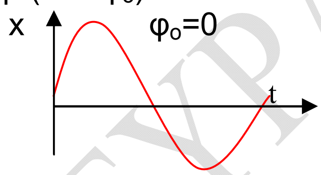
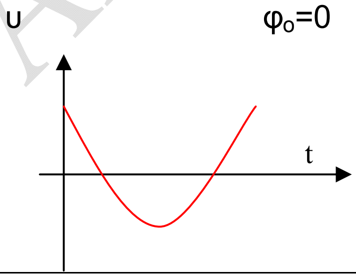
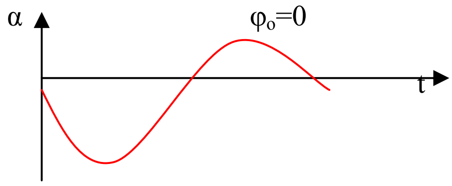
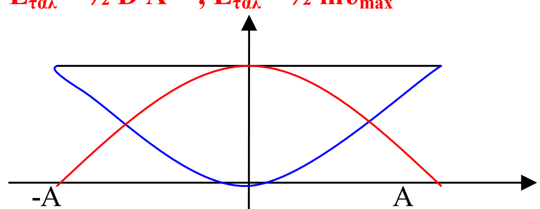
ΤΥΠΟΛΟΓΙΟ ΦΥΣΙΚΗΣ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ Γ΄ ΛΥΚΕΙΟΥ

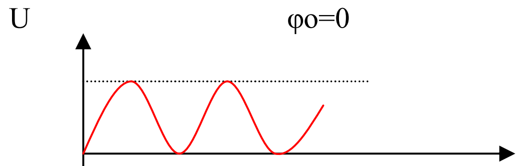
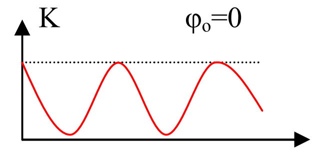
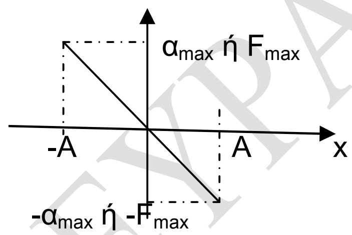
ΜΗΧΑΝΙΚΕΣ ΤΑΛΑΝΤΩΣΕΙΣ

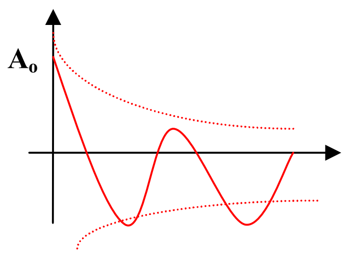
ΑΠΛΗ ΑΡΜΟΝΙΚΗ ΤΑΛΑΝΤΩΣΗ

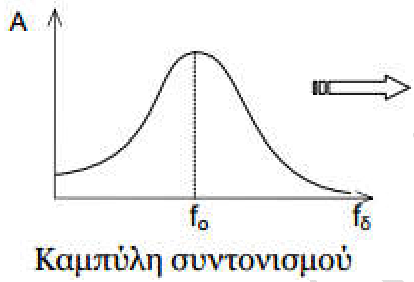
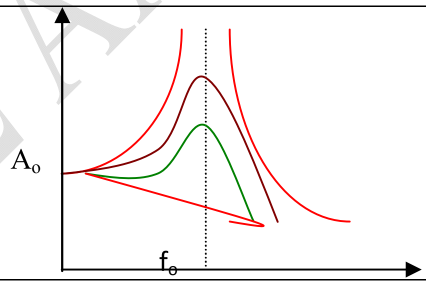
Συχνότητα – Περίοδος Κυκλική συχνότητα (γωνιακή ταχύτητα)	f= $\frac{N}{t}$ T= $\frac{1}{f}$ ω=2π f= $\frac{2\pi}{T}$
Εξισώσεις στην Α.Α.Τ (χωρίς αρχική φάση)	x =Αημωt $υ=υ_{max}$ συνωt , $υ_{max}$=ω.A $α=-α_{max}$ ημωt, $υ_{max}=ω^2$.A
Εξισώσεις στην Α.Α.Τ (με αρχική φάση)	x =Αημ(ωt +$φ_o$) $υ=υ_{max}$ συν(ωt +$φ_o$) , $υ_{max}$=ω.A $α=-α_{max}$ ημ(ωt +$φ_o$), $υ_{max}=ω^2$.A
Σχέση επιτάχυνσης – απομάκρυνσης	$α=- ω^2.x$
Σχέση ταχύτητας – απομάκρυνσης (με απόδειξη)	$υ=\pm\, ω\sqrt{A^2-x^2}$
Σταθερά επαναφοράς	$D=mω^2$
Δύναμη στην Α.Α.Τ	Σώμα εκτελεί Α.Α.Τ ⇔ F=-Dx όπου x η απομάκρυνση από την Θ.Ι Προσοχή : Στην προηγούμενη σχέση F=$F_{επαναφοράς}$ =ΣF που ασκούνται στο σώμα που εκτελεί Α.Α.Τ
Περίοδος στην Α.Α.Τ	$T=2π\sqrt{\frac{m}{D}}$, $ω=\sqrt{\frac{m}{D}}$
Ενέργεια στην Α.Α.Τ Δυναμική ενέργεια Κινητική ενέργεια Ολική ενέργεια	$U=\frac{1}{2}Dx^2$, $U_{max}=\frac{1}{2}DA^2$ $K=\frac{1}{2}mυ^2$, $K_{max}=\frac{1}{2}mυ_{max}^2$ $E=K+U=U_{max}=K_{max}$
Δυναμική ενέργεια σε συνάρτηση με τον χρόνο	$U=\frac{1}{2}DA^2\ ημ^2((ωt+φ_o)$ ή $U= E\ ημ^2(ωt+φ_o)$
Κινητική ενέργεια σε συνάρτηση με τον χρόνο	$K_{max}=\frac{1}{2}mυ_{max}^2\ συν^2(ωt+φ_o)=$ $\frac{1}{2}DA^2\ συν^2((ωt+φ_o)$ ή $K= E\ συν^2(ωt+φ_o)$
Κινητική ενέργεια συνάρτηση της	

