ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1ο: ΜΙΓΑΔΙΚΟΙ ΑΡΙΘΜΟΙ

ΕΝΟΤΗΤΑ 1: ΈΝΝΟΙΑ ΜΙΓΑΔΙΚΟΥ – ΓΕΩΜΕΤΡΙΚΗ ΠΑΡΑΣΤΑΣΗ ΜΙΓΑΔΙΚΟΥ – ΠΡΑΞΕΙΣ ΣΤΟ ΣΥΝΟΛΟ ΤΩΝ ΜΙΓΑΔΙΚΩΝ – ΣΥΖΥΓΕΙΣ ΜΙΓΑΔΙΚΟΙ ΑΡΙΘΜΟΙ – ΔΥΝΑΜΕΙΣ ΜΙΓΑΔΙΚΟΥ ΑΡΙΘΜΟΥ ΑΡΙΘΜΟΥ ΚΑΙ ΤΟΥ i. ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ ΣΥΖΥΓΩΝ – ΕΠΙΛΥΣΗ ΔΕΥΤΕΡΟΒΑΘΜΙΑΣ ΕΞΙΣΩΣΗΣ

[Κεφ. 2.1: Η Έννοια του Μιγαδικού Αριθμού - Κεφ. 2.2: Πράξεις στο Σύνολο $\mathbf{C}$ των Μιγαδικών του σχολικού βιβλίου].

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ Β

Άσκηση 1.

Να βρείτε τον αριθμό $x \in \mathbf{R}$ όταν $x^2+5+(x^2-5x+1)\cdot i=6+7i$.

<u>Λύση</u>

Πρέπει $x^2+5=6$ (1) και $x^2-5x+1=7$ (2).

Από την (1) έχουμε $x^2=1$, οπότε η (2) γίνεται $1-5x+1=7 \Leftrightarrow x=-1$

Άσκηση 2.

Να βρείτε τους $\mathrm{x}, \mathrm{y} \in \mathbf{R}$ ώστε να ισχύουν οι ισότητες:

i) $2\mathrm{x}-3+4\mathrm{y}\mathrm{i}=3+(2\mathrm{y}-8)\mathrm{i}$

ii) $4\mathrm{x}+3\mathrm{y}+2+(5\mathrm{x}+\mathrm{y}+2)\mathrm{i}=\mathrm{x}+\mathrm{y}-1+(3\mathrm{x}+2\mathrm{y}+7)\mathrm{i}$

<u>Λύση</u>

i) Πρέπει: $\left.\begin{array}{r} 2x-3=3 \\ 4y=2y-8 \end{array}\right\} \Leftrightarrow \left.\begin{array}{r} 2x=6 \\ 2y=-8 \end{array}\right\} \Leftrightarrow$

$x=3$ και $y=-4$

ii) Πρέπει: $\left.\begin{array}{r} 4x+3y+2=x+y-1 \\ 5x+y+2=3x+2y+7 \end{array}\right\} \Leftrightarrow \begin{array}{rl} 3x+2y=-3 & \mathbf{(1)} \\ 2x-y=5 & \mathbf{(2)} \end{array}$

(2): $y=2x-5$ (3)

Άρα από (1), (3) έχουμε :

$3x+2\cdot(2x-5)=-3 \Rightarrow 3x+4x-10=-3 \Rightarrow 7x=7 \Rightarrow$

$x=1$

Από (3): $y=2\cdot 1-5 \Rightarrow y=-3$

Άσκηση 3.

Να βρείτε τους αριθμούς $\alpha, \beta \in \mathbf{R}$ έτσι ώστε οι μιγαδικοί: $z_1 = \alpha + \beta i$ και

$z_2 = \dfrac{12+8i}{2-3i} + \dfrac{52+13i}{13i}$ να είναι ίσοι.

<u>Λύση</u>

Φέρνουμε πρώτα τον z_2 στη μορφή $\gamma + \delta \cdot i$:

$$z_2 = \frac{12+8i}{2-3i} \cdot \frac{2+3i}{2+3i} + \frac{52+13i}{13i} \cdot \frac{i}{i} =$$

$$\frac{24+36i+16i-24}{2^2-(3i)^2} + \frac{52i+13i^2}{13 \cdot i^2} =$$

$$\frac{52i}{4+9} + \frac{-13+52i}{-13} =$$

$$\frac{52i}{13} + 1 - 4i = 4i + 1 - 4i = 1 = 1 + 0i$$

$$z_1 = z_2 \Rightarrow \alpha + \beta \cdot i = 1 + 0i \Rightarrow$$

$\alpha = 1$ και $\beta = 0$

Άσκηση 4.

Να βρείτε τους πραγματικούς αριθμούς α, β έτσι ώστε να ισχύει $(\alpha+\beta i)^2=(4-3i)\cdot i$.

Λύση

$$(\alpha+\beta i)^2=(4-3i)\cdot i \Leftrightarrow \left(\alpha^2-\beta^2\right)+2\alpha\beta i=3+4i \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha^2-\beta^2=3 & \textbf{(1)} \\ \alpha\beta=2 & \textbf{(2)} \end{cases}$$

Από τη (2) προκύπτει $\alpha \neq 0, \beta \neq 0$ και α, β ομόσημοι.

Από τη (2) έχουμε $\beta=\dfrac{2}{\alpha}$ (3) Αντικαθιστούμε στη (1) και παίρνουμε την εξίσωση

$\alpha^2-\dfrac{4}{\alpha^2}=3 \Rightarrow \alpha^4-4=3\alpha^2 \Rightarrow \alpha^4-3\alpha^2-4=0$ (4)

Θέτουμε $\alpha^2=t>0$ και η (4) γίνεται:

$t^2-3t-4=0 \Leftrightarrow t=4$ ή $t=-1$ (απορρίπτεται)

Επομένως $\alpha^2=4 \Leftrightarrow \alpha=2$ ή $\alpha=-2$

- Για $\alpha=2$ από την (3) έχουμε $\beta=1$
- Για $\alpha=-2$ από την (3) έχουμε $\beta=-1$

Άσκηση 5.

Να κάνετε τις πράξεις:

i) $\left(3-2i\right)\left(4-5i\right)+3i-2$

ii) $\dfrac{8+3i}{3i+4}$

iii) $\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}-\dfrac{1}{2}i\right)^2$

iv) $2i(6-3i)+\dfrac{3+i}{1-i}$

<u>Λύση</u>

Οι μιγαδικοί είναι:

i) $\left(3-2i\right)\left(4-5i\right)+3i-2=12-15i-8i-10+3i-2=-20i$,

ii) $\dfrac{8+3i}{3i+4}=\dfrac{8+3i}{4+3i}\cdot\dfrac{4-3i}{4-3i}=\dfrac{32-24i+12i+9}{4^2-\left(3i\right)^2}=\dfrac{41-12i}{25}=\dfrac{41}{25}-\dfrac{12}{25}i$

iii) $\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}-\dfrac{1}{2}i\right)^2=\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)^2-2\cdot\dfrac{\sqrt{3}}{2}\cdot\dfrac{1}{2}\cdot i+\left(\dfrac{1}{2}i\right)^2=\dfrac{3}{4}-\dfrac{\sqrt{3}}{2}i-\dfrac{1}{4}=\dfrac{1}{2}-\dfrac{\sqrt{3}}{2}i$

iv) $2i(6-3i)+\dfrac{3+i}{1-i}=12i+6+\dfrac{3+i}{1-i}\cdot\dfrac{1+i}{1+i}=$

$6+12i+\dfrac{3+3i+i-1}{1^2-i^2}=6+12i+\dfrac{2+4i}{2}=$

$6+12i+1+2i=7+14i$

Άσκηση 6.

Να γράψετε τον αριθμό $z = \frac{4-3i}{3+4i} + \frac{2+i}{1-2i}$ στη μορφή $\alpha + \beta i, \alpha, \beta \in \mathbf{R}$.

Λύση

$$z = \frac{4-3i}{3+4i} + \frac{2+i}{1-2i} = \frac{4-3i}{3+4i} \cdot \frac{3-4i}{3-4i} + \frac{2+i}{1-2i} \cdot \frac{1+2i}{1+2i} =$$

$$\frac{12-16i-9i-12}{3^2-(4i)^2} + \frac{2+4i+i-2}{1^2-(2i)^2} = \frac{-25i}{25} + \frac{5i}{5} = -i + i = 0 = 0 + 0i$$

Άσκηση 7.

Να βρείτε τα $\mathrm{x}, \mathrm{y} \in \mathbf{R}$ ώστε οι μιγαδικοί: $\mathrm{z}_1 = 2\mathrm{x} + \left(3\mathrm{x} + 2\mathrm{y}\right)\mathrm{i}$ και $\mathrm{z}_2 = \mathrm{y} - 1 - 9\mathrm{i}$ να είναι συζυγείς.

<u>Λύση</u>

Πρέπει $\begin{cases} 2x = y - 1 \\ 3x + 2y = 9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x - y = -1 \\ 3x + 2y = 9 \end{cases} \Leftrightarrow (x, y) = (1, 3)$

Άσκηση 8.

Να αποδείξετε ότι ο $w=\frac{z}{\overline{z}}-\frac{\overline{z}}{z}$ είναι φανταστικός

<u>Λύση</u>

Επειδή $\overline{\left(\frac{z}{\overline{z}}\right)}=\frac{\overline{z}}{z}$, ο w είναι φανταστικός ως διαφορά δύο συζυγών μιγαδικών.

Άσκηση 9.

Για τους μιγαδικούς z και w ισχύει $w = z - \frac{4}{z}, z \neq 0$. Να αποδείξετε ότι ο w είναι φανταστικός αν και μόνο αν $z \cdot \overline{z} = 4$ ή z φανταστικός.

<u>Λύση</u>

Ο w είναι φανταστικός αν και μόνο αν

$$w = -\overline{w} \Leftrightarrow z - \frac{4}{z} = -\left(\overline{z} - \frac{4}{\overline{z}}\right)$$

$$\Leftrightarrow z - \frac{4}{z} = -\overline{z} + \frac{4}{\overline{z}}$$

$$\Leftrightarrow z \cdot z \cdot \overline{z} - 4\overline{z} = -\overline{z} \cdot z \cdot \overline{z} + 4z$$

$$\Leftrightarrow z \cdot z \cdot \overline{z} + \overline{z} \cdot z \cdot \overline{z} - 4z - 4\overline{z} = 0$$

$$\Leftrightarrow z \cdot \overline{z}\left(z + \overline{z}\right) - 4\left(z + \overline{z}\right) = 0$$

$$\Leftrightarrow \left(z + \overline{z}\right) \cdot \left(z \cdot \overline{z} - 4\right) = 0$$

$$\Leftrightarrow z \cdot \overline{z} - 4 = 0 \text{ ή } z + \overline{z} = 0$$

$$\Leftrightarrow z \cdot \overline{z} = 4 \text{ ή } z = -\overline{z}$$

Άσκηση 10.

Αν $z \in \mathbf{C}$, να δείξετε ότι ο $w = \dfrac{z^2 - \overline{z}^2}{1 + z \cdot \overline{z}}$ είναι φανταστικός αριθμός.

<u>Λύση</u>

Αρκεί να δείξουμε ότι $\overline{w} = -w$

$$\overline{w} = \overline{\left(\frac{z^2 - \overline{z}^2}{1 + z \cdot \overline{z}} \right)} = \frac{\overline{z}^2 - z^2}{1 + \overline{z} \cdot z} = -\frac{z^2 - \overline{z}^2}{1 + z \cdot \overline{z}} = -w$$

Άρα ο w είναι φανταστικός

Άσκηση 11.

Να αποδείξετε ότι: $i^{\nu}+i^{\nu+1}+i^{\nu+2}+i^{\nu+3}=0, \quad \nu\in\mathbf{N}$

<u>Λύση</u>

$$i^{\nu}+i^{\nu+1}+i^{\nu+2}+i^{\nu+3}=$$

$$i^{\nu}+i^{\nu}\cdot i+i^{\nu}\cdot i^{2}+i^{\nu}\cdot i^{3}=$$

$$i^{\nu}\cdot\left(1+i+i^{2}+i^{3}\right)=$$

$$i^{\nu}\left(1+i-1-i\right)=i^{\nu}\cdot 0=0$$

Άσκηση 12.

Να βρείτε τις τιμές των παραστάσεων

i) $(1+i)^{600}$

ii) $(1-i)^{61}$

<u>Λύση</u>

i) $(1+i)^{600} = \left[(1+i)^2\right]^{300} = (2i)^{300} =$

$2^{300} \cdot i^{300} = 2^{300} \cdot i^0 = 2^{300}$.

ii) $(1-i)^{61} = (1-i)^{60} \cdot (1-i)^1 =$

$\left[(1-i)^2\right]^{30} \cdot (1-i) =$

$(-2i)^{30} \cdot (1-i) = (-2)^{30} \cdot i^{30} \cdot (1-i) =$

$2^{30} \cdot i^2 \cdot (1-i) = -2^{30} \cdot (1-i)$

Άσκηση 13.

Να γράψετε τον $z=\left(\frac{2-3i}{3+2i}\right)^{81}+\left(\frac{2+i}{1-2i}\right)^{39}$ στη μορφή $\alpha+\beta i, \alpha, \beta \in \mathbf{R}$.

<u>Λύση</u>

$$\frac{2-3i}{3+2i}=\frac{2-3i}{3+2i}\cdot\frac{3-2i}{3-2i}=\frac{6-4i-9i-6}{9+4}=\frac{-13i}{13}=-i$$

$$\frac{2+i}{1-2i}=\frac{2+i}{1-2i}\cdot\frac{1+2i}{1+2i}=\frac{2+4i+i-2}{1+4}=\frac{5i}{5}=i$$

Επομένως $z=(-i)^{81}+i^{39}=(-1)^{81}\cdot i^{81}+i^{39}=(-1)\cdot i^{1}+i^{3}=-i-i=-2i=0-2i$

Άσκηση 14.

Να λύσετε την εξίσωση:

$$3z-2+4i=z\cdot i+6i$$

<u>Λύση</u>

$$3z-2+4i=z\cdot i+6i \Leftrightarrow 3z-i\cdot z=6i-4i+2 \Leftrightarrow$$

$$(3-i)\cdot z=2+2i \Leftrightarrow z=\frac{2+2i}{3-i} \Leftrightarrow$$

$$z=\frac{2+2i}{3-i}\cdot\frac{3+i}{3+i} \Leftrightarrow z=\frac{6+2i+6i-2}{3^2-i^2} \Leftrightarrow$$

$$z=\frac{4+8i}{10} \Leftrightarrow z=\frac{4}{10}+\frac{8}{10}i \Leftrightarrow$$

$$z=\frac{2}{5}+\frac{4}{5}i$$

Άσκηση 15.

Να λύσετε την εξίσωση:

$$3z-4-\left(2z+5\right)\cdot i=2iz$$

Λύση

$$3z-4-\left(2z+5\right)i=2iz \Leftrightarrow 3z-4-2zi-5i=2iz \Leftrightarrow$$

$$3z-2zi-2zi=4+5i \Leftrightarrow 3z-4zi=4+5i \Leftrightarrow$$

$$\left(3-4i\right)\cdot z=4+5i \Leftrightarrow z=\frac{4+5i}{3-4i} \Leftrightarrow$$

$$z=\frac{4+5i}{3-4i}\cdot\frac{3+4i}{3+4i} \Leftrightarrow z=\frac{12+16i+15i-20}{3^2-\left(4i\right)^2}=$$

$$\frac{-8+31i}{9+16}=\frac{-8+31i}{25}$$

Άρα $z=-\frac{8}{25}+\frac{31}{25}\cdot i$

Άσκηση 16.

Να λύσετε στο $\mathbb{C}$ τις εξισώσεις:

i) $z^2 - 2z + 5 = 0$

ii) $z^2 + 1 = 0$

iii) $z + \frac{2}{z} = -2$

<u>Λύση</u>

i) Βρίσκουμε την διακρίνουσα:

$\Delta = (-2)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 5 = 4 - 20 = -16 < 0$

Άρα η εξίσωση θα έχει ρίζες τους:

$$z_{1,2} = \frac{2 \pm i\sqrt{16}}{2} = \frac{2 \pm 4i}{2} = 1 \pm 2i$$

Δηλαδή $z_1 = 1 + 2i$ και $z_2 = 1 - 2i$

<u>Α' τρόπος</u>:

ii) $z^2 + 1 = 0$
$\Delta = 0^2 - 4 \cdot 1 \cdot 1 = -4$

Άρα $z_{1,2} = \frac{-0 \pm i\sqrt{4}}{2} = \frac{\pm 2i}{2} = \pm i$

<u>Β' τρόπος</u>:

$z^2 + 1 = 0 \Leftrightarrow z^2 - i^2 = 0 \Leftrightarrow (z - i)(z + i) = 0 \Rightarrow$

$z - i = 0$ ή $z + i = 0 \Leftrightarrow z = i$ ή $z = -i$

iii) $z + \frac{2}{z} = -2 \overset{\cdot z \neq 0}{\Rightarrow} z^2 + 2 = -2z \Rightarrow z^2 + 2z + 2 = 0$

$\Delta = 2^2 - 4 \cdot 1 \cdot 2 = 4 - 8 = -4$

Άρα $z_{1,2} = \frac{-2 \pm i \cdot \sqrt{4}}{2} = \frac{-2 \pm 2i}{2} = -1 \pm i$
Άρα $z_1 = 1 + i$ και $z = 1 - i$

Άσκηση 17.

Να λύσετε τις εξισώσεις:

i) $z^3+1=0$

ii) $z^3-z^2+z-1=0$

<u>Λύση</u>

i) $z^3+1=0 \Leftrightarrow z^3+1^3=0 \Leftrightarrow$
$(z+1)(z^2-z+1)=0 \Leftrightarrow z+1=0$ ή $z^2-z+1=0$.

Έχουμε:

- $z+1=0 \Leftrightarrow z=-1$
- $z^2-z+1=0 \Leftrightarrow z_{1,2}=\dfrac{1\pm i\sqrt{3}}{2}$

Άρα οι λύσεις της εξίσωσης είναι οι αριθμοί -1, $\dfrac{1+i\sqrt{3}}{2}$ και $\dfrac{1-i\sqrt{3}}{2}$.

ii) $z^3-z^2+z-1=0 \Leftrightarrow z^2\cdot(z-1)+(z-1)=0 \Leftrightarrow$

$(z^2+1)(z-1)=0 \Leftrightarrow z^2+1=0$ ή $z-1=0$

$\Leftrightarrow z=1$ ή $z^2=-1 \Leftrightarrow z=1$ ή $z=i$ ή $z=-i$

Άρα οι λύσεις της εξίσωσης είναι οι αριθμοί 1, i και $-i$

Άσκηση 18.

Να λύσετε την εξίσωση:

$z^2+\overline{z}-2=0$

<u>Λύση</u>

Έστω $z=x+yi,\ x,y\in\mathbf{R}$ Τότε έχουμε:

$(x+yi)^2+(x-yi)-2=0 \Leftrightarrow$

$x^2-y^2+2xyi+x-yi-2=0 \Leftrightarrow$

$(x^2-y^2+x-2)+(2xy-y)\cdot i=0 \Leftrightarrow$

$\begin{cases} x^2-y^2+x-2=0 & (1) \\ \text{και} & \\ 2xy-y=0 & (2) \end{cases}$ $\quad (2)\ y(2x-1)=0 \Leftrightarrow y=0$ ή $x=\dfrac{1}{2}$

• Η (1) για $y=0$ γίνεται:

$x^2+x-2=0$

$\Delta=1^2-4\cdot1\cdot(-2)=1+8=9$

Άρα $x_{1,2}=\dfrac{-1\pm3}{2}$.Δηλαδή $x=-2$ ή $x=1$

Επομένως $z_1=-2+0i=-2$ και $z_2=1+0i=1$

• Η (1) για $x=\dfrac{1}{2}$ γίνεται:

$\left(\dfrac{1}{2}\right)^2-y^2+\dfrac{1}{2}-2=0 \Leftrightarrow \dfrac{1}{4}-y^2-\dfrac{3}{2}=0 \overset{\cdot4}{\Leftrightarrow}$

$1-4y^2-6=0 \Leftrightarrow y^2=-\dfrac{5}{4}$. Αδύνατη.

Άρα οι λύσεις της εξίσωσης είναι οι $z_1=-2$ και $z_2=1$

Άσκηση 19.

Να βρείτε το $x \in \mathbf{R}$ όταν: $\sqrt{x^2-5x-6}+\left(x^2-10x+19\right)\cdot i=3\sqrt{2}+3i$

<u>Λύση</u>

Πρέπει: $x^2-5x-6 \geq 0$, και από το πρόσημο του τριωνύμου:

προκύπτει $x \leq -1$ ή $x \geq 6$

x	$-\infty$		-1		6		$+\infty$
x^2-5x-6		+	0	-	0	+	

Επίσης πρέπει:

$$\left.\begin{array}{r}\sqrt{x^2-5x-6}=3\sqrt{2}\\ x^2-10x+19=3\end{array}\right\} \Leftrightarrow \left.\begin{array}{r}x^2-5x-6=18\\ x^2-10x+16=0\end{array}\right\} \Leftrightarrow$$

$$\left.\begin{array}{r}x^2-5x-24=0\\ x^2-10x+16=0\end{array}\right\} \Leftrightarrow \left.\begin{array}{r}x=8 \text{ ή } x=-3\\ x=8 \text{ ή } x=2\end{array}\right\}$$

Άρα $x=8$

Άσκηση 20.

Να βρείτε το $\lambda \in \mathbf{R}$ ώστε ο αριθμός $z = \dfrac{\lambda + 3i}{\lambda - (\lambda - 2)i}$ να είναι πραγματικός.

<u>Λύση</u>

Πρέπει: $\lambda - (\lambda - 2)i \neq 0$.

Αν $\lambda - (\lambda - 2)i = 0$ τότε $\lambda = 0$ και $\lambda = 2$ αδύνατο. Άρα ο z ορίζεται για κάθε $\lambda \in \mathbf{R}$.

Έχουμε

$$z = \frac{\lambda + 3i}{\lambda - (\lambda - 2)i} = \frac{(\lambda + 3i)\left[\lambda + (\lambda - 2)i\right]}{\lambda^2 + (\lambda - 2)^2} = \frac{\lambda^2 + \lambda(\lambda - 2)i + 3\lambda i - 3(\lambda - 2)}{\lambda^2 + (\lambda - 2)^2}$$

$$= \frac{(\lambda^2 - 3\lambda + 4) + (\lambda^2 + \lambda)i}{\lambda^2 + (\lambda - 2)^2} = \frac{\lambda^2 - 3\lambda + 4}{\lambda^2 + (\lambda - 2)^2} + \frac{\lambda + \lambda}{\lambda^2 + (\lambda - 2)^2} \cdot i$$

Για να είναι ο z πραγματικός πρέπει $\mathrm{Im}(z) = 0$, δηλαδή $\lambda^2 + \lambda = 0$. Είναι

$\lambda^2 + \lambda = 0 \Leftrightarrow \lambda(\lambda + 1) = 0 \Leftrightarrow \lambda = 0$ ή $\lambda = -1$

Άσκηση 21.

Να αποδείξετε ότι για κάθε $\nu \in \mathbf{N}^*$ ισχύει: $i^{3\nu} + i^{3\nu+1} + i^{3\nu+2} + i^{3\nu+3} = \frac{1}{i^{3\nu}} + \frac{1}{i^{3\nu+1}} + \frac{1}{i^{3\nu+2}} + \frac{1}{i^{3\nu+3}}$

<u>Λύση</u>

Κάνοντας πράξεις στο 1ο μέλος, έχουμε:

$$i^{3\nu} + i^{3\nu+1} + i^{3\nu+2} + i^{3\nu+3} =$$

$$i^{3\nu} + i^{3\nu} \cdot i + i^{3\nu} \cdot i^2 + i^{3\nu} \cdot i^3 =$$

$$i^{3\nu}(1 + i + i^2 + i^3) =$$

$$i^{3\nu}(1 + i - 1 - i) = i^{3\nu} \cdot 0 = 0$$

Ομοίως για το 2ο μέλος, ισχύει:

$$\frac{1}{i^{3\nu}} + \frac{1}{i^{3\nu+1}} + \frac{1}{i^{3\nu+2}} + \frac{1}{i^{3\nu+3}} =$$

$$\frac{1}{i^{3\nu}} + \frac{1}{i^{3\nu} \cdot i} + \frac{1}{i^{3\nu} \cdot i^2} + \frac{1}{i^{3\nu} \cdot i^3} =$$

$$\frac{1}{i^{3\nu}} \cdot \left(1 + \frac{1}{i} + \frac{1}{i^2} + \frac{1}{i^3}\right) =$$

$$\frac{1}{i^{3\nu}} \cdot \left(1 + \frac{1}{i} - 1 - \frac{1}{i}\right) = \frac{1}{i^{3\nu}} \cdot 0 = 0$$

Άρα ισχύει η δοθείσα σχέση.

