20 επαναληπτικά θέματα

για τα μαθηματικά κατεύθυνσης Γ λυκείου

Γράφουν οι μαθηματικοί:

Βέρρας Οδυσσέας

Ζαχαράκης Δημήτρης

Καρύμπαλης Νώντας

Κλίτσας Γιώργος

Κοτσώνης Γιώργος

Μπούζας Δημήτρης

Πετρόπουλος Βασίλης

Σκέντζος Δημήτρης

Σκίτσας Νώντας

Τσούκας Βαγγέλης

ελεύθερη διάθεση για εκπαιδευτικούς σκοπούς από:

Μαθηματικά για το τελευταίο θρανίο

maths4people.blogspot.gr

Θέμα 1ο

Έστω παραγωγίσιμη συνάρτηση f ορισμένη στο διάστημα $[\alpha,\beta]$, με $\alpha>0$ και $f(\alpha)=\beta$, $f(\beta)=\alpha$.

i. Αν ισχύει ότι $f'(x)+f(x)+e^{-x}<0$, για κάθε $x\in[\alpha,\beta]$, να δείξετε ότι η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $[\alpha,\beta]$.

ii. Να αποδείξετε ότι $f(x)>0$.

iii. Να αποδείξετε ότι υπάρχει μοναδική σταθερά $c\in[\alpha,\beta]$ τέτοια, ώστε $\int_{c}^{f(c)} f(x)dx=0$.

Θέμα 2ο

Έστω ο μιγαδικός αριθμός z για τον οποίο ισχύει $|z-i|=\mathrm{Im}(z)+1$ **(1)**.

Α. Να δείξετε ότι η εικόνα του z κινείται σε παραβολή.

Β. Έστω οι εικόνες Α και Β των μιγαδικών z_1 και $-\overline{z_1}$ αντίστοιχα. Να βρεθεί ο z_1 που επαληθεύει την **(1)** αν το τρίγωνο ΑΟΒ είναι ισόπλευρο.

Γ. Έστω ότι κατά τη χρονική στιγμή t_o η απόσταση της εικόνας του μιγαδικού z από την ευθεία $y=x-3$ γίνεται ελάχιστη.

i. Να βρείτε το μιγαδικό z_o του οποίου η εικόνα έχει την ελάχιστη απόσταση από την ευθεία $y=x-3$.

ii. Να αποδείξετε ότι κατά τη χρονική στιγμή t_o ο ρυθμός μεταβολής του $\mathrm{Re}(z_o)$ ισούται με το ρυθμό μεταβολής του $\mathrm{Im}(z_o)$.

Θέμα 3ο

Έστω η δυο φορές παραγωγίσιμη συνάρτηση $f:[0,2]\to R$, για την οποία ισχύουν:

$$f(1)=1 \text{ και } f''(x)<0, \text{ για κάθε } x\in[0,2]$$

Α. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση g με τύπο $g(x)=\int_0^x f(t)\,dt - x\cdot f\left(\frac{x}{2}\right)$, με $x\in[0,2]$, είναι γνησίως φθίνουσα.

Β. Για τη συνάρτηση $K(x)=\int_0^x [f(t)-t]\,dt$ να αποδείξετε ότι $K(2)<0$.

Γ. Να αποδείξετε ότι υπάρχει $x_1\in(0,2)$ τέτοιο ώστε $f(x_1)<x_1$.

Δ. Αν $h(x)=g\left(\frac{x}{2}\right)$, να βρείτε το γεωμετρικό τόπο των εικόνων των μιγαδικών z για τους οποίους ισχύει ότι: $|z-1|=1$ και $h(|z+i|)<h(|z-2-i|)$.

Θέμα 4ο

Έστω η συνάρτηση $g(x)=\ln x$ και η συνεχής συνάρτηση $f:[0,+\infty)\to R$ για την οποία ισχύει:

$$f(0)=0 \text{ και } f(x)-\frac{1}{8}=\frac{x^2}{8}+\int_x^{x^2}\frac{1}{t}\cdot f\left(\frac{t}{x}\right)dt, \text{ για κάθε } x>0.$$

Α. Να βρεθεί ο τύπος της $f(x)$.

Β. Να βρεθεί η εξίσωση της κοινής εφαπτομένης (ε) των C_f και C_g που έχει κλίση $\lambda_\varepsilon\ge 1$.

