Επαναληπτικό Διαγώνισμα 2014

Διάρκεια: 3 ώρες

ΘΕΜΑ Α

Α1. Έστω μια συνάρτηση f παραγωγίσιμη σ' ένα διάστημα (α,β), με εξαίρεση ίσως ένα σημείο του x_0, στο οποίο όμως η f είναι συνεχής. Να αποδείξετε ότι:

i) Αν $f'(x)>0$ στο (α,x_0) και $f'(x)<0$ στο (x_0,β), τότε το $f(x_0)$ είναι τοπικό μέγιστο της f.

ii) Αν $f'(x)<0$ στο (α,x_0) και $f'(x)>0$ στο (x_0,β), τότε το $f(x_0)$ είναι τοπικό ελάχιστο της f.

10 μονάδες

Α2. Πότε δύο συναρτήσεις f και g είναι ίσες ;

5 μονάδες

Α3. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας την ένδειξη Σωστό ή Λάθος δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση.

α) Αν υπάρχουν στη γραφική παράσταση μιας συνάρτηση f σημεία με ίδια τεταγμένη τότε η f είναι «1-1»

β) $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=\ell \Leftrightarrow \lim\limits_{h\to 0} f(x_0+h)=\ell$

γ) Αν υπάρχει $x_0 \in (\alpha, \beta)$ με $f''(x_0)>0$,όπου α, β διαδοχικές ρίζες της f'' τότε η είναι κυρτή στο [α,β] αν η f'' είναι συνεχής στο [α,β].

δ) Η f είναι παραγωγίσιμη σε ένα κλειστό διάστημα [α ,β] όταν είναι συνεχής στο (α ,β) και ισχύει $\lim\limits_{x\to\alpha^+}\dfrac{f(x)-f(\alpha)}{x-\alpha}\in R$ και $\lim\limits_{x\to\beta^-}\dfrac{f(x)-f(\beta)}{x-\beta}\in \mathbb{R}$

ε) αν η f είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα Δ τότε η παράγωγός της είναι πάντοτε θετική στο εσωτερικό του Δ.

10 μονάδες

ΘΕΜΑ Β

Δίνονται οι μιγαδικοί z,w,v για τους οποίους ισχύει ότι $|(1-i)z-2|=|(1+i)z-2-8i|$ (1) ,$|\bar{w}-2+2i|=|-w+4+3i|$ (2) και $v^2+\bar{v}^2+2|v|^2=2i(\bar{v}-v)$ (3)

Β1.Να αποδείξετε ότι εικόνες των μιγαδικών z,w κινούνται σε 2 παράλληλες ευθείες τις οποίες και να βρείτε.

7 μονάδες

Β2.Να βρεθεί ο γεωμετρικός τόπος των εικόνων του v

6 μονάδες

Β3. Να βρεθεί η ελάχιστη απόσταση των εικόνων Μ,Ν των μιγαδικών z,w.

6 μονάδες

Β4. Να βρείτε (αν υπάρχουν) μιγαδικοί z,v για τους οποίους ισχύει z=v

6 μονάδες

ΘΕΜΑ Γ

Δίνεται η συνάρτηση $f: (0,+\infty) \to R$, δύο φορές παραγωγίσιμη στο R, με $f'(1)=f(1)=0$, η οποία ικανοποιεί τη σχέση: $x^2\left(\left(f'(x)\right)^2+f''(x)\right)=e^{-f(x)}$ για κάθε x >0.

Γ 1. Να αποδείξετε ότι: $f(x)=\ln(x-\ln x)\quad x\in R$

Μονάδες 8

Γ 2. Να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα.

Μονάδες 6

Γ 3. Να αποδείξετε ότι η γραφική παράσταση της f δεν βρίσκεται κάτω από τον χ΄χ

Μονάδες 6

Γ 4. Να βρεθεί το $\int_1^e e^{f(x)}dx$

Μονάδες 5

ΘΕΜΑ Δ

Δίνεται η συνάρτηση $G(x)=x\int_0^1 f(xt)dt$, όπου f συνάρτηση 3 φορές παραγωγίσιμη και τέτοια, ώστε:

- $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{G(x)}{x^2}=1$
- $G''(0) > G'(1) - G'(0)$ και
- $G^{(3)}(x) \neq 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$

Δ1. Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f στο σημείο της με τετμημένη $x_0=0$.

Μονάδες 5

Δ2.Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f είναι κοίλη στο $\mathbb{R}$.

Μονάδες 5

Αν επιπλέον $\alpha(x)=G'(x)-2x$, $x\in\mathbb{R}$ τότε:

Δ3. Να αποδείξετε ότι η α παρουσιάζει ολικό μέγιστο και να βρείτε το :

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x}{x^2+1}\alpha\left(\frac{1}{x}\right)\cdot\sigma\upsilon\nu x$$

Μονάδες 5

Δ4. Να αποδείξετε ότι G(1)<1

Μονάδες 5

Δ5. Αν το εμβαδόν του χωρίου Ω που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της συνάρτησης α, τον άξονα χ΄χ και τις ευθείες με εξισώσεις x=0 και x=2 είναι Ε(Ω)=2 τότε να αποδείξετε ότι υπάρχει ξ∈ (1, 2) τέτοιο, ώστε $G(\xi) = 1$

Μονάδες 5