ΘΕΜΑΤΑ ΕΞΕΤΑΣΕΩΝ
ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ - ΑΝΙΣΩΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ 1^{o}

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \lambda x^2 - 2(\lambda - 1)x + \lambda - 3$ με $\lambda \neq 0$

Γ1. Να λυθεί η εξίσωση $f(x) = 0$ για λ = -1

Γ2. Για λ=3 , να λυθεί η ανίσωση $f(x) > 0$

Γ3. Να αποδείξετε ότι στην εξίσωση $f(x) = 0$, η διακρίνουσα είναι η Δ= 4λ+4

Γ4. Να βρείτε για ποια τιμή του λ ισχύει ότι $x_1 + x_2 \geq x_1 \cdot x_2$

ΘΕΜΑ 2^{o}

Έστω η εξίσωση $x^2+\beta x+6=0$

α) Αν το 2 είναι ρίζα της εξίσωσης, να βρεθεί το β.

β) Για β=-5
- **i)** Να λύσετε την εξίσωση $x^2+\beta x+6=0$.
- **ii)** Να παραγοντοποιήσετε το τριώνυμο $x^2+\beta x+6$.
- **iii)** Να λύσετε την ανίσωση $x^2+\beta x+6 \leq 0$

ΘΕΜΑ 3^{o}

Δίνονται οι ανισώσεις $|2x+1 \geq 5|$ (1) και $x^2 + x - 12 < 0$ (2)

Α. Να λύσετε την ανίσωση (1)

Β. Να λύσετε την ανίσωση (2)

Γ. Κατόπιν να βρείτε τις κοινές λύσεις των (1) και (2) και να τις γράψετε σε μορφή συνόλων.

ΘΕΜΑ 4^{O}

Δίνεται το τριώνυμο χ^2 - αχ + β, όπου α=$\sqrt{100}$ - $\sqrt{36}$ και β = $|-9|-|8|+2$.

α) Να αποδείξετε ότι α = 4 και β = 3.
Για α = 4 και β = 3,

β) Να λύσετε την εξίσωση χ^2 - αχ + β = 0

γ) Να λύσετε την ανίσωση χ^2 - αχ + β> 3

ΘΕΜΑ 5^{O}

Δίνεται η εξίσωση $\chi^2 + 2\lambda\chi - 8 = 0$

α) Να δείξετε ότι η εξίσωση έχει πραγματικές ρίζες για κάθε $\lambda \in R$.

β) Αν η μία ρίζα της εξίσωσης ισούται με το τετράγωνο της άλλης, να βρείτε τις ρίζες και την τιμή του λ.

γ) Αν $4S = P$, να βρείτε την τιμή του λ.

δ) Για $\lambda = 1$, να κατασκευάσετε μια εξίσωση δευτέρου βαθμού με ρίζες διπλάσιες της αρχικής.

ΘΕΜΑ 6°

Δίνεται η εξίσωση: $-x^2 + \lambda x + \lambda^2 + 1 = 0$ με $\lambda \in R$.

Α) Να αποδείξετε ότι για κάθε τιμή του λ η εξίσωση έχει δυο πραγματικές και άνισες ρίζες.

Β) Αν x_1, x_2 είναι οι ρίζες της παραπάνω εξίσωσης τότε να βρεθούν οι τιμές του λ ώστε να ισχύει:

α) $|x_1| \cdot |x_2| = 10$.

β) $2(x_1 + x_2) + x_1 \cdot x_2 > -4$.

ΘΕΜΑ 7^{o}

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = 2x^2 - 2(\kappa - 5)\cdot x - (\kappa - 5)$, όπου $\kappa \in IR$.

Δ1. Να αποδείξετε ότι η διακρίνουσα της εξίσωσης $f(x) = 0$ είναι ίση με $\Delta = 4(\kappa - 3)(\kappa - 5)$.

Δ2. Να βρείτε για ποιες τιμές του $\kappa \in IR$ η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει δύο πραγματικές και άνισες ρίζες.

Δ3. Αν x_1, x_2 είναι οι άνισες ρίζες της εξίσωσης $f(x) = 0$, να λύσετε ως προς κ την εξίσωση:

$$16(x_1 \cdot x_2)^4 - 5(x_1 + x_2)^2 + 4 = 0.$$

Δ4. Να βρείτε για ποιες τιμές του $\kappa \in IR$ ισχύει: $|f(x)| - f(x) = 0$, για κάθε πραγματικό αριθμό x.

ΘΕΜΑ 8^{O}

Δίνεται το $\varphi(\chi) = -\chi^2 + 3\chi - 3$

α) Ν.δ.ο. $\varphi(\chi) < 0$ για κάθε $\chi \varepsilon R$ β) Να λυθεί η ανίσωση $\left|-x^2 + 3x - 3\right| > 2x - 3$

ΘΕΜΑ 9^{O}

Δίνεται η εξίσωση $x^2 - 3x + |\lambda - 1| = 0$ (1)

α) Να βρείτε τις τιμές του λ ώστε η (1) να έχει πραγματικές ρίζες

β)Αν χ_1 ,χ_2 οι ρίζες της (1) και ισχύει $\chi_1=2\chi_2$,να βρείτε τις ρίζες

ΘΕΜΑ 10^{O}

Έστω το $\varphi(\chi)=-3\chi^2+9\chi-6$

α) Να λυθεί εξίσωση $\varphi(\chi)=0$

β) Να βάλετε το κατάλληλο σύμβολο < , > , == στα παρακάτω με αιτιολόγηση σε κάθε περίπτωση