Άσκηση 22.

Αν $z \in \mathbf{C}$, $\lambda \in \mathbf{R}$ και $\text{Im}\left(\dfrac{\lambda + 2z}{\lambda - 2z}\right) = 0$, όπου $z \neq \dfrac{\lambda}{2}$, να δείξετε ότι ο z είναι πραγματικός.

<u>Λύση</u>

$$\text{Im}\left(\frac{\lambda+2z}{\lambda-2z}\right)=0 \Leftrightarrow \left(\frac{\lambda+2z}{\lambda-2z}\right)\in \mathbf{R} \Leftrightarrow \left(\frac{\lambda+2z}{\lambda-2z}\right)=\overline{\left(\frac{\lambda+2z}{\lambda-2z}\right)} \Leftrightarrow \frac{\lambda+2z}{\lambda-2z}=\frac{\lambda+2\overline{z}}{\lambda-2\overline{z}} \Leftrightarrow$$

$$(\lambda+2z)\cdot(\lambda-2\overline{z})=(\lambda+2\overline{z})\cdot(\lambda-2z) \Leftrightarrow \lambda^2-2\lambda\overline{z}+2\lambda z-4z\overline{z}=\lambda^2-2\lambda z+2\lambda\overline{z}-4z\overline{z} \Leftrightarrow$$

$$4\lambda z=4\lambda\overline{z} \overset{\lambda\neq 0}{\Leftrightarrow} z=\overline{z} \Leftrightarrow z\in \mathbf{R}$$

Άσκηση 23.

Δίνεται το πολυώνυμο $P(x) = 2\cdot x^{2003} - 4\cdot x^{2010} + 2\cdot x^{349} - x^{224}$.

Να βρείτε το $P(i)$.

<u>Λύση</u>

$P(i) = 2\cdot i^{2003} - 4\cdot i^{2010} + 2\cdot i^{349} - i^{224}$

Κάνοντας τις ευκλείδειες διαιρέσεις των εκθετών με το 4, προκύπτουν:

$$\begin{aligned} 2003 &= 4\cdot 500 + 3 \\ 2010 &= 4\cdot 502 + 2 \\ 349 &= 4\cdot 87 + 1 \\ 224 &= 4\cdot 56 + 0 \end{aligned}$$

Άρα $P(i) = 2\cdot i^{3} - 4\cdot i^{2} + 2\cdot i^{1} - i^{0} = -2i + 4 + 2i - 1 = 3$

Άρα $P(i) = 3$

Άσκηση 24.

Να βρείτε τους $x,\, y \in \mathbf{R}$ ώστε να ισχύουν οι ισότητες:

i) $x\cdot(3+6xi)=y(1+4i)-6i$

ii) $x\cdot(x-y)+(x-y)i=3-y^2-i$

<u>Λύση</u>

i) $x\cdot(3+6xi)=y(1+4i)-6i \Leftrightarrow 3x+6x^2i=y+4yi-6i \Leftrightarrow 3x+6x^2i=y+2(2y-3)i$

Άρα θα πρέπει:

$$\left.\begin{matrix} 3x=y \\ 6x^2=2(2y-3) \end{matrix}\right\} \Leftrightarrow \left.\begin{matrix} y=3x \\ 3x^2=2y-3 \end{matrix}\right\} \Leftrightarrow \left.\begin{matrix} y=3x \\ 3x^2=2\cdot 3x-3 \end{matrix}\right\} \Leftrightarrow \left.\begin{matrix} y=3x \\ 3x^2-6x+3=0 \end{matrix}\right\} \Leftrightarrow$$

$$\left.\begin{matrix} y=3x \\ x^2-2x+1=0 \end{matrix}\right\} \Leftrightarrow \left.\begin{matrix} y=3x \\ (x-1)^2=0 \end{matrix}\right\} \Leftrightarrow \left.\begin{matrix} y=3x \\ x=1 \end{matrix}\right\} \Leftrightarrow \begin{matrix} y=3 \\ x=1 \end{matrix}$$

Άρα $(x,y)=(1,3)$

ii) $x\cdot(x-y)+(x-y)i=3-y^2-i \Leftrightarrow x^2-xy+(x-y)i=3-y^2-i$

Άρα πρέπει:

$$\left.\begin{matrix} x^2-xy=3-y^2 \\ x-y=-1 \end{matrix}\right\} \Leftrightarrow \left.\begin{matrix} x^2-xy+y^2=3 \\ x=y-1 \end{matrix}\right\} \Leftrightarrow \left.\begin{matrix} (y-1)^2+y^2-(y-1)y=3 \\ x=y-1 \end{matrix}\right\} \Leftrightarrow$$

$$\left.\begin{matrix} y^2-2y+1+y^2-y^2+y=3 \\ x=y-1 \end{matrix}\right\} \Leftrightarrow \left.\begin{matrix} y^2-y-2=0 \\ x=y-1 \end{matrix}\right\} \Leftrightarrow$$

$$\left.\begin{matrix} y=2 \\ x=y-1 \end{matrix}\right\} \text{ ή } \left.\begin{matrix} y=-1 \\ x=y-1 \end{matrix}\right\} \Leftrightarrow \left.\begin{matrix} y=2 \\ x=1 \end{matrix}\right\} \text{ ή } \left.\begin{matrix} y=-1 \\ x=-2 \end{matrix}\right\}$$

Άρα $(x,y)=(1,\,2)$ ή $(x,y)=(-2,\,-1)$.

Άσκηση 25.

Να βρείτε τα $x, y \in \mathbf{R}$ έτσι ώστε ο $z=(1-2i)(x+y)-(3+2i)(x-2y)+6$ να είναι ίσος με το μηδέν.

Λύση

$$z=0 \Leftrightarrow (1-2i)(x+y)-(3+2i)(x-2y)+6=0 \Leftrightarrow$$

$$x+y-2xi-2yi-3x+6y-2xi+4yi+6=0 \Leftrightarrow$$

$$(-2x+7y+6)+(-4x+2y)\cdot i=0$$

Επομένως

$$\begin{cases} -2x+7y+6=0 \\ -4x+2y=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -2x+7y=-6 \quad \cdot(-2) \\ -4x+2y=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4x-14y=12 \quad (+) \\ -4x+2y=0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} -12y=12 \\ -4x+2y=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=-1 \\ -4x+2(-1)=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=-1 \\ -4x-2=0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} y=-1 \\ -4x=2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=-1 \\ x=-\dfrac{1}{2} \end{cases}$$

Άσκηση 26.

Να κάνετε τις πράξεις:

i) $(1+i)\cdot(i^2+i)\cdot(3+i^2)\cdot(3-i^2)$

ii) $(2+i)^2\cdot(1-i)^2-\left[(1+i)\cdot(2-i)\right]^2$

<u>Λύση</u>

i) $(1+i)\cdot(i^2+i)\cdot(3+i^2)\cdot(3-i^2)=$

$(1+i)\cdot(-1+i)\cdot(3-1)\cdot(3+1)=$

$(i^2-1^2)\cdot 2\cdot 4=8\cdot(-1-1)=-16$

ii) $(2+i)^2\cdot(1-i)^2-\left[(1+i)\cdot(2-i)\right]^2=$

$(2^2+4i+i^2)\cdot(1^2-2i+i^2)-(2-i+2i-i^2)^2=$

$(4+4i-1)\cdot(1-2i-1)-(2-i+2i+1)^2=$

$(3+4i)\cdot(-2i)-(3+i)^2=$

$-6i-8i^2-3^2-i^2-2\cdot 3\cdot i=-6i+8-9+1-6i=-12i.$

Άσκηση 27.

Να αποδείξετε ότι $\left(\frac{\alpha+i}{1-\alpha i}\right)^{2\nu}+\left(\frac{i-\alpha}{1+\alpha i}\right)^{2\nu}=2\cdot(-1)^{\nu}$

<u>Λύση</u>

Μετατρέπουμε τα κλάσματα:

$$\frac{\alpha+i}{1-\alpha i}=\frac{\alpha+i}{1-\alpha i}\cdot\frac{1+\alpha i}{1+\alpha i}=\frac{\alpha+\alpha^2\cdot i+i-\alpha}{1^2+\alpha^2}=\frac{\alpha^2\cdot i+i}{1+\alpha^2}=\frac{i\cdot\left(\alpha^2+1\right)}{1+\alpha^2}=i$$

$$\frac{i-\alpha}{1+\alpha i}=\frac{i-\alpha}{1+\alpha i}\cdot\frac{1-\alpha i}{1-\alpha i}=\frac{i+\alpha-\alpha+\alpha^2\cdot i}{1^2+\alpha^2}=\frac{i+\alpha^2\cdot i}{1+\alpha^2}=\frac{i\cdot\left(1+\alpha^2\right)}{1+\alpha^2}=i$$

Άρα:

$$\left(\frac{\alpha+i}{1-\alpha i}\right)^{2\nu}+\left(\frac{i-\alpha}{1+\alpha i}\right)^{2\nu}=i^{2\nu}+i^{2\nu}=\left(-1\right)^{\nu}+\left(-1\right)^{\nu}=2\cdot(-1)^{\nu}$$

Άσκηση 28.

Δίνονται οι μιγαδικοί z_1, z_2 με $z_1 \cdot \overline{z_1} = z_2 \cdot \overline{z_2} = 4$.

Να δείξετε ότι ο $w = \left(\dfrac{z_1}{z_2} - \dfrac{z_2}{z_1} \right)^3$ είναι φανταστικός.

<u>Λύση</u>

Αρκεί να δείξουμε ότι $\overline{w} = -w$. Επειδή $z_1, z_2 \neq 0,\ \overline{z_1} = \dfrac{4}{z_1}$ και $\overline{z_2} = \dfrac{4}{z_2}$, έχουμε

$$\overline{w} = \overline{\left(\frac{z_1}{z_2} - \frac{z_2}{z_1} \right)^3} = \left[\overline{\left(\frac{z_1}{z_2} - \frac{z_2}{z_1} \right)} \right]^3 = \left[\overline{\left(\frac{z_1}{z_2} \right)} - \overline{\left(\frac{z_2}{z_1} \right)} \right]^3 = \left(\frac{\overline{z_1}}{\overline{z_2}} - \frac{\overline{z_2}}{\overline{z_1}} \right)^3 =$$

$$\left(\frac{\frac{4}{z_1}}{\frac{4}{z_2}} - \frac{\frac{4}{z_2}}{\frac{4}{z_1}} \right)^3 = \left(\frac{z_2}{z_1} - \frac{z_1}{z_2} \right)^3 = \left[-\left(\frac{z_1}{z_2} - \frac{z_2}{z_1} \right) \right]^3 = -\left(\frac{z_1}{z_2} - \frac{z_2}{z_1} \right)^3 = -w$$

Άρα ο w είναι φανταστικός.

Άσκηση 29.

Να περιγράψετε γεωμετρικά το σύνολο των εικόνων των μιγαδικών αριθμών z που ικανοποιούν τις σχέσεις:

i) $\mathrm{Re}(z) = 5$

ii) $\mathrm{Im}(z) = -3$

iii) $\mathrm{Re}(z) = -\mathrm{Im}(z)$

<u>Λύση</u>

i) $\mathrm{Re}(z) = 5$ άρα $z = 5 + yi$.

Επομένως οι εικόνες του z είναι τα σημεία $M(5, y)$, δηλαδή σημεία της ευθείας $x = 5$ που είναι $\perp$ στον x'x

ii) $\mathrm{Im}(z) = -3$ άρα $z = x - 3i$.

Επομένως οι εικόνες του z είναι τα σημεία $M(x, -3)$, δηλαδή σημεία της ευθείας $y = -3$ που είναι || στον x'x

iii) $\mathrm{Re}(z) = -\mathrm{Im}(z)$ άρα $z = x - xi$.

Επομένως οι εικόνες του z είναι τα σημεία $M(x, -x)$ δηλαδή σημεία της ευθείας $y = -x$ που είναι η διχοτόμος της 2ης και 4ης γωνίας των αξόνων.

Άσκηση 30.

Σε κάθε μία από τις παρακάτω περιπτώσεις να εκτελέσετε τις πράξεις:

i) $(4-3i)+(-6+2i)$

ii) $(2-3i)-(4-2i)$

iii) $(2-3i)\cdot(3+4i)$

iv) $2-i\cdot(4-2i)$

v) $i\cdot(2+i)\cdot(3-i)$

vi) $(3-4i)\cdot(3+4i)$

vii) $(1-i)\cdot(1+i)$

<u>Λύση</u>

i) $(4-3i)+(-6+2i)=4-3i-6+2i=-2-i$

ii) $(2-3i)-(4-2i)=2-3i-4+2i=-2-i$

iii) $(2-3i)\cdot(3+4i)=6+8i-9i-12i^2=6-i+12=18-i$

iv) $2-i\cdot(4-2i)=2-4i+2i^2=2-4i-2=-4i$

v) $i\cdot(2+i)\cdot(3-i)=(2i-1)(3-i)=6i-2i^2-3+i=6i+2-3+i=-1+7i$

vi) $(3-4i)\cdot(3+4i)=3^2-(4i)^2=3^2-4^2i^2=9+16=25$

vii) $(1-i)\cdot(1+i)=1^2-i^2=1+1=2$

Άσκηση 31.

Να λύσετε την εξίσωση:

$z\cdot\overline{z}+3iz-3i-5=0$

<u>Λύση</u>

Έστω $z=x+yi,\ x,y\in\mathbf{R}$

Τότε η εξίσωση γίνεται:

$(x+yi)(x-yi)+3i(x+yi)-3i-5=0 \Leftrightarrow$

$x^2+y^2+3xi-3y-3i-5=0 \Leftrightarrow$

$(x^2+y^2-3y-5)+3\cdot(x-1)\cdot i=0$ Άρα

$$\left.\begin{matrix} x^2+y^2-3y-5=0 \\ x-1=0 \end{matrix}\right\} \Leftrightarrow \left.\begin{matrix} x^2+y^2-3y-5=0 \\ x=1 \end{matrix}\right\} \Leftrightarrow \left.\begin{matrix} 1+y^2-3y-5=0 \\ x=1 \end{matrix}\right\} \Leftrightarrow \left.\begin{matrix} y^2-3y-4=0 \\ x=1 \end{matrix}\right\} \Leftrightarrow$$

$$\begin{matrix} y=-1 \\ x=1 \end{matrix} \text{ ή } \begin{matrix} y=4 \\ x=1 \end{matrix}$$

Άρα οι λύσεις της εξίσωσης είναι οι μιγαδικοί: $z=1-i$ και $z=1+4i$.

Άσκηση 32.

Να βρείτε τις τιμές των παραστάσεων

i) $(1+i)^2$

ii) $(2-i)^3$

<u>Λύση</u>

i) $(1+i)^2 = 1^2 + 2\cdot 1\cdot i + i^2 = 1 + 2i - 1 = 2i$

ii) $(2-i)^3 = 2^3 - 3\cdot 2^2\cdot i + 3\cdot 2\cdot i^2 - i^3 = 8 - 12i - 6 + i = 2 - 11i$

Άσκηση 33.

Αν $\lambda, \alpha, \beta \in \mathbf{R}$ και ισχύει: $(\alpha+\beta i)^2+(\alpha-\beta i)^2-\lambda=(i+\lambda i)i+(\alpha+\beta i)(\alpha-\beta i)$, να αποδείξετε ότι: $\alpha^2=3\beta^2-1$

<u>Λύση</u>

$\alpha^2-\beta^2+2\alpha\beta i+\alpha^2-\beta^2-2\alpha\beta i-\lambda=-1-\lambda+\alpha^2+\beta^2 \Leftrightarrow 2\alpha^2-2\beta^2-\lambda=\alpha^2+\beta^2-\lambda-1 \Leftrightarrow$

$\alpha^2-3\beta^2=-1 \Leftrightarrow \alpha^2=3\beta^2-1$

Άσκηση 34.

Δίνεται ο μιγαδικός $z=(3+2i)x+(y-2)i-4, x, y\in\mathbf{R}$. Αν $\mathrm{Re}(z)=\mathrm{Im}(z)$ να αποδείξετε ότι: $x=y+2$

Λύση

$z=3x+2xi+yi-2i-4 \Leftrightarrow z=(3x-4)+(2x+y-2)i$

Επομένως $\mathrm{Re}(z)=3x-4$ και $\mathrm{Im}(z)=2x+y-2$.

Οπότε από την συνθήκη $\mathrm{Re}(z)=\mathrm{Im}(z)$ έχουμε:

$3x-4=2x+y-2 \Leftrightarrow x=y+2$

Άσκηση 35.

Να βρείτε τους πραγματικούς αριθμούς α, β, γ ώστε οι μιγαδικοί $z = \alpha + \beta + 2\alpha\beta i$ και $w = 1 - \gamma + \left(1 + \gamma^2\right)i$ να είναι ίσοι.

<u>Λύση</u>

$$z = w \Leftrightarrow \alpha + \beta + 2\alpha\beta i = 1 - \gamma + \left(1 + \gamma^2\right)i \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} \alpha + \beta = 1 - \gamma \\ 2\alpha\beta = 1 + \gamma^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \gamma = 1 - \alpha - \beta \\ 2\alpha\beta = 1 + \gamma^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \gamma = 1 - \alpha - \beta \\ 2\alpha\beta = 1 + \left(1 - \alpha - \beta\right)^2 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} \gamma = 1 - \alpha - \beta \\ 2\alpha\beta = 1 + 1 + \alpha^2 + \beta^2 - 2\alpha - 2\beta + 2\alpha\beta \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \gamma = 1 - \alpha - \beta \\ \left(\alpha - 1\right)^2 + \left(\beta - 1\right)^2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} \gamma = 1 - \alpha - \beta \\ \alpha = 1 \text{ και } \beta = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \gamma = -1 \\ \alpha = 1 \text{ και } \beta = 1 \end{cases}$$

Άσκηση 36.

Έστω $z = x + yi$ με $x, y \in \mathbf{R}$ και $y > 0$. Αν ισχύει $\mathrm{Re}\left[(z+1)zi\right] > \mathrm{Im}(-z)$ να αποδείξετε ότι $x < 0$

Λύση

$(z+1)zi = \left[(x+1)+yi\right]\cdot\left[(x+yi)i\right] =$

$\left[(x+1)+yi\right](xi-y) = x(x+1)i - y(x+1) + xyi^2 - y^2i =$

$x^2i + xi - xy - y - xy - y^2i =$

$(-2xy-y)+(x^2+x-y^2)i$

Οπότε από την συνθήκη έχουμε: $-2xy - y > -y \Leftrightarrow -2xy > 0 \Leftrightarrow 2xy < 0 \Leftrightarrow xy < 0$

και επειδή $y > 0$ έπεται ότι $x < 0$

Άσκηση 37.

Αν $z \in \mathbf{C}^*$ και $\mathrm{Re}(z) > 0$ να αποδείξετε ότι $\mathrm{Re}\left(\frac{1}{z}\right) > 0$

<u>Λύση</u>

Έστω $z = x + yi,\ x, y \in \mathbf{R}$ με $x > 0$.

Έχουμε $\frac{1}{z} = \frac{1}{x+yi} = \frac{1}{x+yi} \cdot \frac{x-yi}{x-yi} = \frac{x-yi}{x^2+y^2} = \frac{x}{x^2+y^2} - \frac{y}{x^2+y^2} i$

$\mathrm{Re}\left(\frac{1}{z}\right) = \frac{x}{x^2+y^2} > 0$ διότι $x^2 + y^2 > 0$ για κάθε $x, y \in \mathbf{R}$ και $x > 0$ από την υπόθεση.

Άσκηση 38.

Αν $z \in \mathbf{C}$ με $\mathrm{Re}\left(2\overline{z}-1\right) < \mathrm{Re}\left(z+2\right)$ να αποδείξετε ότι $x<3$

<u>Λύση</u>

Έστω $z = x + yi$ με $x, y \in \mathbf{R}$.

Τότε έχουμε:

$2\overline{z}-1 = 2\left(x-yi\right)-1 = \left(2x-1\right)-2yi$

$z+2 = x+yi+2 = \left(x+2\right)+yi$

και από την δοσμένη συνθήκη ισχύει $2x-1 < x+2 \Leftrightarrow x<3$

Άσκηση 39.

Να λύσετε την εξίσωση $z^3+z+10=0$

Λύση

Από το σχήμα Horner έχουμε $z^3+z+10=0 \Leftrightarrow (z+2)(z^2-2z+5)=0$

1	0	1	10	-2
	-2	4	-10	
1	-2	5	0	

άρα $z=-2$ ή $z^2-2z+5=0$ και

$\Delta=(-2)^2-4\cdot 1\cdot 5=4-20=-16$

Άρα $z_{1,2}=\dfrac{2\pm i\sqrt{16}}{2}=\dfrac{2\pm 4i}{2}=1\pm 2i$.

Επομένως οι λύσεις της εξίσωσης είναι $-2, 1+2i, 1-2i$.

ΘΕΜΑ Γ

Άσκηση 1.

Αν $\alpha, \beta \in \mathbf{R}$ και $\nu \in \mathbf{N}^*$, να αποδείξετε ότι:

$$(\alpha+\beta i)^{4\nu+2}+(\beta-\alpha i)^{4\nu+2}=0$$

<u>Λύση</u>

<u>Α' Τρόπος</u>:

$$(\alpha+\beta i)^{4\nu+2}+(\beta-\alpha i)^{4\nu+2}=\left[(\alpha+\beta i)^2\right]^{2\nu+1}+\left[(\beta-\alpha i)^2\right]^{2\nu+1}=$$

$$(\alpha^2-\beta^2+2\alpha\beta i)^{2\nu+1}+\left[\beta^2-\alpha^2-2\alpha\beta i\right]^{2\nu+1}=$$

$$(\alpha^2-\beta^2+2\alpha\beta i)^{2\nu+1}+\left[-(\alpha^2-\beta^2+2\alpha\beta i)\right]^{2\nu+1}=$$

$$(\alpha^2-\beta^2+2\alpha\beta i)^{2\nu+1}+(-1)^{2\nu+1}\cdot(\alpha^2-\beta^2+2\alpha\beta i)^{2\nu+1}=$$

$$(\alpha^2-\beta^2+2\alpha\beta i)-(\alpha^2-\beta^2+2\alpha\beta i)=0$$

Διότι $(-1)^{2\nu+1}=-1$ επειδή ο $2\nu+1$ είναι περιττός.

<u>Β' Τρόπος</u>:

$$(\alpha+\beta i)^{4\nu+2}+(\beta-\alpha i)^{4\nu+2}=$$

$$(\alpha+\beta i)^{4\nu+2}+\left[(-i)\cdot(\alpha+\beta i)\right]^{4\nu+2}=$$

$$(\alpha+\beta i)^{4\nu+2}\cdot\left[1+(-i)^{4\nu+2}\right]=$$

$$(\alpha+\beta i)^{4\nu+2}\cdot\left[1+(-i)^{4\nu}\cdot(-i)^2\right]=$$

$$(\alpha+\beta i)^{4\nu+2}\cdot(1-1)=0$$

<u>Γ' Τρόπος</u>:

- Αν $\beta-\alpha i=0$, τότε $\alpha=\beta=0$ και ισχύει
- Αν $\beta-\alpha i\neq 0$, τότε έχουμε:

$$\left(\alpha+\beta i\right)^{4\nu+2}+\left(\beta-\alpha i\right)^{4\nu+2}=0 \Leftrightarrow \left(\alpha+\beta i\right)^{4\nu+2}=-\left(\beta-\alpha i\right)^{4\nu+2}$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{\alpha+\beta i}{\beta-\alpha i}\right)^{4\nu+2}=-1 \Leftrightarrow \left(\frac{\left(\alpha+\beta i\right)\left(\beta+\alpha i\right)}{\beta^2+\alpha^2}\right)^{4\nu+2}=-1$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{\alpha\beta+\alpha^2 i+\beta^2 i-\alpha\beta}{\alpha^2+\beta^2}\right)^{4\nu+2}=-1 \Leftrightarrow \left(\frac{i\left(\alpha^2+\beta^2\right)}{\alpha^2+\beta^2}\right)^{4\nu+2}=-1$$

$\Leftrightarrow i^{4\nu+2}=-1 \Leftrightarrow i^2=-1$ που ισχύει.

Άσκηση 2.

Να βρείτε τη μορφή των θετικών ακέραιων ν για τους οποίους ισχύει:

$\left(1+2i\right)^{\nu}+\left(2-i\right)^{\nu}=0$.

<u>Λύση</u>

$$\left(1+2i\right)^{\nu}+\left(2-i\right)^{\nu}=0 \Leftrightarrow \left(1+2i\right)^{\nu}=-\left(2-i\right)^{\nu}$$

$$\left(\frac{1+2i}{2-i}\right)^{\nu}=-1 \Leftrightarrow \left(\frac{\left(1+2i\right)\left(2+i\right)}{5}\right)^{\nu}=-1$$

$$\left(\frac{\cancel{2}+i+4i-\cancel{2}}{5}\right)^{\nu}=-1 \Leftrightarrow \left(\frac{5i}{5}\right)^{\nu}=-1 \Leftrightarrow i^{\nu}=-1$$

Άρα $\nu=4\kappa+2,\ \ \kappa\in\mathbf{N}$.

