

ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ ΣΕΝΑΡΙΟΥ

ΤΑΥΤΟΤΗΤΑ ΣΕΝΑΡΙΟΥ	2
ΣΚΕΠΤΙΚΟ ΤΗΣ ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΑΣ	2
ΣΕ ΠΟΙΟΥΣ ΑΠΕΥΘΥΝΕΤΑΙ	2
ΛΟΓΙΣΜΙΚΟ	2
ΑΠΑΙΤΟΥΜΕΝΑ ΒΟΗΘΗΤΙΚΑ ΜΕΣΑ ΚΑΙ ΕΡΓΑΛΕΙΑ	2
ΠΡΟΑΠΑΙΤΟΥΜΕΝΕΣ ΓΝΩΣΕΙΣ	3
ΧΡΟΝΟΣ ΥΛΟΠΟΙΗΣΗΣ	3
ΧΩΡΟΣ ΥΛΟΠΟΙΗΣΗΣ	3
ΓΝΩΣΤΙΚΟΙ ΣΤΟΧΟΙ	3
ΚΟΙΝΩΝΙΚΗ ΕΝΟΡΧΗΣΤΡΩΣΗ ΤΗΣ ΤΑΞΗΣ	4
ΠΡΟΣΤΙΘΕΜΕΝΗ ΑΞΙΑ - ΚΑΙΝΟΤΟΜΙΑ	4
ΥΛΟΠΟΙΗΣΗ ΤΟΥ ΣΕΝΑΡΙΟΥ-ΑΝΑΛΥΣΗ ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΩΝ	6
ΕΠΕΚΤΑΣΗ ΣΕΝΑΡΙΟΥ	10
ΑΞΙΟΛΟΓΗΣΗ ΤΟΥ ΣΕΝΑΡΙΟΥ	11
ΕΝΔΕΙΚΤΙΚΟ ΦΥΛΛΟ ΕΡΓΑΣΙΑΣ	14
ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ	17

ΤΑΥΤΟΤΗΤΑ ΣΕΝΑΡΙΟΥ

Γνωστική Περιοχή : Ευκλείδεια Γεωμετρία Β' ΕΠΑ.Λ.

Ενότητα σχολικού εγχειριδίου : Τέμνουσες κύκλου (§ 9.7 σελ. 199)

Θέμα : Τέμνουσες κύκλου και δύναμη σημείου.

ΣΚΕΠΤΙΚΟ ΤΗΣ ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΑΣ

Η σχετική ενότητα έχει προγραμματιστεί να διδαχθεί στην τάξη μετά το πέρας της παρούσας παρέμβασης. Με το σενάριο αυτό επιδιώκεται:

- α) η διαπίστωση και ο έλεγχος υποθέσεων στις τέμνουσες κύκλου, μέσω δυναμικών οπτικών μετασχηματισμών (αυξομειώσεων και μετατοπίσεων),
- β) η εισαγωγή των ιδιοτήτων των τεμνουσών ενός κύκλου **με αλγεβρικό τρόπο**, χρησιμοποιώντας τα αντιστρόφως ανάλογα ποσά στο πλαίσιο της συμμεταβολής.

Χρησιμοποιούμε τη Νέα Τεχνολογία για εξοικονόμηση χρόνου (λόγω των αυτόματων σχεδιαστικών και υπολογιστικών διαδικασιών που παρέχει το λογισμικό) και διάθεσή του σε πειραματισμό και ερευνητική εργασία των μαθητών. Έτσι ο Η/Υ γίνεται εργαλείο διερεύνησης, πειραματισμού και ανακαλυπτικής μάθησης (κατά Dewey, Bruner) της σχέσης ενός σημείου ως προς έναν κύκλο.

ΣΕ ΠΟΙΟΥΣ ΑΠΕΥΘΥΝΕΤΑΙ

Το σενάριο εντάσσεται στο αναλυτικό πρόγραμμα της Β' τάξης Εσπερινού ΕΠΑ.Λ. και δεν έχει προηγηθεί διδασκαλία στη τάξη αυτής της ενότητας.

ΛΟΓΙΣΜΙΚΟ

Το λογισμικό που χρησιμοποιείται είναι το Geogebra (Ελληνική έκδοση 3). Το συγκεκριμένο λογισμικό έχει το πλεονέκτημα ότι παρέχεται ελεύθερο στο Διαδίκτυο, οπότε ο οποιοσδήποτε μαθητής μπορεί να το εγκαταστήσει στον προσωπικό του υπολογιστή, προκειμένου να έχει μια περαιτέρω κατ' οίκον ενασχόληση με σχετικές δραστηριότητες και εφαρμογές (άλλωστε, στο πλαίσιο του Νέου Σχολείου, τα νέα εμπλουτισμένα ψηφιακά βιβλία Μαθηματικών συνοδεύονται από σχετικές μικροεφαρμογές και μικροπειράματα σε δυναμικό υπολογιστικό περιβάλλον Geogebra, ως βασικό αναπαραστασιακό εργαλείο έκφρασης μαθηματικών εννοιών).

Ένα ακόμα κριτήριο επιλογής του συγκεκριμένου λογισμικού, είναι το γεγονός ότι η χρήση του δημιουργεί ευκαιρίες εμπλοκής των μαθητών σε διαδικασίες αυτενεργούς κατασκευής μαθηματικών νοημάτων, όπως περιγράφοντα αναλυτικά παρακάτω.

ΑΠΑΙΤΟΥΜΕΝΑ ΒΟΗΘΗΤΙΚΑ ΜΕΣΑ ΚΑΙ ΕΡΓΑΛΕΙΑ

Οι μαθητές θα έχουν στην διάθεσή τους

- Ηλεκτρονικούς υπολογιστές με java και Geogebra εγκατεστημένα σ' αυτούς
- Το φύλλο εργασίας που θα συντάξει ο διδάσκων και θα έχει στόχο την καθοδήγηση των μαθητών στη διερεύνηση των διαφόρων ερωτημάτων
- Το σχολικό βιβλίο (για να ανατρέχουν σε αυτό για ήδη διδαγμένες έννοιες)
- Τετράδιο, προκειμένου να κρατούν σημειώσεις για την πορεία της διερεύνησης και να καταγράφουν τα συμπεράσματά τους.

Ο καθηγητής θα έχει στη διάθεση του τον πίνακα του εργαστηρίου για τυχόν διευκρινήσεις προς τους μαθητές, αλλά και για να υλοποιηθεί το 12^ο βήμα του φύλλου εργασίας (απόδειξη της σχέσης $PI^2 = PA \cdot PB$).

ΠΡΟΑΠΑΙΤΟΥΜΕΝΕΣ ΓΝΩΣΕΙΣ

- Ως προς τα Μαθηματικά, οι μαθητές θα πρέπει να γνωρίζουν:
 - α) τα βασικά στοιχεία κύκλου (κέντρο, ακτίνα, χορδή, εφαπτομένη, τέμνουσα)
 - β) την έννοια του ορθογωνίου συστήματος αξόνων και των καρτεσιανών συντεταγμένων
 - γ) την έννοια της γραφικής απεικόνισης ενός σημείου (x,y) σε ένα σύστημα συντεταγμένων
 - δ) τα αντιστρόφως ανάλογα ποσά (αμφίδρομη μετάβαση από την γραφική τους παράσταση στην αλγεβρική τους ερμηνεία)
 - ε) το πυθαγόρειο θεώρημα.
- Ως προς την τεχνολογία, οι μαθητές θα πρέπει να έχουν αποκτήσει βασική εξοικείωση με τους Η/Υ και με τη χρήση του εκπαιδευτικού λογισμικού Geogebra (το δεύτερο έχει πρόσφατα επιτευχθεί με τη σχετική παρέμβαση στην τάξη «Γνωριμία με το πρόγραμμα Geogebra»).

ΧΡΟΝΟΣ ΥΛΟΠΟΙΗΣΗΣ

Για την εφαρμογή του σεναρίου εκτιμάται ότι απαιτούνται 2 διδακτικές ώρες.

