q$ και $i = 0$ .

Πράγματι, αν στην εξίσωση $q = Q \cdot ημ\left(ωt + φ_0\right)$ θέσουμε $φ_0 = \frac{π}{2}$, θα έχουμε:

$$q = Q \cdot ημ\left(ωt + φ_0\right) \Rightarrow q = Q \cdot ημ\left(ωt + \frac{π}{2}\right) \Rightarrow q = Q \cdot συνωt$$

Υπενθύμιση: $C = \frac{|q|}{V} \Rightarrow |q| = C \cdot V$

$V \rightarrow 1\,V(Volt)$ τάση μεταξύ των οπλισμών του πυκνωτή

**Η εξίσωση της έντασης του ηλεκτρικού ρεύματος:** $i = -I \cdot \eta\mu\omega t$

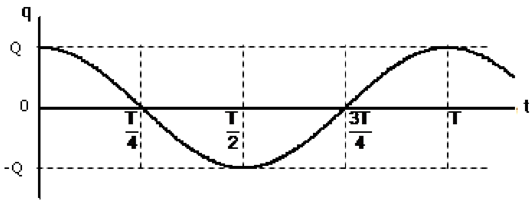
Η προηγούμενη εξίσωση ισχύει όταν για $t = 0 \rightarrow q = +Q$ και $i = 0$.

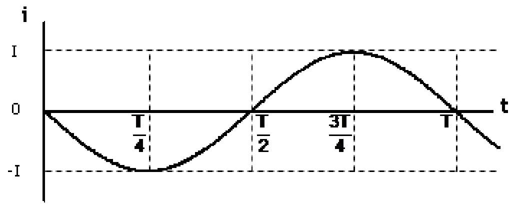
Πράγματι, αν στην εξίσωση $i = I \cdot \sigma\upsilon\nu(\omega t + \phi_0)$ θέσουμε $\phi_0 = \frac{\pi}{2}$, θα έχουμε:

$$i = I \cdot \sigma\upsilon\nu(\omega t + \phi_0) \Rightarrow i = I \cdot \sigma\upsilon\nu\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right) \Rightarrow i = -I \cdot \eta\mu\omega t$$

**Γραφικές παραστάσεις των q και i**

**(οι αρχικές συνθήκες στο κύκλωμα** $LC$ **είναι** $q = Q$ **και** $i = 0$**)**

| **Γραφική παράσταση φορτίου - χρόνου** | |
|---|---|
|  | $q = Q\sigma\upsilon\nu\omega t$ |

| **Γραφική παράσταση έντασης ρεύματος - χρόνου** | |
|---|---|
|  | $i = -I\eta\mu\omega t$ |

| ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ | |
|---|---|
| Το πλάτος της έντασης του ρεύματος στο κύκλωμα είναι ανάλογο με το πλάτος του φορτίου του πυκνωτή | $I = \omega Q$ |

| **Φορτίο οπλισμού** | **Ένταση ρεύματος** | **κατάσταση** |
|---|---|---|
| + | - | εκφόρτιση |
| - | - | φόρτιση |
| - | + | εκφόρτιση |
| + | + | φόρτιση |

| **Ενεργειακή μελέτη του κυκλώματος** $LC$ | |
|---|---|
| Στον πυκνωτή αποθηκεύεται ενέργεια με τη μορφή ενέργειας ηλεκτρικού πεδίου $U_E$. | $U_E = \frac{1}{2} \cdot \frac{q^2}{C}$ |
| Στο πηνίο αποθηκεύεται ενέργεια με τη μορφή ενέργειας μαγνητικού πεδίου $U_B$. | $U_B = \frac{1}{2} \cdot Li^2$ |
| Η ολική ενέργεια του κυκλώματος LC παραμένει σταθερή. | $E = U_{E,max} = U_{B,max} = U_E + U_B$ <br> $E = \frac{1}{2} \cdot \frac{Q^2}{C} = \frac{1}{2} \cdot LI^2 = \frac{1}{2} \cdot \frac{q^2}{C} + \frac{1}{2} \cdot Li^2$ |
| Κάθε στιγμή, η τάση στα άκρα του πυκνωτή είναι ίση με την τάση στα άκρα του πηνίου (τάση από αυτεπαγωγή). | |

**Χρονικές εξισώσεις των ενεργειών $U_E$ και $U_B$**

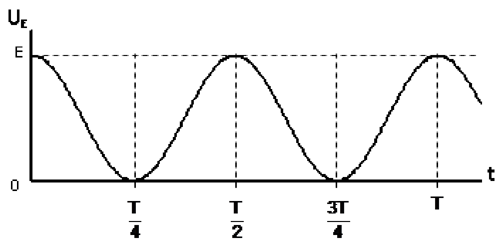
$$U_E = \frac{1}{2}\cdot\frac{q^2}{C} \overset{q=Q\eta\mu(\omega t+\phi_0)}{\Rightarrow} U_E = \frac{1}{2}\cdot\frac{Q^2}{C}\eta\mu^2(\omega t+\phi_0) \Rightarrow U_E = E\eta\mu^2(\omega t+\phi_0)$$

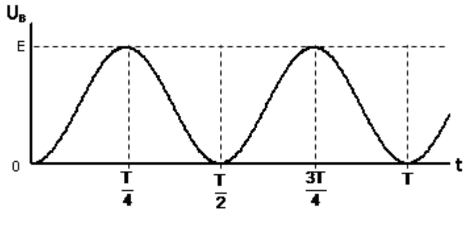
$$U_B = \frac{1}{2}Li^2 \overset{i=I\sigma\upsilon\nu(\omega t+\phi_0)}{\Rightarrow} U_B = \frac{1}{2}\cdot LI^2\sigma\upsilon\nu^2(\omega t+\phi_0) \Rightarrow U_B = E\sigma\upsilon\nu^2(\omega t+\phi_0)$$

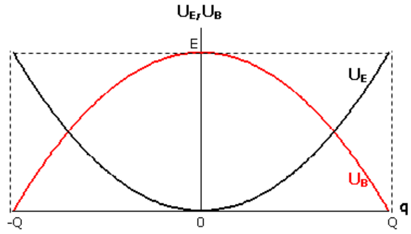
Αν για $t=0$ ισχύει: $q=+Q$ και $i=0$, τότε $\phi_0 = \frac{\pi}{2}$ και οι τύποι παίρνουν τη μορφή:

$$U_E = E\eta\mu^2(\omega t+\phi_0) \Rightarrow U_E = E\eta\mu^2\left(\omega t+\frac{\pi}{2}\right) \Rightarrow U_E = E\sigma\upsilon\nu^2\omega t$$

$$U_B = E\sigma\upsilon\nu^2(\omega t+\phi_0) \Rightarrow U_B = E\sigma\upsilon\nu^2\left(\omega t+\frac{\pi}{2}\right) \Rightarrow U_B = E\eta\mu^2\omega t$$

| **Γραφική παράσταση ενέργειας ηλεκτρικού πεδίου - χρόνου** | |
|---|---|
|  | $U_E = E\sigma\upsilon\nu^2\omega t$ |

| **Γραφική παράσταση ενέργειας μαγνητικού πεδίου - χρόνου** | |
|---|---|
|  | $U_B = E\eta\mu^2\omega t$ |

| Κοινή γραφική παράσταση $U_E - q$ και $U_B - q$ | |
|---|---|
|   | $U_E = \frac{1}{2}\cdot\frac{q^2}{C}$ <br> $U_B = E - \frac{1}{2}\cdot\frac{q^2}{C}$ |