απομάκρυνσης	$K = E - \frac{1}{2} Dx^2$
Δυναμική ενέργεια σε συνάρτηση με την ταχύτητα	$U = E - \frac{1}{2} mu^2$
Αρχή Διατήρησης της Ενέργειας της ταλάντωσης σε μια τυχαία θέση	$E = K + U = \frac{1}{2} DA^2 =$ σταθερή
Αρχή Διατήρησης της Ενέργειας της ταλάντωσης σε δυο τυχαίες θέσεις	$K_1 + U_1 = K_2 + U_2 =$ σταθερή
Σχέση επιτάχυνσης ταχύτητας (με απόδειξη)	$\alpha = \pm\, \omega \sqrt{\upsilon_{\max}{}^2 - \upsilon^2}$
Ρυθμός μεταβολής της κινητικής ενέργειας	$\frac{dK}{dt} = \frac{dW_{\Sigma F}}{dt} = \frac{\Sigma F.dx}{dt} = \pm\, \Sigma F.\upsilon$
Ρυθμός μεταβολής της δυναμικής ενέργειας	$\frac{dU}{dt} = -\frac{dK}{dt}$
Ρυθμός μεταβολής της μετατόπισης	$\frac{dx}{dt} = \upsilon$
Ρυθμός μεταβολής της ταχύτητας	$\frac{d\upsilon}{dt} = \alpha$
Ρυθμός μεταβολής της ορμής	$\frac{d\rho}{dt} = \Sigma F$
Ποσοστό μεταβολής φυσικού μεγέθους	$A\% = \frac{\text{τελική τιμή} - \text{αρχική τιμή}}{\text{αρχική}}.100\%$
	ΕΛΑΤΗΡΙΑ
Νόμος του HooK	$F_{ελατ} = k.\Delta x$ Όπου Δx = απόσταση από την Θ.Φ.Μ Δx = επιμήκυνση ή συσπείρωση ελατηρίου από την Θ.Φ.Μ
Δυναμική ενέργεια ελατηρίου	$U_{ελατ} = \frac{1}{2} k.\Delta x^2$
Έργο της δύναμης του ελατηρίου	$W_{Fελατ} = U^{ελ}_{αρχ} - U^{ελ}_{τελ}$
Βαρυτική δυναμική ενέργεια	$U = m.g.h$
Προσοχή επειδή η Fεπαναφοράς είναι συντηρητική δύναμη όπως το βάρος w και η $F_{ελατ}$, το έργο της υπολογίζεται με τον ίδιο τρόπο	$W_{Fεπαν} = U^{ταλάντωσης}_{αρχ} - U^{ταλάντωσησ}_{τελλ}$ Ή με χρήση του Θ.Μ.Κ.Ε $W_{Fεπαν} = K_{τελ} - K_{αρχ}$
ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΕΙΣ	Α.Κάθε ελατήριο θεωρείται ιδανικό , δηλαδή αμελητέας μάζας και ότι υπόκειται σε ελαστικές παραμορφώσεις **Β. Στις ασκήσεις με ελατήρια πάντα σχεδιάζουμε το ελατήριο** : 1. στην Θ.Φ.Μ 2.μετά στην Θ.Ι 3. στην τυχαία θέση Τ.Θ αν θέλουμε να

	δείξουμε ότι εκτελεί Α..Α.Τ 4. στην νέα θέση ισορροπίας (εφόσον έχω αλλαγή της Θ.Ι μετά από πλαστική κρούση ή διάσπαση και το ελατήριο είναι κατακόρυφο ή σε κεκλιμένο επίπεδο) 5. και σε οποιαδήποτε άλλη θέση μου λέει η άσκηση (π.χ εκτρέπω το σώμα από την Θ.Ι στην ΘΦΜ και το αφήνω ελεύθερο οπότε η ΘΦΜ είναι ταυτόχρονα και ακραία θέση της Α.Α.Τ που ακολουθεί) Γ. Η εκτροπή από την Θ.Ι κατά Δχ είναι ταυτόχρονα και πλάτος της ταλάντωσης που ακολουθεί δηλαδή Δχ=Α
Διάγραμμα απομάκρυνσης στην Α.Α.Τ	Εξίσωση θέσης ή απομάκρυνσης $x = A\,ημ\,(ωt + φ_o)$ 
Αρχική φάση $φ_o$ (υπολογίζεται αν σε κάποια εξίσωση που περιέχει τον χρόνο θέσουμε t=0)	Αρχική φάση $φ_o$ (υπολογίζεται αν σε κάποια εξίσωση που περιέχει τον χρόνο θέσουμε t=0)
Διάγραμμα ταχύτητας στην Α.Α.Τ	Εξίσωση της ταχύτητας **$υ = υ_{max}\,συν(ωt+φ_o)$** 
Διάγραμμα επιτάχυνσης στην Α.Α.Τ	Εξίσωση της επιτάχυνσης $α = -α_{max}\,ημ(ωt+φ_o)$ 
Διάγραμμα Κινητικής και δυναμικής ενέργειας ως συνάρτηση της απόστασης χ Διάγραμμα δυναμικής Ενέργειας ως συνάρτηση του χρόνου	Ενέργεια ταλάντωσης ή ολική ενέργεια ή μηχανική ενέργεια **$E_{ταλ} = K + U$** , **$E_{ταλ} = ½\, D\, A^2$** , **$E_{ταλ} = ½\, mυ_{max}^2$**  Δυναμική ενέργεια ως συνάρτηση του χρόνου **$U = E_{ταλ}\, ημ^2(ωt+φ_o)$**

	
Διάγραμμα Κινητικής Ενέργειας ως συνάρτηση του χρόνου	Κινητική ενέργεια ως συνάρτηση του χρόνου **$K= E_{ταλ}\,συν^2(\omega t+\varphi_o)$** 
Γραφική παράσταση επιτάχυνσης ή δύναμης ως συνάρτηση της απομάκρυνσης x	