Γ. Να υπολογίσετε το εμβαδό του χωρίου που περικλείεται μεταξύ της (ε), της C_f και του άξονα $x'x$.

Δ. Να αποδείξετε ότι $f(x)>g(x)$, για κάθε $x>0$.

Ε. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $\frac{x^3}{12}-x\ln x+x=2013$ έχει μοναδική ρίζα στο $(0,+\infty)$.

ΣΤ. Έστω $f(x)=\frac{x^2}{4}$ και (ε_o) η εφαπτομένη της C_f στο $\mathrm{A}(x_o, f(x_o))$. Αν Β είναι το σημείο τομής της (ε_o) με τον άξονα $x'x$ και Γ το ίχνος του σημείου Α πάνω στον $x'x$, να αποδείξετε ότι το Γ κινείται με τη διπλάσια ταχύτητα από το Β καθώς το x_o διατρέχει το διάστημα $(0,+\infty)$.

Θέμα 5ο

Έστω η παραγωγίσιμη συνάρτηση $f:R\to R$ για την οποία ισχύει $\left[f(x)\right]^3+3f(x)+x=e^x-1$, για κάθε $x\in R$ και η συνάρτηση g με $g(x)=f(x)-x$, με $x\in R$.

Α. Να αποδείξετε ότι $g(x)>-x-2$, για κάθε $x\in R$.

Β. Αν υπάρχει σημείο $\mathrm{M}_o\left(x_o,g(x_o)\right)$, το οποίο είναι το σημείο της C_g που απέχει την ελάχιστη απόσταση από την ευθεία $(\varepsilon):\ x+y+2=0$, να αποδείξετε ότι η εφαπτομένη της C_g στο M_o είναι παράλληλη στην ευθεία (ε).

Γ. Αν ισχύουν οι προϋποθέσεις του ερωτήματος Β, να βρείτε το σημείο M_o.

Θέμα 6ο

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=x\ln x-x$, με $x>0$.

Α. Στο διάστημα $\Delta=[1,+\infty)$ να:

- **i.** μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία και το πρόσημο.
- **ii.** αποδείξετε ότι $-1\le\dfrac{1}{e^2-1}\displaystyle\int_1^{e^2}f(x)dx\le e^2$

Β. Να υπολογίσετε το εμβαδό του χωρίου που περικλείεται μεταξύ της γραφικής παράστασης της f, του άξονα $x'x$ και των κατακόρυφων ευθειών $x=1$ και $x=e^2$.

Γ. Έστω η συνάρτηση $g(x)=\int_1^x f(\omega)d\omega$. Να αποδείξετε ότι υπάρχει μοναδικό $\xi\in\left(e,e^2\right)$ τέτοιο ώστε $g(\xi)=0$.

Δ. Έστω σημείο $\mathrm{M}\left(x(t),y(t)\right)$ της γραφικής παράστασης της συνάρτησης g. Να βρεθούν οι συντεταγμένες του Μ τη χρονική στιγμή t_o όπου ο ρυθμός μεταβολής της τετμημένης του Μ είναι αντίθετος από το ρυθμό μεταβολής της τεταγμένης του Μ, αν υποθέσουμε ότι $x'(t)\neq 0$ για κάθε $t\in[0,+\infty)$.

Ε. Να αποδείξετε ότι υπάρχουν $x_1,x_2,x_3\in\left(e,e^3\right)$ τέτοια ώστε $f(x_1)+e\cdot f(x_2)=e^2\cdot f(x_3)$

Θέμα 7^{ο}

Έστω η συνάρτηση f, δυο φορές παραγωγίσιμη, με πεδίο ορισμού το R, για την οποία ισχύει ότι $f''(x)=f(x)$ για κάθε $x\in R$ και η συνάρτηση $g(x)=e^{x}\left[f'(x)-f(x)\right]$.

Α. Αν η γραφική παράσταση της f διέρχεται από την αρχή των αξόνων και η κλίση της στο $\mathrm{O}(0,0)$ είναι 1, τότε:

- **i.** Να αποδείξετε ότι η $g(x)$ είναι σταθερή συνάρτηση.
- **ii.** Να βρείτε τον τύπο της $f(x)$

Β. Αν $f(x)=\dfrac{e^{2x}-1}{2e^{x}}$ να αποδειχθεί ότι η εξίσωση $f(x)=2013$ έχει ακριβώς μία θετική ρίζα.