## ΘΕΜΑΤΑ ΠΟΥ ΧΡΕΙΑΖΟΝΤΑΙ ΙΔΙΑΙΤΕΡΗ ΜΕΛΕΤΗ

**Σχέση πλάτους έντασης - πλάτους φορτίου:**

Από την αρχή διατήρησης της ενέργειας έχουμε:

$$\frac{1}{2}\cdot\frac{Q^2}{C}=\frac{1}{2}\cdot LI^2 \Rightarrow \frac{Q^2}{C}=LI^2 \Rightarrow \frac{Q^2}{LC}=I^2 \Rightarrow \sqrt{I^2}=\sqrt{\frac{Q^2}{LC}} \Rightarrow I=\frac{Q}{\sqrt{LC}} \overset{\omega=\frac{1}{\sqrt{LC}}}{\Rightarrow} I=\omega Q$$

**Σχέση έντασης - φορτίου:**

$$E=U_E+U_B \Rightarrow \frac{1}{2}\cdot\frac{Q^2}{C}=\frac{1}{2}Li^2+\frac{1}{2}\frac{q^2}{C} \Rightarrow \frac{Q^2}{LC}=i^2+\frac{q^2}{LC} \overset{\omega=\frac{1}{\sqrt{LC}}}{\Rightarrow}$$

$$\omega^2Q^2=i^2+\omega^2q^2 \Rightarrow \omega^2Q^2-\omega^2q^2=i^2 \Rightarrow i=\pm\sqrt{\omega^2Q^2-\omega^2q^2} \Rightarrow i=\pm\sqrt{\omega^2\left(Q^2-q^2\right)} \Rightarrow$$

$$i=\pm\omega\sqrt{Q^2-q^2}$$

Η παραπάνω σχέση χρησιμοποιείται πάντοτε με απόδειξη.

| Το τυπολόγιο της ηλεκτρικής ταλάντωσης | |
|---|---|
| $\lvert q \rvert = C \lvert V \rvert$ | $Q = CV_{max}$ |
| $T = 2\pi\sqrt{LC}$ | $f = \dfrac{1}{2\pi\sqrt{LC}}$ |
| | $\omega = \dfrac{1}{\sqrt{LC}}$ |
| $U_E = \dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{q^2}{C}$ | $U_B = \dfrac{1}{2}Li^2$ |
| $I = \omega Q$ | $i = \pm\omega\sqrt{Q^2 - q^2}$ |
| $q = Q\eta\mu\left(\omega t + \phi_0\right)$ | $i = I\sigma\upsilon\nu\left(\omega t + \phi_0\right)$ |
| $U_E = E\eta\mu^2\left(\omega t + \phi_0\right)$ | $U_B = E\sigma\upsilon\nu^2\left(\omega t + \phi_0\right)$ |
| $E = U_B + U_E = \dfrac{1}{2}Li^2 + \dfrac{1}{2}\dfrac{q^2}{C}$ | $E = U_{Emax} = \dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{Q^2}{C} = U_{Bmax} = \dfrac{1}{2}LI^2$ |

| **Τα φυσικά μεγέθη της ηλεκτρικής ταλάντωσης** | **Σύμβολο** | **Μονάδα Μέτρησης** |
|---|---|---|
| χωρητικότητα πυκνωτή | C | F |
| συντελεστής αυτεπαγωγής πηνίου | L | H |
| ενέργεια ηλεκτρικού πεδίου πυκνωτή | $U_E$ | J |
| μέγιστη ενέργεια ηλεκτρικού πεδίου πυκνωτή | $U_{Emax}$ | J |
| ενέργεια μαγνητικού πεδίου πηνίου | $U_B$ | J |
| μέγιστη ενέργεια μαγνητικού πεδίου πηνίου | $U_{Bmax}$ | J |
| στιγμιαία τιμή φορτίου ενός οπλισμού του πυκνωτή | q | C |
| μέγιστο φορτίο πυκνωτή | Q | C |
| στιγμιαία τιμή έντασης ηλεκτρικού ρεύματος | i | A |
| μέγιστη ένταση ηλεκτρικού ρεύματος | I | A |
| ολική ενέργεια κυκλώματος LC | E | J |

*Ημερομηνία τροποποίησης: 21/10/2011*

**ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1$^{ο}$: ΜΗΧΑΝΙΚΕΣ ΚΑΙ ΗΛΕΚΤΡΙΚΕΣ ΤΑΛΑΝΤΩΣΕΙΣ**

**ΕΝΟΤΗΤΑ 3: ΦΘΙΝΟΥΣΕΣ ΤΑΛΑΝΤΩΣΕΙΣ**

**ΣΗΜΕΙΩΣΕΙΣ**

## Α. Μηχανικές ταλαντώσεις

Όταν το πλάτος της ταλάντωσης, που εκτελεί ένα σώμα, συνεχώς μειώνεται, η ταλάντωση ονομάζεται φθίνουσα ή αποσβεννύμενη. Απόσβεση ονομάζεται η ελάττωση του πλάτους της φθίνουσας ταλάντωσης και οφείλεται σε δυνάμεις που αντιτίθενται στην κίνηση και μετατρέπουν τη μηχανική ενέργεια σε θερμότητα. Αν η δύναμη που αντιτίθεται στην κίνηση είναι της μορφής $F' = -bu$ τότε το σύστημα εκτελεί φθίνουσα εκθετική ταλάντωση. Σταθερά απόσβεσης $b$ είναι μια σταθερά που καθορίζει το ρυθμό μείωσης πλάτους και εξαρτάται από τις ιδιότητες του μέσου, καθώς και από το σχήμα και το μέγεθος του αντικειμένου που ταλαντώνεται. Μονάδα μέτρησης στο SI: $1\,kg/s$.