Άσκηση 3.

Δίνεται ο μιγαδικός $z = \eta\mu\vartheta - 1 + (\sigma\upsilon\nu\vartheta + 2)\cdot i, \quad \vartheta \in [0, 2\pi]$. Να αποδείξετε ότι οι εικόνες $M(z)$ ανήκουν σε κύκλο για τον οποίον να βρεθούν το κέντρο και η ακτίνα.

<u>Λύση</u>

Έστω $z = x + yi \; x, y \in \mathbf{R}$ Τότε:

$$x + yi = \eta\mu\vartheta - 1 + (\sigma\upsilon\nu\vartheta + 2)\cdot i \Leftrightarrow \begin{cases} x = \eta\mu\vartheta - 1 \\ y = \sigma\upsilon\nu\vartheta + 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \eta\mu\vartheta = x + 1 \\ \sigma\upsilon\nu\vartheta = y - 2 \end{cases}$$

Όμως $\eta\mu^2\theta + \sigma\upsilon\nu^2\theta = 1$. Επομένως $(x+1)^2 + (y-2)^2 = 1$. Άρα οι εικόνες $M(z)$ ανήκουν σε κύκλο με κέντρο $K(-1, 2)$ και ακτίνα $\rho = 1$.

Άσκηση 4.

Να βρείτε το γεωμετρικό τόπο των εικόνων του z για τους οποίους ισχύει:

i) $\mathrm{Re}\left(z+\frac{1}{z}\right)=10\mathrm{Re}(z)$.

ii) $\mathrm{Im}\left(z+\frac{1}{z}\right)+5\mathrm{Im}(z)=0$.

Λύση

Πρέπει $z \neq 0$, δηλαδή αν $z=x+yi,\ x,y\in\mathbf{R}$, τότε πρέπει $x\neq 0$ ή $y\neq 0$

$$z+\frac{1}{z}=x+yi+\frac{1}{x+yi}=$$

$$x+yi+\frac{1}{x+yi}\cdot\frac{x-yi}{x-yi}=$$

$$x+yi+\frac{x-yi}{x^2+y^2}=$$

$$x+\frac{x}{x^2+y^2}+\left(y-\frac{y}{x^2+y^2}\right)\cdot i$$

Επομένως $z+\frac{1}{z}=x\cdot\left(1+\frac{1}{x^2+y^2}\right)+y\cdot\left(1-\frac{1}{x^2+y^2}\right)\cdot i$,

που σημαίνει ότι $\mathrm{Re}\left(z+\frac{1}{z}\right)=x\cdot\left(1+\frac{1}{x^2+y^2}\right)$ και $\mathrm{Im}\left(z+\frac{1}{z}\right)=y\cdot\left(1-\frac{1}{x^2+y^2}\right)$

i) $\mathrm{Re}\left(z+\frac{1}{z}\right)=10\mathrm{Re}(z)\Leftrightarrow$

$$x\cdot\left(1+\frac{1}{x^2+y^2}\right)=10\cdot x\Leftrightarrow$$

$$10x-x\cdot\left(1+\frac{1}{x^2+y^2}\right)=0\Rightarrow$$

$$x\cdot\left(10-1-\frac{1}{x^2+y^2}\right)=0\Leftrightarrow$$

$$x\cdot\left(9-\frac{1}{x^2+y^2}\right)=0\Leftrightarrow(x=0)\text{ ή }\left(9=\frac{1}{x^2+y^2}\right)\Leftrightarrow(x=0)\text{ ή }\left(x^2+y^2=\frac{1}{9}=\left(\frac{1}{3}\right)^2\right)$$

Άρα ο γεωμετρικός τόπος των εικόνων του z αποτελείται από τον άξονα y΄y, χωρίς το σημείο $O(0,0)$ και τον κύκλο με κέντρο $O(0,0)$ και ακτίνα $\rho=\frac{1}{3}$.

ii) $y\left(1-\frac{1}{x^2+y^2}\right)+5y=0 \Leftrightarrow$

$y\cdot\left(1-\frac{1}{x^2+y^2}+5\right)=0 \Leftrightarrow$

$y\cdot\left(6-\frac{1}{x^2+y^2}\right)=0$

Άρα $y=0$ ή $6-\frac{1}{x^2+y^2}=0 \Leftrightarrow$

$y=0$ ή $\frac{1}{x^2+y^2}=6 \Leftrightarrow$

$y=0$ ή $x^2+y^2=\left(\frac{1}{\sqrt{6}}\right)^2$

Άρα ο γεωμετρικός τόπος των εικόνων του z αποτελείται από τον άξονα x΄x, εκτός του σημείου $O(0,0)$ και τον κύκλο με κέντρο $O(0,0)$ και ακτίνα $\rho=\frac{1}{\sqrt{6}}=\frac{\sqrt{6}}{6}$.

Άσκηση 5.

Αν ο αριθμός $w=\dfrac{z-2i}{z+2}$ είναι φανταστικός να δείξετε ότι οι εικόνες $M(z)$ βρίσκονται σε κύκλο.

<u>Λύση</u>

Πρέπει $z+2\neq 0 \Leftrightarrow z\neq -2$.

$$w\in \mathbf{I} \Leftrightarrow w=-\overline{w} \Leftrightarrow \frac{z-2i}{z+2}=-\frac{\overline{z}+2i}{\overline{z}+2} \Leftrightarrow \left(z-2i\right)\left(\overline{z}+2\right)=\left(-\overline{z}-2i\right)\left(z+2\right) \Leftrightarrow$$

$$z\cdot\overline{z}+2z-2\overline{z}i-4i=-z\cdot\overline{z}-2\overline{z}-2zi-4i \Leftrightarrow$$

$$2z\overline{z}+2z+2\overline{z}+2zi-2\overline{z}i=0 \Leftrightarrow$$

$$z\cdot\overline{z}+z+\overline{z}+\left(z-\overline{z}\right)i=0 \Leftrightarrow$$ (Θέτουμε $z=x+yi$)

$$\left(x+yi\right)\left(x-yi\right)+2x+2yi\cdot i=0 \Leftrightarrow$$

$$x^2+y^2+2x-2y=0 \Leftrightarrow$$

$$\left(x+1\right)^2+\left(y-1\right)^2=2 .$$

Άρα οι εικόνες του z βρίσκονται στον κύκλο με κέντρο το $K\left(-1,1\right)$ και ακτίνα $\rho=\sqrt{2}$ εκτός του σημείου $A\left(-2,0\right)$.

Άσκηση 6.

Αν οι εικόνες των μιγαδικών z στο μιγαδικό επίπεδο βρίσκονται στην ευθεία $\epsilon: y = x - 3$ να βρείτε που βρίσκονται οι εικόνες των μιγαδικών $w = 2iz + (2 - i)\cdot\overline{z} + 3$.

<u>Λύση</u>

Έστω $z = x + yi$ με $y = x - 3$. Τότε $z = x + (x - 3)i$

Επομένως $w = 2i\left[x + \left(x - 3\right)i\right] + \left(2 - i\right)\left[x - \left(x - 3\right)i\right] + 3$

$= 2xi - 2(x - 3) + 2x - 2(x - 3)i - xi - (x - 3) + 3$

$= \cancel{2xi} \cancel{-2x} + 2 + \cancel{2x} \cancel{-2xi} + 6x - xi - x + 3 + 3$

$= \left(12 - x\right) + \left(6 - x\right)i$

Αν λοιπόν είναι $w = u + vi$, τότε έχουμε:

$\begin{cases} u = 12 - x \\ v = 6 - x \end{cases}$ και με απαλοιφή του x προκύπτει $u - v = 6 \Leftrightarrow v = u - 6$

Άρα οι εικόνες του w βρίσκονται στην ευθεία

$\delta: y = x - 6$

Άσκηση 7.

Να λύσετε την εξίσωση: $z\overline{z}+z-\overline{z}+1=14-6i$

<u>Λύση</u>

Αν $z=x+yi$ με $x,y\in\mathbf{R}$ η εξίσωση γίνεται:

$$(x-yi)(x+yi)+x+yi-(x-yi)+1=14-6i \Leftrightarrow$$

$$x^2+y^2+x+yi-x+yi+1=14-6i \Leftrightarrow$$

$$x^2+y^2+2yi=13-6i$$

Άρα:

$$\left.\begin{array}{r} x^2+y^2=13 \\ 2y=-6 \end{array}\right\} \Leftrightarrow \left.\begin{array}{r} x^2+y^2=13 \\ y=-3 \end{array}\right\} \Leftrightarrow \left.\begin{array}{r} x^2+(-3)^2=13 \\ y=-3 \end{array}\right\} \Leftrightarrow \left.\begin{array}{r} x^2=4 \\ y=-3 \end{array}\right\} \Leftrightarrow \begin{array}{c} x=2 \\ y=-3 \end{array} \text{ ή } \begin{array}{c} x=-2 \\ y=-3 \end{array}.$$

Άρα οι λύσεις της εξίσωσης είναι οι αριθμοί:

$z_1=2-3i,\ z_2=-2-3i$

Άσκηση 8.

Να βρείτε το σύνολο των εικόνων των μιγαδικών z στις περιπτώσεις κατά τις οποίες ο αριθμός $w = \frac{z-3}{z+4i}$ είναι:

i) φανταστικός

ii) πραγματικός

Λύση

Αν $z = x + yi$, με $x, y \in \mathbf{R}$, τότε ο w γίνεται:

$$w = \frac{x-3+yi}{x+(y+4)i} = \frac{(x-3)+yi}{x+(y+4)i} \cdot \frac{x-(y+4)i}{x-(y+4)i} = \frac{x(x-3)-(x-3)(y+4)i+xyi-y(y+4)i^2}{x^2+(y+4)^2} =$$

$$\frac{x^2-3x+y^2+4y}{x^2+(y+4)^2} + \frac{xy-xy-4x+3y+12}{x^2+(y+4)^2}i = \frac{x^2-3x+y^2+4y}{x^2+(y+4)^2} + \frac{-4x+3y+12}{x^2+(y+4)^2}i$$

Επομένως:

i) Ο w είναι φανταστικός αν και μόνο αν $\mathrm{Re}(w) = 0 \Leftrightarrow \frac{x^2-3x+y^2+4y}{x^2+(y+4)^2} = 0$

Δηλαδή αν και μόνο αν $x^2 - 3x + y^2 + 4y = 0$ (1) και $x^2 + (y+4)^2 \neq 0$

Η εξίσωση (1) με τη μέθοδο συμπλήρωσης τετραγώνου μετασχηματίζεται στην

$\left(x - \frac{3}{2}\right)^2 + \left(y+2\right)^2 = \left(\frac{5}{2}\right)^2$ και $(x, y) \neq (0, -4)$

Άρα το σύνολο των εικόνων του z είναι τα σημεία του κύκλου με κέντρο το $K\left(\frac{3}{2}, -2\right)$ και ακτίνα $\rho = \frac{5}{2}$ με εξαίρεση το σημείο $A(0, -4)$.

ii) $w \in \mathbf{R} \Leftrightarrow \mathrm{Im}(w) = 0 \Leftrightarrow \frac{-4x+3y+12}{x^2+(y+4)^2} = 0$ και $x^2 + (y+4)^2 \neq 0$

Δηλαδή $-4x + 3y + 12 = 0$ και $(x, y) \neq (0, -4)$

Άρα το σύνολο των εικόνων του z ειναι τα σημεία της ευθείας με εξίσωση $-4x + 3y + 12 = 0$ με εξαίρεση το σημείο $A(0, -4)$.

Άσκηση 9.

Δίνεται η εξίσωση $z^2+2z\cdot\sigma\upsilon\nu\vartheta+1=0,\ \vartheta\in[0,2\pi)$

i) Να λύσετε την εξίσωση.

ii) Να αποδείξετε ότι οι εικόνες των ριζών της εξίσωσης ανήκουν στο μοναδιαίο κύκλο.

<u>Λύση</u>

i) Βρίσκουμε τη διακρίνουσα Δ της εξίσωσης

$$\Delta=\beta^2-4\alpha\gamma=(2\sigma\upsilon\nu\vartheta)^2-4\cdot1\cdot1=4\sigma\upsilon\nu^2\vartheta-4=4(\sigma\upsilon\nu^2\vartheta-1)=-4\eta\mu^2\vartheta\le 0$$

Διότι $\eta\mu^2\vartheta+\sigma\upsilon\nu^2\vartheta=1$

Άρα $z_{1,2}=\dfrac{-2\sigma\upsilon\nu\vartheta\pm i\sqrt{4\eta\mu^2\vartheta}}{2}=\dfrac{-2\sigma\upsilon\nu\vartheta\pm i\cdot2\eta\mu\vartheta}{2}=\begin{cases}-\sigma\upsilon\nu\vartheta+i\cdot\eta\mu\vartheta\\-\sigma\upsilon\nu\vartheta-i\cdot\eta\mu\vartheta\end{cases}$ όπου $\vartheta\in[0,2\pi)$

Επομένως $z=-\sigma\upsilon\nu\vartheta+\eta\mu\vartheta\cdot i$ ή $z=-\sigma\upsilon\nu\vartheta-\eta\mu\vartheta\cdot i$

ii) Για $z=x+yi,\ x,y\in\mathbf{R}$ έχουμε:

$x+yi=-\sigma\upsilon\nu\vartheta+\eta\mu\vartheta\cdot i$, Άρα $\left.\begin{array}{c}x=-\sigma\upsilon\nu\vartheta\\y=\eta\mu\vartheta\end{array}\right\}\Leftrightarrow\left.\begin{array}{c}x^2=\sigma\upsilon\nu^2\vartheta\\y^2=\eta\mu^2\vartheta\end{array}\right\}\overset{(+)}{\Leftrightarrow}x^2+y^2=1$

Δηλαδή η εικόνα του $z_1=-\sigma\upsilon\nu\vartheta+\eta\mu\vartheta\cdot i$ ανήκει στο μοναδιαίο κύκλο.

Ομοίως $x+yi=-\sigma\upsilon\nu\vartheta-\eta\mu\vartheta\cdot i$, Άρα $\left.\begin{array}{c}x=-\sigma\upsilon\nu\vartheta\\y=-\eta\mu\vartheta\end{array}\right\}\Leftrightarrow\left.\begin{array}{c}x^2=\sigma\upsilon\nu^2\vartheta\\y^2=\eta\mu^2\vartheta\end{array}\right\}\overset{(+)}{\Leftrightarrow}x^2+y^2=1$

Δηλαδή και η εικόνα του $z_2=-\sigma\upsilon\nu\vartheta-\eta\mu\vartheta\cdot i$ ανήκει στον μοναδιαίο κύκλο.

Άσκηση 10.

Να αναλύσετε το μιγαδικό $z=5+3i$ σε άθροισμα δύο μιγαδικών z_1 και z_2 που οι εικόνες τους βρίσκονται στις ευθείες $\epsilon_1: y=x+1, \epsilon_2: y=2x-1$ αντίστοιχα.

Λύση

Έστω $z_1=\alpha+\beta i$ και $z_2=\gamma+\delta i$

Επειδή οι εικόνες των z_1, z_2 ανήκουν στις ϵ_1, ϵ_2 αντίστοιχα θα ισχύουν:
$\beta=\alpha+1$ και $\delta=2\gamma-1$

Άρα $z_1=\alpha+(\alpha+1)i$ και $z_2=\gamma+(2\gamma-1)i$

Επίσης θα ισχύει $z=z_1+z_2 \Leftrightarrow$
$5+3i=\alpha+(\alpha+1)\cdot i+\gamma+(2\gamma-1)\cdot i \Leftrightarrow 5+3i=(\alpha+\gamma)+(\alpha+2\gamma)\cdot i$

Άρα:

$$\left.\begin{array}{c}\alpha+\gamma=5\\ \alpha+2\gamma=3\end{array}\right\} \Leftrightarrow \left.\begin{array}{c}\alpha=5-\gamma\\ \alpha+2\gamma=3\end{array}\right\} \Leftrightarrow \left.\begin{array}{c}\alpha=5-\gamma\\ 5-\gamma+2\gamma=3\end{array}\right\} \Leftrightarrow \left.\begin{array}{c}\alpha=5-\gamma\\ \gamma=-2\end{array}\right\} \Leftrightarrow \left.\begin{array}{c}\alpha=7\\ \gamma=-2\end{array}\right\}$$

Επομένως οι δύο μιγαδικοί είναι οι $z_1=7+8i$ και $z_2=-2-5i$

Άσκηση 11.

Να γράψετε το μιγαδικό $z = 1 + 6i$ ως διαφορά δύο μιγαδικών z_1 και z_2 των οποίων οι εικόνες βρίσκονται στις ευθείες $\epsilon_1 : y = x - 3, \epsilon_2 : y = -x$ αντίστοιχα.

<u>Λύση</u>

Έστω $z_1 = \alpha + \beta i$ και $z_2 = \gamma + \delta i$

Επειδή οι εικόνες των z_1, z_2 ανήκουν στις ϵ_1, ϵ_2 αντίστοιχα θα ισχύουν:
$\beta = \alpha - 3$ και $\delta = -\gamma$

Άρα ο $z_1 = \alpha + \left(\alpha - 3\right)i$ και $z_2 = \gamma - \gamma i$

Επίσης θα ισχύει $z = z_1 - z_2 \Leftrightarrow$

$$1 + 6i = \alpha + \left(\alpha - 3\right)i - (\gamma - \gamma i) \Leftrightarrow 1 + 6i = \alpha + \left(\alpha - 3\right)i - \gamma + \gamma i \Leftrightarrow$$

$$1 + 6i = (\alpha - \gamma) + (\alpha + \gamma - 3) \cdot i$$

Άρα:

$$\left.\begin{aligned} \alpha - \gamma &= 1 \\ \alpha + \gamma - 3 &= 6 \end{aligned}\right\} \Leftrightarrow \left.\begin{aligned} \alpha - \gamma &= 1 \\ \alpha + \gamma &= 9 \end{aligned}\right\} \overset{(+)}{\Leftrightarrow} \left.\begin{aligned} 2\alpha &= 10 \\ \alpha + \gamma &= 9 \end{aligned}\right\} \Leftrightarrow \left.\begin{aligned} \alpha &= 5 \\ \gamma &= 4 \end{aligned}\right\}$$

Άρα οι δύο μιγαδικοί είναι οι $z_1 = 5 + 2i$, $z_2 = 4 - 4i$.

Άσκηση 12.

Να αποδείξετε ότι η τιμή της παράστασης $A=\left(\frac{2+i}{1-2i}\right)^{2\nu}+\left(\frac{i-2}{1+2i}\right)^{2\nu}$ είναι ίση με $2\cdot(-1)^{\nu}$.

<u>Λύση</u>

Φέρνουμε τα δύο κλάσματα στη μορφή $z=x+yi$, δηλαδή

$$\frac{2+i}{1-2i}=\frac{2+i}{1-2i}\cdot\frac{1+2i}{1+2i}=\frac{2+4i+i-2}{1^2+2^2}=\frac{5i}{5}=i$$

και

$$\frac{i-2}{1+2i}=\frac{i-2}{1+2i}\cdot\frac{1-2i}{1-2i}=\frac{i+2-2+4i}{1^2+2^2}=\frac{5i}{5}=i$$

Άρα η παράσταση Α θα είναι ίση με:

$$A=i^{2\nu}+i^{2\nu}=\left(i^2\right)^{\nu}+\left(i^2\right)^{\nu}=\left(-1\right)^{\nu}+\left(-1\right)^{\nu}=2\cdot(-1)^{\nu}$$

Άσκηση 13.

Αν $z, w \in \mathbf{C}$ και ισχύει: $z^2 + w^2 = 0$ να αποδείξετε ότι: $z^{4\lambda+2} + w^{4\lambda+2} = 0, \lambda \in \mathbf{N}$

<u>Λύση</u>

$$z^{4\lambda+2} + w^{4\lambda+2} = z^{4\lambda+2} + \left(w^2\right)^{2\lambda+1} = z^{4\lambda+2} + \left(-z^2\right)^{2\lambda+1}$$

$$= z^{4\lambda+2} - \left(z^2\right)^{2\lambda+1} = z^{4\lambda+2} - z^{4\lambda+2} = 0$$

Άσκηση 14.

Να βρείτε το γεωμετρικό τόπο των εικόνων των μιγαδικών αριθμών z αν οι εικόνες των μιγαδικών $1, iz, 1-z^2$ είναι σημεία συνευθειακά.

<u>Λύση</u>

Έστω $z = x + yi,\ x, y \in \mathbf{R}$

$iz = i(x+yi) = -y + xi$ που έχει εικόνα το σημείο $A(-y, x)$

$1-z^2 = 1-(x+yi)^2 = 1-(x^2-y^2+2xyi) = 1-x^2+y^2-2xyi$ που έχει εικόνα

το σημείο $B(1-x^2+y^2, -2xy)$.

Τέλος η εικόνα του αριθμού 1 είναι το σημείο $\Gamma(1,0)$.

Επίσης $\vec{A\Gamma} = (y+1, -x),\ \vec{B\Gamma} = (x^2-y^2, 2xy)$.

A, B, Γ συνευθειακά, επομένως $\vec{A\Gamma} \parallel \vec{B\Gamma} \Leftrightarrow \begin{vmatrix} y+1 & -x \\ x^2-y^2 & 2xy \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow$

$(y+1)(2xy) + x(x^2-y^2) = 0 \Leftrightarrow$

$2xy^2 + 2xy + x^3 - xy^2 = 0 \Leftrightarrow$

$x(2y^2+2y+x^2-y^2) = 0 \Leftrightarrow$

$x(x^2+y^2+2y) = 0 \Leftrightarrow$

$(x=0)$ ή $(x^2+y^2+2y=0) \Leftrightarrow (x=0)$ ή $x+(y+1)^2 = 1$.

Άρα ο γεωμετρικός τόπος είναι η ευθεία $x=0$ και ο κύκλος $x^2+(y+1)^2=1$.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1ο: ΜΙΓΑΔΙΚΟΙ ΑΡΙΘΜΟΙ

ΕΝΟΤΗΤΑ 2: ΜΕΤΡΟ ΜΙΓΑΔΙΚΟΥ ΑΡΙΘΜΟΥ - ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ ΤΟΥ ΜΕΤΡΟΥ

[Κεφ. 2.3: Μέτρο Μιγαδικού Αριθμού σχολικού βιβλίου].

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ Β

Άσκηση 1.

Να βρείτε τα μέτρα των μιγαδικών:

α) $z_1 = (3-4i)(6+8i)$

β) $z_2 = \left(\sqrt{3}+i\right)^2$

γ) $z_3 = \left(\dfrac{\sqrt{5}-2i}{2+i}\right)^2$

Λύση

α) Έχουμε $|z_1| = |(3-4i)(6+8i)| = |3-4i|\cdot|6+8i| =$
$\sqrt{3^2+(-4)^2}\cdot\sqrt{6^2+8^2} = \sqrt{25}\cdot\sqrt{100} = 5\cdot 10 = 50.$

β) Έχουμε $|z_2| = \left|\left(\sqrt{3}+i\right)^2\right| = \left|\sqrt{3}+i\right|^2 = \left(\sqrt{\left(\sqrt{3}\right)^2+1}\right)^2 = 4.$

γ) Έχουμε $|z_3| = \left|\left(\dfrac{\sqrt{5}-2i}{2+i}\right)^2\right| = \left|\dfrac{\sqrt{5}-2i}{2+i}\right|^2 =$

$$\frac{\left|\sqrt{5}-2i\right|^2}{|2+i|^2} = \frac{\left(\sqrt{\left(\sqrt{5}\right)^2+(-2)^2}\right)^2}{\left(\sqrt{2^2+1}\right)^2} = \frac{9}{5}.$$

Άσκηση 2.

Να βρείτε τα μέτρα των μιγαδικών:

α) $z_1 = \dfrac{(1+i)^2(3-i)}{(4-3i)}$

β) $z_2 = \left(\dfrac{1}{2} - \dfrac{\sqrt{3}}{2}i\right)^{2010}$

<u>Λύση</u>

α) Έχουμε $|z_1| = \left|\dfrac{(1+i)^2\cdot(3-i)}{(4-3i)}\right| = \dfrac{\left|(1+i)^2\cdot(3-i)\right|}{|4-3i|} = \dfrac{\left|(1+i)^2\right|\cdot|3-i|}{|4-3i|} =$

$\dfrac{|1+i|^2\cdot|3-i|}{|4-3i|} = \dfrac{\left(\sqrt{1^2+1^2}\right)^2\cdot\sqrt{3^2+1}}{\sqrt{4^2+(-3)^2}} = \dfrac{2\cdot\sqrt{10}}{5}.$

β) Έχουμε $|z_2| = \left|\left(\dfrac{1}{2} - \dfrac{\sqrt{3}}{2}i\right)^{2010}\right| = \left|\dfrac{1}{2} - \dfrac{\sqrt{3}}{2}i\right|^{2010} = \left(\sqrt{\left(\dfrac{1}{2}\right)^2 + \left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}\right)^{2010} =$

$\left(\sqrt{\dfrac{1}{4}+\dfrac{3}{4}}\right)^{2010} = 1^{2010} = 1.$

Άσκηση 3.