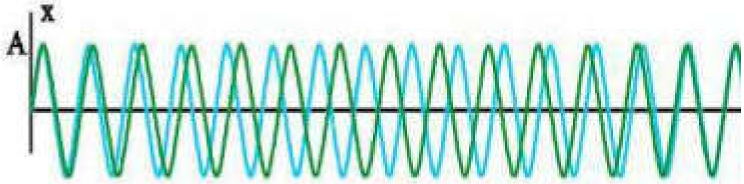
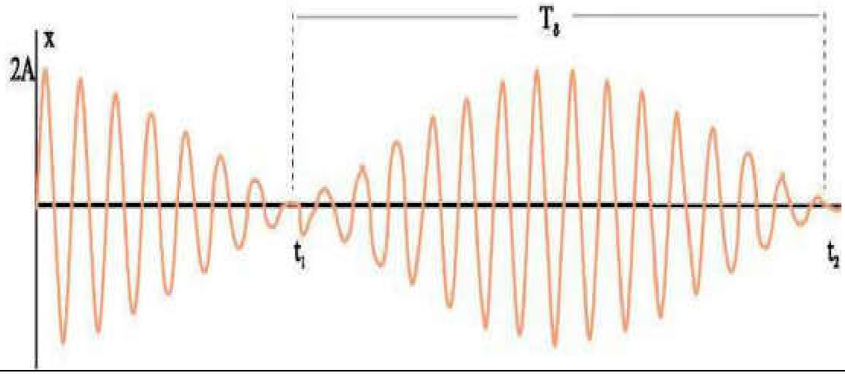
ΦΘΙΝΟΥΣΕΣ	**ΤΑΛΑΝΤΩΣΕΙΣ**
ΔΥΝΑΜΗ ΑΝΤΙΣΤΑΣΗΣ	$F'=-bu$
Συνισταμένη δύναμη	$\Sigma F=m.\alpha \Leftrightarrow F_{αντ} + F_{επαναφ} =m.\alpha \Leftrightarrow$ $-bu - Dx=m.\alpha$
Μείωση πλάτους Γραφική παράσταση πλάτους σε συνάρτηση με τον χρόνο	$A=A_o.e^{-\Lambda t}$  Αν ο χρόνος είναι ακέραιο πολλαπλάσιο της περιόδου : $\frac{A_o}{A_1} = \frac{A_1}{A_2} = \frac{A_2}{A_3} =\ldots= e^{+\Lambda t}$ = σταθερό
Ενέργεια της φθίνουσας ταλάντωσης	$E=E_o.\ e^{-2\Lambda t}$ Αν ο χρόνος είναι ακέραιο πολλαπλάσιο της περιόδου : $\frac{E_o}{E_1} = \frac{E_1}{E_2} = \frac{E_2}{E_3} =\ldots= e^{+2\Lambda t}$ =σταθ.

Χρόνος υποδιπλασιασμού του πλάτους ή χρόνος ημιζωής	$t_{1/2} = \frac{\ln 2}{\Lambda}$
ΕΞΑΝΑΓΚΑΣΜΕΝΗ	ΤΑΛΑΝΤΩΣΗ
Ιδιοσυχνότητα αρμονικού ταλαντωτή	$f_o = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{D}{m}}$
Συντονισμός	$f_{διεγέρτη} = f_o$ 
ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΕΙΣ	1.Στον συντονισμό Α= μέγιστο 2.Για κάθε τιμή του πλάτους αντιστοιχούν δυο τιμές συχνότητας (εκτός της μέγιστης) 3. Μικρότερο πλάτος έχει η συχνότητα όταν η διαφορά $\lvert f_1 - f_0 \rvert$ είναι μεγαλύτερη
Γραφική παράσταση εξαναγκασμένης ταλάντωσης	

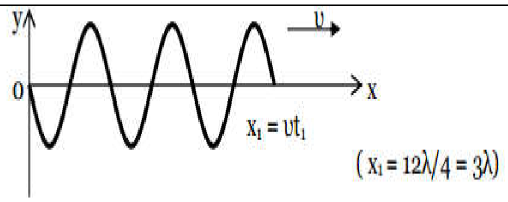
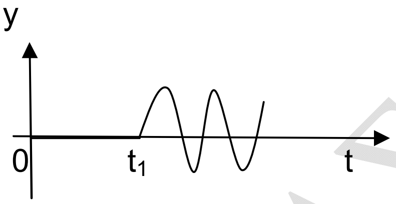
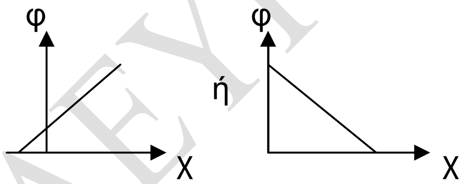
Ένα σύστημα κάνει εξαναγκασμένη ταλάντωση όταν δρα πάνω του μια εξωτερική περιοδική δύναμη (διεγέρτης) .Στην εξαναγκασμένη ταλάντωση το σύστημα έχει την συχνότητα $f_δ$ του διεγέρτη και όχι την ιδιοσυχνότητα του f_0. Δηλαδή για την συχνότητα στην ελεύθερη ταλάντωση $f_{διεγέρτη} = f$

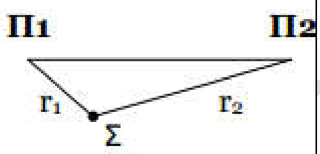
ΣΥΝΘΕΣΗ	**ΤΑΛΑΝΤΩΣΕΩΝ**
Σύνθεση δυο Α.Α.Τ της ίδιας συχνότητας που γίνονται γύρω από το ίδιο σημείο στην ίδια διεύθυνση	Αρχή της επαλληλίας των κινήσεων $x = x_1 + x_2$ $x_1 = A_1 ημωt$ και $x_2 = A_2 ημ(ωt+φ_o)$ Α= $\sqrt{A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2συνφ}$ εφθ= $\frac{A_2 ημφ}{A_1 + A_2 συνφ}$ τότε για την συνισταμένη κίνηση $x = Aημ(ωt+θ)$
	$x_1 = Aημ(ωt+φ_{o1})$ και $x_2 = Aημ(ωt+φ_{o2})$ Αν και οι δυο ταλαντώσεις έχουν αρχική φάση