ΧΩΡΟΣ ΥΛΟΠΟΙΗΣΗΣ

Το σενάριο διεξάγεται εξ’ ολοκλήρου στο Εργαστήριο Πληροφορικής (η επιλογή από τον διδάσκοντα να το υλοποιήσει στην αίθουσα διδασκαλίας με αποκλειστική χρήση βιντεοπροβολέα θα ακύρωνε το μεγαλύτερο μέρος της προστιθέμενης αξίας).

ΓΝΩΣΤΙΚΟΙ ΣΤΟΧΟΙ

Μετά την ολοκλήρωση όλων των δραστηριοτήτων του σεναρίου αναμένεται οι μαθητές να είναι σε θέση:

- α) Να παρατηρήσουν και να συμπεράνουν τη σταθερότητα της ποσότητας $PA \cdot PB$, καθώς και την ανεξαρτησία της τιμής της από τη θέση της σχετικής τέμνουσας. Ειδικότερα, στην περίπτωση όπου η μία τέμνουσα γίνεται εφαπτομένη του κύκλου, αναμένουμε από τους μαθητές να διαπιστώσουν τη οριακή σχέση $PI^2 = PA \cdot PB$.
- β) Να γνωρίσουν τη μαθηματική απόδειξη της παραπάνω σχέσης.
- γ) Να συσχετίσουν το πρόσημο της παράστασης $\delta^2 - R^2$ με τη θέση του σημείου P ως προς τον κύκλο (O,R).

ΚΟΙΝΩΝΙΚΗ ΕΝΟΡΧΗΣΤΡΩΣΗ ΤΗΣ ΤΑΞΗΣ

Ο μαθητής μπορεί να αποδώσει περισσότερο στο πλαίσιο της ομάδας ή κάτω από την υποστηρικτική καθοδήγηση ενός ενήλικα, παρ' ότι μόνος του (Vygotsky, 1978). Οι μαθητές, λοιπόν, (συν)εργάζονται σε ομάδες δύο ατόμων ανά Η/Υ και καθοδηγούμενοι από φύλλο εργασίας ασχολούνται με τις δραστηριότητες που τους έχουν ανατεθεί. Αναλαμβάνουν μέσα στην ομάδα ο καθένας διακριτούς ρόλους (ανάγνωση φύλλου εργασίας, πληκτρολόγηση, τήρηση σημειώσεων), ρόλοι οι οποίοι είναι δυνατόν να εναλλάσσονται, ώστε να επωφελούνται όλα τα μέλη της ομάδας. Συζητούν μεταξύ τους για το πρόβλημα, πειραματίζονται με τα διαθέσιμα υπολογιστικά εργαλεία του δυναμικού λογισμικού, συμβουλευόμενοι το σχολικό τους βιβλίο, κάνουν υποθέσεις, τις ελέγχουν και διατυπώνουν συμπεράσματα. Κάθε ομάδα εργάζεται ανεξάρτητα από τις άλλες. Οι μαθητές διατυπώνουν πρώτα την άποψή τους στο φύλλο εργασίας, μετά γίνεται συζήτηση επί όλων των απόψεων και στο τέλος γράφεται το αποτέλεσμα ή η λύση του προβλήματος στον πίνακα και σε κάθε φύλλο εργασίας χωριστά.

Ο καθηγητής αναλαμβάνει το ρόλο του βοηθού και του συντονιστή των προσπαθειών των μαθητών, διευκολύνοντας την επιχειρηματολογία, κάνοντας ανοιχτές ερωτήσεις κατάλληλες που ενθαρρύνουν τον πειραματισμό, αφήνοντας στους μαθητές την πρωτοβουλία των κινήσεων και περιθώρια για συζήτηση και ανταλλαγή απόψεων (σε αυτό βέβαια βοηθάει και ο μικρός σχετικά αριθμός μαθητών που πρόκειται να συμμετάσχει στη συγκεκριμένη δραστηριότητα). Έτσι, προκαλεί συζητήσεις με όλη την τάξη, όταν θεωρεί ότι τα συμπεράσματα κάποιων ομάδων θα είναι χρήσιμα για τη διερεύνηση και των υπολοίπων. Ακόμα κι αν τα ανοικτά ζητήματα δεν αντιμετωπιστούν, σίγουρα θα δώσουν αφορμή για επικοινωνία μεταξύ των μελών της τάξης. Ελέγχει τα συμπεράσματα των μαθητών και τους ενθαρρύνει να εφευρίσκουν και να δοκιμάζουν διάφορες στρατηγικές επίλυσης. Χρησιμοποιεί τα λάθη των μαθητών για αναστοχασμό και ανατροφοδότηση. Όταν απευθύνεται σε όλη την τάξη κάνει χρήση του πίνακα του εργαστηρίου (ή ενός βιντεοπροβολέα εάν υπάρχει). Ο κύριος ρόλος του ως συνερευνητή των μαθητών και εξυπηρετητή της γνώσης τους είναι ενεργός, καθόλη τη διάρκεια της διδακτικής διαδικασίας (Hoyles & Noss, 1992).

ΠΡΟΣΤΙΘΕΜΕΝΗ ΑΞΙΑ - ΚΑΙΝΟΤΟΜΙΑ

Ο κατακερματισμός της ύλης σε βιβλία, κεφάλαια και παραγράφους, δημιουργεί την αντίληψη ότι τα Μαθηματικά αποτελούν ένα σύνολο διακριτών και ασύνδετων εννοιών, οι οποίες εφαρμόζονται σε πολύ συγκεκριμένα προβλήματα και ασκήσεις. Μια καινοτομία του συγκεκριμένου σεναρίου είναι ότι δύο φαινομενικά ξένες περιοχές των μαθηματικών (τέμνουσες κύκλου και η συνάρτηση της υπερβολής) θα συσχετιστούν και θα συνδεθούν, μέσα από τις δυνατότητες που παρέχει η Τεχνολογία. Η όλη δραστηριότητα καταργεί τα στεγανά μεταξύ Άλγεβρας και Γεωμετρίας, αναδεικνύοντας ένα ενιαίο πλαίσιο μαθηματικής δράσης.

Στα παραδοσιακά αδρανή περιβάλλοντα, ο μαθητής μπορεί να πραγματοποιήσει ενέργειες, οι οποίες, όμως, δε συνδέονται με κάποια ελέγξιμα αποτελέσματα (=έλλειψη **διάδρασης**) και, επιπλέον, βρίσκονται σε απόσταση από τις μαθηματικές τους σημασίες (Noss, Healy, Hoyles, 1997). Η βασική προστιθέμενη αξία του σεναρίου είναι η επιδίωξη της αλλαγής της αντιμετώπισης των Μαθηματικών από τους μαθητές και της διαδικασίας προσέγγισής τους. Ξεφεύγουν από τον τυπικό μαθηματικό φορμαλισμό και τη διεξαγωγή τυπικών δραστηριοτήτων που (για τους μαθητές) στερούνται νοήματος (meaningless routines). Παύουν να είναι παθητικοί δέκτες μη αμφισβητήσιμων και

δασκαλοκεντρικά παρεχόμενων γνώσεων και πληροφοριών, μετέχοντας άμεσα στη μαθησιακή διαδικασία, μετατρέποντας την σε «δραστήρια» (Clements,1989). Αξιοποιείται η φυσική τάση του εφήβου για διερεύνηση και δημιουργικότητα, ενώ σταδιακά αντιλαμβάνονται, μέσω της Τεχνολογίας, ότι τα Μαθηματικά αποτελούν αντικείμενο διερεύνησης που θα καταλήξει σε επιστημονική τεκμηρίωση και όχι απλή παράθεση έτοιμων γνώσεων (Von Glasersfeld,1987).

Οι μαθητές του Εσπερινού Επαγγελματικού Λυκείου έχουν αρκετά γνωστικά κενά στα μαθήματα που διδάσκονται (γεγονός που ενισχύει τη χαμηλή αυτοεκτίμησή τους). Κατά συνέπεια το γεγονός ότι θα διδαχθούν στο Εργαστήριο Πληροφορικής ένα μάθημα γενικής παιδείας με χρήση ενός λογισμικού δυναμικής Γεωμετρίας αποτελεί από μόνο του μια καινοτομία.