Να βρείτε τα μέτρα των μιγαδικών:

α) $z_1 = \left(\dfrac{2\alpha - i}{2\alpha + i}\right)^{2010}$, $\alpha \in \mathbf{R}$

β) $z_2 = \left(\dfrac{9 + 6\alpha i - \alpha^2}{9 + \alpha^2}\right)^{2011}$, $\alpha \in \mathbf{R}$

<u>Λύση</u>

α) Έχουμε $|z_1| = \left|\dfrac{2\alpha - i}{2\alpha + i}\right|^{2010} = \left(\dfrac{|2\alpha - i|}{|2\alpha + i|}\right)^{2010} = \left(\dfrac{\left|\overline{2\alpha + i}\right|}{|2\alpha + i|}\right)^{2010} =$

$1^{2010} = 1.$

β) Έχουμε $|z_2| = \left|\left(\dfrac{9 + 6\alpha i - \alpha^2}{9 + \alpha^2}\right)^{2011}\right| = \dfrac{\left|(3 + \alpha i)^2\right|^{2011}}{\left(9 + \alpha^2\right)^{2011}} =$

$\dfrac{\left(|3 + \alpha i|^2\right)^{2011}}{\left(9 + \alpha^2\right)^{2011}} = \dfrac{\left(9 + \alpha^2\right)^{2011}}{\left(9 + \alpha^2\right)^{2011}} = 1.$

Άσκηση 4.

Δίνεται $|2z| = \left|2z + \frac{1}{z}\right|$, όπου $z = x + yi,\ x, y \in \mathbf{R}^*$. Να δείξετε ότι $\text{Re}\left(z^2\right) = -\frac{1}{4}$.

<u>Λύση</u>

Είναι $|2z| = \left|2z + \frac{1}{z}\right| \Leftrightarrow 4|z|^2 = \left|2z + \frac{1}{z}\right|^2 \Leftrightarrow 4z\cdot\overline{z} = \left(2z + \frac{1}{z}\right)\cdot\left(2\overline{z} + \frac{1}{\overline{z}}\right) \Leftrightarrow$

$4z\overline{z} = 4z\cdot\overline{z} + 2\frac{z}{\overline{z}} + 2\frac{\overline{z}}{z} + \frac{1}{z\cdot\overline{z}} \Leftrightarrow 2\frac{z}{\overline{z}} + 2\frac{\overline{z}}{z} + \frac{1}{z\cdot\overline{z}} = 0 \Leftrightarrow 2z^2 + 2\overline{z}^2 + 1 = 0 \Leftrightarrow$

$2\left(z^2 + \overline{z}^2\right) = -1 \Leftrightarrow z^2 + \overline{z}^2 = -\frac{1}{2} \Leftrightarrow 2\text{Re}\left(z^2\right) = -\frac{1}{2} \Leftrightarrow \text{Re}\left(z^2\right) = -\frac{1}{4}.$

Άσκηση 5.

Αν για τον μιγαδικό z ισχύει $|3-2z|>2|z|$, να δείξετε ότι $\mathrm{Re}(z)<\frac{3}{4}$.

<u>Λύση</u>

Είναι $|3-2z|^2>4|z|^2 \Leftrightarrow (3-2z)\cdot(3-2\overline{z})>4z\cdot\overline{z} \Leftrightarrow 9-6\overline{z}-6z+4z\cdot\overline{z}>4z\cdot\overline{z} \Leftrightarrow$

$6z+6\overline{z}<9 \Leftrightarrow (z+\overline{z})<\frac{9}{6} \Leftrightarrow 2\mathrm{Re}(z)<\frac{9}{6} \Leftrightarrow \mathrm{Re}(z)<\frac{9}{12} \Leftrightarrow \mathrm{Re}(z)<\frac{3}{4}.$

Άσκηση 6.

Αν για τους μιγαδικούς z,w με $z \neq w$ ισχύει $|z| = |w| = 2$, να δείξετε ότι ο μιγαδικός $u = \dfrac{z^{2012} - w^{2012}}{(z-w)^{2012}}$ είναι φανταστικός.

<u>Λύση</u>

Ισχύει $|z|^2 = 2^2 \Leftrightarrow z = \dfrac{4}{\overline{z}}, |w|^2 = 2^2 \Leftrightarrow w = \dfrac{4}{\overline{w}}.$

Πρέπει $\overline{u} = -u.$

$$\overline{u} = \frac{\overline{z}^{2012} - \overline{w}^{2012}}{\left(\overline{z} - \overline{w}\right)^{2012}} = \frac{\left(\dfrac{4}{z}\right)^{2012} - \left(\dfrac{4}{w}\right)^{2012}}{\left(\dfrac{4}{z} - \dfrac{4}{w}\right)^{2012}} = \frac{4^{2012}\left(\dfrac{1}{z^{2012}} - \dfrac{1}{w^{2012}}\right)}{4^{2012}\left(\dfrac{1}{z} - \dfrac{1}{w}\right)^{2012}} =$$

$$\frac{w^{2012} - z^{2012}}{(w-z)^{2012}} = \frac{w^{2012} - z^{2012}}{(z-w)^{2012}} = -u.$$

Άρα $u \in \mathbf{I}$.

Άσκηση 7.

Αν για το μιγαδικό z ισχύει $\overline{z}^{14} = 27z^{11}$, να δείξετε ότι $z^{25} \in \mathbf{R}$.

Λύση

Α' Τρόπος:

Έχουμε $\overline{z}^{14} = 27z^{11}$ (1)

άρα $\left|\overline{z}^{14}\right| = 27\left|z^{11}\right| \Leftrightarrow \left|\overline{z}\right|^{14} = 27\left|z\right|^{11} \Leftrightarrow \left|z\right|^{14} = 27\left|z\right|^{11} \Leftrightarrow \left|\ \right|z^{11}(\left|z\right|^{3} - 27) = 0 \Leftrightarrow (\left|z\right|^{11} = 0$ ή $\left|z\right|^{3} = 3^{3}) \Leftrightarrow (\left|z\right| = 0$ ή $\left|z\right| = 3)$.

Αν $\left|z\right| = 0$ τότε z=0 και $z^{25} = 0 \in \mathbf{R}$.

Αν $\left|z\right| = 3 \Leftrightarrow \left|z\right|^{2} = 9 \Leftrightarrow \overline{z} = \dfrac{9}{z}$.

Οπότε η (1) γίνεται $(\dfrac{9}{z})^{14} = 27z^{11} \Leftrightarrow \dfrac{9^{14}}{z^{14}} = 27z^{11} \Leftrightarrow z^{14} \cdot z^{11} = \dfrac{9^{14}}{27} \Leftrightarrow z^{25} = \dfrac{3^{28}}{3^{3}} = 3^{25} \in \mathbf{R}$.

Άρα $z^{25} \in \mathbf{R}$.

Β' Τρόπος:

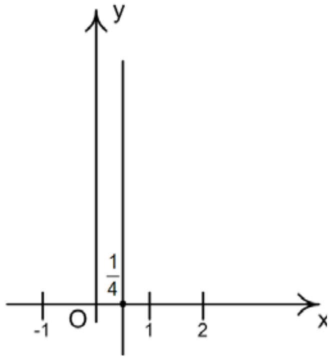
- Αν $z = 0$, τότε $z^{25} = 0 \in \mathbf{R}$
- Αν $z \neq 0$, τότε: $\overline{z}^{14} = 27 \cdot z^{11} \Leftrightarrow$

$\left(\overline{z}\right)^{14} \cdot z^{14} = 27 \cdot z^{25} \Leftrightarrow \left(\overline{z} \cdot z\right)^{14} = 27 \cdot z^{25} \Leftrightarrow \left|z\right|^{28} = 27 \cdot z^{25} \Leftrightarrow z^{25} = \dfrac{\left|z\right|^{28}}{27} \in \mathbf{R}$.

Άσκηση 8.

Να βρείτε τον $z \in \mathbf{C}$, αν ισχύει: $|z+1| = |z-2|$ και $|z| = \sqrt{5}$.

<u>Λύση</u>



Έχουμε $|z+1| = |z-2| \Leftrightarrow |z-(-1+0i)| = |z-(2+0i)|$. Επομένως η εικόνα του $z = x + yi$ ανήκει στη μεσοκάθετο του τμήματος ΑΒ με άκρα $A(-1,0)$ και $B(2,0)$. Άρα ανήκει στην ευθεία $x = \dfrac{1}{2}$ (1). Επειδή $|z| = \sqrt{5}$ η εικόνα των z ανήκει και στον κύκλο με εξίσωση $x^2 + y^2 = 5$ (2).

Επομένως έχουμε το σύστημα $\begin{cases} x^2 + y^2 = 5 \\ x = \dfrac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{1}{4} + y^2 = 5 \\ x = \dfrac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y^2 = \dfrac{19}{4} \\ x = \dfrac{1}{2} \end{cases}$

Επομένως ($x = \dfrac{1}{2}$ και $y = \dfrac{\sqrt{19}}{2}$) ή ($x = \dfrac{1}{2}$ και $y = -\dfrac{\sqrt{19}}{2}$)

Άρα οι ζητούμενοι μιγαδικοί είναι $z_1 = \dfrac{1}{2} + \dfrac{\sqrt{19}}{2}i$ και $z_2 = \dfrac{1}{2} - \dfrac{\sqrt{19}}{2}i$

Άσκηση 9.

Να βρείτε τους μιγαδικούς $z = x + yi$, με $x, y \in \mathbf{R}$ για τους οποίους ισχύει:

α) $|2z - i| = 4\overline{z}$

β) $2|z|^2 - (z + \overline{z})i = 8$.

Λύση

α) Έχουμε $|2z - i| = 4\overline{z} \Leftrightarrow |2x + 2yi - i| = 4(x - yi)$

$\Leftrightarrow |2x + (2y - 1)i| = 4x - 4yi \Leftrightarrow$

$\sqrt{4x^2 + (2y-1)^2} = 4x - 4yi \Leftrightarrow$

$$\begin{cases} \sqrt{4x^2 + (2y-1)^2} = 4x \\ 4y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{4x^2 + 1} = 4x \\ y = 0 \end{cases}$$

Προφανώς πρέπει $x \geq 0$ και έχουμε ισοδύναμα

$$\begin{cases} 4x^2 + 1 = 16x^2 \\ y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 12x^2 = 1 \\ y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 = \dfrac{1}{12} \\ y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \dfrac{1}{\sqrt{12}} \\ y = 0 \end{cases}$$

Άρα $z = \dfrac{1}{\sqrt{12}} + 0i = \dfrac{\sqrt{3}}{6}$

β) $|z|^2 = x^2 + y^2, z + \overline{z} = 2x.$

Άρα $2|z|^2 - (z + \overline{z})i = 8 \Leftrightarrow 2(x^2 + y^2) - 2xi = 8.$

Θα πρέπει

$(2(x^2 + y^2) = 8$ και $2x = 0) \Leftrightarrow (x^2 + y^2 = 4$ και $x = 0) \Leftrightarrow (y^2 = 4$ και $x = 0) \Leftrightarrow (y = \pm 2$ και $x = 0).$

Άρα $z = \pm 2i.$ $z \in \mathbf{R}^+$

Άρα οι λύσεις της εξίσωσης είναι $z_1 = 2i$ και $z_2 = -2i$

Άσκηση 10.

Να λύσετε την εξίσωση:

$z+(i+1)+|z+2|=0, z\in \mathbf{C}$.

Λύση

Έστω $z=x+yi$, με $x,y\in \mathbf{R}$, τότε

$x+yi+i+1+|(x+2)+yi|=0 \Leftrightarrow |(x+2)+yi|=-(x+1)-(y+1)i \Leftrightarrow$

$\sqrt{(x+2)^2+y^2}=(-x-1)+(-y-1)i \Leftrightarrow$

$(-y-1=0$ και $\sqrt{(x+2)^2+y^2}=-x-1) \Leftrightarrow$

$(y=-1$ και $\sqrt{(x+2)^2+1}=-x-1)$, από τη δεύτερη ισότητα προκύπτει ότι

$-x-1>0 \Leftrightarrow x<-1$, οπότε:

$(y=-1$ και $\sqrt{\left(x+2\right)^2+1}=-x-1) \Leftrightarrow (y=-1$ και $\left(x+2\right)^2+1=\left(-x-1\right)^2) \Leftrightarrow$

$(y=-1$ και $x^2+4+4x+1=x^2+2x+1) \Leftrightarrow (y=-1$ και $x=-2<-1)$.

Άρα $z=-2-i$.

Άσκηση 11.

Να υπολογίσετε τα μέτρα των παρακάτω μιγαδικών :

α) $z_1 = \frac{(3-2i)^2 \cdot (1-i)^3}{5+i}$ β) $z_2 = \left(\frac{-\sqrt{2}-2i}{-\sqrt{2}+2i}\right)^{2010}$ γ) $z_3 = (1+i)^3 + 3 - 7i$

<u>Λύση</u>

α) $|z_1| = \left|\frac{(3-2i)^2 \cdot (1-i)^3}{5+i}\right| = \frac{\left|(3-2i)^2\right| \cdot \left|(1-i)^3\right|}{|5+i|} = \frac{\left[3^2+(-2)^2\right] \cdot \left(\sqrt{1^2+(-1)^2}\right)^3}{\sqrt{5^2+1^2}} =$

$= \frac{13 \cdot 2\sqrt{2}}{\sqrt{26}} = \frac{26\sqrt{2}}{\sqrt{26}} = \sqrt{52}$

β) $|z_2| = \left|\left(\frac{-\sqrt{2}-2i}{-\sqrt{2}+2i}\right)^{2010}\right| = \left|\frac{-\sqrt{2}-2i}{-\sqrt{2}+2i}\right|^{2010} = \frac{\left|-\sqrt{2}-2i\right|^{2010}}{\left|-\sqrt{2}+2i\right|^{2010}} = 1$

γ) Έχουμε $z_3 = (1+i)^3 + 3 - 7i = 1 + 3i + 3i^2 + i^3 + 3 - 7i = 1 + 3i - 3 - i + 3 - 7i = 1 - 5i$.

Άρα $|z_3| = \sqrt{1^2 + (-5)^2} = \sqrt{26}$.

Άσκηση 12.

Αν για το μιγαδικό z ισχύει $|z|=1$, να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης $A=|z+2i|^2+|iz+2|^2$.

<u>Λύση</u>

$$A=|z+2i|^2+|iz+2|^2=(z+2i)\cdot(\overline{z}-2i)+(iz+2)\cdot(-i\overline{z}+2)=$$

$$=z\overline{z}-2zi+2\overline{z}i+4+z\overline{z}+2zi-2\overline{z}i+4=2|z|^2+8=10.$$

Άσκηση 13.

Αν $z \in \mathbb{C}$, να δείξετε ότι:

α) $|z+2i| = |z-3i| \Leftrightarrow \mathrm{Im}(z) = \dfrac{1}{2}$

β) $|z+2| = |z-4| \Leftrightarrow \mathrm{Re}(z) = 1$.

<u>Λύση</u>

α) <u>Α' Τρόπος</u>:

$$|z+2i| = |z-3i| \Leftrightarrow |z+2i|^2 = |z-3i|^2 \Leftrightarrow$$

$$(z+2i)\cdot\left(\bar{z}-2i\right) = (z-3i)\cdot\left(\bar{z}+3i\right) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow z\cdot\bar{z} - 2zi + 2\bar{z}i + 4 = z\cdot\bar{z} + 3zi - 3\bar{z}i + 9 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 5zi = 5\bar{z}i - 5 \Leftrightarrow \left(z-\bar{z}\right)i = -1 \Leftrightarrow \mathrm{Im}(z) = \frac{1}{2}.$$

<u>Β' Τρόπος</u>:

Έχουμε $|z+2i| = |z-3i| \Leftrightarrow \left|z-(0-2i)\right| = \left|z-(0+3i)\right|$. Επομένως η εικόνα $M(z)$ ανήκει στη μεσοκάθετο του ευθύγραμμου τμήματος AB με άκρα $A(0,-2)$ και $B(0,3)$. Επομένως ανήκει στην ευθεία $y = \dfrac{-2+3}{2} = \dfrac{1}{2}$. Άρα $\mathrm{Im}(z) = \dfrac{1}{2}$.

β) <u>Α' Τρόπος</u>:

$$|z+2| = |z-4| \Leftrightarrow |z+2|^2 = |z-4|^2 \Leftrightarrow$$

$$(z+2)\cdot\left(\bar{z}+2\right) = (z-4)\cdot\left(\bar{z}-4\right) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow z\cdot\bar{z} + 2z + 2\bar{z} + 4 = z\cdot\bar{z} - 4z - 4\bar{z} + 16 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 6z + 6\bar{z} = 12 \Leftrightarrow z + \bar{z} = 2 \Leftrightarrow 2\,\mathrm{Re}(z) = 2 \Leftrightarrow \mathrm{Re}(z) = 1.$$

Β’ Τρόπος:

Έχουμε $|z+2|=|z-4| \Leftrightarrow |z-(-2+0i)|=|z-(4+0i)|$. Επομένως η εικόνα $M(z)$ ανήκει στη μεσοκάθετο του ευθύγραμμου τμήματος ΑΒ με άκρα $A(-3,0)$ και $B(4,0)$. Επομένως ανήκει στην ευθεία $x=\dfrac{-2+4}{2}=1$. Άρα $Re(z)=1$

Άσκηση 14.

Αν για τους μιγαδικούς αριθμούς z, w ισχύει $|z+w|=|z|+|w|$, να δείξετε ότι $\mathrm{Re}(z\overline{w})\geq 0$.

Λύση

$|z+w|=|z|+|w| \Leftrightarrow |z+w|^2=\left(|z|+|w|\right)^2 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (z+w)\cdot\left(\overline{z}+\overline{w}\right)=|z|^2+2|z|\cdot|w|+|w|^2 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow z\overline{z}+z\overline{w}+w\overline{z}+w\overline{w}=|z|^2+2|z|\cdot|w|+|w|^2 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow z\overline{w}+w\overline{z}=2|z|\cdot|w| \Leftrightarrow z\overline{w}+\overline{(z\overline{w})}=2|z|\cdot|w| \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 2\,\mathrm{Re}(z\overline{w})=2|z|\cdot|w|$. Άρα $\mathrm{Re}(z\overline{w})\geq 0$.

Άσκηση 15.

Να δείξετε ότι ο μιγαδικός αριθμός $w = z - \frac{2}{z}$ με $z \neq 0$ είναι φανταστικός αν και μόνο αν ο z είναι φανταστικός ή $|z| = \sqrt{2}$.

<u>Λύση</u>

Ο $w = z - \frac{2}{z}$ είναι φανταστικός αν και μόνο αν

$$\overline{w} = -w \Leftrightarrow \overline{z} - \frac{2}{\overline{z}} = -z + \frac{2}{z} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow z\overline{z}^2 - 2z = -\overline{z}z^2 + 2\overline{z} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow z\overline{z}^2 - 2z + \overline{z}z^2 - 2\overline{z} = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow z\overline{z}\left(z + \overline{z}\right) - 2\left(z + \overline{z}\right) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left(z + \overline{z}\right) \cdot \left(z\overline{z} - 2\right) = 0 \Leftrightarrow z = -\overline{z} \text{ ή } |z|^2 = 2 .$$

Δηλαδή, ο z είναι φανταστικός ή $|z| = \sqrt{2}$.

Άσκηση 16.

Να λυθούν στο $\mathbb{C}$ οι εξισώσεις :

α) $|z-2i| = i\cdot\overline{z}$

β) $|z|-z = 3-i$

<u>Λύση</u>

α) Έστω $z = x+yi$ με $x, y \in \mathbb{R}$. Τότε έχουμε:

$$|z-2i| = i\cdot\overline{z} \Leftrightarrow |x+yi-2i| = i\cdot(x-yi) \Leftrightarrow$$

$$\sqrt{x^2+(y-2)^2} = y+xi \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} \sqrt{x^2+(y-2)^2} = y \\ x=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{(y-2)^2} = y \\ x=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} |y-2| = y \\ x=0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \text{Με } \; y\geq 0, \quad -y+2=y \\ x=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=1 \\ x=0 \end{cases}$$. Άρα $z = i$.

β) Έστω $z = x+yi$ με $x, y \in \mathbb{R}$. Τότε έχουμε:

$$|z|-z = 3-i \Leftrightarrow \sqrt{x^2+y^2}-x-yi = 3-i$$

$$\begin{cases} \sqrt{x^2+y^2}-x = 3 \\ -y=-1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{x^2+1} = x+3 \\ y=1 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} x^2+1 = (x+3)^2, \quad \text{με } \; x\geq -3 \\ y=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2+1 = x^2+6x+9 \\ y=1 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} x = -\dfrac{4}{3} \\ y=1 \end{cases}$$. Άρα $z = -\dfrac{4}{3}+i$.

Άσκηση 17.

Να λυθούν στο $\mathbb{C}$ οι εξισώσεις :

α) $\left|z+i\right|^2-2\left(z+\overline{z}\right)+4=0$

β) $\left|z\right|^2-zi+\overline{z}i+1=0$

Λύση

α) Έστω $z=x+yi$ με $x,y\in\mathbb{R}$. Τότε έχουμε:

$$\left|z+i\right|^2-2\left(z+\overline{z}\right)+4=0\Leftrightarrow x^2+\left(y+1\right)^2-4x+4=0\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\left(x-2\right)^2+\left(y+1\right)^2=0\Leftrightarrow x=2 \text{ και } y=-1.$$

Άρα $z=2-i$.

β) Έστω $z=x+yi$ με $x,y\in\mathbb{R}$. Τότε έχουμε:

$$\left|z\right|^2-zi+\overline{z}i+1=0\Leftrightarrow\left|z\right|^2-\left(z-\overline{z}\right)i+1=0\Leftrightarrow$$

$$x^2+y^2-2yi^2+1=0\Leftrightarrow x^2+\left(y+1\right)^2=0\Leftrightarrow x=0 \text{ και } y=-1.$$

Άρα $z=-i$.

ΘΕΜΑ Γ

Άσκηση 1.

Δίνονται οι μιγαδικοί z,w με $\left|z-\frac{1}{2}\right|=\frac{1}{4}$ και $w=\frac{3-2z}{6z-3}$ με $6z-3\neq 0 \Leftrightarrow z\neq\frac{1}{2}$.

Να βρείτε το $|1+3w|$.

<u>Λύση</u>

Έχουμε $w\cdot(6z-3)=3-2z \Leftrightarrow 6zw-3w=3-2z \Leftrightarrow 6zw+2z=3+3w \Leftrightarrow$

$(6w+2)\cdot z=3+3w \Leftrightarrow z=\frac{3+3w}{6w+2},\ w\neq-\frac{1}{3}.$

Άρα $\left|z-\frac{1}{2}\right|=\frac{1}{4} \Leftrightarrow \left|\frac{3+3w}{6w+2}-\frac{1}{2}\right|=\frac{1}{4} \Leftrightarrow \left|\frac{3+3w}{2(3w+1)}-\frac{1}{2}\right|=\frac{1}{4} \Leftrightarrow \left|\frac{3+3w-3w-1}{2(3w+1)}\right|=\frac{1}{4} \Leftrightarrow$

$\frac{2}{2|3w+1|}=\frac{1}{4} \Leftrightarrow |3w+1|=4.$

Άσκηση 2.

Να βρείτε το μέτρο του μιγαδικού z, αν ισχύει: $|2z-i|=|\overline{z}+2i|$.

Επίσης αν $|2z+2-i|=|\overline{z}+1+2i|$ να βρείτε το $|z+1|$.

<u>Λύση</u>

• Ισχύει $|2z-i|^2=|\overline{z}+2i|^2 \Leftrightarrow (2z-i)\cdot(2\overline{z}+i)=(\overline{z}+2i)\cdot(z-2i) \Leftrightarrow$

$4z\overline{z}+2zi-2\overline{z}i+1=z\cdot\overline{z}-2\overline{z}i+2zi+4 \Leftrightarrow 3z\overline{z}=3 \Leftrightarrow z\cdot\overline{z}=1 \Leftrightarrow |z|^2=1 \Leftrightarrow |z|=1.$

• Έστω $w=z+1 \Leftrightarrow z=w-1$ έτσι $|2z+2-i|=|\overline{z}+1+2i| \Leftrightarrow$

$|2(w-1)+2-i|=|\overline{w}-1+1+2i| \Leftrightarrow |2w-2+2-i|=|\overline{w}+2i| \Leftrightarrow |2w-i|=|\overline{w}+2i|.$

Με βάση το προηγούμενο ερώτημα $|w|=1 \Leftrightarrow |z+1|=1.$

Άσκηση 3.