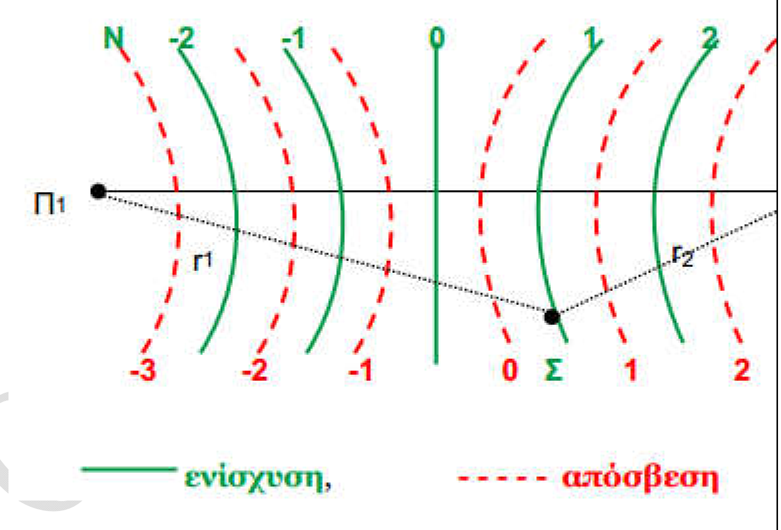
5

	A= $\sqrt{A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2\sigma\upsilon\nu\phi}$ Όπου φ = φ_{o2}-φ_{o1} εφθ=$\dfrac{A_1\eta\mu\phi_{o1} + A_2\eta\mu\phi_{o2}}{A_1\sigma\upsilon\nu\phi_{o1} + A_2\sigma\upsilon\nu\phi_{o2}}$ τότε για την συνισταμένη κίνηση x=Αημ(ωt+θ)
Γραφική παράσταση Σύνθετης Α.Α.Τ	
Σύνθεση δυο Α.Α.Τ που γίνονται γύρω από το ίδιο σημείο στην ίδια διεύθυνση με το ίδιο πλάτος και διαφορετικές συχνότητες	Αρχή της επαλληλίας των κινήσεων x= x_1 + x_2 x_1=Αημω_1t και x_2=Αημ(ω_2t x= 2.Ασυν($\frac{\omega_1 - \omega_2}{2}t$) ημ($\frac{\omega_1 + \omega_2}{2}t$) Αν $\omega_1 \cong \omega_2 \cong \omega$ x=Α΄ημωt Πλάτος περιοδικής κίνησης Α΄=2.Ασυν($\frac{\omega_1 - \omega_2}{2}t$) *** Αν οι αρχικές ταλαντώσεις έχουν αρχική φάση η σύνθεση προκύπτει με εφαρμογή της απόδειξης του σχολείου
Συχνότητα διακροτήματος	f_δ= $\lvert f_1 - f_2 \rvert$
Γραφική παράσταση σύνθετης ταλάντωσης	
Αν $\omega_1 \cong \omega_2 \cong \omega$ για την συνισταμένη κίνηση ισχύει	ω=$\frac{\omega_1 + \omega_2}{2}$, f= $\frac{f_1 + f_2}{2}$

Ταχύτητα διάδοσης κύματος	υ= $\frac{x}{t}$
Θεμελιώδης εξίσωση της κυματικής	υ=λ.f
Εξίσωση ταλάντωσης της πηγής Ο (χωρίς αρχική φάση)	y=Αημωt
Εξίσωση του αρμονικού κύματος	Διάδοση προς τα θετικά y= Αημ 2π($\frac{t}{T}-\frac{x}{\lambda}$) Διάδοση προς τα αρνητικά y= Αημ 2π($\frac{t}{T}+\frac{x}{\lambda}$) Γενικά Το κύμα φτάνει σε ένα σημείο μετά από χρόνο t_1= $\frac{x}{\upsilon}$ άρα έχουμε y=0 αν t≤ t_1 y= Αημ 2π($\frac{t}{T}-\frac{x}{\lambda}$) αν t≥ t_1
Η ταχύτητα και η επιτάχυνση της ταλάντωσης ενός οποιουδήποτε σωματιδίου του μέσου διάδοσης ενός κύματος	υ= ωΑσυν 2π($\frac{t}{T}-\frac{x}{\lambda}$) α= -ω²Αημ 2π($\frac{t}{T}-\frac{x}{\lambda}$) με α=- ω².y υ=± ω $\sqrt{A^2-y^2}$
Φάση ενός κύματος που διαδίδεται στον θετικό ημιάξονα	Φ= 2π($\frac{t}{T}-\frac{x}{\lambda}$)
Κύμα με αρχική φάση	Πηγή : y=Αημ(ωt+φ_o) Κύμα y= Αημ [2π($\frac{t}{T}-\frac{x}{\lambda}$)+φ_o]
Διαφορά φάσης μεταξύ δυο τυχαίων σημείων ενός μέσου που απέχουν απόσταση Δχ την ίδια χρονική στιγμή t	Δφ= $\frac{2\pi\Delta x}{\lambda}$ (με απόδειξη)
Διαφορά φάσης μεταξύ ενός σημείου του μέσου δυο χρονικές στιγμές που διαφέρουν κατά Δt	Δφ= $\frac{2\pi\Delta t}{T}$ (με απόδειξη)
Στιγμιότυπο κύματος για t=t_1	y= Αημ 2π($\sigma\tau\alpha\theta-\frac{x}{\lambda}$)

	 Βρίσκω απόσταση χ=υ.t Βρίσκω πόσες καμπύλες από τον λόγο 2x/λ
Γραφική παράσταση απομάκρυνσης υλικού σημείου του μέσου ως συνάρτηση με τον χρόνο	 Όπου t_1=x/υ ο χρόνος που απαιτείται για να φτάσει το κύμα στο σημείο
Γραφική παράσταση φάσης ταλάντωσης ως συνάρτηση με την απόσταση	 Σημεία τομής με τους άξονες φ=0 ⇔ χ= ….. χ=0 ⇔ φ=…..