## ΣΥΝΟΠΤΙΚΗ ΠΕΡΙΓΡΑΦΗ

- Όταν το πλάτος της ταλάντωσης μειώνεται εκθετικά με το χρόνο, τότε ο λόγος διαδοχικών πλατών προς την ίδια κατεύθυνση είναι σταθερός.
- Η ενέργεια μιας φθίνουσας ταλάντωσης μειώνεται με το χρόνο, επειδή μεταφέρεται ενέργεια από το σύστημα στο περιβάλλον, μέσω του έργου της δύναμης που αντιτίθεται στην κίνηση.
- Ο ρυθμός με τον οποίο μειώνεται το πλάτος και η ενέργεια της ταλάντωσης εξαρτάται από τη σταθερά $b$. Όσο μεγαλύτερη είναι η τιμή του $b$ τόσο γρηγορότερα μειώνεται το πλάτος.
- Φθίνουσα ταλάντωση εκτελεί το ηλεκτρικό φορτίο σε ένα κύκλωμα LC με ωμική αντίσταση $R$.
- Τα καλά αμορτισέρ αυτοκινήτων εκτελούν φθίνουσα ταλάντωση με μεγάλο $b$.
- Σε ένα εκκρεμές ρολόι επιδιώκεται ελαχιστοποίηση της απόσβεσης.

Ιδιαίτερη σημασία έχουν εκείνες οι φθίνουσες ταλαντώσεις, στις οποίες η αντιτιθέμενη στην κίνηση δύναμη είναι ανάλογη της ταχύτητας ταλάντωσης:

$$\boxed{F' = -bu}$$

Δυνάμεις αυτής της μορφής παρατηρούνται κατά την κίνηση αντικειμένων μέσα στον αέρα ή σε υγρό.

**Ιδιότητες:**

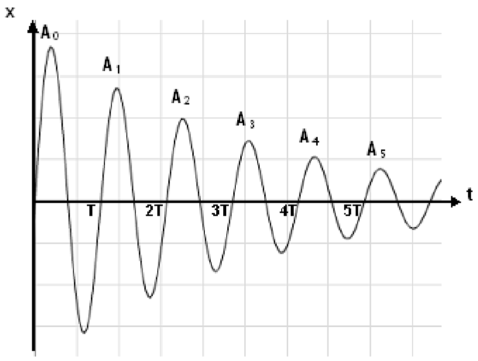
α) Το πλάτος της ταλάντωσης μειώνεται εκθετικά με το χρόνο:

$$\boxed{A = A_0 \cdot e^{-\Lambda t}}$$

Σταθερά Λ: εξαρτάται από τη σταθερά απόσβεσης b και από τη μάζα του σώματος. Μονάδα μέτρησης στο SI: $1s^{-1}$.

β) Ο λόγος δύο διαδοχικών μεγίστων απομακρύνσεων προς την ίδια κατεύθυνση διατηρείται σταθερός:

$$\boxed{\frac{A_0}{A_1} = \frac{A_1}{A_2} = ... = \frac{A_N}{A_{N+1}} = e^{\Lambda T} = \text{σταθ.}}$$

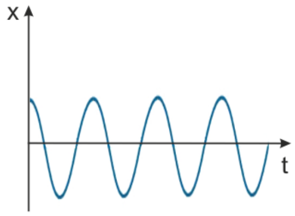



γ) Ο ρυθμός μείωσης του πλάτους εξαρτάται από τη σταθερά $b$. Όταν η σταθερά $b$ αυξάνεται, το πλάτος μειώνεται πιο γρήγορα.

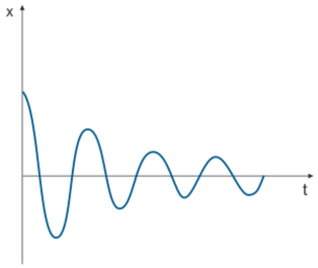
δ) Για ορισμένη τιμή της σταθεράς $b$, η περιόδος παραμένει σταθερή και ανεξάρτητη από το πλάτος.

ε) Όταν η σταθερά $b$ παίρνει πολύ μεγάλες τιμές, η κίνηση γίνεται απεριοδική.

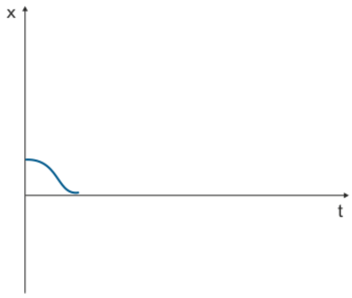
**Γραφική παράσταση x-t στην ΑΑΤ:**




**Γραφική παράσταση x-t στη φθίνουσα ταλάντωση:**

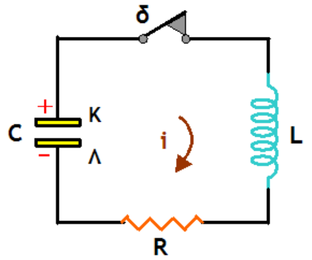



**Γραφική παράσταση x-t απεριοδικής κίνησης:**



## Β. Ηλεκτρικές ταλαντώσεις

Οι ηλεκτρικές ταλαντώσεις είναι πρακτικά φθίνουσες. Κύριος λόγος απόσβεσης είναι η εμφανιζόμενη ωμική αντίσταση του κυκλώματος, η οποία δεν μπορεί να μηδενιστεί.




Σε τέτοιες φθίνουσες ηλεκτρικές ταλαντώσεις, το πλάτος του φορτίου μειώνεται εκθετικά με το χρόνο:

$$\boxed{Q = Q_0 \cdot e^{-\Lambda t}}$$

Σταθερά Λ: εξαρτάται από την ωμική αντίσταση R του κυκλώματος και από το συντελεστή αυτεπαγωγής L του πηνίου. Μονάδα μέτρησης στο SI είναι το $1\,s^{-1}$.Ο λόγος δύο διαδοχικών πλατών φορτίου διατηρείται σταθερός:

$$\boxed{\frac{Q_0}{Q_1} = \frac{Q_1}{Q_2} = \ldots = \frac{Q_N}{Q_{N+1}} = e^{\Lambda T} = \text{σταθ.}}$$

α) Ο ρυθμός μείωσης του πλάτους φορτίου εξαρτάται από την ωμική αντίσταση R. Όταν η R αυξάνεται, το πλάτος φορτίου μειώνεται πιο γρήγορα.

β) Για ορισμένη τιμή της R, η περιόδος παραμένει σταθερή και ανεξάρτητη από το πλάτος φορτίου.

γ) Όταν η R παίρνει πολύ μεγάλες τιμές, το φαινόμενο δεν είναι περιοδικό.