Το συγκεκριμένο θέμα διδάσκεται κάθε σχολική χρονιά στην τάξη με τον παραδοσιακό τρόπο, ως απλή παρουσίαση των εννοιών από τον διδάσκοντα. Παρατηρήθηκαν προβλήματα κατανόησης ως προς τη σταθερότητα της ποσότητας PA·PB, λόγω της στατικής παρουσίας της. Δεν υπήρχε δυνατότητα περαιτέρω επεξεργασίας και διερεύνησης του συμπεράσματος, για διαφορετικές θέσεις της τέμνουσας PAB. Αυτή η περιορισμένη διδακτική εμβέλεια αίρεται με τη χρήση του λογισμικού, όπου περιορίζεται η ανάπτυξη μεγάλης αλγεβρικής μεθοδολογίας και η ενασχόληση του μαθητή με χρονοβόρα αφηρημένη μαθηματική διερεύνηση. Η συνεχής ψηφιακή **ανατροφοδότηση των ενεργειών του μαθητή**, με ιδιαίτερα μεγάλη ταχύτητα απόκρισης από το λογισμικό υψηλής αλληλεπίδρασης, έχει ως αποτέλεσμα τον **αναστοχασμό** και την αφαιρετική σκέψη του μαθητή για κάθε ενέργεια που κάνει.

Ειδικότερα, παρέχεται η δυνατότητα κατασκευής **πολλαπλών συνδεδεμένων αναπαραστάσεων** της ίδιας έννοιας και δυναμικού χειρισμού των μαθηματικών αντικειμένων, μέσω της άμεσης διαχείρισης τους και των **οπτικών μετασχηματισμών** τους. Οι μαθητές έχουν τη δυνατότητα να **πειραματιστούν**, διερευνώντας δυναμικά στο αλληλεπιδραστικό μαθησιακό περιβάλλον του λογισμικού, τη σχέση του σημείου P ως προς τον κύκλο, με ιδιαίτερη ακρίβεια στις μετρήσεις και τις κατασκευές τους, αυξομειώνοντας μεταβλητές, μετατοπίζοντας αντικείμενα και **ελέγχοντας** άμεσα τις **υποθέσεις** και τις δράσεις τους, έναντι της μετωπικής παραδοσιακής διδασκαλίας (πίνακας, τετράδιο). Ετσι, το λογισμικό είναι **επαναχρησιμοποιήσιμο**, δίνοντας τη δυνατότητα στους χρήστες πραγματοποίησης αυτοέλεγχου και αξιολόγησης των συμπερασμάτων τους (με την έμμεση βοήθεια-καθοδήγηση του διδάσκοντα) και κατάληξης σε ένα ορθότερο συμπέρασμα από το αρχικό.

Πλέον η διατύπωση του εποπτικού ορισμού της δύναμης σημείου ως προς κύκλο ($\Delta^P_{(O,R)} = \delta^2 - R^2$) προκύπτει με φυσικό τρόπο, ως λογικό αποτέλεσμα υπολογιστικών πειραματισμών, ενδιάμεσων οπτικοποιήσεων και ελέγχου υποθέσεων. Ετσι, η βασικότερη καινοτομία της χρήσης του λογισμικού δυναμικής γεωμετρίας, είναι η έννοια της **συμμεταβολής** μεταξύ της θέσης του σημείου P και της αντίστοιχης απεικόνισης του διατεταγμένου ζεύγους (PA,PB). Οι μαθητές εκφράζουν τη συμμεταβολή δύο ποσοτήτων ως εξάρτηση των τιμών της μιας από τις τιμές της άλλης και την περιγράφουν από το γράφημα αυτών. Αυτή η συνεχής και αμφίδρομη επεξεργασία είναι που εισάγει με **αλγεβρικό τρόπο** το περιεχόμενο της έκφρασης PA·PB=σταθερό. Κατά συνέπεια, ίδια έννοια εισάγεται με διαφορετικές αναπαραστάσεις, αναδεικνύοντας **πολλαπλές πτυχές της** και παρέχοντας το πλεονέκτημα της συνειδητοποίησης των κοινών ιδιοτήτων της (Janvier,1987), καθώς και της έκφρασης των ατομικών και ενδοατομικών διαφορών των μαθητών στη μάθηση (Dyfour,Janvier,Bednarz 1987).

Με την ομαδοσυνεργατική μάθηση επιτυγχάνεται η κοινωνικοποίηση κάθε μαθητή στην τάξη, καθώς και η εμπλοκή του στη διαδικασία λύσης, σταδιακής

ανακάλυψης και διαπίστωσης της γνώσης. Η εργασία σε ομάδες απαιτεί από τους συμμετέχοντες να αναπτύξουν δεξιότητες αυτοκαθοδηγούμενης μάθησης και αυτοεκτίμησης των ενεργειών τους. Καθίσταται έτσι δυνατή η ενεργή νοητική συμμετοχή του μαθητή στη μαθησιακή διαδικασία, ο οποίος παύει να είναι ένας παθητικός δέκτης πληροφοριών· αντίθετα ενεργοποιείται, ώστε να δομήσει ο ίδιος σταδιακά τη νέα του (λειτουργική) γνώση στο πνεύμα του κονστρουκτιβισμού.

Τέλος, ο εκπαιδευτικός που θα εντάξει στην διδασκαλία του το προτεινόμενο σενάριο θα έχει την ευκαιρία να δοκιμάσει σύγχρονες διδακτικές και παιδαγωγικές μεθόδους, οι οποίες θα συμβάλουν στη βελτίωση της στάσης του απέναντι στην καθημερινή σχολική διαδικασία.

ΥΛΟΠΟΙΗΣΗ ΤΟΥ ΣΕΝΑΡΙΟΥ-ΑΝΑΛΥΣΗ ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΩΝ

A) Προετοιμασία:

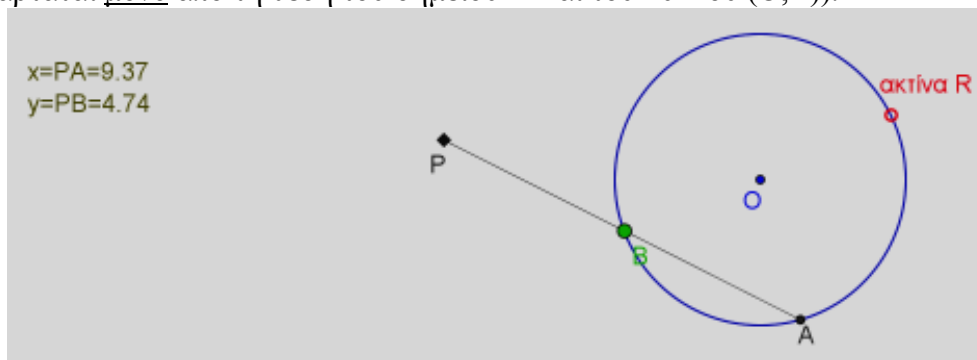
Ο καθηγητής έχει δημιουργήσει από πριν φύλλο εργασίας για τους μαθητές, καθώς και τα απαραίτητα δύο αρχεία του λογισμικού (τα οποία θα είναι συμβατά με τα φύλλα εργασίας). Θα πρέπει να έχει εγκατασταθεί από πριν σε κάθε υπολογιστή το λογισμικό και να έχει ενεργοποιηθεί, ούτως ώστε να αρχίσει το μάθημα χωρίς καθυστερήσεις.