Αν για τους μιγαδικούς z,w ισχύει: $|2z|=|3w|=|2z-3w|$. Να δείξετε ότι: $|2z+w|=\frac{\sqrt{52}}{3}|z|$.

<u>Λύση</u>

Ισχύει: $|2z|^2=|3w|^2=|2z-3w|^2 \Leftrightarrow 4z\bar{z}=9w\bar{w}=(2z-3w)(2\bar{z}-3\bar{w}) \Leftrightarrow$

$4z\bar{z}=9w\bar{w}=4z\bar{z}+9w\bar{w}-6w\bar{z}-6\bar{w}z \Leftrightarrow$

$4z\bar{z}=4z\bar{z}+4z\bar{z}-6(w\bar{z}+z\bar{w}) \Leftrightarrow 6(w\bar{z}+z\bar{w})=4z\bar{z} \Leftrightarrow w\bar{z}+z\bar{w}=\frac{4}{6}|z|^2$ (1)

Επίσης ισχύει: $4|z|^2=9|w|^2 \Leftrightarrow |w|^2=\frac{4}{9}|z|^2$ (2)

Άρα $|2z+w|^2=(2z+w)(2\bar{z}+\bar{w})=4z\bar{z}+w\bar{w}+2z\bar{w}+2\bar{z}w \overset{(2)}{=} 4|z|^2+\frac{4}{9}|z|^2+2(z\bar{w}+\bar{z}w) \overset{(1)}{=}$

$4|z|^2+\frac{4}{9}|z|^2+2\frac{4}{6}|z|^2=4|z|^2+\frac{4}{9}|z|^2+\frac{4}{3}|z|^2=\frac{52}{9}|z|^2$.

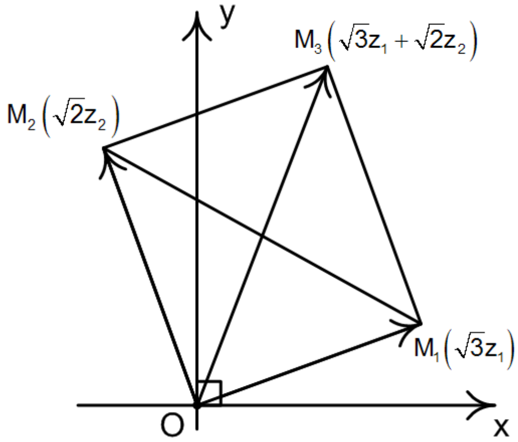
Άρα $|2z+w|=\frac{\sqrt{52}}{3}|z|$.

Άσκηση 4.

Αν για τους μιγαδικούς z_1, z_2 ισχύει: $3|z_1|^2 + 2|z_2|^2 = \left|\sqrt{3}z_1 - \sqrt{2}z_2\right|^2$. Να δείξετε ότι: $|z_1 + z_2| = |z_1 - z_2|$.

<u>Λύση</u>

Έστω M_1 και M_2 οι εικόνες των μιγαδικών $\sqrt{3}\cdot z_1$ και $\sqrt{2}\cdot z_2$ αντιστοίχως.
Το δεδομένο γράφεται
$\left|\sqrt{3}\cdot z_1\right|^2 + \left|\sqrt{2}\cdot z_2\right|^2 = \left|\sqrt{3}\cdot z_1 - \sqrt{2}\cdot z_2\right|^2$ και
σημαίνει ότι $(OM_1)^2 + (OM_2)^2 = (M_1M_2)^2$.
Επομένως $M_1\hat{O}M_2 = 90^\circ$ και το $OM_1M_3M_2$ είναι ορθογώνιο παραλληλόγραμμο.
Επομένως $(M_1M_2) = (OM_3)$.



Άρα $\left|\sqrt{3}\cdot z_1 + \sqrt{2}\cdot z_2\right| = \left|\sqrt{2}\cdot z_2 - \sqrt{3}\cdot z_1\right| \Leftrightarrow$

$$\left|\sqrt{3}\cdot z_1 + \sqrt{2}\cdot z_2\right|^2 = \left|\sqrt{2}\cdot z_2 - \sqrt{3}\cdot z_1\right|^2 \Leftrightarrow$$

$$\left(\sqrt{3}\cdot z_1 + \sqrt{2}\cdot z_2\right)\left(\sqrt{3}\cdot \overline{z}_1 + \sqrt{2}\cdot \overline{z}_2\right) = \left(\sqrt{2}\cdot z_2 - \sqrt{3}\cdot z_1\right)\left(\sqrt{2}\cdot \overline{z}_2 - \sqrt{3}\cdot \overline{z}_1\right) \Leftrightarrow$$

$$\cancel{3z_1\overline{z}_1} + \sqrt{6}z_1\overline{z}_2 + \sqrt{6}\overline{z}_1 z_2 + \cancel{2z_2\overline{z}_2} = \cancel{2z_2\overline{z}_2} - \sqrt{6}\overline{z}_1 z_2 - \sqrt{6}z_1\overline{z}_2 + \cancel{3z_1\overline{z}_1} \Leftrightarrow$$

$$2\sqrt{6}z_1\overline{z}_2 + 2\sqrt{6}\overline{z}_1 z_2 = 0 \Leftrightarrow z_1\overline{z}_2 + \overline{z}_1 z_2 = 0 \qquad (1)$$

Η ισότητα που θέλουμε να αποδείξουμε γράφεται ισοδύναμα

$$|z_1 + z_2| = |z_1 - z_2| \Leftrightarrow |z_1 + z_2|^2 = |z_1 - z_2|^2$$
$$\Leftrightarrow (z_1 + z_2)(\overline{z}_1 + \overline{z}_2) = (z_1 - z_2)(\overline{z}_1 - \overline{z}_2)$$
$$\Leftrightarrow z_1\overline{z}_1 + z_1\overline{z}_2 + \overline{z}_1 z_2 + z_2\overline{z}_2 = z_1\overline{z}_1 - z_1\overline{z}_2 - \overline{z}_1 z_2 + z_2\overline{z}_2$$
$$\Leftrightarrow 2z_1\overline{z}_2 + 2\overline{z}_1 z_2 = 0 \Leftrightarrow z_1\overline{z}_2 + \overline{z}_1 z_2 = 0$$

που ισχύει λόγω της (1)

Άσκηση 5.

Δίνονται οι μιγαδικοί z, w με $z \neq -1$ για τους οποίους ισχύουν: $|z-1| = 1$ και $w = \frac{2z-1}{z+1}$.

Να υπολογιστεί το $|w|$.

Λύση

Είναι $w = \frac{2z-1}{z+1} \Leftrightarrow w(z+1) = 2z-1 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow wz - 2z = -w - 1 \Leftrightarrow z = \frac{w+1}{2-w}, \quad w \neq 2$.

Όμως ισχύει $|z-1| = 1 \Leftrightarrow \left|\frac{w+1}{2-w} - 1\right| = 1 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \left|\frac{2w-1}{2-w}\right| = 1 \Leftrightarrow |2w-1| = |w-2| \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow |2w-1|^2 = |w-2|^2 \Leftrightarrow (2w-1)\cdot\left(2\overline{w}-1\right) = (w-2)\cdot\left(\overline{w}-2\right) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 4w\overline{w} - 2w - 2\overline{w} + 1 = w\overline{w} - 2w - 2\overline{w} + 4 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 3w\overline{w} = 3 \Leftrightarrow |w|^2 = 1 \Leftrightarrow |w| = 1$.

Άσκηση 6.

Αν για το μιγαδικό z ισχύει $|z+1-2i| = |2\overline{z}+2+i|$, να βρείτε το $|z+1|$.

<u>Λύση</u>

Θέτω $w = z+1 \Leftrightarrow z = w-1$. Τότε έχουμε $|w-2i| = |2\overline{w}-2+2+i| \Leftrightarrow |w-2i| = |2\overline{w}+i| \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow |w-2i|^2 = |2w-i|^2 \Leftrightarrow (w-2i)\cdot(\overline{w}+2i) = (2w-i)\cdot(2\overline{w}+i) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow w\cdot\overline{w}+2wi-2\overline{w}i+4 = 4w\cdot\overline{w}+2wi-2\overline{w}i+1 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 3w\cdot\overline{w} = 3 \Leftrightarrow |w|^2 = 1 \Leftrightarrow |w| = 1$. Άρα $|z+1| = 1$.

Άσκηση 7.

Αν για το μιγαδικό z ισχύει $|z-i|=2|z+i|$, να βρείτε το $|3z+5i|$.

<u>Λύση</u>

Θέτω $w=3z+5i \Leftrightarrow z=\dfrac{w-5i}{3}$. Τότε έχουμε

$$|z-i|=2|z+i| \Leftrightarrow \left|\frac{w-5i}{3}-i\right|=2\left|\frac{w-5i}{3}+i\right| \Leftrightarrow |w-8i|=2|w-2i| \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow |w-8i|^2=4|w-2i|^2 \Leftrightarrow (w-8i)\cdot\left(\overline{w}+8i\right)=4(w-2i)\cdot\left(\overline{w}+2i\right) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow w\cdot\overline{w}+8wi-8\overline{w}i+64=4w\cdot\overline{w}+8wi-8\overline{w}i+16 \Leftrightarrow$$

$\Leftrightarrow 3w\cdot\overline{w}=48 \Leftrightarrow |w|^2=16 \Leftrightarrow |w|=4$. Άρα $|3z+5i|=4$.

Άσκηση 8.

Αν για τον $z \in \mathbb{C}$ ισχύει $\left[(1-2i)z\right]^7 = (z+2)^7$ να δείξετε ότι:

α) $\sqrt{5}|z| = |z+2|$

β) $|2z-1| = \sqrt{5}$

<u>Λύση</u>

α) $\left[(1-2i)z\right]^7 = (z+2)^7 \Rightarrow \left|\left[(1-2i)z\right]^7\right| = \left|(z+2)^7\right| \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow |(1-2i)z|^7 = |z+2|^7 \Leftrightarrow |(1-2i)z| = |z+2| \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow |1-2i| \cdot |z| = |z+2| \Leftrightarrow \sqrt{5}|z| = |z+2|$.

β) Θέτω $w = 2z-1 \Leftrightarrow z = \dfrac{w+1}{2}$. Τότε από την ισότητα του α) ερωτήματος έχουμε

$\sqrt{5}|z| = |z+2| \Leftrightarrow \sqrt{5}\left|\dfrac{w+1}{2}\right| = \left|\dfrac{w+1}{2}+2\right| \Leftrightarrow$

$5|w+1|^2 = |w+5|^2 \Leftrightarrow 5(w+1)\cdot\left(\overline{w}+1\right) = (w+5)\cdot\left(\overline{w}+5\right) \Leftrightarrow$

$5w\overline{w} + 5w + 5\overline{w} + 5 = w\overline{w} + 5w + 5\overline{w} + 25 \Leftrightarrow$

$4w\overline{w} = 20 \Leftrightarrow |w|^2 = 5 \Leftrightarrow |w| = \sqrt{5}$.

Άρα $|2z-1| = \sqrt{5}$.

Άσκηση 9.

Αν για τους μιγαδικούς z_1, z_2 ισχύει $|z_1|=|z_2|=3$, να δείξετε ότι :

α) ο $w=\dfrac{z_1^4-z_2^4}{(z_1-z_2)^4}$ με $z_1 \neq z_2$, είναι φανταστικός.

β) ο $u=\dfrac{z_1^\nu+z_2^\nu}{(z_1+z_2)^\nu}$ με $z_1 \neq -z_2$, είναι πραγματικός.

<u>Λύση</u>

Επειδή $|z_1|=3 \Leftrightarrow |z_1|^2=9 \Leftrightarrow z_1\cdot\overline{z_1}=9 \Leftrightarrow \overline{z_1}=\dfrac{9}{z_1}$. Ομοίως προκύπτει $\overline{z_2}=\dfrac{9}{z_2}$.

α) $$\overline{w}=\frac{\left(\overline{z_1}\right)^4-\left(\overline{z_2}\right)^4}{\left(\overline{z_1}-\overline{z_2}\right)^4}=\frac{\left(\dfrac{9}{z_1}\right)^4-\left(\dfrac{9}{z_2}\right)^4}{\left(\dfrac{9}{z_1}-\dfrac{9}{z_2}\right)^4}=\frac{9^4\,\dfrac{z_2^4-z_1^4}{z_2^4\cdot z_1^4}}{9^4\,\dfrac{(z_2-z_1)^4}{z_2^4\cdot z_1^4}}=$$

$$=\frac{z_2^4-z_1^4}{(z_2-z_1)^4}=-\frac{z_1^4-z_2^4}{(z_1-z_2)^4}=-w$$. Άρα ο w είναι φανταστικός.

β) $$\overline{u}=\frac{\left(\overline{z_1}\right)^\nu+\left(\overline{z_2}\right)^\nu}{\left(\overline{z_1}+\overline{z_2}\right)^\nu}=\frac{\left(\dfrac{9}{z_1}\right)^\nu+\left(\dfrac{9}{z_2}\right)^\nu}{\left(\dfrac{9}{z_1}+\dfrac{9}{z_2}\right)^\nu}=\frac{9^\nu\,\dfrac{z_2^\nu+z_1^\nu}{z_2^\nu\cdot z_1^\nu}}{9^\nu\,\dfrac{(z_2+z_1)^\nu}{z_2^\nu\cdot z_1^\nu}}=$$

$$=\frac{z_2^\nu+z_1^\nu}{(z_2+z_1)^\nu}=u$$. Άρα ο u είναι πραγματικός.

Άσκηση 10.

Δίνονται οι μιγαδικοί z_1, z_2, z_3 με $|z_1| = |z_2| = |z_3| = 1$ και $\mathrm{Re}\left(\frac{z_1}{z_2} + \frac{z_2}{z_3} + \frac{z_3}{z_1}\right) = -\frac{3}{2}$. Να δείξετε ότι $z_1 + z_2 + z_3 = 0$.

Λύση

Επειδή $|z_1| = 1 \Leftrightarrow |z_1|^2 = 1 \Leftrightarrow z_1 \cdot \overline{z_1} = 1 \Leftrightarrow \overline{z_1} = \frac{1}{z_1}$. Ομοίως προκύπτει $\overline{z_2} = \frac{1}{z_2}$ και $\overline{z_3} = \frac{1}{z_3}$.

Οπότε έχουμε:

$$|z_1 + z_2 + z_3|^2 = (z_1 + z_2 + z_3) \cdot \left(\overline{z_1 + z_2 + z_3}\right) =$$

$$= (z_1 + z_2 + z_3) \cdot \left(\overline{z_1} + \overline{z_2} + \overline{z_3}\right) = z_1\overline{z_1} + z_1\overline{z_2} + z_1\overline{z_3} + z_2\overline{z_1} + z_2\overline{z_2} + z_2\overline{z_3} + z_3\overline{z_1} + z_3\overline{z_2} + z_3\overline{z_3} =$$

$$= |z_1|^2 + |z_2|^2 + |z_3|^2 + z_1\overline{z_2} + z_2\overline{z_1} + z_2\overline{z_3} + z_3\overline{z_2} + z_1\overline{z_3} + z_3\overline{z_1} =$$

$$= 3 + 2\,\mathrm{Re}\left(z_1\overline{z_2}\right) + 2\,\mathrm{Re}\left(z_2\overline{z_3}\right) + 2\,\mathrm{Re}\left(z_3\overline{z_1}\right) =$$

$$= 3 + 2\,\mathrm{Re}\left(z_1\overline{z_2} + z_2\overline{z_3} + z_3\overline{z_1}\right) = 3 + 2\,\mathrm{Re}\left(z_1 \cdot \frac{1}{z_2} + z_2 \cdot \frac{1}{z_3} + z_3 \cdot \frac{1}{z_1}\right) =$$

$$= 3 + 2\,\mathrm{Re}\left(\frac{z_1}{z_2} + \frac{z_2}{z_3} + \frac{z_3}{z_1}\right) = 3 - 3 = 0\,.$$

Επομένως $|z_1 + z_2 + z_3| = 0 \Leftrightarrow z_1 + z_2 + z_3 = 0$.

Σημείωση: Απόδειξη της σχέσης $\mathrm{Re}(z_1\overline{z_2} + z_2\overline{z_3} + z_3\overline{z_1}) = \mathrm{Re}(z_1\overline{z_2}) + \mathrm{Re}(z_2\overline{z_3}) + \mathrm{Re}(z_3\overline{z_1})$.

Έστω $z_1 = x_1 + y_1 i$, $z_2 = x_2 + y_2 i$ και $z_3 = x_3 + y_3 i$ με $x_1, y_1, x_2, y_2, x_3, y_3 \in \mathbb{R}$.
Τότε $z_1\overline{z_2} = (x_1 + y_1 i)(x_2 - y_2 i) = (x_1x_2 + y_1y_2) + (x_2y_1 - x_1y_2)i$ (1).
Ομοίως $z_2\overline{z_3} = (x_2x_3 + y_2y_3) + (x_3y_2 - x_2y_3)i$ (2),
$z_3\overline{z_1} = (x_3x_1 + y_3y_1) + (x_1y_3 - x_3y_1)i$ (3).

Άρα $z_1\overline{z_2} + z_2\overline{z_3} + z_3\overline{z_1} = (x_1x_2 + y_1y_2 + x_2x_3 + y_2y_3 + x_3x_1 + y_3y_1) +$
$(x_2y_1 - x_1y_2 + x_3y_2 - x_2y_3 + x_1y_3 - x_3y_1)i$.

Οπότε $\mathrm{Re}(z_1\overline{z_2} + z_2\overline{z_3} + z_3\overline{z_1}) = x_1x_2 + y_1y_2 + x_2x_3 + y_2y_3 + x_3x_1 + y_3y_1 \overset{(1),(2),(3)}{=}$

$\mathrm{Re}(z_1\overline{z_2}) + \mathrm{Re}(z_2\overline{z_3}) + \mathrm{Re}(z_3\overline{z_1})$.

Άσκηση 11.

Αν για τους μιγαδικούς z_1, z_2 ισχύει $|z_1 - z_2| = 2|z_1| = |z_2|$, να δείξετε ότι $|z_1 + 2z_2| = \sqrt{19}|z_1|$.

<u>Λύση</u>

Είναι $|z_1 - z_2| = 2|z_1| = |z_2| \Rightarrow |z_1 - z_2|^2 = |z_2|^2 \Leftrightarrow$

$(z_1 - z_2)\cdot\left(\overline{z_1} - \overline{z_2}\right) = z_2\overline{z_2} \Leftrightarrow$

$z_1\overline{z_1} - z_1\overline{z_2} - z_2\overline{z_1} + z_2\overline{z_2} = z_2\overline{z_2} \Leftrightarrow$

$z_1\overline{z_2} + z_2\overline{z_1} = |z_1|^2$ (1)

$|z_1 + 2z_2|^2 = (z_1 + 2z_2)\cdot\left(\overline{z_1} + 2\overline{z_2}\right) =$

$z_1\overline{z_1} + 2z_1\overline{z_2} + 2z_2\overline{z_1} + 4z_2\overline{z_2} =$

$|z_1|^2 + 2\left(z_1\overline{z_2} + z_2\overline{z_1}\right) + 4|z_2|^2 \overset{(1)}{=}$

$|z_1|^2 + 2|z_1|^2 + 16|z_1|^2 = 19|z_1|^2 \Rightarrow |z_1 + 2z_2| = \sqrt{19}|z_1|$.

Άσκηση 12.

Αν για τους μιγαδικούς z_1, z_2, z_3 ισχύει $|z_1-1|=|z_2-1|=|z_3-1|=3$ και $z_1+z_2+z_3=\frac{3}{2}$, τότε να δείξετε ότι $|z_1z_2+z_2z_3+z_1z_3|=3|z_1+z_2+z_3-3|$.

<u>Λύση</u>

Για το μιγαδικό z_1 ισχύει: $|z_1-1|=3 \Leftrightarrow |z_1-1|^2=9 \Leftrightarrow (z_1-1)\cdot\left(\overline{z_1}-1\right)=9 \Leftrightarrow z_1-1=\dfrac{9}{\overline{z_1}-1}$.

Ομοίως ισχύουν $z_2-1=\dfrac{9}{\overline{z_2}-1}$ και $z_3-1=\dfrac{9}{\overline{z_3}-1}$.

Τότε έχουμε: $3|z_1+z_2+z_3-3|=3|z_1-1+z_2-1+z_3-1|=$

$$3\left|\frac{9}{\overline{z_1}-1}+\frac{9}{\overline{z_2}-1}+\frac{9}{\overline{z_3}-1}\right|=27\left|\frac{\left(\overline{z_2}-1\right)\cdot\left(\overline{z_3}-1\right)+\left(\overline{z_1}-1\right)\cdot\left(\overline{z_3}-1\right)+\left(\overline{z_1}-1\right)\cdot\left(\overline{z_2}-1\right)}{\left(\overline{z_1}-1\right)\cdot\left(\overline{z_2}-1\right)\cdot\left(\overline{z_3}-1\right)}\right|=$$

$$=27\frac{\left|\overline{z_1}\,\overline{z_2}+\overline{z_1}\,\overline{z_3}+\overline{z_2}\,\overline{z_3}-2\left(\overline{z_1}+\overline{z_2}+\overline{z_3}\right)+3\right|}{\left|\overline{z_1}-1\right|\cdot\left|\overline{z_2}-1\right|\cdot\left|\overline{z_3}-1\right|}=$$

$$=\left|\overline{(z_1z_2+z_1z_3+z_2z_3)}-2\overline{(z_1+z_2+z_3)}+3\right|=\left|\overline{(z_1z_2+z_1z_3+z_2z_3)}-2\cdot\frac{3}{2}+3\right|=$$

$$=\left|\overline{z_1z_2+z_1z_3+z_2z_3}\right|=|z_1z_2+z_1z_3+z_2z_3|.$$

Άσκηση 13.

Να βρεθεί ο μιγαδικός αριθμός z για τον οποίο ισχύουν ταυτόχρονα :

$|z+3|=|z+3i|$ και $|z+i|=|z-1-2i|$.

Λύση

Έστω $z=x+yi$. Τότε $|x+yi+3|=|x+yi+3i| \Leftrightarrow \sqrt{(x+3)^2+y^2}=\sqrt{x^2+(y+3)^2} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (x+3)^2+y^2=x^2+(y+3)^2 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x^2+6x+9+y^2=x^2+y^2+6y+9 \Leftrightarrow x=y$ (1) και

$|x+yi+i|=|x+yi-1-2i| \Leftrightarrow \sqrt{x^2+(y+1)^2}=\sqrt{(x-1)^2+(y-2)^2} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x^2+(y+1)^2=(x-1)^2+(y-2)^2 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x^2+y^2+2y+1=x^2-2x+1+y^2-4y+4 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 2x+6y=4 \Leftrightarrow x+3y=2$ (2).

Λύνοντας το σύστημα των εξισώσεων (1) και (2) προκύπτει ότι $x=y=\frac{1}{2}$. Άρα $z=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}i$.

Άσκηση 14.

Να βρεθεί ο μιγαδικός αριθμός z για τον οποίο ισχύει: $|z|=|z-i|=1$.

<u>Λύση</u>

Είναι $|z|=1$ και $|z-i|=1$. Αν $z=x+yi$, τότε έχουμε :

$$\begin{cases}\sqrt{x^2+y^2}=1\\ \sqrt{x^2+(y-1)^2}=1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x^2+y^2=1\\ x^2+(y-1)^2=1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x^2+y^2=1\\ x^2+y^2-2y+1=1\end{cases}$$

$$\begin{cases}x^2+y^2=1\\ 2y=1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x^2+\dfrac{1}{4}=1\\ y=\dfrac{1}{2}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=\dfrac{\sqrt{3}}{2}\ \text{ ή }\ x=-\dfrac{\sqrt{3}}{2}\\ y=\dfrac{1}{2}\end{cases}.$$

Άρα $z=\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i$ ή $z=-\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i$.

Άσκηση 15.

Να βρεθεί ο μιγαδικός αριθμός z για τον οποίο ισχύει: $|z-1-2i|+|z-2|i=|z+1-3i|i+2\sqrt{2}$.