Παρατήρηση: Στη φθίνουσα εκθετική ταλάντωση ο όρος $A = A_0 \cdot e^{-\Lambda t}$ δεν ισούται ακριβώς με το πλάτος ταλάντωσης. Κατά συνέπεια, ονομάζεται "πλάτος" ταλάντωσης μόνο κατά προσέγγιση.

| **Τα φυσικά μεγέθη της φθίνουσας ταλάντωσης** | **Σύμβολο** | **Μονάδα Μέτρησης** |
|---|---|---|
| αρχικό πλάτος φθίνουσας ταλάντωσης | $A_0$ | m |
| πλάτος φθίνουσας ταλάντωσης μετά από N ταλαντώσεις | $A_N$ | m |
| σταθερά φθίνουσας ταλάντωσης | $\Lambda$ | $s^{-1}$ |
| αρχική ενέργεια φθίνουσας ταλάντωσης | $E_0$ | J |
| ενέργεια φθίνουσας ταλάντωσης μετά από N ταλαντώσεις | $E_N\%$ | J |
| σταθερά απόσβεσης | b | kg/s |
| αρχικό φορτίο φθίνουσας ταλάντωσης κυκλώματος RLC | $Q_0$ | C |
| φορτίο φθίνουσας ταλάντωσης κυκλώματος RLC μετά από N ταλαντώσεις | $Q_N$ | C |

| Το τυπολόγιο της φθίνουσας ταλάντωσης | |
|---|---|
| αντιτιθέμενη δύναμη | $F' = -bu$ |
| εκθετική μείωση πλάτους | $A = A_0 e^{-\Lambda t}$ |
| λόγος διαδοχικών πλατών προς την ίδια κατεύθυνση | $\frac{A_0}{A_1} = \frac{A_1}{A_2} = \frac{A_2}{A_3} = ... =$ σταθ. |
| ενέργεια ταλάντωσης μετά από Ν ταλαντώσεις | $E_N = \frac{1}{2} D A_N^2 = E_0 e^{-2\Lambda t}$ |
| ποσοστιαία μεταβολή του τυχαίου μεγέθους Μ | $\Delta M\,\% = \left( \frac{M_{\tau\epsilon\lambda}}{M_{\alpha\rho\chi}} - 1 \right) \cdot 100\,\%$ |
| εκθετική μείωση πλάτους φορτίου | $Q = Q_0 \cdot e^{-\Lambda t}$ |

| Ιδιότητες Λογαρίθμων | |
|---|---|
| $\ln 1 = 0$ | $\ln e^{\beta} = \beta$ |
| $\ln e = 1$ | $e^{\ln a} = a$ |
| $\ln(a\cdot\beta) = \ln a + \ln\beta$ | $\ln a^{\beta} = \beta \ln a$ |
| $\ln\frac{a}{\beta} = \ln a - \ln\beta$ | $e^{-\beta\ln a} = e^{\ln a^{-\beta}} = a^{-\beta} = \frac{1}{a^{\beta}}$ |

## ΘΕΜΑΤΑ ΠΟΥ ΧΡΕΙΑΖΟΝΤΑΙ ΙΔΙΑΙΤΕΡΗ ΜΕΛΕΤΗ

1) $\frac{A_0}{A_1} = \frac{A_1}{A_2} = ... = e^{\Lambda T} =$ σταθ.

Απόδειξη:

$$\frac{A_N}{A_{N+1}} = \frac{A_0 e^{-\Lambda NT}}{A_0 e^{-\Lambda(N+1)T}} = e^{-\Lambda NT} \cdot e^{\Lambda(N+1)T} = e^{-\Lambda NT + \Lambda(N+1)T} = e^{\Lambda T} = \text{σταθ.}$$

2) $\frac{E_0}{E_1} = \frac{E_1}{E_2} = ... = e^{2\Lambda T} =$ σταθ.

Απόδειξη:

$$\frac{E_N}{E_{N+1}} = \frac{\frac{1}{2}DA_N^2}{\frac{1}{2}DA_{N+1}^2} = \frac{\left(A_0 e^{-\Lambda NT}\right)^2}{\left(A_0 e^{-\Lambda(N+1)T}\right)^2} = \frac{e^{-2\Lambda NT}}{e^{2\Lambda(N+1)T}} = e^{-2\Lambda NT} \cdot e^{2\Lambda(N+1)T} =$$

$$= e^{-2\Lambda NT + 2\Lambda(N+1)T} = e^{2\Lambda T} = \text{σταθ.}$$

3) $E_N = E_0 e^{-2\Lambda t}$

Απόδειξη:

$$E_N = \frac{1}{2}DA_N^2 \Rightarrow E_N = \frac{1}{2}DA_0^2 e^{-2\Lambda t} \Rightarrow E_N = E_0 e^{-2\Lambda t}$$

*Ημερομηνία τροποποίησης: 15/7/2011*

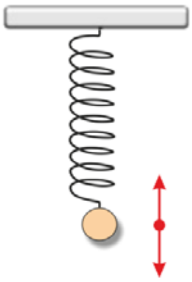
**ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1$^{\text{Ο}}$: ΜΗΧΑΝΙΚΕΣ – ΗΛΕΚΤΡΙΚΕΣ ΤΑΛΑΝΤΩΣΕΙΣ**

**ΕΝΟΤΗΤΑ 4: ΕΞΑΝΑΓΚΑΣΜΕΝΕΣ ΤΑΛΑΝΤΩΣΕΙΣ**

**ΣΗΜΕΙΩΣΕΙΣ**

## Α. Μηχανικές ταλαντώσεις

Έστω ένα σύστημα κατακόρυφου ελατηρίου-σώματος το οποίο μπορεί να εκτελέσει ταλαντώσεις.



Εκτρέπουμε κατακόρυφα το σώμα από τη θέση ισορροπίας (Θ.Ι.) και το αφήνουμε ελεύθερο να κινηθεί. Το σύστημα θα εκτελέσει μια ταλάντωση η οποία θα είναι αμείωτη αν δεν υπάρχουν αντιστάσεις, δηλαδή Α.Α.Τ. με σταθερό πλάτος ταλάντωσης και ενέργεια ταλάντωσης. Στην πραγματικότητα όμως επειδή πάντα έχουμε αντιστάσεις, η ταλάντωση θα είναι φθίνουσα και θα έχουμε σταδιακά μείωση του πλάτους και της ενέργειας ταλάντωσης. Η ταλάντωση λοιπόν στην οποία δίνουμε αρχικά μία ενέργεια στο σύστημα και στη συνέχεια το αφήνουμε ελεύθερο να ταλαντωθεί ονομάζεται ελεύθερη ταλάντωση.