B) Πορεία διεξαγωγής σεναρίου:

1^η Φάση Υλοποίησης (Τάξη-Εργαστήριο-Τάξη)

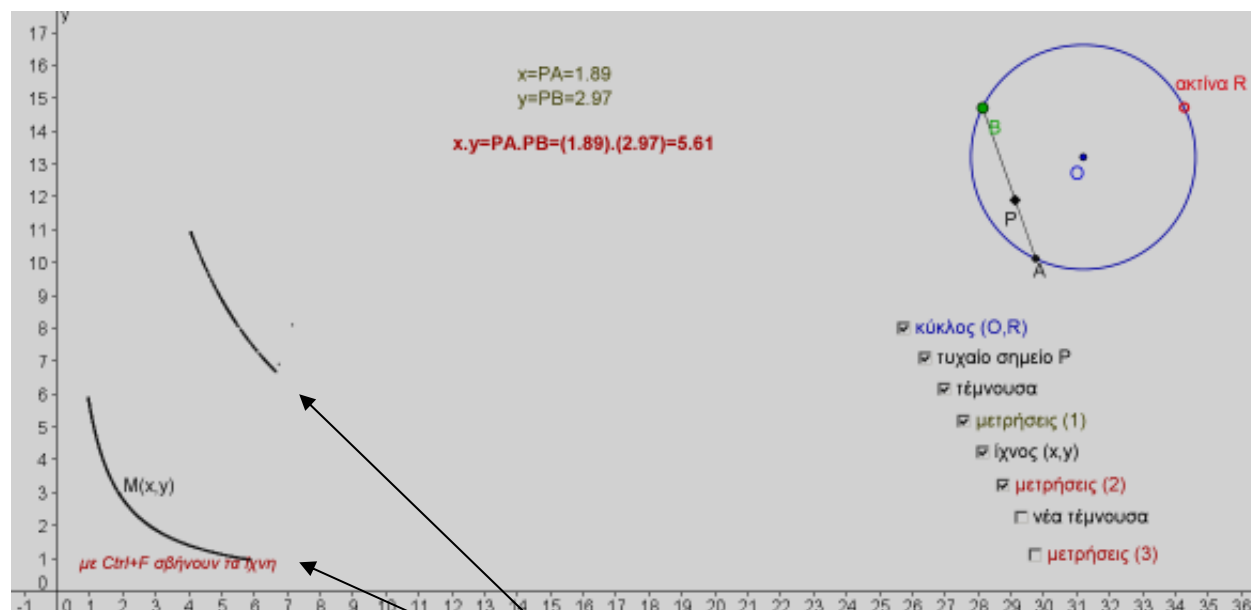
Οι μαθητές στο προηγούμενο μάθημα ασχολήθηκαν στην τάξη με επαναληπτικές έννοιες στα αντιστρόφως ανάλογα ποσά, προκειμένου να τα συνδέσουν με την τρέχουσα ύλη. Η συνέχεια γίνεται στο Εργαστήριο Πληροφορικής.

Συγκεκριμένα, **στα βήματα 1,2,3,4** του φύλλου εργασίας οι μαθητές εμφανίζουν το παρακάτω σχήμα. Στο αλληλεπιδραστικό περιβάλλον του λογισμικού, η ακτίνα R του κύκλου, καθώς και τα σημεία P,B, είναι άμεσα διαχειρίσιμα μέσω του συρσίματος (dragging), τροποποιώντας ανάλογα τη μορφή της τέμνουσας PBA και τις αντίστοιχες τιμές x,y, (διαπιστώνεται έτσι, όπως φαίνεται στα επόμενα στιγμιότυπα, ότι το γινόμενο x·y εξαρτάται μόνο από τη θέση του σημείου P και του κύκλου (O,R)).

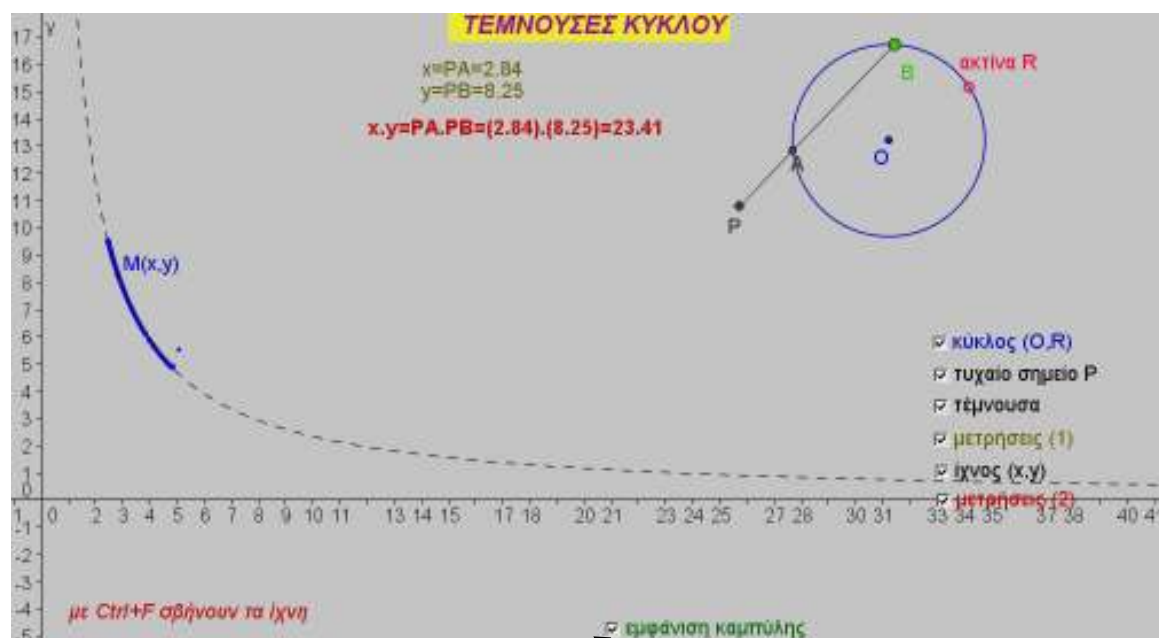


Γνωρίζουμε ότι το γινόμενο PA·PB (δηλ. το x·y) παραμένει σταθερό, καθώς το σημείο B αλλάζει θέση στον κύκλο. Οπότε οι αριθμοί PA και PB είναι αντιστρόφως ανάλογοι. Αυτό το παρατηρούν οι μαθητές στο **5^ο βήμα** της γραφικής απεικόνισης (συνεχώς και σε πραγματικό χρόνο) των σημείων (x,y). Άμεση συνέπεια αυτής της γραφικής παρατήρησης είναι το συμπέρασμα του **6^{ου} βήματος**: $PA \cdot PB = \text{σταθερό}$

Η υπόθεση αυτή ελέγχεται και υπολογιστικά με το **7ο βήμα**.

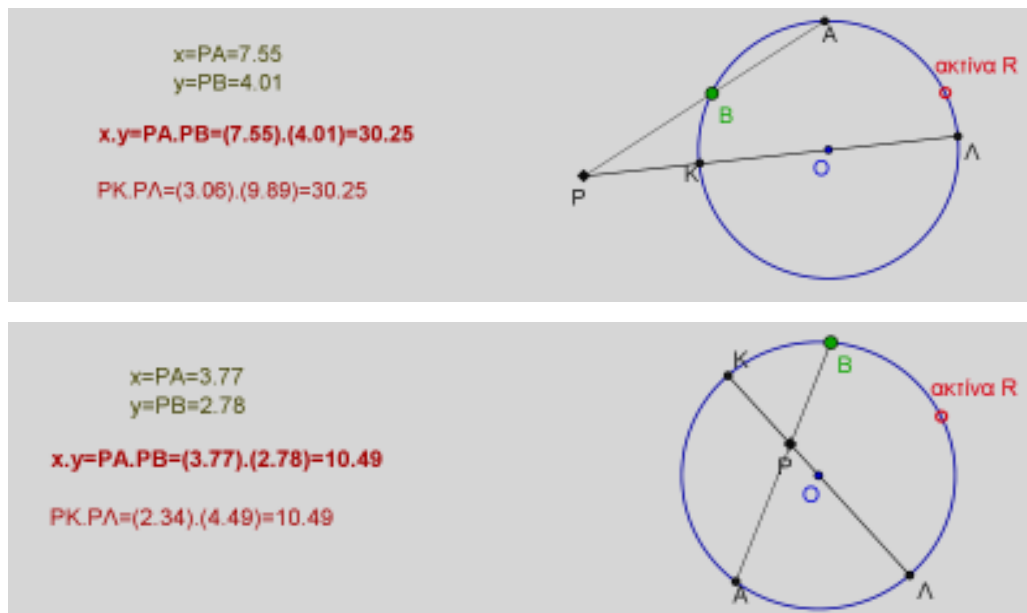


Εδώ φαίνεται το αποτέλεσμα της συμμεταβολής ως άμεση ανατροφοδότηση των ενεργειών κάθε μαθητή από το πρόγραμμα Geogebra. Η κανονικότητα του ζεύγους (x,y) απεικονίζεται γραφικά, όταν το σημείο P κινείται **εκτός** ή **εντός** του κύκλου (O,R).