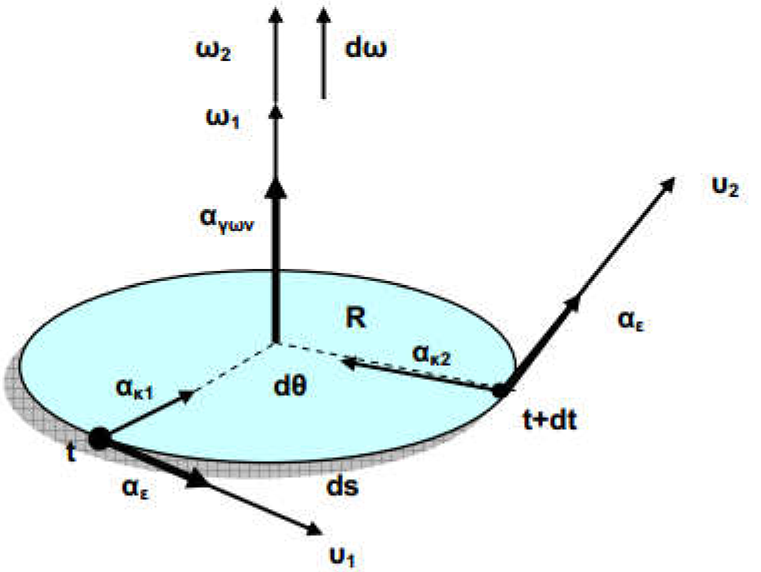
ΣΥΜΒΟΛΗ	**ΚΥΜΑΤΩΝ**
Απομάκρυνση των σημείων του μέσου 	Αρχή της επαλληλίας των κινήσεων y= y_1 +y_2 Για $0 \le t \le t_1 = \frac{r_1}{υ}$ είναι y=0 Για $t_1 \le t \le t_2 = \frac{r_2}{υ}$ είναι y= Αημ $2π(\frac{t}{T} - \frac{r_1}{λ})$ Για t≥ t_2 είναι y=2.Ασυν $2π\frac{r_1 - r_2}{2λ}$ημ$2π(\frac{t}{T} - \frac{r_1 + r_2}{2λ})$
Εξίσωση απομάκρυνσης ενός σημείου στο οποίο συμβάλλουν δυο σύγχρονα αρμονικά κύματα διαφορετικής διεύθυνσης	y=2.Ασυν $2π\frac{r_1 - r_2}{2λ}$ημ$2π(\frac{t}{T} - \frac{r_1 + r_2}{2λ})$
Πλάτος κύματος από συμβολή	Α΄= 2.Ασυν $2π\frac{r_1 - r_2}{2λ}$

Φάση ταλάντωσης σημείου από συμβολή	φ=2π$(\frac{t}{T}-\frac{r_1+r_2}{2\lambda})$
Ταχύτητα και επιτάχυνση των σημείων του μέσου	Για 0≤t≤t_1 = $\frac{r_1}{\upsilon}$ είναι υ=0 και α=0 Για t_1≤t≤t_2 = $\frac{r_2}{\upsilon}$ είναι υ=ω Ασυν 2π$(\frac{t}{T}-\frac{r_1}{\lambda})$ Για t≥ t_2 είναι υ=ω.Α΄ συν2π$(\frac{t}{T}-\frac{r_1+r_2}{2\lambda})$ α=-ω^2Α΄ ημ2π$(\frac{t}{T}-\frac{r_1+r_2}{2\lambda})$
Συνθήκη Ενίσχυσης	r_1-r_2 = Νλ όπου Ν=0,±1,±2, …..
Συνθήκη Απόσβεσης	r_1-r_2 = (2N+1)$\frac{\lambda}{2}$ όπου Ν=0,±1,±2, …..
Υπερβολές Ενισχυτικής και ακυρωτικής συμβολής	

ΣΤΑΣΙΜΑ	ΚΥΜΑΤΑ
Κύματα που συμβάλλουν για να δημιουργήσουν το στάσιμο κύμα	Διάδοση προς τα θετικά y= Αημ 2π$(\frac{t}{T}-\frac{x}{\lambda})$ Διάδοση προς τα αρνητικά y= Αημ 2π$(\frac{t}{T}+\frac{x}{\lambda})$ Αρχή της επαλληλίας των κινήσεων y= y_1 +y_2
Εξίσωση του στάσιμου κύματος	y=2.Α συν2π$\frac{x}{\lambda}$ ημ2π$\frac{t}{T}$
Ταχύτητα και επιτάχυνση των σημείων του μέσου	υ= ωΑ΄συν 2π$(\frac{t}{T})$ α= -ω^2Α΄ημ 2π$(\frac{t}{T})$

Πλάτος στάσιμου κύματος	$A' = 2.A\ συν2π\frac{x}{λ}$
Θέσεις κοιλιών	$x = κ\frac{λ}{2}$ όπου κ=0,1,2,…
Θέσεις Δεσμών	$x = (2κ+1)\frac{λ}{4}$ όπου κ=0,1,2,…
Διαφορά φάσης των διαφόρων σημείων του μέσου	Δφ=0 ανάμεσα σε δυο διαδοχικούς δεσμούς ή όταν μεταξύ δυο σημείων δεν υπάρχει δεσμός ή υπάρχει άρτιος αριθμός δεσμών Δφ=π rad εκατέρωθεν ενός δεσμού ή αν μεταξύ των σημείων υπάρχει περιττός αριθμός δεσμών

ΜΗΧΑΝΙΚΗ ΣΤΕΡΕΟΥ ΣΩΜΑΤΟΣ

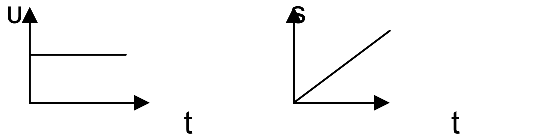
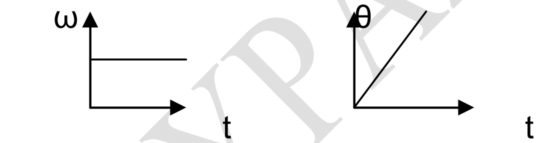
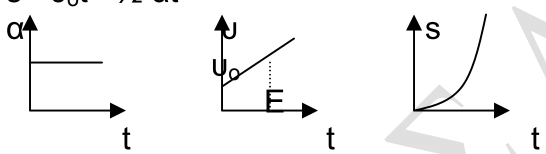
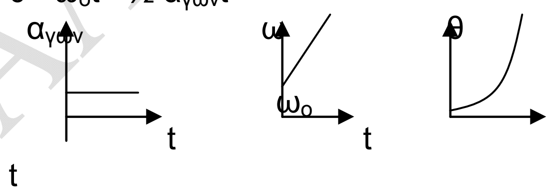
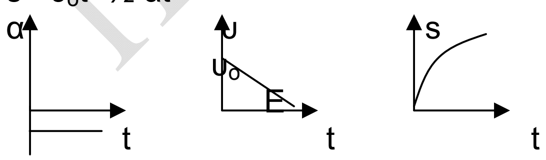
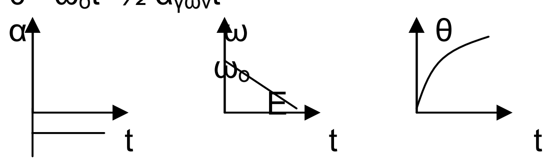
Γωνιακή ταχύτητα (εκφράζει τον ρυθμό διαγραφής των γωνιών)	$ω=\frac{dθ}{dt}$
Γραμμική ταχύτητα (εκφράζει τον ρυθμό διαγραφής των τόξων)	$υ=\frac{ds}{dt}$
Σχέση γραμμικής και γωνιακής ταχύτητας	υ=ω.R
Γωνιακή επιτάχυνση (εκφράζει τον ρυθμό μεταβολής της γωνιακής ταχύτητας ω)	$α_{γων}=\frac{dω}{dt}$
	