Γ. Να μελετηθεί η f ως προς τη κυρτότητα και τα σημεία καμπής.

Δ. Να αποδειχθεί ότι $e^{2x}-1>2xe^{x}$, για κάθε $x>0$.

Θέμα 8^{ο}

Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x)=e^{x}$ και $g(x)=\sqrt{x}$.

Α. Να δείξετε ότι η εξίσωση $4(1-x)\cdot e^{2x}=1$ έχει τουλάχιστον μία ρίζα που να ανήκει στο διάστημα $(0,1)$.

Β. Να αποδείξετε ότι οι γραφικές τους παραστάσεις C_f και C_g, αντίστοιχα, έχουν τουλάχιστον μία κοινή εφαπτομένη.

Γ. Έστω η συνάρτηση $h(x)=f(x)-g(x)$.

- **i.** Να εξετάσετε αν η C_h δέχεται δύο εφαπτομένες, μεταξύ τους παράλληλες.
- **ii.** Να αποδείξετε ότι υπάρχουν αριθμοί $\alpha,\beta\in(0,4)$, με $\alpha<\beta$, για τους οποίους να ισχύει ότι:

  $3h'(a)+h'(\beta)=e^{4}-3$

Θέμα 9°

Έστω f συνεχής συνάρτηση με πεδίο ορισμού όλο το R.

Α. Αν για κάθε $x \le 0$ ισχύει $\left[f(x)\right]^2 - x^2 \le 2f(x) - 1$ να βρεθεί το $f(0)$.

Β. Αν ο τύπος της f για κάθε $x > 0$ είναι $f(x) = \dfrac{\sqrt{x+1} - (ax+1)}{x}$, με $a \in R$, τότε:

i. Να βρεθεί η παράμετρος a.

ii. Για $a = -\dfrac{1}{2}$, να βρεθεί το $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.

iii. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f(x) = \dfrac{3}{4}$ έχει τουλάχιστον μία θετική ρίζα.

Θέμα 10°

Α. Δίνεται η εξίσωση $\dfrac{z}{4} = 1 - \dfrac{2}{z}$ **(1)** , με $z \ne 0$.

i. Να λυθεί η **(1)** στο σύνολο των μιγαδικών.

ii. Αν $z_1,\ z_2$ οι λύσεις της **(1)** να αποδείξετε ότι $\left(\dfrac{z_1}{z_2}\right)^{2012} + \left(\dfrac{z_2}{z_1}\right)^{2014} = 0$

Β. Αν για τον $w \in C$ ισχύει ότι $|w - z_1|^2 + |w - z_2|^2 = 16$ **(2)**, όπου $z_1,\ z_2$ οι λύσεις της **(1)**, να βρείτε το γεωμετρικό τόπο των εικόνων του μιγαδικού w και να αιτιολογήσετε ότι $|w-2| = 2$.

Γ. Έστω οι μιγαδικοί $w_1,\ w_2$ που ικανοποιούν την **(2)** και για τους οποίους ισχύει ότι $|w_1 - w_2| = 4$.

Να αποδείξετε ότι $|w_1 + w_2| = 4$

Δ. Αν οι μιγαδικοί $w_1,\ w_2,\ w_3$ ικανοποιούν την **(2)**, να αποδείξετε ότι:

$$\left|\frac{w_1 + w_2 + w_3 - 6}{4}\right| = \left|\frac{1}{w_1 - 2} + \frac{1}{w_2 - 2} + \frac{1}{w_3 - 2}\right|$$

Θέμα 11ο

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\sqrt{x}\ln x+\frac{1}{e}$, με $x>0$.

Α. Να μελετηθεί η f ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα.

Β. Να αποδειχθεί ότι η εξίσωση $f(x)=0$ έχει ακριβώς δύο ρίζες στο $(0,+\infty)$.

Γ. Να μελετηθεί η f ως προς τη κυρτότητα και τα σημεία καμπής.

Δ. Να αποδειχθεί ότι $\sqrt{x}\ln x<x-1$, για κάθε $x>1$.

Θέμα 12ο

Δίνεται η συνάρτηση $g(x)$, δύο φορές παραγωγίσιμη στο R με $g(x)>0$ για κάθε $x\in R$ και $g(0)=e-1$.

Επίσης οι συναρτήσεις $f(x)=(1+g(x))^{x}-1$ και $h(x)=\frac{g(x)}{g'(x)}$, με $g'(x)\neq 0$

Α. Να αποδείξετε ότι η C_f διέρχεται από την αρχή των αξόνων.