Με τον σύνδεσμο «**εμφάνιση καμπύλης**» παρέχεται μια επιπλέον βοήθεια στον μαθητή προκειμένου να μπορέσει να αναγνωρίσει τον γεωμετρικό τόπο των σημείων (x,y). Αλλάζοντας τη θέση σου σημείου P, δημιουργείται μια απειρία γραφικών παραστάσεων που ανήκουν στην ίδια κλάση ισοδυναμίας, ως προς τη σταθερότητα του γινομένου PA.PB.

Στο βήμα 8 συμπεραίνεται με τη βοήθεια των προηγούμενων βημάτων του φύλλου εργασίας η σχέση $PA \cdot PB = PK \cdot PL$, η οποία διαπιστώνεται και υπολογιστικά, είτε το σημείο P είναι εκτός του κύκλου, είτε εντός αυτού.



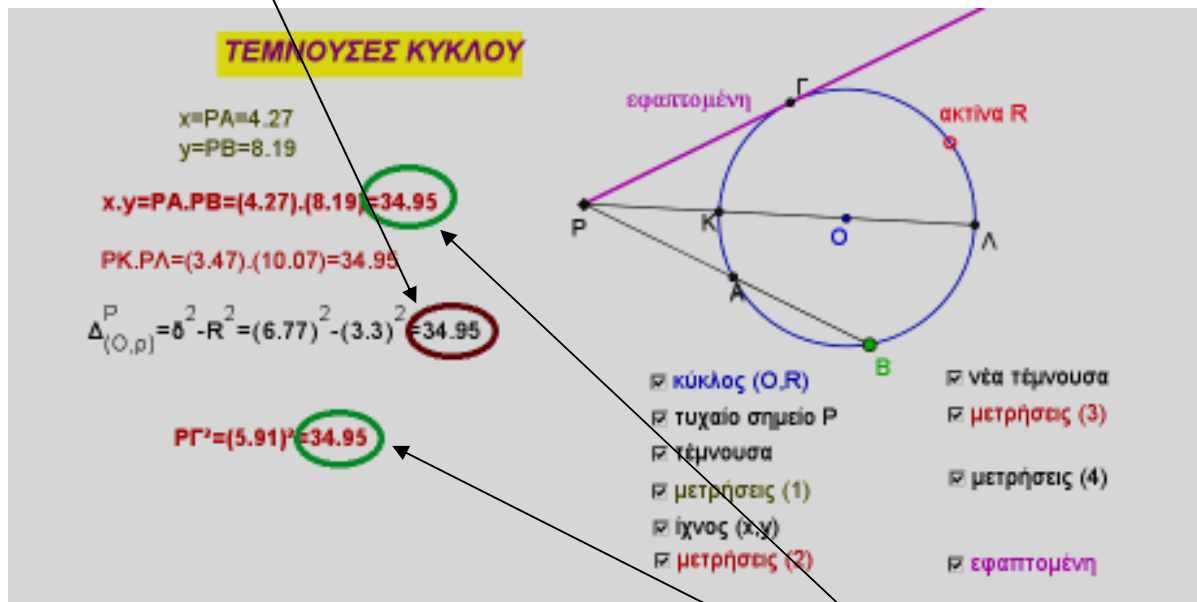
Ολοκληρώνοντας το βήμα 8, οι μαθητές έχουν περιγράψει με άτυπο, δηλαδή με **εμπειρικό** τρόπο, τη σχέση $PA \cdot PB = PK \cdot PL$. Στο σημείο αυτό θα ήταν χρήσιμο ο διδάσκων να υπογραμμίσει στους μαθητές ότι αυτή η άτυπη απόδειξη στηρίζεται μόνο σε μετρήσεις και αποτελεί μια μόνο πρώτη προσέγγιση της διαπιστούμενης σχέσης. Η σχετική μαθηματική απόδειξη της διαπίστωσης αυτής θα λάβει χώρα στο επόμενο μάθημα στην τάξη.

2^η Φάση Υλοποίησης (Εργαστήριο-Τάξη)

Στο βήμα 9 εισάγεται ο ορισμός της δύναμης σημείου ως προς κύκλο, ως φυσικό αποτέλεσμα του ελέγχου της σταθερότητας της ποσότητας $PA \cdot PB$.

Να σημειωθεί πως η συμπλήρωση των σχετικών κενών « $PK \cdot PL = (\dots - \dots)(\dots + \dots) = \dots^2 - \dots^2$ » που αναφέρονται στο φύλλο εργασίας θα πρέπει να συνοδεύεται για κάποιες ομάδες μαθητών από το παραπάνω στιγμιότυπο όπου το σημείο P βρίσκεται εκτός του κύκλου (O,R), ενώ για τις υπόλοιπες ομάδες μαθητών από εκείνο το στιγμιότυπο, όπου το σημείο P βρίσκεται εντός του κύκλου (O,R). Η εμπειρία αυτή αναμένεται να τροφοδοτήσει σχετική συζήτηση στην τάξη για τα αντίθετα αποτελέσματα $\delta^2 - R^2$, $R^2 - \delta^2$ των υπολογισμών των μαθητών, τα οποία μπορούν να ελεγχθούν ως προς την ορθότητα και την ερμηνεία τους (γνωστική σύγκρουση κατά Piaget).

Στο 10^ο βήμα ζητάμε από τους μαθητές να πειραματιστούν με το πρόσημο της παράστασης $\Delta^P_{(O,R)}$ για τις διάφορες θέσεις του P ως προς τον κύκλο, ενώ στο επόμενο βήμα 11 συνοψίζουν τα συμπεράσματά τους στο φύλλο εργασίας.



Στο τελευταίο βήμα 12 καλούνται οι μαθητές να αποδείξουν αναλυτικά στο φύλλο εργασίας τη σχέση $PG^2=PA \cdot PB$ (αφού πρώτα τη διαπιστώσουν υπολογιστικά για τις διάφορες θέσεις του P). Ετσι, αναμένεται η απόδειξη να είναι περισσότερο κατανοητή από τους μαθητές, ως συνέπεια της πρόσφατης αποκτηθείσας εμπειρίας από την ενασχόληση τους με το σύνολο των ιδιοτήτων της δύναμης σημείου ως προς κύκλο. Η σχετική μαθηματική απόδειξη της διαπίστωσης αυτής θα γίνει και στο επόμενο μάθημα στην τάξη για λόγους επανάληψης. Επίσης στην τάξη θα παρουσιαστούν από τους μαθητές και οι λύσεις των δύο ασκήσεων του φύλλου εργασίας τους.

Γ) Ενδεχόμενα προβλήματα κατά την υλοποίηση:

Αφού έχει εξασφαλιστεί εγκαίρως η πρόσβαση στο Εργαστήριο Πληροφορικής, ο εκπαιδευτικός πρέπει να είναι προετοιμασμένος με εναλλακτικές λύσεις για την περίπτωση απρόβλεπτων καταστάσεων. Αναμένεται οι μαθητές να μην έχουν δυσκολίες χειρισμού του λογισμικού, λόγω της παρέμβασης στην τάξη «Γνωριμία με το πρόγραμμα Geogebra» που έχει προηγηθεί.

Σε περίπτωση που κάποιος υπολογιστής τεθεί εκτός λειτουργίας, θα κάνουμε ανασύνταξη ομάδων. Σε περίπτωση που δε λειτουργεί μεγάλο μέρος του δικτύου υπολογιστών ή προκύψει διακοπή ηλεκτρικού ρεύματος, τα παιδιά θα δουλέψουν ομαδικά στα τετράδια τους και ο δάσκαλος στον πίνακα του Εργαστηρίου.

ΕΠΕΚΤΑΣΗ ΣΕΝΑΡΙΟΥ

Α) Όταν το σημείο P κινείται στο εσωτερικό του κύκλου, τα παιδιά μπορούν να διαπιστώσουν τη σχέση $PA \cdot PB = R^2 - \delta^2$, κάτι που στο σχολικό εγχειρίδιο δεν αποδεικνύεται! Αυτή ακριβώς η δυνατότητα αποδίδει μία ακόμα **προστιθέμενη αξία** στις δραστηριότητες του εν λόγω σεναρίου.