Κεντρομόλος επιτάχυνση (είναι υπεύθυνη για την αλλαγή διεύθυνσης της γραμμικής ταχύτητας)	$α_κ=\frac{υ^2}{R}=ω^2R$
Γραμμική επιτάχυνση	$α=\sqrt{α_κ^2+α_ε^2}$
Επιτρόχια επιτάχυνση(εκφράζει τον ρυθμό μεταβολής της γραμμικής ταχύτητας υ)	$α_ε=\frac{dυ}{dt}$
Σχέση επιτρόχιας και γωνιακής επιτάχυνσης	$α_ε= α_{γων}.R$
Ομαλή στροφική κίνηση	$α_{γων}=0$

	ω =σταθ. θ=ω.t
Ομαλά μεταβαλλόμενη στροφική κίνηση	$α_{γων}$= σταθ. $ω=ω_o \pm α_{γων} t$ $θ= ω_o t \pm ½ α_{γων} t^2$
Κύλιση τροχού	$υ_{cm}=υ_{περ}= ω.R$ $α_{cm}=α_{περ}= α_{γων}.R$ Ανώτατο σημείο τροχού $υ=2\ υ_{cm}$ $α= 2\ α_{γων}.R$ Κατώτερο σημείο υ=0 , α=0
Ροπή δύναμης	τ=F.R
Ροπή ζεύγους δυνάμεων	τ=F.d
Ισορροπία στερεού σώματος	$ΣF=0 \Leftrightarrow ΣF_x=0$ $ΣF_y=0$ Και Στ=0
Ροπή αδράνειας	$I=m_1 r_1^2 + m_2 r_2^2 + \ldots\ldots\ldots$
Θεώρημα Steiner	$I= I_{cm} +Md^2$
Θεμελιώδης νόμος της στροφικής κίνησης	$Στ=I\ α_{γων}$
Στροφορμή υλικού σημείου	L=p.r ή L=m.υ.r
Στροφορμή στερεού σώματος	L=I.ω
Στροφορμή συστήματος σωμάτων	$\vec{L} = \vec{L}_1 + \vec{L}2 + \ldots$
Θεμελιώδης νόμος της στροφικής κίνησης (γενική διατύπωση)	$Στ= \frac{dL}{dt}$
Θεμελιώδης νόμος της στροφικής κίνησης για σύστημα σωμάτων	$Στ_{εξ}= \frac{dL}{dt}_{συστ}$
Διατήρηση της στροφορμής	Αν $Στ_{εξ}=0 \Leftrightarrow \vec{L}$ =Σταθ. Άρα $L_{αρχ}=L_{τελ}$ ή $I_1ω_1=I_2ω_2$
Κινητική ενέργεια λόγω περιστροφής	$K= \frac{1}{2} I.ω^2$
Κινητική ενέργεια στην σύνθετη κίνηση	$K= \frac{1}{2} M υ_{cm}^2 + \frac{1}{2} I.ω^2$
Έργο ροπής για στοιχειώδη γωνιακή μετατόπιση	dW=τ.dθ
Έργο σταθερής ροπής	W=τ.Δθ
Στιγμιαία Ισχύς μιας δύναμης	P=τ.ω
Μέση ισχύς μιας δύναμης	$P=\frac{dW}{dt}$
Θ.Μ.Κ.Ε	$ΣW=\frac{1}{2} I.ω^2 - \frac{1}{2} I.ω_o^2$
Ρυθμός μεταβολής της κινητικής ενέργειας στην στροφική κίνηση	$(\frac{dK}{dt})_{στρ}=$ $Στ.ω=Iα_{γων}.ω$

Ρυθμός μεταβολής της κινητικής ενέργειας στην μεταφορική κίνηση	$\left(\frac{dK}{dt}\right)_{μετ} = ΣF.υ_{cm}$
Ρυθμός μεταβολής της κινητικής ενέργειας στην σύνθετη κίνηση	$\frac{dK}{dt} = \left(\frac{dK}{dt}\right)_{στρ} + \left(\frac{dK}{dt}\right)_{μετ}$ $= Στ.ω + ΣF.υ_{cm}$

ΚΙΝΗΜΑΤΙΚΗ ΤΗΣ ΚΥΛΙΣΗΣ ΧΩΡΙΣ ΟΛΙΣΘΗΣΗ (ΑΝΤΙΣΤΟΙΧΙΣΕΙΣ)

Μεταφορική κίνηση	s	υ	α	m	F	L	
Στροφική κίνηση	θ	ω	$α_{γων}$	I	τ	p	

ΜΕΤΑΦΟΡΙΚΗ ΚΙΝΗΣΗ	**ΣΤΡΟΦΙΚΗ ΚΙΝΗΣΗ**
Ευθύγραμμη ομαλή κίνηση s= υ.t 	Ομαλή στροφική κίνηση θ=ω.t 
Ευθύγραμμη ομαλά επιταχυνόμενη κίνηση α= σταθ. $υ=υ_o+αt$ $s= υ_o t+ ½ αt^2$  Ειδικότερα για το διάγραμμα υ-t ισχύει E= s και εφθ = α	Ομαλά επιταχυνόμενη στροφική κίνηση $α_{γων}$= σταθ. $ω=ω_o+α_{γων}t$ $θ= ω_o t+ ½ α_{γων}t^2$  Ειδικότερα για το διάγραμμα ω-t ισχύει E= θ και εφθ = $α_{γων}$
Ευθύγραμμη ομαλά επιβραδυνόμενη κίνηση α= σταθ. $υ=υ_o -αt$ $s= υ_o t- ½ αt^2$  Ειδικότερα για το διάγραμμα υ-t ισχύει E= s και εφθ = α	Ομαλά επιβραδυνόμενη στροφική κίνηση $α_{γων}$= σταθ. $ω=ω_o-α_{γων}t$ $θ= ω_o t- ½ α_{γων}t^2$  Ειδικότερα για το διάγραμμα υ-t ισχύει E= θ και εφθ = $α_{γων}$