Β. Να βρεθεί η εξίσωση της εφαπτομένης (ε) της C_f στο O

Γ. Αν $(\varepsilon): y=x$ και $g(2)=2g(1)$ να αποδείξετε ότι η γραφική παράσταση της $h(x)$ τέμνει την ευθεία (ε) σε τουλάχιστον ένα σημείο με τετμημένη $x_0\in(1,2)$.

Δ. Να αποδείξετε ότι η $g(x)$ είναι γνησίως αύξουσα.

Θέμα 13ο

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=(x-\beta)\ln(x-1)-\alpha x$

Α. Αν η C_f εφάπτεται της ευθείας $y=-2$ στο σημείο $\mathrm{A}(2,-2)$ να βρεθούν οι παράμετροι α, β.

Β. Για $\alpha=\beta=1$ να μελετηθεί η f ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα.

Γ. Να αποδειχθεί ότι υπάρχει μοναδικό $x_o\in(1,+\infty)$ τέτοιο ώστε $f(x_o)=0$

Δ. Να αποδείξετε ότι $2f(3)<f(2)+f(4)$

Ε. Να αποδείξετε ότι υπάρχουν $\xi_1,\xi_2\in(e+1,e^3+1)$, με $\xi_1<\xi_2$, τέτοια ώστε $f'(\xi_1)-f'(\xi_2)=-1$

Θέμα 14ο

Έστω συνάρτηση $f:R\to R$, παραγωγίσιμη στο R, με $f(0)=2$ για την οποία ισχύει:

$$f(x)-f'(x)=\eta\mu x+\sigma\upsilon\nu x \text{, για κάθε } x\in R.$$

Α. Να βρεθεί ο τύπος της $f(x)$.

Β. Αν $f(x)=e^x+\sigma\upsilon\nu x$, να δείξετε ότι η $f(x)$ είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα $[0,+\infty)$.

Γ. Να αποδείξετε ότι $e^{\pi}-e^{\frac{\pi}{2}}>1$.

Δ. Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα $I=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\eta\mu x-\sigma\upsilon\nu x}{e^x-\eta\mu x}dx$.

Θέμα 15ο

Έστω οι συναρτήσεις: $f:[0,\alpha]\to R$, με f' γνησίως αύξουσα στο $[0,\alpha]$ και $g(x)=\frac{f(x)}{x}$ ορισμένη στο $(0,\alpha]$.

Αν ισχύει ότι $f(0)=0$, $f(\alpha)=\alpha$ και $f'(0)<0$, τότε:

Α. Να αποδείξετε ότι η g είναι γνησίως αύξουσα στο $(0,\alpha]$.

Β. Να δείξετε ότι υπάρχει $x_o\in(0,\alpha)$ τέτοιο ώστε $f'(x_o)=0$.

Γ. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f(x)=0$ έχει μοναδική λύση στο (x_o,α).

Δ. Να αποδείξετε ότι $f(x)\le x$ για κάθε $x\in[0,\alpha]$.

Ε. Να βρεθεί το σύνολο τιμών της g.

ΣΤ. Να δείξετε ότι η εξίσωση $f(x)=\frac{x}{2013}$ έχει μοναδική ρίζα στο $(0,\alpha)$

Θέμα 16ο

Έστω η συνάρτηση f, ορισμένη στο R, για την οποία ισχύει ότι $f(2) < f'(x) < f(3)$ για κάθε $x \in R$.

Α. Να αποδείξετε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα στο R.

Β. Να λυθεί η ανίσωση $f(x) \geq f(2)(x-1)$.

Γ. Αν Ε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται μεταξύ της C_f, του άξονα $x'x$ και των κατακόρυφων ευθειών $x=2$ και $x=3$, να αποδείξετε ότι: $\mathrm{E} > \dfrac{3f(2)}{2}$.

Δ. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f(x)=0$ έχει ακριβώς μία ρίζα $\rho \in (1,2)$.

Ε. Να αποδείξετε ότι υπάρχουν $\xi_1, \xi_2 \in (1,3)$, με $\xi_1 < \xi_2$, τέτοια ώστε $\dfrac{f(3)}{f'(\xi_2)} - \dfrac{f(1)}{f'(\xi_1)} = 2$.