ΤΕΜΝΟΥΣΕΣ ΚΥΚΛΟΥ

$x = PA = 3.76$
 $y = PB = 2.12$

$x \cdot y = PA \cdot PB = (3.76) \cdot (2.12) = 7.99$

$PK \cdot PL = (1.6) \cdot (5) = 7.99$

$\Delta_{(O,P)}^P = \delta^2 - R^2 = (1.7)^2 - (3.3)^2 = -7.99$

- ☒ κύκλος (O,R)
- ☒ τυχαίο σημείο P
- ☒ τέμνουσα
- ☒ μετρήσεις (1)
- ☒ ίχνος (x,y)
- ☒ μετρήσεις (2)

- ☒ νέα τέμνουσα
- ☒ μετρήσεις (3)
- ☒ μετρήσεις (4)
- ☐ εφαπτομένη

Ετσι, λοιπόν, το παρόν σενάριο αποτελεί μία επέκταση ως προς την παραπάνω περίπτωση, με αποτέλεσμα οι μαθητές να είναι από τώρα ενημερωμένοι σε μια πιθανή μελλοντική ενσωμάτωση στο Αναλυτικό Πρόγραμμα της απόδειξης αυτής.

Β) Οι μαθητές μετά από αυτή την εμπειρία, θα έχουν τη δυνατότητα να εφαρμόσουν τη συγκεκριμένη μέθοδο και σε άλλα παρόμοια προβλήματα. Για παράδειγμα, η άσκηση 2 του φύλλου εργασίας συνοδεύεται από το σχετικό αρχείο Geogebra με τίτλο «*αρχείο άσκησης 2 για το σπίτι*», με τη χρήση του οποίου αναμένεται να διαπιστώσουν σε περιβάλλον δυναμικής διεπιφάνειας την ισότητα των εφαπτόμενων τμημάτων MN και MH.

ΑΣΚΗΣΗ 2 ΦΥΛΛΟΥ ΕΡΓΑΣΙΑΣ

- ☒ εμφάνιση κύκλων
- ☒ ακτίνα 1ου κύκλου
- ☒ ακτίνα 2ου κύκλου
- ☒ εμφάνιση κοινής χορδής AB
- ☒ εμφάνιση σημείου M
- ☒ εμφάνιση εφαπτομένων
- ☒ εμφάνιση μετρήσεων

Μετακινήστε το σημείο M.
Τι παρατηρείτε για τις αποστάσεις MN και MH;

Μπορείτε να το δικαιολογήσετε;

Γ) Με κατάλληλες τροποποιήσεις-απλοποιήσεις στα φύλλα εργασίας (μεγαλύτερη γραμματοσειρά, προσθήκη εικόνων χρωμάτων και σχημάτων) το σενάριο μπορεί να δοθεί και σε μαθητές με **μαθησιακές δυσκολίες**. Η διδασκαλία προσαρμόζεται στις ειδικές εκπαιδευτικές ανάγκες των μαθητών αυτών. Ο ρυθμός εργασίας τους είναι συμβατός με τις ικανότητες τους και εκφράζεται μέσα από ευκολοποιημένους χρηστικές οδηγίες που τους παρέχονται.

Στον αντίποδα αυτής της αντιμετώπισης, τα φύλλα εργασίας μπορούν να προσαρμοστούν και σε μαθητές με **χαρισματικότητα**, παρέχοντας τους τη δυνατότητα για μεγαλύτερη αυτενέργεια και διάδραση με το λογισμικό. Για παράδειγμα, ο σύνδεσμος «εμφάνιση καμπύλης» μπορεί να παραληφθεί, οπότε ενισχύεται ο βαθμός αναστοχασμού των χαρισματικών μαθητών, προκειμένου να εικάσουν το αναλλοίωτο της παράστασης PA·PB.

Δ) Η εκπόνηση του σεναρίου μπορεί να πραγματοποιηθεί εναλλακτικά με τα λογισμικά δυναμικής γεωμετρίας «Cabri-Geometry II» και «The Geometer's Sketchpad». Τα προγράμματα αυτά υποστηρίζουν τις αντίστοιχες εντολές δημιουργίας των αρχείων του εν λόγω σεναρίου. Τα τελικά γραφικά περιβάλλοντα είναι διαφορετικά, αλλά ισοδύναμα ως προς τις δυνατότητές τους. Έτσι, το σενάριο εμπεριέχει μια ευελιξία ψηφιακής παρουσίασης, ανάλογα με το ποιο συνοδευτικό πρόγραμμα είναι κάθε φορά περισσότερο προσιτό στους μαθητές, στον εκπαιδευτικό και στη διδασκόμενη ύλη.

Ε) Σε περίπτωση που διατίθεται διαδραστικός πίνακας, ο εκπαιδευτικός μπορεί να καλέσει ομάδες μαθητών να παρουσιάσουν την εργασία τους ενώπιον όλης της τάξης και, έτσι, να εμπλακούν τα παιδιά σε επιπλέον συζητήσεις και διαδικασίες συλλογικής διερεύνησης σχετικά με τους διαφορετικούς τρόπους αντιμετώπισης των ζητημάτων του φύλλου εργασίας (π.χ. οι διαφορετικές κατά περίπτωση μορφές $\delta^2 \cdot R^2$, $R^2 \cdot \delta^2$ του γινομένου PA·PB).

ΑΞΙΟΛΟΓΗΣΗ ΤΟΥ ΣΕΝΑΡΙΟΥ

Σε κάθε σενάριο διδασκαλίας είναι απαραίτητος ο έλεγχος από τον εκπαιδευτικό του βαθμού επίτευξης των επιδιωκόμενων στόχων, αλλά και ο προσδιορισμός των λόγων για τους οποίους ίσως κάποιοι απ' αυτούς δεν επιτεύχθηκαν. Η δομή του σεναρίου, η σειρά των δραστηριοτήτων και τα ερωτήματα που τίθενται στους μαθητές αποτελούν αντικείμενο αξιολόγησης από τον ίδιο τον διδάσκοντα. Για παράδειγμα, πόσο εύκολο ήταν για τους μαθητές να προσδιορίσουν το είδος της συμμεταβολής των δύο μεταβλητών PA, PB (γραμμική, εκθετική, λογαριθμική κτλ.) και σε τί βαθμό μπόρεσαν να την ερμηνεύσουν αυτή τους τη διαπίστωση; Μπόρεσαν οι μαθητές να συνδέσουν περιοχές των Μαθηματικών, οι οποίες όχι μόνο βρίσκονται σε διαφορετικές παραγράφους, αλλά και σε βιβλία διαφορετικών γνωστικών αντικειμένων (Αλγεβρα+Γεωμετρία). Ο διδάσκων πρέπει να κρατάει σημειώσεις για τις δυσκολίες υλοποίησης συγκεκριμένων δραστηριοτήτων, ώστε να είναι σε θέση στο μέλλον, ανάλογα με το διαθέσιμο χρόνο ή το γνωστικό επίπεδο συγκεκριμένων μαθητών, να προβεί σε αλλαγές στη ροή εφαρμογής των δραστηριοτήτων, στη διατύπωσή τους ή ακόμα και στα εκάστοτε ζητούμενα.

Υπάρχουν δύο στάδια αξιολόγησης της όλης δραστηριότητας. Το πρώτο στάδιο πραγματοποιείται ενώ διεξάγεται το σενάριο στο Εργαστήριο Πληροφορικής, ενώ το δεύτερο λαμβάνει χώρα στο επόμενο μάθημα στην αίθουσα διδασκαλίας.

1^ο Στάδιο Αξιολόγησης (στο Εργαστήριο Πληροφορικής)

Ο διδακτικός σχεδιασμός του σεναρίου έγινε με κυρίαρχο στόχο την πρόκληση του ενδιαφέροντος των μαθητών, την ενεργοποίησή τους και την εμπλοκή τους σε δραστηριότητες, οι οποίες θα συμβάλλουν στην επίτευξη των επιδιωκόμενων μαθησιακών στόχων. Κατά την υλοποίηση του σεναρίου, ο διδάσκων μπορεί να ελέγξει σε τι βαθμό ικανοποιούνται οι επιδιωκόμενοι στόχοι και για ποιους μαθητές, ή ακόμα αν ήταν εφικτοί ή πολύ βατοί για την τάξη στην οποία έγινε η εφαρμογή.