Σχέσεις μεταξύ στροφικής και μεταφορικής κίνησης σε σώμα που κυλίεται χωρίς να ολισθαίνει : υ= ω. R , α = $α_{γων}$ .R

ΜΕΤΑΦΟΡΙΚΗ ΚΙΝΗΣΗ	**ΣΤΡΟΦΙΚΗ ΚΙΝΗΣΗ**
Δύναμη F	Ροπή $τ= F.R$
Ισορροπία $ΣF=0$	Ισορροπία $Στ= 0$
Κίνηση σώματος $ΣF=m.\ α$	Κίνηση σώματος $Στ= Iα_{γων}$
Μάζα σώματος m	Ροπή αδράνειας I Ροπή αδράνειας υλικού σημείου $I=m.r^2$ Ροπή αδράνειας στερεού ως προς τυχαίο άξονα $I =I_{cm} +m\ d^2$
Ορμή $p= m.υ$	Στροφορμή L Υλικού σημείου $L= m.\ υ\ .\ r$ Στερεού σώματος $L= I.\ ω$
Κινητική ενέργεια $K= ½\ mu^2$	Κινητική ενέργεια $K= ½\ I\ ω^2$
Δυναμική ενέργεια $U= m.\ g.\ h$	
Έργο $W= F.s$	Έργο $W= τ.\ θ$
Ισχύς $P= F.υ$	Ισχύς $P= τ.ω$

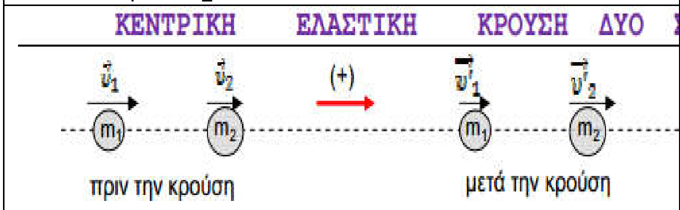
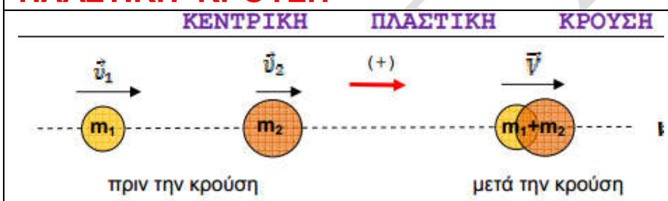
ΑΡΧΕΣ ΔΙΑΤΗΡΗΣΗΣ ΤΗΣ ΕΝΕΡΓΕΙΑΣ

Αν $ΣF_{εξ}= 0$ τότε
Αρχή διατήρησης της ορμής $p_{αρχ}= p_{τελ}$
Αρχή διατήρησης της στροφορμής $L_{αρχ}= L_{τελ}$
Αρχή διατήρησης της μηχανικής ενέργειας $E_{μηχA}= E_{μηχB} \Rightarrow K_A+U_A= K_B +U_B$
$(½\ m\ υ_A^2 + ½\ Iω_A^2 + mgh_A = ½\ m\ υ_B^2 + ½\ Iω_B^2 + mgh_B)$

Αν $ΣF_{εξ}\neq 0$ τότε
$$\frac{Δp}{Δt} = ΣF$$
$$\frac{ΔL}{Δt} = Στ$$
$ΔK= ΣW \Rightarrow K_{τελ} –K_{αρχ} = ΣW \Rightarrow ½\ m\ υ_B^2 + ½\ Iω_B^2 -(½\ m\ υ_A^2 + ½\ Iω_A^2)= ΣF.s+ Στ.θ$

ΚΡΟΥΣΕΙΣ

Διατήρηση της ορμής σε σύστημα σωμάτων	Αν $ΣF_{εξ}= 0$ τότε $\frac{dp}{dt}=0$ και p=σταθερή
ΚΕΝΤΡΙΚΗ ΕΛΑΣΤΙΚΗ ΚΡΟΥΣΗ	
Κεντρική Ελαστική κρούση δυο σφαιρών	$υ_1' = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} υ_1 + \frac{2m_2}{m_1 + m_2} υ_2$ $υ_2' = \frac{2m_1}{m_1 + m_2} υ_1 + \frac{m_2 - m_1}{m_1 + m_2} υ_2$

Όταν $m_1=m_2$ τότε	$υ_1΄= υ_2$ και $υ_2΄= υ_1$ δηλαδή οι σφαίρες ανταλλάσουν ταχύτητες
Αν $υ_2=0$ (κεντρική ελαστική κρούση δυο σωμάτων με το δεύτερο σώμα ακίνητο)	$υ_1΄=\frac{m_1-m_2}{m_1+m_2}υ_1$ και $υ_2΄=\frac{2m_1}{m_1+m_2}υ_1$
Όταν $m_2>>m_1$	$υ_1΄= -υ_1$ και $υ_2΄= 0$
Όταν $m_1>>m_2$	$υ_1΄= υ_1$ και $υ_2΄= 2υ_1$
	
Σε όλες τις παραπάνω σχέσεις οι ταχύτητες αντικαθίστανται με τις αλγεβρικές τους τιμές (με τα πρόσημα τους)	
Αρχή Διατήρησης της Κινητικής Ενέργειας	$K_{ολ\,(πριν)}=K_{ολ(μετά)}$ $\frac{m_1υ_1^2}{2}+\frac{m_2υ_2^2}{2}=\frac{m_1υ΄_1^2}{2}+\frac{m_2υ΄_2^2}{2}$
ΠΛΑΣΤΙΚΗ ΚΡΟΥΣΗ	
	
Ταχύτητα συσσωματώματος	$V=\frac{m_1υ_1 \pm m_2υ_2}{m_1+m_2}$
ΑΝΕΛΑΣΤΙΚΗ ΚΡΟΥΣΗ	
Αρχή Διατήρησης της ορμής	$P_{ολ(πριν)}=P_{ολ(μετά)}$ $m_1υ_1 \pm m_2υ_2 = m_1υ_1΄ \pm m_2υ_2΄$
Απώλεια Ενέργειας στην ανελαστική ή την πλαστική κρούση	$E_{απωλ}=Q= K_{ολ\,(πριν)} - K_{ολ(μετά)}$
Ποσοστό % Απώλειας Ενέργειας στην ανελαστική ή την πλαστική κρούση	$α\%=\frac{E_{απωλ}}{K_{ολ(πριν)}}.100\%$
Πλάγια πλαστική κρούση	$p_{συσ}=\sqrt{p_1^2+p_2^2+2p_1p_2συνφ}$ Αν $p_1 \perp p_2$ τότε $p_{συσ}=\sqrt{p_1^2+p_2^2}$