ΣΤ. Να δείξετε ότι υπάρχει μοναδικό $x_o \in (\rho, 5)$ ώστε:

$$3\int_{\rho}^{x_o} f(t)dt = 3\int_{\rho}^{2} f(t)dt + 2\int_{2}^{3} f(t)dt + \int_{3}^{4} f(t)dt$$

Θέμα 17ο

Δίνεται η συνάρτηση $f(z) = \dfrac{z-2}{z-i}$, με $z \neq i$

Α. Να δείξετε ότι ο αριθμός $\left[f(0)\right]^{2013}$ είναι φανταστικός.

Β. Έστω οι μιγαδικοί $w = \dfrac{1}{f(z)}$, με $z \neq 2$ και u όπου $|u-1| = 1 + \mathrm{Re}(u)$.

- **i.** Να αποδείξετε ότι αν η εικόνα Μ του z ανήκει σε κύκλο κέντρου $\mathrm{K}(1,0)$ και ακτίνας $\rho = 1$, τότε η εικόνα του w κινείται στην ευθεία (ε): $4x - 2y + 1 = 0$.
- **ii.** Να βρεθεί ο γεωμετρικός τόπος της εικόνας του u.
- **iii.** Να λυθεί η εξίσωση $u \cdot f(z) = 1$, για $z \neq 2$.
- **iv.** Να βρεθεί η ελάχιστη τιμή της παράστασης $\mathrm{A} = |w-3|$.

Θέμα 18ο

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\begin{cases} \int_1^x \dfrac{t-1}{e^t}dt & ,x<1 \\ x^x+\alpha & ,x\geq 1 \end{cases}$, με $\alpha \in R$.

Α. Να βρεθεί η παράμετρος α ώστε η f να είναι συνεχής στο $x_o=1$.

Β. Για $\alpha=-1$:

- **i.** Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία και να αποδείξετε ότι $f(x)\geq 0$, για κάθε $x\in R$.
- **ii.** Να αποδείξετε ότι η C_f δεν παρουσιάζει σημεία καμπής.
- **iii.** Να αποδείξετε ότι αν η εφαπτομένη της C_f στο σημείο $\mathrm{A}(e,f(e))$ διέρχεται από το σημείο $\mathrm{B}(0,\beta+e^e-1)$, τότε η εξίσωση $x+\ln\left(\dfrac{-\beta}{2}\right)=x^2$ έχει μία τουλάχιστον ρίζα στο $(0,3)$.
- **iv.** Να αποδείξετε ότι $\pi\ln\pi>e$.

Θέμα 19ο

Έστω η συνάρτηση f, συνεχής σε όλο το R, για την οποία ισχύει $\int_0^x \left(2f(t)-x\right)dt=e^{2x}-2x$ και οι μιγαδικοί $z=e^x+(x-1)i$ και $w=e^x-i$, με $x\in R$.

Α. Να δείξετε ότι $f(x)=e^{2x}+x-1$.

Β. Να μελετηθεί η f ως προς τη μονοτονία και να βρεθούν οι ρίζες και το πρόσημό της.

Γ. Έστω ο μιγαδικός $u=z_1w_1$. Αν $u\in I$ να αποδειχθεί ότι $z_1=w_1=1-i$.

Δ. Αν $g(x)=|z|$ για κάθε $x\in R$ να βρεθεί για ποιόν μιγαδικό z η g παρουσιάζει ελάχιστο και ποιο το ελάχιστο $|z|$.

Ε. Να λυθεί η εξίσωση: $e^{2x}+x^2=2x+1$.

Θέμα 20ο

Έστω η συνάρτηση f συνεχής στο $(0,+\infty)$ και ο μιγαδικός $z=\int_1^x[2f(t)-t]dt+[xf(x)]i$, με $x>0$, για τον οποίο ισχύει $|z-1|=|z-i|$ για κάθε $x>0$.

Α. Να βρεθεί η ευθεία πάνω στην οποία κινούνται οι εικόνες του z .

Β. Να βρεθεί ο τύπος της $f(x)$

Γ. Να υπολογιστεί το όριο $\lim\limits_{x\to1}\frac{\mathrm{Re}(z)}{|z|-\sqrt{2}}$

Δ. Να βρεθεί το σύνολο τιμών της $f(x)$.

Ε. Να βρεθεί το πλήθος των ριζών της εξίσωσης $f(x)=\frac{\alpha}{e}$ για τις διάφορες τιμές της παραμέτρου $\alpha\in R$.