Στην περίπτωση μας, στην αρχή της διαδικασίας η νέα προσέγγιση της ύλης με τη χρήση Η/Υ παραξένεψε τους μαθητές και ίσως κάποιους τους ξένισε (παρόλο που έχουν γίνει στο συγκεκριμένο τμήμα ήδη τρεις παρεμβάσεις). Άλλωστε πάντα υπάρχουν μαθητές (και όχι μόνο!) που δεν θέλουν να ξεφύγουν από το πλαίσιο της παραδοσιακής διδασκαλίας. Όμως, από τα συμπληρωμένα φύλλα εργασίας πρόκυψε ότι το επιδιωκόμενο αποτέλεσμα ήρθε σταδιακά και δικαίωσε τις προσδοκίες του δασκάλου. Οι περισσότεροι μαθητές αποσαφήνισαν (μετά και την ενεργοποίηση του συνδέσμου «εμφάνιση καμπύλης») τη σταθερότητα της ποσότητας $PA \cdot PB$, που είναι και η κεντρική ιδέα της ενότητας, ενώ παρόλο το σχετικά χαμηλό γνωστικό τους επίπεδο ανταποκρίθηκαν ικανοποιητικά στο χρυσό κανόνα της αυτενέργειας: «Να μην προσφέρω έτοιμο κάτι το οποίο μπορούν από μόνοι τους καταλλήλως οδηγούμενοι να το βρουν». Στην πορεία ήταν σε όλους αρεστό το γεγονός ότι έκαναν Μαθηματικά εκτός της αίθουσας διδασκαλίας και μπροστά σε Η/Υ. Πλέον ήταν φανερό το αυξημένο ενδιαφέρον όλων, θέτοντας οι ίδιοι οι μαθητές ερωτήσεις και πέραν αυτών του φύλλου εργασίας (όπως για παράδειγμα *τι θα συνέβαινε αν αντί για κύκλο είχαμε τετράγωνο!*).

Εντύπωση επίσης προκάλεσε το γεγονός ότι ενεπλάκησαν όλα τα παιδιά στην απόδειξη της σχέσης $PI^2 = PA \cdot PB$ στο τέλος του φύλλου εργασίας. Σε αυτό συνέβαλε η όλη αισθητηριακή αντίληψη που είχαν αποκτήσει οι μαθητές για το ποιοτικό περιεχόμενο του γινομένου $PA \cdot PB$, με αποτέλεσμα να αναπτύξουν το αίσθημα της ανάγκης για αιτιολόγηση της σχέσης αυτής, κάνοντας τη μαθηματικής της απόδειξη περισσότερο ελκυστική.

2^ο Στάδιο Αξιολόγησης (εκ των υστέρων στην Τάξη)

Από τον έλεγχο των ασκήσεων για το σπίτι, αλλά και από ασκήσεις εμπέδωσης του σχολικού βιβλίου που έγιναν στην τάξη, διαπιστώθηκε ικανοποιητικός βαθμός ανάκλησης των πρόσφατων γνώσεων από τους μαθητές. Ήταν σε θέση να κάνουν περιγραφικές αποδείξεις (απλών) ασκήσεων στις τέμνουσες κύκλου (οι ασκήσεις εμπέδωσης 1 και 4 σελ. 203 του σχ. βιβλίου αντιμετωπίστηκαν απολύτως ικανοποιητικά). Όσα θεωρήματα δεν είχαν αποδειχθεί με μαθηματικούς συλλογισμούς στο σενάριο παρουσιάστηκαν ολοκληρωμένα στην τάξη, αφενός για να υποστηριχθεί το τρέχον αναλυτικό πρόγραμμα και αφετέρου για να δημιουργηθεί κατάλληλη θεωρητική δομημένη υποδομή (κάτι που με τη χρήση των ΤΠΕ δεν επιτυγχάνεται πάντα). Αυτή ακριβώς η σπειροειδής μορφή παρουσίασης της ύλης είχε στο τελικό της στάδιο συμμετόχους τους μαθητές, αφού η εμπειρία τους στο Εργαστήριο Πληροφορικής τους έκανε να γνωρίζουν εκ των προτέρων την κεντρική ιδέα της διδασκόμενης ενότητας.

Σε μια ενδεχόμενη επανάληψη του σεναρίου θα μπορούσε (στο πλαίσιο της ανατροφοδότησης του) να αντικατασταθεί η απόδειξη του 9^{ου} βήματος του φύλλου εργασίας με την άσκηση 2 που δόθηκε για το σπίτι, προκειμένου να δουν σε πραγματικό χρόνο οι μαθητές ότι η χρήση του λογισμικού δυναμικής Γεωμετρίας οδηγεί σε εικασίες - εκτός από το πεδίο της θεωρίας- και σε επιπλέον θέματα ασκήσεων. Επίσης, στο ίδιο πλαίσιο, μια εναλλακτική παρουσίαση του σεναρίου θα ήταν να είχε

προηγηθεί αυτού η διδασκαλία στην τάξη της σχετικής ενότητας. Έτσι οι μαθητές θα μπορούσαν να επεξεργαστούν με δυναμικό τρόπο περισσότερες ασκήσεις κατά την διάρκεια υλοποίησης του σεναρίου (κάτι που ήταν άλλωστε επιθυμία στο τέλος των ιδίων των μαθητών).

Διαχείριση του λάθους...

Είδαμε, λοιπόν, ότι η βασική ιδέα του σεναρίου ήταν οι αλληλοσυνδεόμενες αναπαραστάσεις Άλγεβρας – Γεωμετρίας της δύναμης σημείου ως προς κύκλο. Οι μαθητές πίστευαν ότι έννοιες από τις διαφορετικές γνωστικές περιοχές Άλγεβρας και Γεωμετρίας ήταν «ξένες» μεταξύ τους. Το παρόν σενάριο φιλοδοξεί να αποτελέσει αφορμή για περαιτέρω διαχείριση ενός τέτοιου **λάθους** με παρουσίαση σχετικών αντιπαραδειγμάτων στους μαθητές, όπως:

- α) από όλα τα ορθογώνια με σταθερή περίμετρο, ποιο έχει το μεγαλύτερο εμβαδόν;
- β) συμμεταβολές στο εμβαδόν ισοσκελούς τριγώνου, όταν μεταβάλλεται η βάση του.

Αυτά βέβαια δεν εντάσσονται στο σενάριο μας, αλλά σε ένα πλαίσιο επιπλέον δραστηριοτήτων με χρήση λογισμικών δυναμικής Γεωμετρίας. Έτσι, το λάθος, που με το σενάριο έγινε αντιληπτό, μπορεί να χρησιμοποιηθεί ως μια ευκαιρία για επιπλέον μάθηση. Άλλωστε, από τη στιγμή που γίνεται σαφές ότι οι μαθητές θα πρέπει να δραστηριοποιηθούν ως ενεργοί εξερευνητές των Μαθηματικών και δεδομένης της λειτουργίας του λάθους στην εξέλιξη της επιστήμης, το λάθος του μαθητή όχι μόνο δεν θεωρείται κατακριτέο αλλά είναι απαραίτητο συστατικό της όλης διαδικασίας.