$\varphi(2004)\ldots.0$ $\phi(\sqrt{2})....0$ $\phi(\frac{2004}{2002}).....0$ $\varphi(1)\ldots..0$

γ) Να λυθεί η ανίσωση $\varphi(\chi).(\chi+3) \leq 0$

ΘΕΜΑ 11^{O}

Έστω $Α(\chi) = \chi^2+6\chi+9$ και $Β(\chi) = -\chi^2-7\chi-12$

Α) Να γίνουν γινόμενα τα Α(χ) και Β(χ)

Β) Αν $f(x) = \frac{A(x)}{B(x)}$ να βρεθεί το πεδίο ορισμού της και να απλοποιηθεί ο τύπος της

Γ) Να λυθεί η ανίσωση $\sqrt{A(x)} < 2008$

Δ) Να λυθεί η ανίσωση $f(x) \geq 0$

ΘΕΜΑ 12^{O}

Έστω η εξίσωση $\chi^2-(\lambda^2-3\lambda)\chi-\lambda+1=0$ (1) . Να βρείτε το λ ώστε:

Α) η (1) να έχει δύο ρίζες ετερόσημες

Β) μία ρίζα της (1) να είναι 0 αριθμός -2

Γ) αν χ_1 ,χ_2 οι ρίζες της (1) να ισχύει: $\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} > 1$

ΘΕΜΑ 13^{O}

Δίνεται η εξίσωση $\chi^2+\chi-\kappa^2=0$ (1) ,κεR

Ν.δ.ο .η (1) έχει δύο πραγματικές ρίζες για κάθε τιμή του κ

Αν ρ_1 , ρ_2 οι ρίζες της (1) τότε:

Ν.δ.ο. $\rho_1 + \rho_2 = -1$ και $\rho_1 . \rho_2 = -\kappa^2$ και να βρείτε το αν $\rho_1(\kappa+\rho_2)+\kappa\rho_2 >-6$

ΘΕΜΑ 14^{O}

Δίνεται το τριώνυμο $f(x)=x^2+5x-3$

1. Να λυθεί η ανίσωση $f(x)<0$
2. Αν χε(-3 ,1/2) να λυθεί η εξίσωση $\left|2x^2+7\right|+\left|f(x)\right|=0$
3. Αν χ<-3 να απλοποιήσετε το κλάσμα $\dfrac{(2x-6)\left|f(x)\right|}{(x^2-9)(1-2x)}$

ΘΕΜΑ 15^{O}

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=(\lambda+2)\chi^2 -5\lambda\chi -2$ με $\lambda \neq -2$

Α) Αν λ=1 :

να λυθεί η ανισότητα $f(x) \le 0$ και να βρείτε τα πρόσημα των f(-2) ,f(-2/3) , f(5/2) , $f(1/\sqrt{2})$

Β) Αν χ_1 , χ_2 οι ρίζες της f(x)=0 και S, P το άθροισμα και το γινόμενό τους τότε:

1. Ν.δ.ο. $(S-\chi_1)(S-\chi_2)=P$
2. Να βρεθούν οι τιμές του λ ώστε να ισχύει : $(S-\chi_1)(S-\chi_2)=S$

ΘΕΜΑ 16^{O}

Δίνεται το τριώνυμο $f(x)=(\lambda+1)x^2-(2\lambda+1)x+\lambda-2$ με $\lambda \neq -1$.

Δ1. Να βρείτε το πλήθος των ριζών της εξίσωσης **f(x) =0** για τις διάφορες τιμές του $\lambda \in R$.

Δ2. Αν η εξίσωση $f(x)=0$ έχει δυο ρίζες x_1, x_2 , να απλοποιηθεί η παράσταση

$$\left(x_1^2 \cdot x_2 + x_1 \cdot x_2^2\right) \cdot \frac{\lambda^2-1}{\lambda^2-5\lambda+6} .$$

Δ3. Για $\lambda=0$, να λυθεί η ανίσωση $f(x) \cdot \left|x^2+1\right| \ge 0$

ΘΕΜΑ 17^{Ο}

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\lambda x^2-2(\lambda-1)x+\lambda-1,\ \lambda\in\mathbb{R}$.

Α. Αν λ=0, να βρείτε για ποιες τιμές του x ορίζεται το κλάσμα : K(x)=$\dfrac{2010\cdot f(x)}{2x^2+9x-5}$, και στη συνέχεια να το απλοποιήσετε.

Β. Έστω $\lambda\neq 0$. Να δείξετε ότι αν η εξίσωση $f(x)=0$ έχει δύο ρίζες πραγματικές και άνισες ,τότε $\lambda<1$.

Γ. α)Αν $\lambda\in\mathbb{R}-\{0\}$ και $\lambda<1$,να υπολογίσετε το άθροισμα και το γινόμενο των ριζών της $f(x)=0$ ως συνάρτηση του λ.

β) Αν x_1,x_2 με $x_1\neq x_2$ είναι οι ρίζες της εξίσωσης $f(x)=0$, να βρείτε για ποιες τιμές του $\lambda\in\mathbb{R}-\{0\}$, ισχύει : $x_1+x_2-x_1x_2>0$.