<u>Λύση</u>

$|z-1-2i|+|z-2|i=|z+1-3i|i+2\sqrt{2} \Leftrightarrow$

$|z-1-2i|=2\sqrt{2}$ (1) και $|z-2|=|z+1-3i|$ (2). Αντικαθιστώντας $z=x+yi$ έχουμε:

$(1) \Leftrightarrow \sqrt{(x-1)^2+(y-2)^2}=2\sqrt{2} \Leftrightarrow$

$x^2-2x+1+y^2-4y+4=8 \Leftrightarrow x^2+y^2-2x-4y=3$ (3)

$(2) \Leftrightarrow \sqrt{(x-2)^2+y^2}=\sqrt{(x+1)^2+(y-3)^2} \Leftrightarrow$

$x^2-4x+4+y^2=x^2+2x+1+y^2-6y+9 \Leftrightarrow y=x+1$ (4)

Λύνοντας το σύστημα των εξισώσεων (3) και (4) προκύπτει

$(x=3$ και $y=4)$ ή $(x=-1$ και $y=0)$. Άρα $z=3+4i$ ή $z=-1$.

Άσκηση 16.

Για οποιουσδήποτε μιγαδικούς $z,\ w$ να δείξετε ότι $2|z+w|^2 \le 6|z|^2 + 3|w|^2$.

<u>Λύση</u>

Είναι $2|z+w|^2 \le 6|z|^2 + 3|w|^2 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow 2(z+w)\cdot\left(\overline{z}+\overline{w}\right) - 6z\overline{z} - 3w\overline{w} \le 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2z\overline{z} + 2z\overline{w} + 2w\overline{z} + 2w\overline{w} - 6z\overline{z} - 3w\overline{w} \le 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 4z\overline{z} - 2z\overline{w} - 2w\overline{z} + w\overline{w} \ge 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2z\left(2\overline{z} - \overline{w}\right) - w\left(2\overline{z} - \overline{w}\right) \ge 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (2z-w)\cdot\left(2\overline{z} - \overline{w}\right) \ge 0 \Leftrightarrow$$

$\Leftrightarrow (2z-w)\cdot\left(\overline{2z-w}\right) \ge 0 \Leftrightarrow |2z-w|^2 \ge 0$ που ισχύει.

Άσκηση 17.

Αν για τους μιγαδικούς z, w ισχύει $|z| \geq 1$ και $|w| \leq 1$, να δείξετε ότι $|z+w| \geq |1+z\overline{w}|$.

<u>Λύση</u>

$|z+w| \geq |1+z\overline{w}| \Leftrightarrow |z+w|^2 \geq |1+z\overline{w}|^2 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (z+w)\cdot(\overline{z}+\overline{w})-(1+z\overline{w})\cdot(1+\overline{z}w) \geq 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow z\overline{z}+z\overline{w}+w\overline{z}+w\overline{w}-1-w\overline{z}-z\overline{w}-z\overline{w}\,\overline{z}w \geq 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 1+z\overline{w}\overline{z}w-z\overline{z}-w\overline{w} \leq 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 1-z\overline{z}-w\overline{w}\left(1-z\overline{z}\right) \leq 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \left(1-z\overline{z}\right)\cdot\left(1-w\overline{w}\right) \leq 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \left(1-|z|^2\right)\cdot\left(1-|w|^2\right) \leq 0$ που ισχύει διότι $|z| \geq 1 \Leftrightarrow |z|^2 \geq 1 \Leftrightarrow 1-|z|^2 \leq 0$

και $|w| \leq 1 \Leftrightarrow |w|^2 \leq 1 \Leftrightarrow 1-|w|^2 \geq 0$.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1ο: ΜΙΓΑΔΙΚΟΙ ΑΡΙΘΜΟΙ

ΕΝΟΤΗΤΑ 3: ΓΕΩΜΕΤΡΙΚΗ ΕΡΜΗΝΕΙΑ ΤΟΥ ΜΕΤΡΟΥ - ΤΡΙΓΩΝΙΚΗ ΑΝΙΣΟΤΗΤΑ

[Κεφ. 2.3: Μέτρο Μιγαδικού Αριθμού του σχολικού βιβλίου]

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ Β

Άσκηση 1.

Δίνονται οι μιγαδικοί z,w με $|z|=3$ και $w=6+8i$. Να δείξετε ότι: $7\le|z+w|\le 13$

<u>Λύση</u>

Ισχύει $\big||z|-|w|\big|\le|z+w|\le|z|+|w|$. Όμως $|z|=3$ και $|w|=\sqrt{6^2+8^2}=10$.

Άρα $|3-10|\le|z+w|\le 3+10 \Leftrightarrow 7\le|z+w|\le 13$

Άσκηση 2.

Δίνονται οι μιγαδικοί z,w με $|z|=4$ και $w=3-4i$. Να δείξετε ότι: $1\le|z-w|\le 9$

<u>Λύση</u>

Ισχύει $||z|-|w||\le|z+w|\le|z|+|w|$ (1). Ακόμα $|w|=\sqrt{9+16}=5$.

Θέτουμε στην (1) όπου w το -w και έχουμε:

$||z|-|-w||\le|z-w|\le|z|+|-w|$.

Όμως $|w|=|-w|$, έτσι:

$||z|-|w||\le|z-w|\le|z|+|w|$ δηλαδή $|4-5|\le|z-w|\le 4+5 \Leftrightarrow 1\le|z-w|\le 9$

Άσκηση 3.

Αν για τον μιγαδικό z ισχύει $|z-3i|=3$, να δείξετε ότι: $2 \le |z-4| \le 8$

<u>Λύση</u>

Γράφουμε $z-4=(z-3i)+(3i-4)$,

οπότε $\big||z-3i|-|3i-4|\big| \le |(z-3i)+(3i-4)| \le |z-3i|+|3i-4|$

δηλαδή $|3-5| \le |z-4| \le 3+5 \Leftrightarrow 2 \le |z-4| \le 8$

Άσκηση 4.

Αν για τον μιγαδικό z ισχύει $|z-6i| \le 4$ να δείξετε ότι: $6 \le |z+8| \le 14$

<u>Λύση</u>

Είναι $z+8=(z-6i)+(6i+8)$.

Άρα $\left||z-6i|-|8+6i|\right| \le |(z-6i)+(6i+8)| \le |z-6i|+|8+6i|$ (1).

Όμως $|z-6i| \le 4 \Leftrightarrow |z-6i|-10 \le -6 \Leftrightarrow |z-6i|-|8+6i| \le -6$ άρα $6 \le \left||z-6i|-|8+6i|\right|$ (2)

και $|z-6i| \le 4 \Leftrightarrow |z-6i|+10 \le 14 \Leftrightarrow |z-6i|+|8+6i| \le 14$ (3)

Από τις (1),(2),(3) προκύπτει ότι

$6 \le \left||z-6i|\right| \Leftrightarrow |(z-6i)+(6i+8)| \le |z-6i|+|6i+8| \le 14$

Δηλαδή $6 \le |z+8| \le 14$.

Β΄ τρόπος επίλυσης

Ο σκιασμένος κυκλικός δίσκος με κέντρο **Κ (0, 6)** και ακτίνα **4** , είναι ο γεωμετρικός τόπος των εικόνων των μιγαδικών **z** για τους οποίους ισχύει: $|z-6i| \le 4$

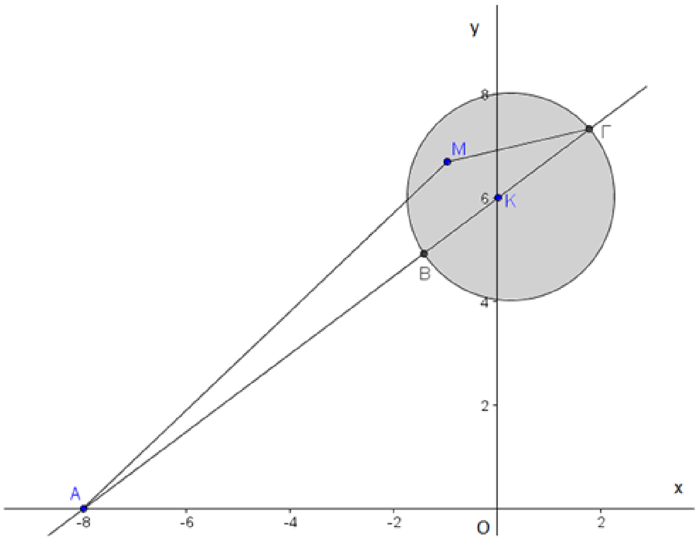
Το σημείο Α αντιστοιχεί στον μιγαδικό $-8+0i$

Τα Β και Γ είναι τα σημεία τομής του κύκλου με την ευθεία ΑΚ.

Έχουμε $(AK)=\sqrt{8^2+6^2}=10$, (ΑΒ) = 10 - 4 = 6 και (ΑΓ) = 10 + 4 = 14

Όμως (ΑΒ) ≤ (ΑΜ) ≤ (ΑΓ)

Άρα $6 \le |z+8| \le 14$



Άσκηση 5.

Να βρείτε το γεωμετρικό τόπο των εικόνων των μιγαδικών z για τον οποίο ισχύει:

α) $|z-3|=|z+4|$

β) $|z-3|\le|z+4|$

γ) $\left|1-\frac{3}{z}\right|\le\left|1+\frac{4}{z}\right|,\ z\ne 0$

δ) $|z-4i|=|z-10i|$ και $\mathrm{Re}(z)\ge 3$

<u>Λύση</u>

Έστω $z=x+yi,\ x,y\in R$

α) Έχουμε $|z-3|=|z+4|\Leftrightarrow|z-3|^2=|z+4|^2\Leftrightarrow(z-3)(\overline{z}-3)=(z+4)(\overline{z}+4)\Leftrightarrow$

$z\overline{z}-3z-3\overline{z}+9=z\overline{z}+4z+4\overline{z}+16\Leftrightarrow 7(z+\overline{z})=-7\Leftrightarrow z+\overline{z}=-1\Leftrightarrow 2\mathrm{Re}(z)=-1\Leftrightarrow$

$\mathrm{Re}(z)=-\frac{1}{2}\Leftrightarrow x=-\frac{1}{2}.$

Άρα οι εικόνες του z κινούνται στην ευθεία $x=-\frac{1}{2}.$

β) Έχουμε $|z-3|\le|z+4|$ ή $|z-(3+0i)|\le|z-(-4+0i)|.$

Άρα ο γεωμετρικός τόπος είναι το ημιεπίπεδο που ορίζει η μεσοκάθετος του ΑΒ όταν Α(3,0) και Β(-4,0) δηλαδή η ευθεία $x=-\frac{1}{2}$ όπως βρήκαμε και στο α) ερώτημα με το σημείο Α(3,0).

γ) Είναι $\left|1-\frac{3}{z}\right|\le\left|1+\frac{4}{z}\right|\Leftrightarrow\left|\frac{z-3}{z}\right|\le\left|\frac{z+4}{z}\right|\Leftrightarrow|z-3|\le|z+4|,\ z\ne 0$. Δηλαδή έχουμε το β) ερώτημα.

δ) Είναι $|z-4i|=|z-10i|\Leftrightarrow(z-4i)(\overline{z}+4i)=(z-10i)(\overline{z}+10i)\Leftrightarrow$

$z\overline{z}+4zi-4\overline{z}i+16=z\overline{z}-10\overline{z}i+10zi+100\Leftrightarrow-6(z-\overline{z})i=84\Leftrightarrow-6i^2 2\mathrm{Im}(z)=84\Leftrightarrow$

$12y=84\Leftrightarrow y=7$.

Άρα οι εικόνες του z κινούνται στην ευθεία y=7.

Όμως $\mathrm{Re}(z)\ge 3$ για αυτό τελικά οι εικόνες κινούνται στην ημιευθεία y=7 με αρχή Α(3,7).

Άσκηση 6.

Να βρείτε το γεωμετρικό τόπο των εικόνων των μιγαδικών z για τον οποίο ισχύει:

α) $|z| = 3$

β) $|z-4| = 3$

γ) $|z-4i| = 3$

δ) $|z-(4+4i)| = 3$

<u>Λύση</u>

α) Έστω $z = x + yi,\ x, y \in R$ τοτε $|z| = 3 \Leftrightarrow x^2 + y^2 = 3^2$. Έτσι ο γεωμετρικός τόπος είναι κύκλος κέντρου $K_1(0,0)$ και ακτίνας $\rho_1 = 3$.

β) Είναι $|z-(4+0i)| = 3$. Άρα ο γεωμετρικός τόπος είναι κύκλος κέντρου $K_2(4,0)$ και ακτίνας $\rho_2 = 3$ δηλαδή ο κύκλος με εξίσωση $(x-4)^2 + y^2 = 9$.

γ) Είναι $|z-(0+4i)| = 3$. Άρα ο γεωμετρικός τόπος είναι κύκλος κέντρου $K_3(0,4)$ και ακτίνας $\rho_3 = 3$ δηλαδή ο κύκλος με εξίσωση $x^2 + (y-4)^2 = 9$.

δ) Είναι $|z-(4+4i)| = 3$. Άρα ο γεωμετρικός τόπος είναι κύκλος κέντρου $K_4(4,4)$ και ακτίνας $\rho_4 = 3$ δηλαδή ο κύκλος με εξίσωση $(x-4)^2 + (y-4)^2 = 9$.

Άσκηση 7.

Να βρείτε το γεωμετρικό τόπο των Μ(x,y) για τα οποία ισχύουν:

$z=(x-1)+(y+2)i$ και $|z-4+3i|=6$

Λύση

Είναι $|z-4+3i|=6 \Leftrightarrow |(x-1)+(y+2)i-4+3i|=6 \Leftrightarrow$

$|(x-5)+(y+5)i|=6 \Leftrightarrow |(x-5)+(y+5)i|=6 \Leftrightarrow (x-5)^2+(y+5)^2=6^2.$

Άρα ο γεωμετρικός τόπος είναι κύκλος κέντρου Κ(5,-5) και ακτίνας 6.

Άσκηση 8.

Να βρείτε το γεωμετρικό τόπο των εικόνων του μιγαδικού z για τον οποίο ισχύει:

α) $|z|<3$

β) $2<|2z-2+6i|<4$

<u>Λύση</u>

α) Είναι $|z|<3$. Έστω z=x+yi $x,y\in R$ τότε $x^2+y^2<9$.

Άρα ο γεωμετρικός τόπος είναι όλα τα σημεία τα εσωτερικά του κύκλου κέντρου O(0,0) και ακτίνας 3.

β) Είναι $2<|2z-2+6i|<4 \Leftrightarrow 1<|z-1+3i|<2 \Leftrightarrow 1<|z-(1-3i)|<2$.

Άρα ο γεωμετρικός τόπος είναι τα σημεία του κυκλικού δακτυλίου που δημιουργείται από δύο ομόκεντρους κύκλους κέντρου Κ(1,-3) και ακτίνων $\rho_1=1$ και $\rho_2=2$.

Άσκηση 9.

Αν για το μιγαδικό z ισχύει $\left(2z-1\right)^{2010}=\left(z+1\right)^{2010}$ να αποδείξετε ότι η εικόνα του ανήκει σε κύκλο του οποίου να υπολογίσετε το κέντρο Κ και την ακτίνα ρ.

<u>Λύση</u>

Έστω $z=x+yi,\ x,\ y\in R$

Έχουμε $\left(2z-1\right)^{2010}=\left(z+1\right)^{2010}$ τότε $\left|2z-1\right|^{2010}=\left|z+1\right|^{2010}\Leftrightarrow$

$\left|2z-1\right|=\left|z+1\right|\Leftrightarrow\left|2z-1\right|^{2}=\left|z+1\right|^{2}\Leftrightarrow\left(2z-1\right)\cdot\left(2\overline{z}-1\right)=\left(z+1\right)\cdot\left(\overline{z}+1\right)\Leftrightarrow$

$4\left|z\right|^{2}-2z-2\overline{z}+1=\left|z\right|^{2}+z+\overline{z}+1\Leftrightarrow3\left|z\right|^{2}-3\left(z+\overline{z}\right)=0\Leftrightarrow$

$3x^{2}+3y^{2}-3\cdot2x=0\Leftrightarrow x^{2}+y^{2}-2x=0\Leftrightarrow(x-1)^{2}+y^{2}=1$

Άρα ο γεωμετρικός τόπος είναι κύκλος με κέντρο Κ(1,0) και ακτίνα ρ=1

Άσκηση 10.

Δίνονται οι μιγαδικοί αριθμοί z, w με $|z|=4$ και $w=-5+12i$. Να αποδείξετε ότι $9\le|z+w|\le17$.

<u>Λύση</u>

Από τριγωνική ανισότητα έχουμε:

$$\big||z|-|w|\big|\le|z+w|\le|z|+|w| \quad (1)$$

Είναι $|z|=4$ και $|w|=\sqrt{(-5)^2+12^2}=\sqrt{169}=13$, οπότε από (1) έχουμε:

$$|4-13|\le|z+w|\le4+13\Leftrightarrow 9\le|z+w|\le17$$

Άσκηση 11.

Δίνονται οι μιγαδικοί αριθμοί z, w με $z=-8+6i$ και $|w|=3$. Να αποδείξετε ότι $24\le|3z+2w|\le 36$.

<u>Λύση</u>

Από τριγωνική ανισότητα έχουμε:

$$\big||3z|-|2w|\big|\le|3z+2w|\le|3z|+|2w|\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow\big|3|z|-2|w|\big|\le|3z+2w|\le 3|z|+2|w| \qquad (1)$$

Είναι $|z|=\sqrt{(-8)^2+6^2}=\sqrt{100}=10$ και $|w|=3$, οπότε από (1) έχουμε:

$$|3\cdot 10-2\cdot 3|\le|3z+2w|\le 3\cdot 10+2\cdot 3\Leftrightarrow 24\le|3z+2w|\le 36$$

Άσκηση 12.

Δίνονται οι μιγαδικοί αριθμοί z , w με $|z|=1$ και $w=-\sqrt{3}+i$. Να αποδείξετε ότι $1\le|z-w|\le 3$.

<u>Λύση</u>

Από τριγωνική ανισότητα έχουμε:

$$\big||z|-|w|\big|\le|z+w|\le|z|+|w| \quad (1)$$

Αν στην (1) θέσουμε , όπου w το $-w$ έχουμε:

$$\big||z|-|-w|\big|\le|z+(-w)|\le|z|+|-w|$$

Είναι $|-w|=|w|$, οπότε ισχύει:

$$\big||z|-|w|\big|\le|z-w|\le|z|+|w| \quad (2)$$

Είναι $|z|=1$ και $|w|=\sqrt{\left(-\sqrt{3}\right)^2+1^2}=\sqrt{4}=2$, οπότε από (2) έχουμε:

$$|1-2|\le|z-w|\le 1+2 \Leftrightarrow 1\le|z-w|\le 3$$

Άσκηση 13.

Αν $z \in \mathbb{C}$ και $|z-2+3i| = 2$, να αποδείξετε ότι $3 \leq |z-5+7i| \leq 7$.

Λύση

Είναι $z-5+7i = (z-2+3i)+(-3+4i) = z_1 + z_2$, όπου $z_1 = z-2+3i$ και $z_2 = -3+4i$.

Από τριγωνική ανισότητα έχουμε:
$$\big||z_1|-|z_2|\big| \leq |z_1+z_2| \leq |z_1|+|z_2| \qquad (1)$$
Είναι $|z_1| = |z-2+3i| = 2$ και $|z_2| = |-3+4i| = \sqrt{(-3)^2+4^2} = \sqrt{25} = 5$, οπότε από (1) έχουμε:

$$|2-5| \leq |z_1+z_2| \leq 2+5 \Leftrightarrow 3 \leq |z-5+7i| \leq 7$$

Άσκηση 14.

Αν $z \in \mathbb{C}$ και $\left|\overline{z}+1-2i\right|=6$, να αποδείξετε ότι $4 \le \left|z+9-4i\right| \le 16$.

Λύση

Έχουμε $\left|\overline{z}+1-2i\right| = \left|\overline{z}+\overline{1+2i}\right| = \left|\overline{z+1+2i}\right| = \left|z+1+2i\right|$. Άρα $\left|z+1+2i\right|=6$.

Είναι $z+9-4i=(z+1+2i)+(8-6i)=z_1+z_2$, όπου $z_1=z+1+2i$ και $z_2=8-6i$.

Από τριγωνική ανισότητα έχουμε:

$$\left|\left|z_1\right|-\left|z_2\right|\right| \le \left|z_1+z_2\right| \le \left|z_1\right|+\left|z_2\right| \qquad (1)$$

Είναι $\left|z_1\right|=\left|z+1+2i\right|=6$ και $\left|z_2\right|=\left|8-6i\right|=\sqrt{8^2+(-6)^2}=\sqrt{100}=10$, οπότε από (1) έχουμε:

$$\left|6-10\right| \le \left|z_1+z_2\right| \le 6+10 \Leftrightarrow 4 \le \left|z+9-4i\right| \le 16$$

Άσκηση 15.

Αν $z \in \mathbb{C}$ και $|z-4-2i| \le 3$, να αποδείξετε ότι $2 \le |z+i| \le 8$.

<u>Λύση</u>

Είναι $z+i=(z-4-2i)+(4+3i)=z_1+z_2$, όπου $z_1=z-4-2i$ και $z_2=4+3i$.

Από τριγωνική ανισότητα έχουμε:

$$\big||z_1|-|z_2|\big| \le |z_1+z_2| \le |z_1|+|z_2| \qquad (1)$$

Είναι $|z_1|=|z-4-2i| \le 3 \Leftrightarrow |z_1|-5 \le -2$, άρα $\big||z_1|-5\big| \ge 2$ και $|z_2|=|4+3i|=\sqrt{4^2+3^2}=\sqrt{25}=5$, οπότε από (1) έχουμε:

$$\big||z_1|-5\big| \le |z_1+z_2| \le |z_1|+5 \Rightarrow |3-5| \le |z_1+z_2| \le 3+5 \Leftrightarrow 2 \le |z+i| \le 8$$

Άσκηση 16.

Αν $z, w \in \mathbb{C}$, $|z+2i| \leq 3$ και $|w-4+5i| \leq 1$, να αποδείξετε ότι $|z-w| \leq 9$.

<u>Λύση</u>

Είναι $z-w=(z+2i)-(w-4+5i)+(-4+3i)=z_1-z_2+z_3$, όπου $z_1=z+2i$, $z_2=w-4+5i$ και $z_3=-4+3i$.

Από τριγωνική ανισότητα έχουμε:

$|z_1-z_2+z_3|=|(z_1-z_2)+z_3| \leq |z_1-z_2|+|z_3| \leq |z_1|+|z_2|+|z_3|$, για κάθε $z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{C}$ (1)

Είναι $|z_1|=|z+2i| \leq 3$, $|z_2|=|w-4+5i| \leq 1$ και $|z_3|=|-4+3i|=\sqrt{(-4)^2+3^2}=\sqrt{25}=5$, οπότε από (1) έχουμε:

$|z_1-z_2+z_3| \leq 3+1+5 \Leftrightarrow |z-w| \leq 9$

Άσκηση 17.

Να αποδείξετε ότι οι εικόνες των ριζών της εξίσωσης $z^3-8=0$ στο μιγαδικό επίπεδο είναι κορυφές ισοπλεύρου τριγώνου.

<u>Λύση</u>

Είναι:

$$z^3-8=0 \Leftrightarrow z^3-2^3=0 \Leftrightarrow (z-2)\left(z^2+2z+2^2\right)=0 \Leftrightarrow (z-2)\left(z^2+2z+4\right)=0 \Leftrightarrow$$

$$z-2=0 \text{ ή } z^2+2z+4=0 \Leftrightarrow z=2 \text{ ή } z=\frac{-2\pm i2\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow z=2 \text{ ή } z=-1\pm i\sqrt{3}$$

Άρα η εξίσωση $z^3-8=0$ έχει ρίζες τους αριθμούς $z_1=2$, $z_2=-1+i\sqrt{3}$ και $z_3=-1-i\sqrt{3}$.

Έστω Α, Β, Γ οι εικόνες των μιγαδικών z_1, z_2 και z_3 αντίστοιχα στο μιγαδικό επίπεδο.
Είναι:

$$(AB)=|z_1-z_2|=\left|2-\left(-1+i\sqrt{3}\right)\right|=\left|3-i\sqrt{3}\right|=\sqrt{3^2+\left(-\sqrt{3}\right)^2}=\sqrt{12}=2\sqrt{3} \quad (1)$$

$$(B\Gamma)=|z_2-z_3|=\left|\left(-1+i\sqrt{3}\right)-\left(-1-i\sqrt{3}\right)\right|=\left|2\sqrt{3}i\right|=2\sqrt{3}\cdot|i|=2\sqrt{3} \quad (2)$$

$$(\Gamma A)=|z_3-z_1|=\left|\left(-1-i\sqrt{3}\right)-2\right|=\left|-3-i\sqrt{3}\right|=\sqrt{(-3)^2+\left(-\sqrt{3}\right)^2}=\sqrt{12}=2\sqrt{3} \quad (3)$$

Από (1) , (2) και (3) έχουμε $(AB)=(B\Gamma)=(\Gamma A)$, οπότε το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ισόπλευρο.

Άσκηση 18.

Έστω z μιγαδικός αριθμός τέτοιος ώστε $|z|=1$ και έστω $w=2z-4$.