	με εφθ= $\frac{p_2}{p_1}$
ΦΑΙΝΟΜΕΝΟ DOPPLER	
Γενική Εξίσωση υ= ταχύτητα ήχου στον αέρα $υ_A$= ταχύτητα παρατηρητή $υ_s$= ταχύτητα ηχητικής πηγής f_A = συχνότητα που ακούει ο παρατηρητής f_s = συχνότητα που εκπέμπει η ηχητική πηγή	$f_A = \frac{\upsilon \pm \upsilon_A}{\upsilon \pm \upsilon_s} f_s$ + $υ_A$ = ο παρατηρητής πλησιάζει την πηγή - $υ_A$ = ο παρατηρητής απομακρύνεται από την πηγή -$υ_s$= η πηγή πλησιάζει τον παρατηρητή +$υ_s$= η πηγή απομακρύνεται από τον παρατηρητή
Απόσταση πηγής –παρατηρητή ελαττώνεται	$f_A > f_s$
Απόσταση πηγής –παρατηρητή αυξάνεταιι	$f_A < f_s$
Ταχύτητα υ΄ ηχητικών κυμάτων που αντιλαμβάνεται ο παρατηρητής (εξαρτάται μόνο από την κίνηση του παρατηρητή)	$υ΄= υ-υ_A$ αν υ ομόρροπη της $υ_A$ $υ΄= υ+υ_A$ αν υ αντίρροπη της $υ_A$
Το μήκος κύματος λA των ηχητικών κυμάτων που αντιλαμβάνεται ο παρατηρητής (εξαρτάται μόνο από την κίνηση της πηγής)	$λ_A=λ-υ_s.T$ αν η πηγή πλησιάζει τον παρατηρητή $λ_A=λ+υ_s.T$ αν η πηγή απομακρύνεται από τον παρατηρητή
Ανακλώμενος ήχος σε ακίνητη επιφάνεια (η επιφάνεια είναι νέα πηγή με $f_s΄= f_{ανακλ}$)	$f_{ανακλ} = \frac{\upsilon}{\upsilon \pm \upsilon s} f_s$
Ανακλώμενος ήχος σε κινούμενη επιφάνεια με ταχύτητα v (η επιφάνεια είναι νέα πηγή με $f_s΄= f_{ανακλ}$)	$f_{ανακλ} = \frac{\upsilon \pm \upsilon_A}{\upsilon \pm v} . \frac{\upsilon \pm v}{\upsilon \pm \upsilon_s} f_s$
Φαινόμενο Doppler στην μεταβαλλόμενη κίνηση Αριθμός κυμάτων που αντιλαμβάνεται ο παρατηρητής	$f_A = \frac{\upsilon \pm (\upsilon_o \pm at)}{\upsilon \pm \upsilon_s} f_s$ Εμβαδόν γραφικής παράστασης $N_A=E=\frac{f_A + f_s}{2} t_1$
Αν οι φορείς των ταχυτήτων και πηγής δεν ταυτίζονται με την ευθεία που ενώνει τον παρατηρητή και την πηγή	$f_A = \frac{\upsilon \pm \upsilon_{Ax}}{\upsilon \pm \upsilon_{sx}} f_s$ $f_A = \frac{\upsilon \pm \upsilon_A \sigma\upsilon\nu\phi}{\upsilon \pm \upsilon_s \sigma\upsilon\nu\phi} f_s$

ΡΕΥΣΤΑ ΣΕ ΚΙΝΗΣΗ

Πίεση 1Pa= $1N/m^2$	P= $\frac{dF}{dA}$ ή P= $\frac{F_\perp}{A}$ ή P= $\frac{dW}{dV}$
Θεμελιώδης νόμος της υδροστατικής πίεσης	P=ρ.g.h (h= βάθος από την ελεύθερη επιφάνεια του υγρού)
Πυκνότητα	ρ= $\frac{m}{V}$
Πίεση σε σημείο υγρού που ισορροπεί σε ανοικτό δοχείο	$P=P_{atm}$ + ρ.g.h
Υδραυλικός ανυψωτήρας	$P_1=P_2 \Leftrightarrow \frac{F_1}{A_1}=\frac{F_2}{A_2}$
Παροχή Π : $1m^3/s$	Π= $\frac{\Delta V}{\Delta t}$ ή Π=Α.υ
Αρχή Διατήρησης της Ύλης	Η μάζα Δm_1 του ρευστού που περνά από μια διατομή A_1 του σωλήνα σε χρονικό διάστημα Δt θα είναι ίση με την μάζα Δm_2 του ρευστού που περνά στο ίδιο χρονικό διάστημα Δt από μια άλλη διατομή του σωλήνα A_2 $\Delta m_1 = \Delta m_2$
Εξίσωση της συνέχειας	Σε στρωτή ροή ασυμπίεστου υγρού ισχύει Π=σταθερή $\Pi_1=\Pi_2$ Ή $A_1 \upsilon_1 = A_2 \upsilon_2$
Εξίσωση του Bernulli	$\frac{\rho\upsilon_1^2}{2}+\rho g h_1+P_1=\frac{\rho\upsilon_2^2}{2}+\rho g h_2+P_2$ Ή $\frac{\rho\upsilon^2}{2}+\rho g h+P$ =σταθερό
Θεώρημα του Torricelli	υ= $\sqrt{2gh}$ (με απόδειξη)
Ροόμετρο του Ventouri	$\upsilon_1=\sqrt{\frac{2gh}{(\frac{A_1}{A_2})^2-1}}$ (με απόδειξη)
Συντελεστής ιξώδους	n : μονάδα $1N.s/m^2$ (S.I) Πρακτική μονάδα πίεσης : 1Poise (πουάζ) =1Pa.s
Εσωτερική τριβή	F=n.A. $\frac{\upsilon_\pi}{L}$
Εσωτερική τριβή σε βάθος y κάτω από την πλάκα	F=n.A. $\frac{\upsilon}{L}$ όπου υ= $\upsilon_\pi . \frac{y}{L}$

------------------------ **ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ** ------------------------