Η ελεύθερη ταλάντωση μπορεί να είναι αμείωτη ή φθίνουσα και έχει σταθερή συχνότητα η οποία εξαρτάται από τα χαρακτηριστικά του συστήματος. Η συχνότητα αυτή λέγεται ιδιοσυχνότητα $\left(f_0\right)$ της ταλάντωσης και υπολογίζεται από τη σχέση:

$$f_0 = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{D}{m}}$$

Στην περίπτωση που έχουμε σύστημα ελατηρίου σώματος, είναι:

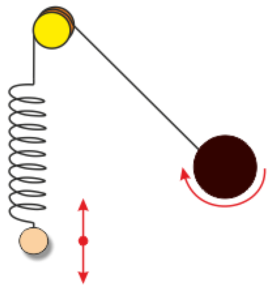
$$f_0 = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k}{m}}$$

Για να διατηρηθεί σταθερό το πλάτος σε μια ταλάντωση, έτσι ώστε να είναι αμείωτη, πρέπει να παρέχουμε στο σύστημα την ενέργεια που χάνει σε κάθε περίοδο. Γι’ αυτό ασκούμε μια περιοδική δύναμη που ονομάζεται διεγείρουσα δύναμη. Η δύναμη αυτή αναπληρώνει, μέσω του έργου της, την ενέργεια που μετατρέπεται σε θερμότητα λόγω των αντιστάσεων.

Το σώμα που ασκεί την περιοδική δύναμη στο σύστημα ελατήριο – μάζα είναι ο διεγέρτης. Το σύστημα κάνει μια κίνηση που ονομάζεται εξαναγκασμένη ταλάντωση, της οποίας η συχνότητα ταλάντωσης τελικά είναι ίση με τη συχνότητα του διεγέρτη $(f)$.

Στην εξαναγκασμένη ταλάντωση το σύστημα ελατήριο – μάζα ταλαντώνεται με την $f$ και όχι την $f_0$. Δηλαδή ο διεγέρτης επιβάλλει τη συχνότητά του στην ταλάντωση.

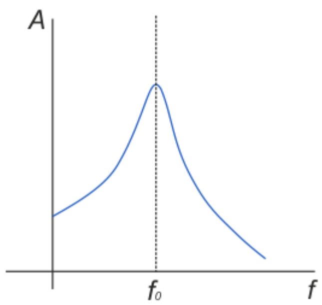
<u>Παράδειγμα συστήματος που εκτελεί εξαναγκασμένη ταλάντωση</u>



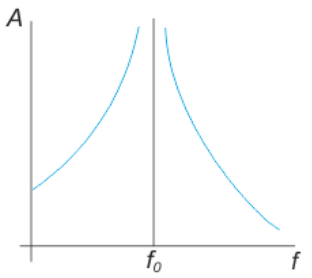
<u>Άλλα παραδείγματα εξαναγκασμένης ταλάντωσης:</u>

- Κουρδιστό ρολόι.
- Γέφυρα που ταλαντώνεται υπό την επίδραση του αέρα.
- Φίλαθλοι που χτυπάνε ρυθμικά τα πόδια τους σε ένα γήπεδο ποδοσφαίρου.

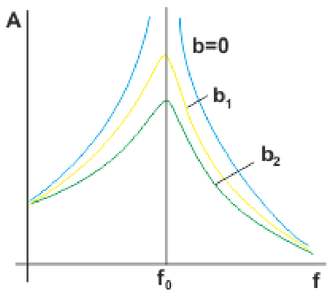
Το πλάτος της εξαναγκασμένης ταλάντωσης εξαρτάται από τη συχνότητα $f$ του διεγέρτη και πιο συγκεκριμένα από τη διαφορά της συχνότητας αυτής από την ιδιοσυχνότητα $f_0$. Αν αλλάξει η $f_0$ αλλάζει και το πλάτος της ταλάντωσης. Στο διάγραμμα φαίνεται πως μεταβάλλεται το πλάτος της εξαναγκασμένης ταλάντωσης (Α) σε σχέση με τη συχνότητα του διεγέρτη $(f)$ για ένα σύστημα που παρουσιάζει σταθερά απόσβεσης $b$.




Παρατηρούμε ότι αν η $f < f_0$ και αυξήσουμε την $f$, αυξάνεται και το Α. Όταν η $f = f_0$, τότε το πλάτος παίρνει μια μέγιστη τιμή και στη συνέχεια αν αυξηθεί και άλλο, το πλάτος της ταλάντωσης μειώνεται. Όταν λοιπόν $f = f_0$ τότε το πλάτος της ταλάντωσης άρα και η ενέργεια της ταλάντωσης παίρνουν τις μέγιστες τιμές τους. Σε αυτή την περίπτωση λέμε ότι έχουμε συντονισμό. Στην ιδανική περίπτωση όπου η σταθερά απόσβεσης είναι μηδέν $(b = 0)$, κάτι που είναι πρακτικά αδύνατο, στο συντονισμό το πλάτος της ταλάντωσης γίνεται άπειρο όπως φαίνεται και στο διάγραμμα.




Το πλάτος της ταλάντωσης στο συντονισμό εξαρτάται από την σταθερά απόσβεσης b του συστήματος. Στο διάγραμμα φαίνεται ότι όσο μεγαλύτερη είναι η σταθερά απόσβεσης ενός ταλαντούμενου συστήματος τόσο μικρότερο είναι το πλάτος ταλάντωσης στο συντονισμό.




Στην εξαναγκασμένη ταλάντωση το σύστημα ταλαντώνεται με τη συχνότητα του διεγέρτη $(f)$. Το πλάτος της ταλάντωσης, άρα και η ενέργεια της ταλάντωσης, εξαρτώνται από τη συχνότητα του διεγέρτη $(f)$ και παίρνουν τις μέγιστες τιμές τους όταν $f = f_0$ δηλαδή στο συντονισμό.

Άρα ο τρόπος με τον οποίο το σύστημα αποδέχεται την ενέργεια έχει να κάνει με τη συχνότητα υπό την οποία του προσφέρεται.

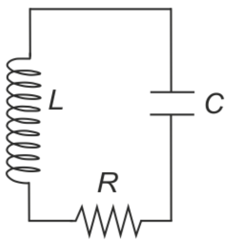
Στο συντονισμό η ενέργεια μεταφέρεται με το βέλτιστο τρόπο και γι’ αυτό το πλάτος της ταλάντωσης είναι μέγιστο.