Παρατηρήσεις:

α) *Πριν την εφαρμογή της δραστηριότητας μέσα στην τάξη, θα πρέπει ο διδάσκων να την υλοποιήσει με το λογισμικό βήμα προς βήμα, βάζοντας τον εαυτό του στο ρόλο του μαθητή που έχει μπροστά του το αντίστοιχο φύλλο εργασίας. Με τον τρόπο αυτό μπορεί να αξιολογήσει τον εκτιμώμενο χρόνο διεξαγωγής του σεναρίου και τις παρεχόμενες διδακτικές οδηγίες, να τις τροποποιήσει και να τις ειδικεύσει ανάλογα με το επίπεδο και τις δυνατότητες των μαθητών της τάξης του.*

β) *Θα πρέπει να καταστεί σαφές στους μαθητές ότι η όλη διδακτική παρέμβαση του σεναρίου δεν αποτελεί αυτόνομη αποδεικτική μέθοδο των μαθηματικών εννοιών που περιέχει, αλλά εναλλακτική ευκαιρία για δημιουργία εικασιών, πειραματισμών, ελέγχου υποθέσεων και αφαιρετικής σκέψης. Η όλη ψηφιακή παρουσίαση της δύναμης σημείου ως προς κύκλο είναι συμπληρωματική της διδασκαλίας στην τάξη και δεν αντικαθιστά το στοιχείο της κλασικής παραδοσιακής απόδειξης.*

ΕΝΔΕΙΚΤΙΚΟ ΦΥΛΛΟ ΕΡΓΑΣΙΑΣ

ΟΝΟΜΑΤΕΠΩΝΥΜΟ:.....

ΤΑΞΗ:.....

ΕΝΟΤΗΤΑ: Τέμνουσες κύκλου

ΤΜΗΜΑ:.....

ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΑ Ι

1. Ενεργοποιήστε την εντολή «κύκλος (O,R)». Εμφανίζεται ένας κύκλος του οποίου μπορείτε να μετακινήσετε το κέντρο του, **O**, ή να μεταβάλετε την ακτίνα του, **R**.

2. Επιλέγοντας την εντολή «τυχαίο σημείο», εμφανίζεται σημείο **P** εξωτερικό του κύκλου, του οποίου επίσης μπορείτε να αλλάξετε τη θέση.

3. Ενεργοποιώντας την εντολή «τέμνουσα» εμφανίζεται η τέμνουσα **PBA** του κύκλου. Η θέση της τέμνουσας αλλάζει μετακινώντας το σημείο **B**.

4. Ας μετρήσουμε τις αποστάσεις $x=PA$, $y=PB$ του σχήματος ενεργοποιώντας την επιλογή «μετρήσεις (1)». Μετακινώντας το σημείο **B** βλέπουμε τις αντίστοιχες μετρήσεις.

5. Επιλέγοντας τον σύνδεσμο «ίχνος (x,y)» εμφανίζεται το σημείο **M(x,y)** στο καρτεσιανό επίπεδο. Αλλάζοντας θέση στο σημείο **B** βλέπουμε τις διάφορες θέσεις του σημείου **M**. (πατώντας *Ctrl+F* σβήνουν τα ίχνη).

Ποιας συνάρτησης τη γραφική παράσταση σας θυμίζει η παραπάνω εικόνα;

.....

Αν δεν μπορέσατε να απαντήσετε, δοκιμάστε να τοποθετήσετε το σημείο **P** στο εσωτερικό του κύκλου και να μετακινήσετε ξανά το σημείο **M**.

Ποιας συνάρτησης τη γραφική παράσταση σας θυμίζει τώρα;

.....

!!(αν και πάλι δεν τα καταφέρατε, ενεργοποιήστε τον σύνδεσμο «εμφάνιση καμπύλης») !!

6. Επειδή τα σημεία $M(x,y)$ βρίσκονται σε μια....., προκύπτει ότι οι τιμές x, y είναι.....ποσά, δηλαδή:

το γινόμενο $PA \cdot PB$ παραμένει πάντα.....

7. Ας επαληθεύουμε το προηγούμενο συμπέρασμα σας επιλέγοντας το σύνδεσμο «μετρήσεις (2)» και μετακινώντας το σημείο B .

ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΑ II

8. Κάνοντας κλικ στην εντολή «νέα τέμνουσα» εμφανίζεται η τέμνουσα $PK\Lambda$ η οποία διέρχεται απότου κύκλου. Τι παρατηρείτε για τα γινόμενα $PA \cdot PB$ και $PK \cdot P\Lambda$;
Επαληθεύστε τη διαπίστωσή σας κάνοντας κλικ στο κουτί «μετρήσεις (3)» και μετακινώντας το σημείο P .

9. Ας ονομάσουμε $\delta = PO$ και $R = KO = OA$.

Συμπληρώστε τα παρακάτω κενά με τα γράμματα δ, R :

$$PK \cdot P\Lambda = (\dots - \dots)(\dots + \dots) = \dots^2 - \dots^2$$

ΟΡΙΣΜΟΣ

Η διαφορά $\delta^2 - R^2$ λέγεται δύναμη του σημείου P ως προς τον κύκλο (O,R) και συμβολίζεται ως εξής

$$\Delta_{(O,R)}^P = \delta^2 - R^2$$

ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΑ III

10. Κάντε κλικ στο σύνδεσμο «μετρήσεις (4)». Μετακινήστε το σημείο P , έτσι ώστε να βρεθεί εκτός του κύκλου ή εντός ή πάνω στον κύκλο. Τι παρατηρείτε για την τιμή $\delta^2 - R^2$, δηλαδή για τη δύναμη του σημείου;

.....
.....

ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑ

11. Ας συνοψίσουμε και ας διατυπώσουμε τα συμπεράσματά μας για κάθε θέση του σημείου **P** ως προς τον κύκλο.

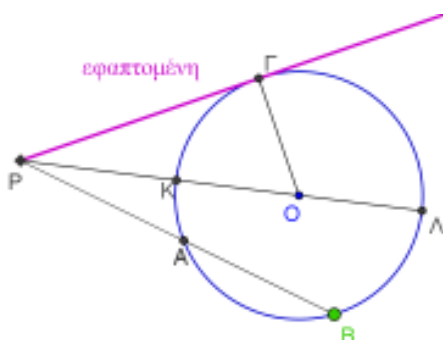
- ✓ **P** εξωτερικό σημείο του κύκλου (**O,R**) $\Leftrightarrow \Delta^P_{(O,R)} \dots\dots\dots$
- ✓ **P** εσωτερικό σημείο του κύκλου (**O,R**) $\Leftrightarrow \Delta^P_{(O,R)} \dots\dots\dots$
- ✓ **P** είναι σημείο του κύκλου (**O,R**) $\Leftrightarrow \Delta^P_{(O,R)} \dots\dots\dots$

ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΑ IV

12. Κάντε κλικ στο σύνδεσμο «εφαπτομένη». Τι παρατηρείτε για τα αποτελέσματα \mathbf{PG}^2 και $\mathbf{PA \cdot PB}$;

.....

Ποια η μαθηματική απόδειξη αυτού;



.....

.....

.....

.....

.....

.....

Ασκήσεις για το σπίτι:

1) Ερώτηση Κατανόησης 1 σελ. 203 σχ. βιβλίου

2) Θεωρούμε δύο τεμνόμενους κύκλους, την κοινή τους χορδή AB και ένα τυχαίο σημείο M στην προέκταση της AB. Από το M φέρνουμε τις εφαπτομένες MN και MH. Αποδείξτε ότι MN=MH.

Για την άσκηση 2 ανοίξτε το αρχείο Geogebra με τίτλο «αρχείο άσκησης 2 για το σπίτι»

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

- 1] *Επιμορφωτικό υλικό για την επιμόρφωση των εκπαιδευτικών στα ΚΣΕ* (Γενικό & Ειδικό Μέρος).
 - 2] *Ευκλείδεια Γεωμετρία Α΄ και Β΄ Ενιαίου Λυκείου* (Βιβλίο μαθητή) .
 - 3] *Κλαουδάτος Νικόλαος.* Σημειώσεις του μαθήματος «Διδακτική των Μαθηματικών», Μεταπτυχιακό Τμήμα Διδακτικής και Μεθοδολογίας των Μαθηματικών Εθνικού και Καποδιστριακού Πανεπιστημίου Αθηνών.
 - 4] *Μητρογιαννοπούλου Αγγελική.* *Πραγματικές διδασκαλίες Μαθηματικών με τη βοήθεια Η/Υ για το Γυμνάσιο* (Βιβλίο καθηγητή), εκδ. Κλειδάριθμος, Αθήνα 2004.
 - 5] *Τζίμας Βαγγέλης.* *Διδακτικά Σενάρια με τη Συνδρομή των ΤΠΕ* .
- 1^ο Εκπαιδευτικό Συνέδριο «Ενταξη και Χρήση των ΤΠΕ στην Εκπαιδευτική Διαδικασία» (Βόλος, Απρίλιος 2009)