α) Να δείξετε ότι οι εικόνες του w στο μιγαδικό επίπεδο ανήκουν σε κύκλο του οποίου να βρεθεί η εξίσωση.

β) Να βρείτε την ελάχιστη και τη μέγιστη τιμή του μέτρου $|z-w|$.

Λύση

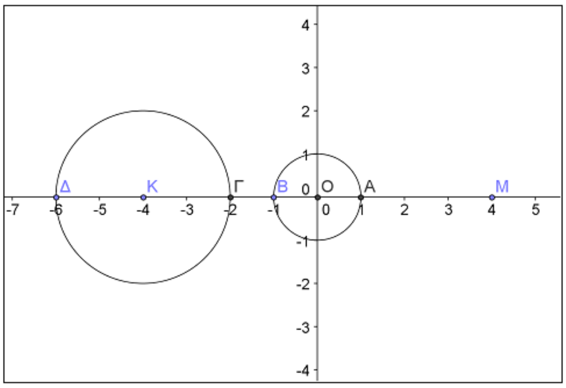
α) Έχουμε $w=2z-4 \Leftrightarrow z=\dfrac{w+4}{2}$. Επομένως

$$|z|=\left|\frac{w+4}{2}\right| \Leftrightarrow 2|z|=|w+4| \Leftrightarrow 2=|w+4| \Leftrightarrow |w-(-4+0i)|=2.$$

Άρα οι εικόνες του w στο μιγαδικό επίπεδο ανήκουν στον κύκλο με κέντρο $K(-4,0)$ και ακτίνα $R=2$. Ο κύκλος αυτός έχει εξίσωση
$(x+4)^2+y^2=2^2$

β) Επειδή ισχύει $|z|=1$, ο γεωμετρικός τόπος των εικόνων του z στο μιγαδικό επίπεδο είναι ο κύκλος με κέντρο $O(0,0)$ και ακτίνα $\rho=1$.

Επειδή $|z-w|=|z-(2z-4)|=|-z+4|=|z-4|$, η απόσταση των εικόνων των z και w είναι ίση με την απόσταση της εικόνας του z από το σημείο $M(4,0)$. Άρα η ελάχιστη τιμή του μέτρου $|z-w|$ είναι ίση με 3 και η μέγιστη τιμή του $|z-w|$ είναι ίση με 5 (όπως φαίνεται στο παρακάτω σχήμα)



Σχόλιο: Επειδή ο w εξαρτάται από τον z, δεν μπορούμε να πούμε ότι το ελάχιστο του $|z-w|$ είναι ίσο με το μήκος του τμήματος ΒΓ, δηλαδή ίσο με 1 (όπως ίσως μπορεί λαθεμένα να συμπεράνει κάποιος βασιζόμενος μόνο στο σχήμα), αφού, όταν ο z έχει την εικόνα του στο Β (δηλαδή είναι $z=-1$), τότε $w=2(-1)-4=-6$, οπότε ο w έχει την εικόνα του στο σημείο Δ. Αντίστοιχες σκέψεις ισχύουν και για το μέγιστο του $|z-w|$.

ΘΕΜΑ Γ

Άσκηση 1.

Αν $z, w \in \mathbb{C}$, να αποδείξετε ότι:

α) $|z| \le \dfrac{|z-w|+|z+w|}{2}$

β) $|w| \le \dfrac{|z-w|+|z+w|}{2}$

γ) $|z|+|w| \le |z-w|+|z+w|$

<u>Λύση</u>

α) Από τριγωνική ανισότητα έχουμε:

$|z_1+z_2| \le |z_1|+|z_2|$, για κάθε $z_1, z_2 \in C$ (1)

Αν θέσουμε $z_1 = z-w$ και $z_2 = z+w$, τότε από τη σχέση (1) έχουμε:

$$|(z-w)+(z+w)| \le |z-w|+|z+w| \Leftrightarrow |2z| \le |z-w|+|z+w| \Leftrightarrow$$

$$2|z| \le |z-w|+|z+w| \Leftrightarrow |z| \le \frac{|z-w|+|z+w|}{2} \quad (2)$$

β) Από τριγωνική ανισότητα έχουμε:

$|z_1-z_2| \le |z_1|+|z_2|$, για κάθε $z_1, z_2 \in C$ (3)

Αν θέσουμε $z_1 = z-w$ και $z_2 = z+w$, τότε από τη σχέση (3) έχουμε:

$$|(z-w)-(z+w)| \le |z-w|+|z+w| \Leftrightarrow |-2w| \le |z-w|+|z+w| \Leftrightarrow$$

$$2|w| \le |z-w|+|z+w| \Leftrightarrow |w| \le \frac{|z-w|+|z+w|}{2} \quad (4)$$

γ) Αν προσθέσουμε κατά μέλη τις σχέσεις (2) και (4) έχουμε:

$$|z|+|w| \le 2\cdot\frac{|z-w|+|z+w|}{2} \Leftrightarrow |z|+|w| \le |z-w|+|z+w|$$

Άσκηση 2.

Έστω Α, Β, Γ οι εικόνες των μιγαδικών αριθμών z, w, u αντίστοιχα στο επίπεδο. Αν $z=\frac{2010w+u}{2011}$ (1) και $w\neq u$, να αποδείξετε ότι:

α) Τα σημεία Α, Β, Γ είναι συνευθειακά.

β) $|w-z|<|w-u|$

γ) Το σημείο Α είναι εσωτερικό σημείο του ευθυγράμμου τμήματος ΒΓ.

<u>Λύση</u>

α) Αρκεί να δείξουμε ότι:

- Τα σημεία $\mathrm{A},\mathrm{B},\Gamma$ είναι διαφορετικά μεταξύ τους ανά δύο.
- $(\mathrm{BA})+(\mathrm{A}\Gamma)=(\mathrm{B}\Gamma)$ δηλαδή $|w-z|+|z-u|=|w-u|$.

Είναι:

- Από υπόθεση είναι $w\neq u$, άρα $\mathrm{B}\neq\Gamma$.

Αν υποθέσουμε ότι $z=w$, τότε από τη σχέση (1) έχουμε $w=\frac{2010w+u}{2011}\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 2011w=2010w+u\Leftrightarrow w=u$, άτοπο. Άρα $z\neq w$, οπότε $\mathrm{A}\neq\mathrm{B}$.

Αν υποθέσουμε ότι $z=u$, τότε από τη σχέση (1) έχουμε $u=\frac{2010w+u}{2011}\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 2010w+u=2011u\Leftrightarrow 2010w=2010u\Leftrightarrow w=u$, άτοπο. Άρα $z\neq w$, οπότε $\mathrm{A}\neq\Gamma$.

Επομένως τα $\mathrm{A},\mathrm{B},\Gamma$ είναι τρία σημεία διαφορετικά μεταξύ τους ανά δύο.

- $(\mathrm{BA})+(\mathrm{A}\Gamma)=|w-z|+|z-u|=\left|w-\frac{2010w+u}{2011}\right|+\left|\frac{2010w+u}{2011}-u\right|=$

$$=\left|\frac{2011w-2010w-u}{2011}\right|+\left|\frac{2010w+u-2011u}{2011}\right|=\frac{|w-u|}{2011}+\frac{2010|w-u|}{2011}=$$

$$=\frac{2011|w-u|}{2011}=|w-u|=(\mathrm{B}\Gamma)$$

β) Τα σημεία A, B, Γ είναι διαφορετικά μεταξύ τους ανά δύο και ικανοποιούν τη σχέση $(BA)+(A\Gamma)=(B\Gamma)$ (2) , άρα $(BA)<(B\Gamma)$ (3) , οπότε $|w-z|<|w-u|$.

γ) Από τις σχέσεις (2) και (3) συμπεραίνουμε ότι το Α είναι εσωτερικό σημείο του ευθυγράμμου τμήματος ΒΓ.

Άσκηση 3.

Έστω οι μιγαδικοί αριθμοί $z = 2 + συν(πt) + \left(5 + ημ(πt)\right)i$, $t \in [0, +\infty)$.

α) Να αποδείξετε ότι $|z - 2 - 5i| = 1$.

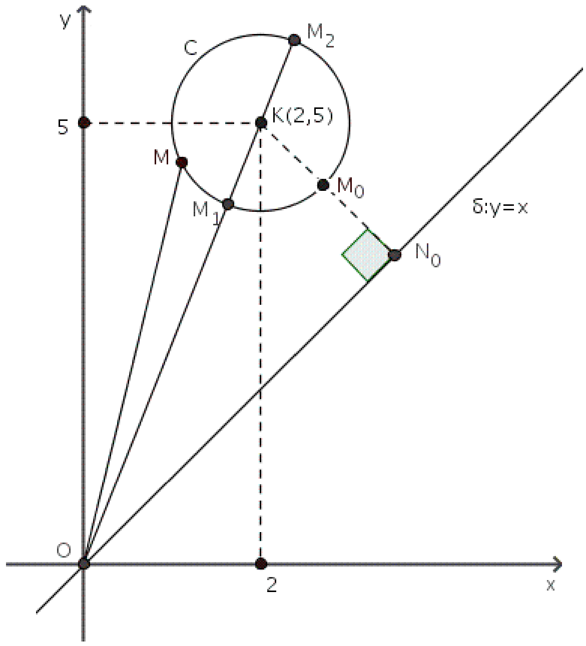
β) Να βρείτε τη μέγιστη και την ελάχιστη τιμή του $|z|$.

γ) Να εξετάσετε αν υπάρχει $t \in [0, +\infty)$ τέτοιος, ώστε η εικόνα του z να βρίσκεται πάνω στην ευθεία με εξίσωση $δ: y = x$.

δ) Έστω $w \in \mathbb{C}$ τέτοιος, ώστε $|w - 1| = |w - i|$. Να αποδείξετε ότι $|z - w| \geq \frac{3\sqrt{2}}{2} - 1$.

<u>Λύση</u>

α) Είναι $|z - 2 - 5i| = |συν(πt) + iημ(πt)| = \sqrt{συν^2(πt) + ημ^2(πt)} = 1$.



β) Επειδή $|z - (2 + 5i)| = 1$, η εικόνα $M(z)$ κινείται στον κύκλο C με κέντρο $K(2,5)$ και ακτίνα ρ=1.
Καθώς η εικόνα $M(z)$ κινείται στον κύκλο C, διαπιστώνουμε ότι ισχύει :

$(OM_1) \leq (OM) \leq (OM_2) \Leftrightarrow (OM_1) \leq |z| \leq (OM_2)$,
όπου M_1, M_2 είναι τα σημεία τομής της ευθείας OK και του κύκλου C.

Επομένως:

- Η ελάχιστη τιμή του $|z|$ είναι:
  $\min|z| = (OK) - ρ = \sqrt{29} - 1$

- Η μέγιστη τιμή του $|z|$ είναι
  $\max|z| = (OK) + ρ = \sqrt{29} + 1$

γ) Βρίσκουμε την απόσταση $d(K,\delta)=\frac{|2-5|}{\sqrt{2}}=\frac{3}{\sqrt{2}}>1=\rho$, άρα ο κύκλος C και η ευθεία δ δεν έχουν κοινό σημείο, επομένως δεν υπάρχει εικόνα $M(z)$ η οποία να ανήκει στην ευθεία δ.

δ) Επειδή $|w-1|=|w-i|$, η εικόνα $N(w)$ κινείται στην ευθεία $\delta: y=x$. Καθώς η εικόνα $M(z)$ κινείται στον κύκλο C και η εικόνα $N(w)$ κινείται στην ευθεία $\delta: y=x$ διαπιστώνουμε ότι η ελάχιστη τιμή του $|z-w|=(MN)$ είναι

$$\min|z-w|=(M_0N_0)=d(K,\delta)-\rho=\frac{3}{\sqrt{2}}-1=\frac{3\sqrt{2}}{2}-1.$$

Επομένως ισχύει: $|z-w|\geq\frac{3\sqrt{2}}{2}-1$.

ΘΕΜΑ Δ

Άσκηση 1.

Δίνονται οι μιγαδικοί αριθμοί z_1, z_2, z_3, διαφορετικοί ανά δύο, που ικανοποιούν τη σχέση $\dfrac{z_1-z_2}{z_2-z_3}=-\dfrac{1}{2}-\dfrac{\sqrt{3}}{2}i$. Αν A, B, Γ οι εικόνες τους αντίστοιχα στο μιγαδικό επίπεδο, να

αποδείξετε ότι το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ισόπλευρο.

<u>Λύση</u>

Είναι:

$$\frac{z_1-z_2}{z_2-z_3}=-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i \Rightarrow \left|\frac{z_1-z_2}{z_2-z_3}\right|=\left|-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i\right| \Rightarrow \frac{|z_1-z_2|}{|z_2-z_3|}=\sqrt{\left(-\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} \Rightarrow$$

$$\frac{|z_1-z_2|}{|z_2-z_3|}=1 \Rightarrow |z_1-z_2|=|z_2-z_3| \Rightarrow (AB)=(B\Gamma) \ \ (1).$$

Χρησιμοποιώντας τη γνωστή ιδιότητα των αναλογιών $\dfrac{\alpha}{\beta}=\dfrac{\gamma}{\delta} \Rightarrow \dfrac{\alpha+\beta}{\beta}=\dfrac{\gamma+\delta}{\delta}$, με $\beta, \delta \neq 0$,

έχουμε:

$$\frac{z_1-z_2}{z_2-z_3}=\frac{-1-\sqrt{3}i}{2} \Rightarrow \frac{z_1-z_2+z_2-z_3}{z_2-z_3}=\frac{-1-\sqrt{3}i+2}{2} \Rightarrow \frac{z_1-z_3}{z_2-z_3}=\frac{1-\sqrt{3}i}{2} \Rightarrow$$

$$\left|\frac{z_1-z_3}{z_2-z_3}\right|=\left|\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i\right| \Rightarrow \frac{|z_1-z_3|}{|z_2-z_3|}=\sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} \Rightarrow \frac{|z_1-z_3|}{|z_2-z_3|}=1 \Rightarrow$$

$$|z_1-z_3|=|z_2-z_3| \Rightarrow (A\Gamma)=(B\Gamma) \ \ \ (2).$$

Από (1) και (2) έχουμε $(AB)=(B\Gamma)=(A\Gamma)$, οπότε το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ισόπλευρο.

Άσκηση 2.

Δίνονται οι μιγαδικοί αριθμοί z , w, οι οποίοι ικανοποιούν τη σχέση $w = \dfrac{2z - i}{iz + 1}$, $z \neq i$.

α) Να αποδείξετε ότι $(w + 2i)(z - i) = 1$.

β) Αν η εικόνα του z κινείται στον κύκλο C_1 με κέντρο $K(0,1)$ και ακτίνα $\rho_1 = 1$, να βρείτε τη γραμμή πάνω στην οποία κινείται η εικόνα του w.

γ) Να αποδείξετε ότι $1 \leq |z - w| \leq 5$.

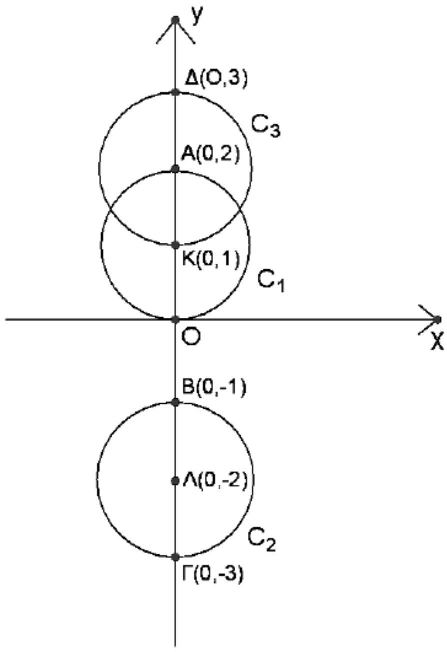
δ) Να αποδείξετε ότι $|z + w| \leq 3$.

<u>Λύση</u>

α) Είναι:

$$w + 2i = \frac{2z - i}{i(z - i)} + 2i = \frac{2z - i - 2(z - i)}{i(z - i)} = \frac{i}{i(z - i)} = \frac{1}{z - i}$$

Άρα $(w + 2i)(z - i) = \dfrac{1}{z - i}(z - i) = 1$.



β) Είναι:

$|z - (0 + i)| = 1 \Leftrightarrow |z - i| = 1$ και από το (α) ερώτημα

έχουμε $|(w + 2i)(z - i)| = 1 \Leftrightarrow |w + 2i| \cdot |z - i| = 1 \Leftrightarrow$

$|w + 2i| = 1$. Άρα η εικόνα του w κινείται στον

κύκλο C_2 με κέντρο $\Lambda(0, -2)$ και ακτίνα $\rho_2 = 1$.

γ) Ο αριθμός $|z - w|$ εκφράζει την απόσταση ενός σημείου του κύκλου C_1 από ένα σημείο του κύκλου C_2 .

Είναι $(OB) \leq |z - w| \leq (A\Gamma) \Rightarrow d - (\rho_1 + \rho_2) \leq |z - w| \leq d + (\rho_1 + \rho_2) \Leftrightarrow 1 \leq |z - w| \leq 5$

αφού $d = (K\Lambda) = 3$ και $\rho_1 + \rho_2 = 1 + 1 = 2$.

δ) Έχουμε $|z+w|\leq 3 \Leftrightarrow |z-(-w)|\leq 3$.

Οι εικόνες των μιγαδικών w και – w στο μιγαδικό επίπεδο είναι σημεία συμμετρικά ως

προς την αρχή των αξόνων $O(0,0)$, οπότε οι εικόνες των μιγαδικών $-w$ κινούνται σε κύκλο C_3 με κέντρο $A(0,2)$ και ακτίνα $\rho_3=1$, που είναι ο συμμετρικός κύκλος του C_2 στην ίδια συμμετρία.

Η μέγιστη απόσταση των κύκλων C_1, C_3 είναι η $(O\Delta)=3$, οπότε $|z+w|\leq 3$.

Άσκηση 3.

Έστω $z, w \in C$ με $zw \neq 0$ και $z^2 - zw + w^2 = 0$ (1). Να αποδείξετε ότι:

α) $z + w \neq 0$ και $z^3 + w^3 = 0$.

β) Οι εικόνες Α, Β αντίστοιχα των μιγαδικών z, w και η αρχή των αξόνων $O(0,0)$ είναι κορυφές ισοπλεύρου τριγώνου.

γ) Οι εικόνες Α, Β, Γ αντίστοιχα των μιγαδικών $z, w, -w$ είναι κορυφές ορθογωνίου τριγώνου με υποτείνουσα την ΒΓ.

δ) $\left(\frac{z}{w}\right)^{2011} + \left(\frac{w}{z}\right)^{2011} = 1$

<u>Λύση</u>

α) Αν υποθέσουμε ότι $z + w = 0$, τότε $z = -w$ και από τη σχέση (1) έχουμε:
$(-w)^2 - (-w) \cdot w + w^2 = 0 \Leftrightarrow 3w^2 = 0 \Leftrightarrow w = 0$, που είναι άτοπο. Άρα $z + w \neq 0$.

Αν πολλαπλασιάσουμε και τα δύο μέλη της σχέσης (1) με $z + w \neq 0$ έχουμε:

$(z + w)(z^2 - zw + w^2) = 0 \cdot (z + w) \Leftrightarrow z^3 + w^3 = 0$ (2)

β) Από τη σχέση (2) έχουμε $z^3 = -w^3$, οπότε
$|z^3| = |-w^3| \Leftrightarrow |z^3| = |w^3| \Leftrightarrow |z|^3 = |w|^3 \Leftrightarrow |z| = |w|$ (3).

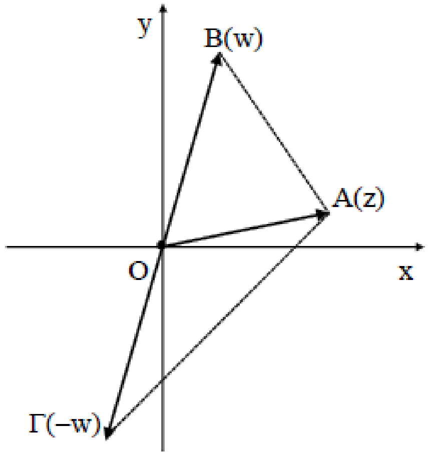
Αν αφαιρέσουμε και από τα δύο μέλη της (1) το zw έχουμε:
$z^2 - 2zw + w^2 = -zw \Leftrightarrow (z - w)^2 = -zw$, οπότε $|(z - w)^2| = |-zw| \Leftrightarrow |z - w|^2 = |zw| \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow |z - w|^2 = |z| \cdot |w| \overset{(3)}{\Leftrightarrow} |z - w|^2 = |z|^2 = |w|^2 \Leftrightarrow |z - w| = |z| = |w| \Leftrightarrow (AB) = (OA) = (OB)$.

Άρα το τρίγωνο ΟΑΒ είναι ισόπλευρο.

γ) Αρκεί να δείξουμε ότι $(AB)^2+(A\Gamma)^2=(B\Gamma)^2$, όπου

$(AB)=|z-w|$, $(A\Gamma)=|z+w|$ και $(B\Gamma)=2|w|$.



Είναι:

$(AB)^2+(A\Gamma)^2=|z-w|^2+|z+w|^2=$

$=(z-w)(\overline{z-w})+(z+w)(\overline{z+w})=$

$=(z-w)(\bar{z}-\bar{w})+(z+w)(\bar{z}+\bar{w})=$

$$=z\bar{z}-z\bar{w}-\bar{z}w+w\bar{w}+z\bar{z}+z\bar{w}+\bar{z}w+w\bar{w}=2|z|^2+2|w|^2=4|w|^2=\left(2|w|\right)^2=(B\Gamma)^2$$

δ) Είναι $z^3+w^3=0 \Leftrightarrow z^3=-w^3 \Leftrightarrow \frac{z^3}{w^3}=-1 \Leftrightarrow \left(\frac{z}{w}\right)^3=-1$, οπότε

$\left(\frac{z}{w}\right)^{2011}=\left(\left(\frac{z}{w}\right)^3\right)^{670}\cdot\frac{z}{w}=(-1)^{670}\cdot\frac{z}{w}=\frac{z}{w}$, ομοίως $\left(\frac{w}{z}\right)^{2011}=\frac{w}{z}$.

Άρα $\left(\frac{z}{w}\right)^{2011}+\left(\frac{w}{z}\right)^{2011}=\frac{z}{w}+\frac{w}{z}=\frac{z^2+w^2}{zw}\overset{(1)}{=}\frac{zw}{zw}=1$.

Άσκηση 4.

Έστω $z, w \in \mathbb{C}$ με $zw \neq 0$, $\frac{4z}{w} + \frac{w}{z} = 2$ και $|z| = 1$ (1). Να αποδείξετε ότι:

α) $z - w = \pm i\sqrt{3}z$.

β) Οι εικόνες Α, Β αντίστοιχα των μιγαδικών z, w και αρχή των αξόνων $O(0,0)$ είναι κορυφές ορθογωνίου τριγώνου.

γ) $\left(\frac{2z}{w}\right)^3 = \left(\frac{w}{2z}\right)^3 = -1$

δ) $\left(\frac{2z}{w}\right)^{2011} + \left(\frac{w}{2z}\right)^{2011} = 1$

<u>Λύση</u>

α) Είναι $\frac{4z}{w} + \frac{w}{z} = 2 \Leftrightarrow 4z^2 + w^2 = 2zw \Leftrightarrow 3z^2 + z^2 - 2zw + w^2 = 0 \Leftrightarrow 3z^2 + (z-w)^2 = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (z-w)^2 = -3z^2 \Leftrightarrow (z-w)^2 = (i\sqrt{3}z)^2 \Leftrightarrow z - w = \pm i\sqrt{3}z$ (2).

β) Από τη σχέση (2) έχουμε:

- $|z-w| = |\pm i\sqrt{3}z| \Leftrightarrow |z-w| = \sqrt{3}\,|i|\cdot|z| \overset{(1)}{\Leftrightarrow} |z-w| = \sqrt{3} \Leftrightarrow (AB) = \sqrt{3}$

- $z \pm i\sqrt{3}z = w \Leftrightarrow w = (1 \pm i\sqrt{3})z$ (3), οπότε

$|w| = |(1 \pm i\sqrt{3})z| \Leftrightarrow |w| = |1 \pm i\sqrt{3}|\cdot|z| \Leftrightarrow |w| = 2 \cdot 1 \Leftrightarrow |w| = 2 \Leftrightarrow (OB) = 2$

Είναι $(AB)^2 + (OA)^2 = |z-w|^2 + |z|^2 = (\sqrt{3})^2 + 1^2 = 4$ και $(OB)^2 = |w|^2 = 2^2 = 4$, άρα $(AB)^2 + (OA)^2 = (OB)^2$, οπότε το τρίγωνο ΟΑΒ είναι ορθογώνιο.