**Β. Ηλεκτρικές ταλαντώσεις**

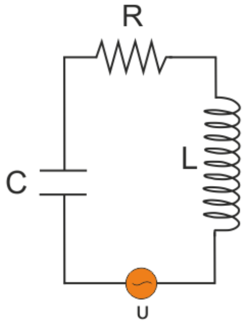
Αν ένα κύκλωμα LC που αποτελείται από ένα πηνίο και ένα πυκνωτή διεγερθεί με στιγμιαία επαφή των οπλισμών του πυκνωτή με τους πόλους μιας πηγής συνεχούς τάσης, τότε το ηλεκτρικό φορτίο στο κύκλωμα εκτελεί μια ηλεκτρική ταλάντωση η οποία θα είναι αμείωτη αν το κύκλωμα δεν παρουσιάζει αντίσταση, και το πλάτος του ρεύματος και η ολική ενέργεια του κυκλώματος θα είναι σταθερή. Αν όμως το κύκλωμα παρουσιάζει αντίσταση, η ηλεκτρική ταλάντωση θα είναι φθίνουσα και θα μειώνεται το πλάτος του ρεύματος και η ολική ενέργεια του κυκλώματος.

Αν λοιπόν δώσουμε μια φορά ενέργεια στο κύκλωμα τότε εκτελεί μια ελεύθερη ηλεκτρική ταλάντωση που είναι ή αμείωτη ή φθίνουσα και έχει σταθερή συχνότητα που ονομάζεται ιδιοσυχνότητα του κυκλώματος. Η συχνότητα αυτή υπολογίζεται από τη σχέση:

$$f_0 = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}}$$

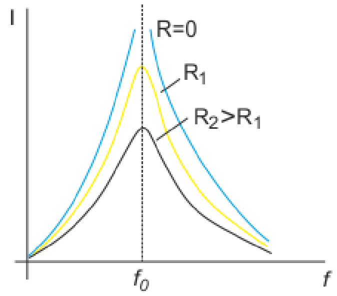



Για να διατηρηθεί το πλάτος του ηλεκτρικού ρεύματος σταθερό, ώστε η ηλεκτρική ταλάντωση να είναι αμείωτη, συνδέουμε στο κύκλωμα μια πηγή εναλλασσόμενης τάσης που έχει το ρόλο του διεγέρτη.




Το κύκλωμα τότε διαρρέεται από εναλλασσόμενο ρεύμα και εκτελεί εξαναγκασμένη ηλεκτρική ταλάντωση με συχνότητα $f$ ίδια με τη συχνότητα της εναλλασσόμενης τάσης. Δηλαδή ταλαντώνεται με τη συχνότητα του διεγέρτη. Το πλάτος του ρεύματος εξαρτάται από τη συχνότητα $f$ του διεγέρτη και μεταβάλλεται αν αλλάξει η συχνότητα του διεγέρτη. Αν η συχνότητα $f$ του διεγέρτη γίνει ίση με την ιδιοσυχνότητα $f_0$ του κυκλώματος τότε έχουμε συντονισμό και το πλάτος του ρεύματος γίνεται μέγιστο.

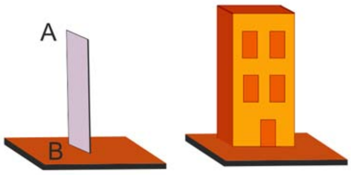
Στο διάγραμμα φαίνεται πως μεταβάλλεται το πλάτος του ρεύματος σε σχέση με τη συχνότητα του διεγέρτη για $R = 0$ και $R \neq 0$ .




Το πλάτος του ρεύματος στο συντονισμό εξαρτάται από την αντίσταση του κυκλώματος. Όσο μεγαλύτερη είναι η αντίσταση του κυκλώματος τόσο μικρότερο είναι το πλάτος του ρεύματος στο συντονισμό.

Τα παραδείγματα συντονισμού στην καθημερινή ζωή είναι πάρα πολλά.

1.



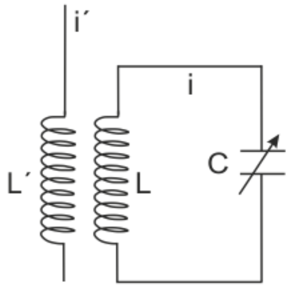

Όταν το έλασμα ΑΒ κάνει ελεύθερη ταλάντωση, ταλαντώνεται με την $f_0$. Αν εκτελέσει εξαναγκασμένη ταλάντωση με $f = f_0$ τότε έχουμε συντονισμό και μέγιστο πλάτος.

Ομοίως, ένα κτίριο υπό την επίδραση ενός σεισμού εκτελεί εξαναγκασμένη ταλάντωση της οποίας η συχνότητα μπορεί να είναι ίση με την ιδιοσυχνότητα του συστήματος με αποτέλεσμα να έχουμε συντονισμό, μέγιστο πλάτος ταλάντωσης και κατάρρευση του κτιρίου.

2.


Η χορδή είναι στερεωμένη στα δύο άκρα της. Αν ασκήσουμε μια δύναμη στο μέσο Μ και την αφήσουμε, θα εκτελέσει ελεύθερη ταλάντωση με την ιδιοσυχνότητά της. Αν εξαναγκαστεί σε ταλάντωση με $f = f_0$ τότε έχουμε συντονισμό και μέγιστο πλάτος ταλάντωσης.Ομοίως μια γέφυρα πάνω στην οποία κινείται μια ομάδα ανθρώπων με βηματισμό, μπορεί να συντονιστεί και να καταρρεύσει στην περίπτωση που η συχνότητα $f$ του βηματισμού γίνει ίση με τη φυσική συχνότητα $f_0$ ταλάντωσης της γέφυρας.

3. Κάθε ραδιοφωνικός σταθμός εκπέμπει σε μια συγκεκριμένη συχνότητα. Στην κεραία του ραδιοφώνου μας φτάνουν πολλά Η/Μ. κύματα διαφορετικής συχνότητας. Η επιλογή του σταθμού που θέλουμε να ακούσουμε βασίζεται στο φαινόμενο του συντονισμού. Η κεραία του ραδιοφώνου είναι ένα πηνίο το οποίο βρίσκεται σε επαγωγική σύζευξη με ένα κύκλωμα LC. Το κύκλωμα LC περιέχει έναν μεταβλητό πυκνωτή.




Όταν γυρίζουμε το κουμπί του ραδιοφώνου για να επιλέξουμε σταθμό μεταβάλλουμε τη χωρητικότητα του πυκνωτή. Τα Η/Μ κύματα που φτάνουν στην κεραία αναγκάζουν τα ηλεκτρόνιά της σε εξαναγκασμένη ταλάντωση και η κίνηση των ηλεκτρονίων δημιουργεί ένα ασθενές μεταβαλλόμενο ρεύμα. Λόγω της επαγωγικής σύζευξης το κύκλωμα LC εκτελεί ηλεκτρική ταλάντωση μικρού πλάτους. Το πλάτος του ρεύματος της ηλεκτρικής ταλάντωσης γίνεται μέγιστο στον συντονισμό. Μεταβάλλοντας τη χωρητικότητα του πυκνωτή μεταβάλλεται η ιδιοσυχνότητα του κυκλώματος LC. Όταν η ιδιοσυχνότητα γίνει ίση με κάποια από τις συχνότητες που ταλαντώνονται τα ηλεκτρόνια της κεραίας τότε το κύκλωμα συντονίζεται και διαρρέεται από εναλλασσόμενο ρεύμα μέγιστου πλάτους. Αυτό το εναλλασσόμενο ρεύμα είναι ο φορέας του ηλεκτρικού σήματος το οποίο αφού ενισχυθεί από τους κατάλληλους ενισχυτές καταλήγει στο ηχείο του ραδιοφώνου. Ο σταθμός που ακούμε έχει συχνότητα ίση με την ιδιοσυχνότητα του κυκλώματος LC. Δηλαδή επιλέγουμε την ιδιοσυχνότητα του κυκλώματος LC ώστε να γίνει ίση με τη συχνότητα του σταθμού που θέλουμε να ακούσουμε.

*Ημερομηνία τροποποίησης: 15/7/2011*

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1$^{ο}$: ΜΗΧΑΝΙΚΕΣ – ΗΛΕΚΤΡΙΚΕΣ ΤΑΛΑΝΤΩΣΕΙΣ

ΕΝΟΤΗΤΑ 5: ΣΥΝΘΕΣΗ ΤΑΛΑΝΤΩΣΕΩΝ

ΣΗΜΕΙΩΣΕΙΣ

Είναι δυνατό ένα σώμα να εκτελεί ταυτοχρόνως περισσότερες από μία Α.Α.Τ. Σε αυτή την περίπτωση η κίνηση του σώματος είναι πολύπλοκη. Η διεύθυνση, η συχνότητα, το πλάτος και η φάση της εξαρτώνται από τα αντίστοιχα χαρακτηριστικά των επιμέρους ταλαντώσεων. Η κίνηση του σώματος ονομάζεται σύνθετη ταλάντωση και η μελέτη της σύνθεση ταλαντώσεων. Εμείς θα μελετήσουμε δύο ειδικές περιπτώσεις σύνθεσης ταλαντώσεων.

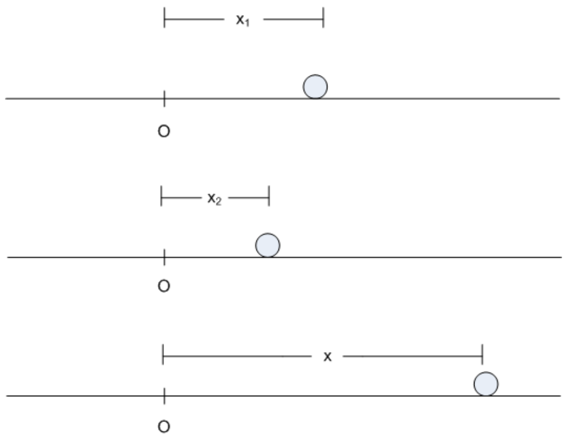
**Α. Σύνθεση δύο απλών αρμονικών ταλαντώσεων της ίδιας συχνότητας που γίνονται γύρω από το ίδιο σημείο στην ίδια διεύθυνση.**

Το σώμα εκτελεί ταυτοχρόνως δύο Α.Α.Τ. γύρω από την ίδια θέση ισορροπίας στην ίδια διεύθυνση που έχουν την ίδια συχνότητα αλλά διαφορά φάσης φ. Οι εξισώσεις των επιμέρους ταλαντώσεων είναι:

$$x_1 = A_1 \eta\mu\omega t$$

$$x_2 = A_2 \eta\mu(\omega t + \phi)$$

Εφαρμόζουμε την Αρχή της Επαλληλίας (ή της ανεξαρτησίας των κινήσεων) σύμφωνα με την οποία η απομάκρυνση του σώματος κάθε χρονική στιγμή είναι ίση με το αλγεβρικό άθροισμα των επιμέρους απομακρύνσεων. Δηλαδή $x = x_1 + x_2$.




Με αντικατάσταση:

$$x = A_1 \eta\mu\omega t + A_2 \eta\mu(\omega t + \phi)$$

Η σχέση αυτή μπορεί να πάρει τη μορφή:

$$x = A \eta\mu(\omega t + \theta)$$

με $A = \sqrt{A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2 \sigma\upsilon\nu\phi}$

και $\epsilon\phi\theta = \dfrac{A_2 \eta\mu\phi}{A_1 + A_2 \sigma\upsilon\nu\phi}$.

Δηλαδή η σύνθετη ταλάντωση είναι Α.Α.Τ., έχει την ίδια διεύθυνση, την ίδια συχνότητα και γίνεται γύρω από το ίδιο σημείο με τις επιμέρους ταλαντώσεις. Το πλάτος και η αρχική φάση υπολογίζονται από τις σχέσεις, δηλαδή εξαρτώνται από τα χαρακτηριστικά των επιμέρους ταλαντώσεων. Στην ειδική περίπτωση όπου $\phi = 0$ οι εξισώσεις των επιμέρους ταλαντώσεων είναι:

$$x_1 = A_1 \eta\mu\omega t$$

$$x_2 = A_2 \eta\mu\omega t$$

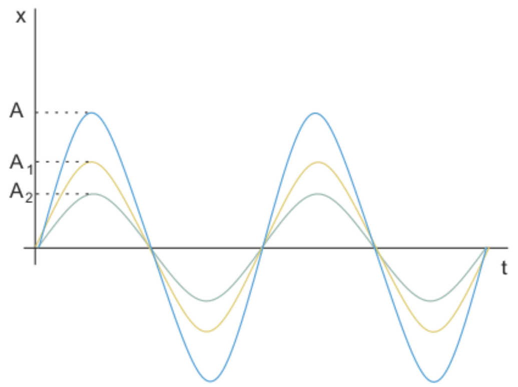
και της σύνθετης ταλάντωσης

$x = A\eta\mu\omega t$

με

$A = A_1 + A_2$.

Δηλαδή η σύνθετη ταλάντωση έχει ίδια φάση με τις επιμέρους ταλαντώσεις και πλάτος που είναι ίσο με το άθροισμα των πλατών των επιμέρους ταλαντώσεων.