γ) Από τη σχέση (3) έχουμε: $\frac{w}{z} = 1 + i\sqrt{3}$ ή $\frac{w}{z} = 1 - i\sqrt{3}$.

Αν $\frac{w}{z} = 1 + i\sqrt{3}$, τότε:

- $\frac{w}{2z} = \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$ και $\left(\frac{w}{2z}\right)^3 = \left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^3 = \frac{1}{8} + \frac{3\sqrt{3}}{8}i - \frac{9}{8} - \frac{3\sqrt{3}}{8}i = -\frac{8}{8} = -1$

- $\dfrac{2z}{w}=\dfrac{2}{1+i\sqrt{3}}=\dfrac{2(1-i\sqrt{3})}{(1+i\sqrt{3})\cdot(1-i\sqrt{3})}=\dfrac{2(1-i\sqrt{3})}{4}=\dfrac{1}{2}-i\dfrac{\sqrt{3}}{2}$, οπότε

$$\left(\frac{2z}{w}\right)^3=\left(\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^3=\frac{1}{8}-\frac{3\sqrt{3}}{8}i-\frac{9}{8}+\frac{3\sqrt{3}}{8}i=-\frac{8}{8}=-1$$

Αν $\dfrac{w}{z}=1-i\sqrt{3}$, τότε ομοίως βρίσκουμε ότι $\left(\dfrac{2z}{w}\right)^3=\left(\dfrac{w}{2z}\right)^3=-1$.

δ) Είναι $\left(\dfrac{2z}{w}\right)^{2011}+\left(\dfrac{w}{2z}\right)^{2011}=\left(\left(\dfrac{2z}{w}\right)^3\right)^{670}\cdot\dfrac{2z}{w}+\left(\left(\dfrac{w}{2z}\right)^3\right)^{670}\cdot\dfrac{w}{2z}=$

$$=(-1)^{670}\cdot\frac{2z}{w}+(-1)^{670}\cdot\frac{w}{2z}=\frac{2z}{w}+\frac{w}{2z}=\frac{2z}{w}+\frac{w}{2z}=\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{4z}{w}+\frac{w}{z}\right)=\frac{1}{2}\cdot 2=1$$

Άσκηση 5.

Έστω z μιγαδικός αριθμός. Θεωρούμε τη συνάρτηση $f(z)=|iz-1|$.

α) Αν ισχύει $f(z)=f(\overline{z})$, να αποδείξετε ότι ο z είναι πραγματικός.

β) Αν $f(z)=\frac{1}{2}$, να βρείτε το γεωμετρικό τόπο της εικόνας του z.

γ) Αν z_1, z_2 είναι δύο μιγαδικοί με $f(z_1)=f(z_2)=\frac{1}{2}$, να αποδείξετε ότι $|z_1-z_2|\le 1$.

δ) Θεωρούμε τον μιγαδικό $w=\frac{i}{2}$. Να βρείτε τους μιγαδικούς z που ικανοποιούν τις σχέσεις $f(z)=\frac{1}{2}$ και $|z-w|=1$.

Λύση

α) Από τη σχέση $f(z)=f(\overline{z})$ έχουμε

$$|iz-1|=|i\overline{z}-1| \Leftrightarrow |iz-1|^2=|i\overline{z}-1|^2 \Leftrightarrow (iz-1)(-i\overline{z}-1)=(i\overline{z}-1)(-iz-1)$$

$$\Leftrightarrow 2i\overline{z}-2iz=0 \Leftrightarrow i(\overline{z}-z)=0 \Leftrightarrow z=\overline{z} \overset{z=x+yi}{\Leftrightarrow} x+yi=x-yi \Leftrightarrow 2yi=0 \Leftrightarrow y=0,$$

άρα $z\in\mathbb{R}$.

β) $f(z)=\frac{1}{2} \Leftrightarrow |iz-1|=\frac{1}{2} \Leftrightarrow |i(z+i)|=\frac{1}{2} \Leftrightarrow |i||z+i|=\frac{1}{2} \Leftrightarrow |z+i|=\frac{1}{2} \Leftrightarrow |z-(-i)|=\frac{1}{2} \overset{z=x+yi}{\Leftrightarrow}$

$x^2+(y+1)^2=\frac{1}{4}$ (1), άρα ο γεωμετρικός τόπος της εικόνας του z είναι κύκλος με κέντρο το σημείο $K(0,-1)$ και ακτίνας $\rho=\frac{1}{2}$.

γ) Οι μιγαδικοί z_1, z_2 ανήκουν στον παραπάνω κύκλο, επομένως το $|z_1-z_2|$ εκφράζει το μήκος της χορδής με άκρα τις εικόνες των z_1, z_2, που είναι μικρότερο ή ίσο της διαμέτρου του παραπάνω κύκλου. Δηλαδή $|z_1-z_2|\le 1$.

δ) Η σχέση $|z-w|=1$, δηλαδή $\left|z-\frac{i}{2}\right|=1$ «δηλώνει» κύκλο κέντρου $\Lambda\left(0,\frac{1}{2}\right)$ και ακτίνας $R=1$. Επομένως αρκεί να βρούμε τα κοινά σημεία των κύκλων:

$C_1:\ x^2+(y+1)^2=\frac{1}{4}$ και $C_2:\ x^2+\left(y-\frac{1}{2}\right)^2=1$

Κατ’ αρχάς παρατηρούμε ότι $(\text{ΚΛ}) = \sqrt{(0-0)^2 + \left(\frac{1}{2}+1\right)^2} = \frac{3}{2}$ και $\rho + R = \frac{1}{2} + 1 = \frac{3}{2}$ δηλαδή $(\text{ΚΛ}) = \rho + R$, οπότε οι δύο κύκλοι εφάπτονται και μάλιστα εξωτερικά.

Λύνουμε το σύστημα: $\begin{cases} x^2 + (y+1)^2 = \frac{1}{4} \\ x^2 + \left(y - \frac{1}{2}\right)^2 = 1 \end{cases}$ και βρίσκουμε ένα κοινό σημείο το $M\left(0, -\frac{1}{2}\right)$,

δηλαδή $z = 0 - \frac{1}{2}i = -\frac{1}{2}i$.

Άσκηση 6.

Αν για το μιγαδικό αριθμό z ισχύει $|z-4-3i|=2$, τότε:

α) Να βρείτε το γεωμετρικό τόπο της εικόνας του z.

β) Να βρείτε την ελάχιστη και τη μέγιστη τιμή του $|z|$.

γ) Ποιος μιγαδικός αριθμός z έχει το ελάχιστο και ποιος το μέγιστο μέτρο;

δ) Αν z_1 , z_2 είναι δύο μιγαδικοί του προηγούμενου γεωμετρικού τόπου, να αποδείξετε ότι $|z_1-z_2|\le 4$.

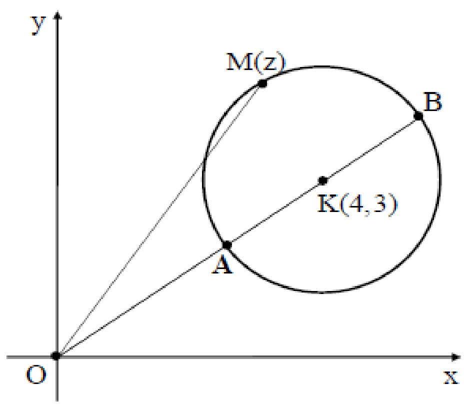
ε) Αν z_1 , z_2 είναι δύο μιγαδικοί του προηγούμενου γεωμετρικού τόπου τέτοιοι, ώστε $|z_1-z_2|=4$, να αποδείξετε ότι $|z_1+z_2|=10$.

Λύση

α) Έστω $z=x+yi$, $x, y\in\mathbb{R}$ με εικόνα στο επίπεδο το σημείο $M(x\,,\,y)$.

Είναι $|z-4-3i|=2 \Leftrightarrow |z-(4+3i)|=2 \Leftrightarrow (MK)=2$, όπου $M{=}M(z)$ η εικόνα του z και $K(4\,,3)$.

Παρατηρούμε ότι η εικόνα M του μιγαδικού αριθμού z απέχει από το σταθερό σημείο $K(4\,,3)$, σταθερή απόσταση 2.



Επομένως ο γεωμετρικός τόπος των εικόνων των μιγαδικών αριθμών z είναι ο κύκλος με κέντρο το σημείο $K(4\,,3)$ και ακτίνα $\rho=2$, που έχει εξίσωση $(x-4)^2+(y-3)^2=4$.

β) Είναι $(OK)=\sqrt{(4-0)^2+(3-0)^2}=5$. Η ευθεία OK τέμνει τον κύκλο στα σημεία A, B, όπως φαίνεται στο παραπάνω σχήμα. Είναι γνωστό από τη Γεωμετρία ότι για οποιοδήποτε σημείο M του κύκλου ισχύει $(OA)\le(OM)\le(OB)$. Άρα ο μιγαδικός με το ελάχιστο μέτρο έχει εικόνα το σημείο A και ο μιγαδικός με το μέγιστο μέτρο έχει εικόνα το σημείο B.

Επομένως έχουμε:

- $\min|z|=(OA)=|(OK)-\rho|=|5-2|=3$
- $\max|z|=(OB)=(OK)+\rho=5+2=7$

γ) Ο συντελεστής διεύθυνσης της ευθείας ΟΚ είναι: $\lambda=\dfrac{y_K-y_O}{x_K-x_O}=\dfrac{3-0}{4-0}=\dfrac{3}{4}$.

Η εξίσωση της ευθείας ΟΚ είναι: $y-y_O=\lambda(x-x_O)\Leftrightarrow y=\dfrac{3}{4}x$.

Για να βρούμε τις συντεταγμένες των Α, Β, λύνουμε το σύστημα των εξισώσεων της ευθείας ΟΚ και του κύκλου.

$$\begin{cases}(x-4)^2+(y-3)^2=4\\ y=\dfrac{3}{4}x\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}(x-4)^2+\left(\dfrac{3}{4}x-3\right)^2=4\\ y=\dfrac{3}{4}x\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}(x-4)^2+\dfrac{9}{16}(x-4)^2=4\\ y=\dfrac{3}{4}x\end{cases}\Leftrightarrow$$

$$\begin{cases}\dfrac{25}{16}(x-4)^2=4\\ y=\dfrac{3}{4}x\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}(x-4)^2=\dfrac{64}{25}\\ y=\dfrac{3}{4}x\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x-4=\pm\dfrac{8}{5}\\ y=\dfrac{3}{4}x\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=4\pm\dfrac{8}{5}\\ y=\dfrac{3}{4}x\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=\dfrac{28}{5}\ \text{ή}\ x=\dfrac{12}{5}\\ y=\dfrac{3}{4}x\end{cases}\Leftrightarrow$$

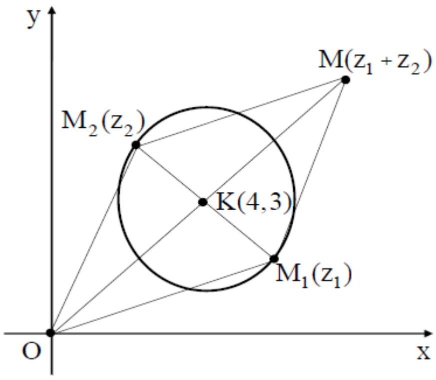
$$(x,y)=\left(\dfrac{12}{5},\dfrac{9}{5}\right)\ \text{ή}\ \left(\dfrac{28}{5},\dfrac{21}{5}\right).$$

Είναι $A\left(\dfrac{12}{5},\dfrac{9}{5}\right)$ και $B\left(\dfrac{28}{5},\dfrac{21}{5}\right)$, οπότε ο μιγαδικός αριθμός με το ελάχιστο μέτρο είναι ο $z=\dfrac{12}{5}+\dfrac{9}{5}i$ και ο μιγαδικός αριθμός με το μέγιστο μέτρο είναι ο $z=\dfrac{28}{5}+\dfrac{21}{5}i$.

δ) Το μέτρο $|z_1-z_2|$ εκφράζει την απόσταση των εικόνων των μιγαδικών z_1 και z_2. Αφού οι εικόνες των μιγαδικών z_1, z_2 κινούνται πάνω σε κύκλο, η απόστασή τους γίνεται μέγιστη όταν αυτές είναι αντιδιαμετρικά σημεία, δηλαδή όταν $|z_1-z_2|=2\rho=2\cdot2=4$.

Είναι $\max|z_1-z_2|=4$, άρα γενικά $|z_1-z_2|\le4$.

ε) Είναι $\left|z_1 - z_2\right| = 4$, άρα από το προηγούμενο ερώτημα συμπεραίνουμε ότι τα σημεία $M_1(z_1)$ και $M_2(z_2)$ είναι αντιδιαμετρικά. Αν M είναι η εικόνα του μιγαδικού $z_1 + z_2$, τότε έχουμε:



$$\left| z_1 + z_2 \right| = \left| \overrightarrow{OM} \right| = \left| 2\overrightarrow{OK} \right| = 2\left| \overrightarrow{OK} \right| = 2 \cdot 5 = 10 .$$

Άσκηση 7.

Έστω $z \in \mathbb{C}$ και $(1+iz)^{\nu} = -\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i$, $\nu \in \mathbb{N}^{*}$ (1).

α) Να αποδείξετε ότι ο z δεν είναι πραγματικός αριθμός.

β) Να αποδείξετε ότι οι εικόνες του z στο μιγαδικό επίπεδο ανήκουν στον κύκλο, με κέντρο $K(0,1)$ και ακτίνα $\rho=1$.

γ) Να αποδείξετε ότι $4 \le |z+3-5i| \le 6$.

δ) Αν $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ και ικανοποιούν την (1), να αποδείξετε ότι $|z_1-z_2| \le 2$.

ε) Αν $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ ικανοποιούν την (1) και $|z_1-z_2|=2$, να υπολογίσετε το $|z_1+z_2|$.

<u>Λύση</u>

α) Έστω $z \in \mathbb{R}$, τότε από την (1) έχουμε

$$\left|(1+iz)^{\nu}\right| = \left|-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right| \Leftrightarrow |1+iz|^{\nu} = \sqrt{\left(-\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} \Leftrightarrow |1+iz|^{\nu}=1 \Leftrightarrow$$

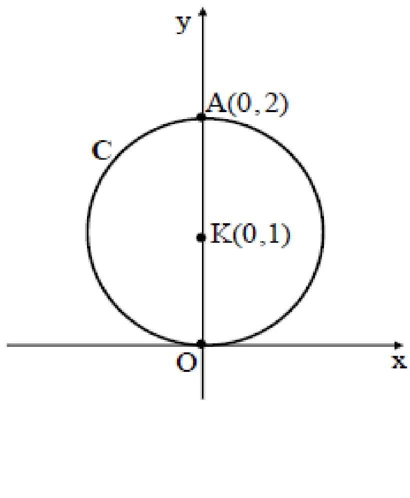
$|1+iz|=1 \Leftrightarrow \sqrt{1+z^2}=1 \Leftrightarrow z=0$, όμως για $z=0$ η (1) γράφεται $-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i=1$, που είναι άτοπο.

Άρα ο z δεν είναι πραγματικός αριθμός.

β) Από την (1) έχουμε:

$|1+iz|=1 \Leftrightarrow |iz-i^2|=1 \Leftrightarrow |i|\cdot|z-i|=1 \Leftrightarrow |z-i|=1$,

άρα οι εικόνες του z στο μιγαδικό επίπεδο είναι σημεία του κύκλου (C) με κέντρο το $K(0,1)$ και ακτίνα $\rho=1$.

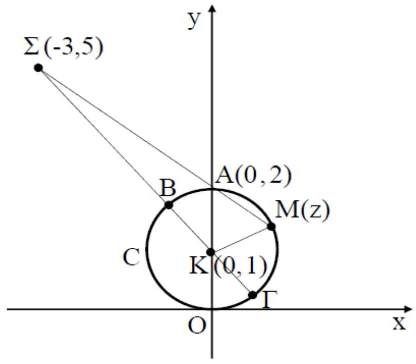


γ) Το $|z+3-5i|=|z-(-3+5i)|$ και παριστάνει την απόσταση των εικόνων $M(z)$ των μιγαδικών αριθμών z από το σημείο $\Sigma(-3,5)$. Αν Β , Γ είναι τα σημεία τομής της ευθείας ΣΚ με τον κύκλο, τότε έχουμε:

$(\Sigma B)\le(\Sigma M)\le(\Sigma\Gamma)$, όμως $(\Sigma K)=\sqrt{3^2+4^2}=5$

$(\Sigma B)=(\Sigma K)-\rho=5-1=4$ και

$(\Sigma\Gamma)=(\Sigma K)+\rho=5+1=6$, επομένως $4\le|z+3-5i|\le 6$.

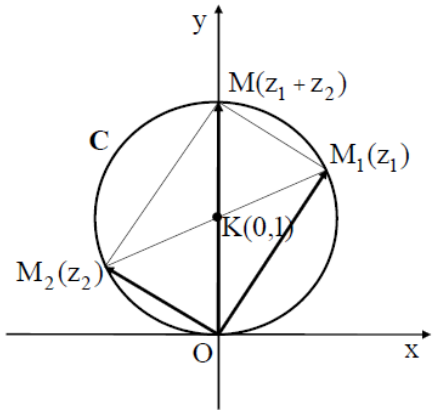


δ) Το μέτρο $|z_1-z_2|$ εκφράζει την απόσταση των εικόνων των μιγαδικών z_1 και z_2. Αφού οι εικόνες των μιγαδικών z_1, z_2 κινούνται πάνω σε κύκλο, η απόστασή τους γίνεται μέγιστη όταν αυτές είναι αντιδιαμετρικά σημεία, δηλαδή όταν $|z_1-z_2|=2\rho=2\cdot 1=2$.

Είναι $\max|z_1-z_2|=2$, άρα γενικά $|z_1-z_2|\le 2$.

ε) Είναι $|z_1-z_2|=2$, άρα από το προηγούμενο ερώτημα συμπεραίνουμε ότι τα σημεία $M_1(z_1)$ και $M_2(z_2)$ είναι αντιδιαμετρικά. Αν Μ είναι η εικόνα του μιγαδικού z_1+z_2, τότε έχουμε:

$$|z_1+z_2|=|\overrightarrow{OM}|=|2\overrightarrow{OK}|=2|\overrightarrow{OK}|=2\cdot 1=2$$



Άσκηση 8.

Δίνονται οι μιγαδικοί αριθμοί z_1, z_2, z_3, διαφορετικοί ανά δύο, με εικόνες αντίστοιχα στο μιγαδικό επίπεδο τα σημεία Α, Β, Γ. Αν ισχύουν οι σχέσεις:

$|z_1| = |z_2| = |z_3| = \rho > 0$ και $z_1 + z_2 + z_3 = 0$, να αποδείξετε ότι το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ισόπλευρο με πλευρά $\rho\sqrt{3}$.

Λύση

Αρκεί να δείξουμε ότι

$|z_1 - z_2| = |z_2 - z_3| = |z_3 - z_1|$. Έχουμε

$|z_1 - z_2| = |z_2 - z_3| \Leftrightarrow |z_1 + z_1 + z_3| = |-z_1 - z_3 - z_3|$

$\Leftrightarrow |2z_1 + z_3| = |z_1 + 2z_3|$

$\Leftrightarrow |2z_1 + z_3|^2 = |z_1 + 2z_3|^2$

$\Leftrightarrow (2z_1 + z_3)(2\overline{z}_1 + \overline{z}_3) = (z_1 + 2z_3)(\overline{z}_1 + 2\overline{z}_3)$

$\Leftrightarrow 4z_1\overline{z}_1 + 2z_1\overline{z}_3 + 2\overline{z}_1 z_3 + z_3\overline{z}_3 = z_1\overline{z}_1 + 2z_1\overline{z}_3 + 2\overline{z}_1 z_3 + 4z_3\overline{z}_3$

$\Leftrightarrow 4\rho^2 + 2z_1\overline{z}_3 + 2\overline{z}_1 z_3 + \rho^2 = \rho^2 + 2z_1\overline{z}_3 + 2\overline{z}_1 z_3 + 4\rho^2$

$\Leftrightarrow 0 = 0$ που ισχύει

Όμως αποδεικνύουμε και οι $|z_2 - z_3| = |z_3 - z_1|$

Επειδή $|z_1| = |z_2| = |z_3| = \rho$, οι εικόνες των μιγαδικών ανήκουν σε κύκλο με κέντρο το Ο(0,0) και ακτίνα ρ. Επειδή ακόμα οι κορυφές της σχηματίζουν ισόπλευρο τρίγωνο, η πλευρά του τριγώνου αυτού είναι ίση με $\rho\sqrt{3}$

Άσκηση 9.

Θεωρούμε τους μιγαδικούς αριθμούς $z(t)=\dfrac{1}{2+it}$, $t\in\mathbb{R}$. Να αποδείξετε ότι:

α) Να αποδείξετε ότι οι εικόνες των μιγαδικών $z(t)$, ανήκουν σε κύκλο με κέντρο $K\left(\dfrac{1}{4},0\right)$ και ακτίνα $\rho=\dfrac{1}{4}$.

β) Οι εικόνες των μιγαδικών αριθμών $z(t)$ και $z\left(-\dfrac{4}{t}\right)$, $t\in\mathbb{R}^*$ είναι αντιδιαμετρικά σημεία του προηγούμενου κύκλου.

γ) Οι εικόνες των μιγαδικών αριθμών $z(1)$, $z(-4)$ και $z(2011)$ είναι κορυφές ορθογωνίου τριγώνου.

<u>Λύση</u>

α) Έχουμε $z(t)=\dfrac{1}{2+it}$, $t\in\mathbb{R}$ άρα $z(t)\in\mathbb{C}^*$, για κάθε $t\in\mathbb{R}$.

Παρατηρούμε ότι:

$$\left|z(t)-\frac{1}{4}\right|=\left|\frac{1}{2+it}-\frac{1}{4}\right|=\left|\frac{4-(2+it)}{4(2+it)}\right|=\frac{|2-it|}{|4(2+it)|}=\frac{|2+it|}{4|(2+it)|}=\frac{1}{4}.$$

Συνεπώς οι εικόνες των μιγαδικών $z(t)$, ανήκουν στον κύκλο

$$C:\left(x-\frac{1}{4}\right)^2+y^2=\left(\frac{1}{4}\right)^2$$

εκτός του σημείου $O(0,0)$.

β) Στο (α) ερώτημα αποδείξαμε ότι για κάθε $t\in\mathbb{R}$ ο μιγαδικός αριθμός $z(t)=\dfrac{1}{2+it}$ ανήκει στον κύκλο (C) με κέντρο το σημείο $K\left(\dfrac{1}{4},0\right)$ και ακτίνα $\rho=\dfrac{1}{4}$, άρα και για $-\dfrac{4}{t}\in\mathbb{R}$ ο μιγαδικός αριθμός $z\left(-\dfrac{4}{t}\right)$ ανήκει στον ίδιο κύκλο.

Αρκεί τώρα να δείξουμε ότι $\left|z(t)-z\left(-\dfrac{4}{t}\right)\right|=2\rho=2\cdot\dfrac{1}{4}=\dfrac{1}{2}$.

Είναι $\left|z(t)-z\left(-\frac{4}{t}\right)\right| = \left|\frac{1}{2+it}-\frac{1}{2+i\left(-\frac{4}{t}\right)}\right| = \left|\frac{1}{2+it}-\frac{t}{2t-4i}\right| = \left|\frac{1}{2+it}-\frac{t}{2(t-2i)}\right| =$

$= \left|\frac{1}{2+it}-\frac{it}{2(2+it)}\right| = \left|\frac{2-it}{2(2+it)}\right| = \frac{|2-it|}{|2(2+it)|} = \frac{|2+it|}{2|(2+it)|} = \frac{1}{2}$.

Άρα οι εικόνες των μιγαδικών αριθμών $z(t)$ και $z\left(-\frac{4}{t}\right)$ είναι αντιδιαμετρικά σημεία

του κύκλου (C) για κάθε $t \in \mathbb{R}^*$.

γ) Για $t=1$ οι εικόνες των μιγαδικών αριθμών $z(1)$ και $z\left(-\frac{4}{1}\right) = z(-4)$ είναι αντιδιαμετρικά σημεία του κύκλου (C), σύμφωνα με το προηγούμενο ερώτημα

Είναι $z(1) \neq z(2011) \neq z(-4)$. Πράγματι

$\frac{1}{2+i} \neq \frac{1}{2+2011i} \neq \frac{1}{2-4i} \Leftrightarrow 2+i \neq 2+2011i \neq 2-4i \Leftrightarrow i \neq 2011i \neq -4i$ αληθές, οπότε οι

εικόνες των μιγαδικών αριθμών $z(1)$, $z(-4)$ και $z(2011)$ είναι κορυφές ορθογωνίου τριγώνου με υποτείνουσα το ευθύγραμμο τμήμα που ορίζουν οι εικόνες των μιγαδικών $z(1)$ και $z(-4)$.