Αν όμως $\phi = \pi$ τότε οι εξισώσεις των επιμέρους ταλαντώσεων είναι:

$x_1 = A_1\eta\mu\omega t$

$x_2 = A_2\eta\mu\left(\omega t + \pi\right)$

και της σύνθετης ταλάντωσης

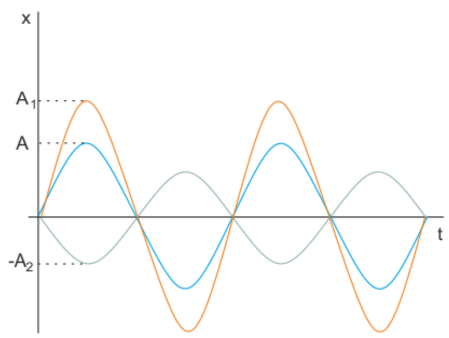
$x = A\eta\mu\omega t$, αν $A_1 > A_2$

ή

$x = A\eta\mu\left(\omega t + \pi\right)$, αν $A_2 > A_1$

με $A = \left|A_1 - A_2\right|$.

Δηλαδή η σύνθετη έχει πλάτος ίσο με το απόλυτο της διαφοράς των πλατών των επιμέρους ταλαντώσεων και παίρνει τη φάση της ταλάντωσης με το μεγαλύτερο πλάτος.



**Β. Σύνθεση δύο απλών αρμονικών ταλαντώσεων της ίδιας διεύθυνσης, που γίνονται γύρω από το ίδιο σημείο, με το ίδιο πλάτος και διαφορετικές συχνότητες.**

Εδώ το σώμα εκτελεί ταυτοχρόνως δύο Α.Α.Τ. γύρω από την ίδια θέση ισορροπίας, στην ίδια διεύθυνση που έχουν το ίδιο πλάτος αλλά διαφορετική συχνότητα. Οι εξισώσεις των επιμέρους ταλαντώσεων είναι:

$x_1 = A\eta\mu\omega_1 t$

$x_2 = A\eta\mu\omega_2 t$

Εφαρμόζουμε την αρχή της επαλληλίας (ή της ανεξαρτησίας των κινήσεων)

$x = x_1 + x_2$

με αντικατάσταση:

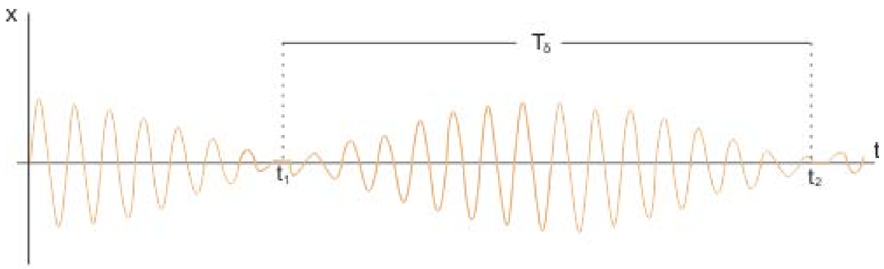
$x = A\eta\mu\omega_1 t + A\eta\mu\omega_2 t$

$x = A\left(\eta\mu\omega_1 t + \eta\mu\omega_2 t\right)$.

Με τη βοήθεια των μαθηματικών προκύπτει ότι η απομάκρυνση της σύνθετης ταλάντωσης υπολογίζεται από τη σχέση

$$x = 2A\sigma\upsilon\nu\left(\frac{\omega_1 - \omega_2}{2}t\right)\cdot\eta\mu\left(\frac{\omega_1 + \omega_2}{2}t\right).$$

Από τη σχέση παρατηρούμε ότι η σύνθετη ταλάντωση δεν είναι Α.Α.Τ. αλλά μια πολύπλοκη κίνηση. Η συγκεκριμένη κίνηση έχει ενδιαφέρον όταν τα $\omega_1, \omega_2$ διαφέρουν ελάχιστα, οπότε ο παράγοντας $A' = 2A\sigma\upsilon\nu\left(\frac{\omega_1 - \omega_2}{2}t\right)$ μεταβάλλεται χρονικά πολύ πιο αργά από τον παράγοντα $\eta\mu\left(\frac{\omega_1 + \omega_2}{2}t\right) = \eta\mu\bar{\omega}t$. Δηλαδή η σύνθετη ταλάντωση είναι μια ιδιόμορφη ταλάντωση με γωνιακή συχνότητα περίπου ίση με τις συχνότητες των επιμέρους ταλαντώσεων και πλάτος που μεταβάλλεται περιοδικά από $0$ έως $2A$. Λέμε λοιπόν ότι η σύνθετη κίνηση παρουσιάζει διακροτήματα και το πλάτος της ταλάντωσης μεταβάλλεται από $0$ έως $2A$. Ο χρόνος ανάμεσα σε δύο διαδοχικούς μηδενισμούς ή διαδοχικές μεγιστοποιήσεις του πλάτους ονομάζεται περίοδος $T_\delta$ των διακροτημάτων. Το διάγραμμα απομάκρυνσης-χρόνου έχει ως εξής:




Υπολογισμός της περιόδου των διακροτημάτων

Το πλάτος της ταλάντωσης μηδενίζεται όταν:

$A' = 2A\sigma\upsilon\nu\dfrac{\omega_1 - \omega_2}{2}t = 0$ .

Δηλαδή

$\sigma\upsilon\nu\dfrac{\omega_1 - \omega_2}{2}t = 0$

$\dfrac{|\omega_1 - \omega_2|}{2}t = 2(k+1)\dfrac{\pi}{2}$ , με $k = 0, 1, 2, 3, \ldots$

Δύο διαδοχικές στιγμές $t_1$ και $t_2$ που μηδενίζεται το πλάτος αντιστοιχούν στο $k = 0$ και $k = 1$ .

Έτσι προκύπτει

για $k = 0: \dfrac{|\omega_1 - \omega_2|}{2}t_1 = \dfrac{\pi}{2} \Rightarrow t_1 = \dfrac{\pi}{|\omega_1 - \omega_2|}$ (1)

για $k = 1: \dfrac{|\omega_1 - \omega_2|}{2}t_1 = \dfrac{3\pi}{2} \Rightarrow t_1 = \dfrac{3\pi}{|\omega_1 - \omega_2|}$ (2)

Η περίοδος των διακροτημάτων είναι η διαφορά $t_2 - t_1$. Άρα $T_\delta = t_2 - t_1$

$$T_\delta = \frac{3\pi}{|\omega_1 - \omega_2|} - \frac{\pi}{|\omega_1 - \omega_2|}$$

$$T_\delta = \frac{2\pi}{|\omega_1 - \omega_2|}$$

$$T_\delta = \frac{2\pi}{|2\pi f_1 - 2\pi f_2|}$$

$$T_\delta = \frac{2\pi}{2\pi|f_1 - f_2|}$$

$$T_\delta = \frac{1}{|f_1 - f_2|}$$

ή $\dfrac{1}{f_\delta} = \dfrac{1}{|f_1 - f_2|}$

$f_\delta = |f_1 - f_2|$,

όπου $f_\delta$ η συχνότητα των διακροτημάτων.

*Ημερομηνία τροποποίησης: 15/7/2011*