Συναρτήσεις

2.23. **α)** Πρέπει: $x \neq 0$, άρα $A = \mathbb{R}^*$.

β) Πρέπει: $x \neq 0$, άρα $A = \mathbb{R}^*$.

γ) $x + \frac{\pi}{3} \neq k\pi + \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow x \neq k\pi + \frac{\pi}{6}$, $k \in \mathbb{Z}$, $A = \mathbb{R} - \left\{k\pi + \frac{\pi}{6}\right\}$, $k \in \mathbb{Z}$

δ) Πρέπει: $\begin{cases} x-1 \geq 0 \\ \sqrt{x-1} - 2 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 1 \\ \sqrt{x-1} \geq 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 1 \\ x-1 \geq 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 1 \\ x \geq 5 \end{cases}$

άρα $x \geq 5$ και $A = [5, +\infty)$

ε) Για να ορίζεται η συνάρτηση f πρέπει: $|x-3| - 1 > 0 \Leftrightarrow |x-3| > 1 \Leftrightarrow$ $x - 3 < -1 \Leftrightarrow x < 2$ ή $x - 3 > 1 \Leftrightarrow x > 4$. Άρα $A = (-\infty, 2) \cup (4, +\infty)$

στ) Για να ορίζεται η συνάρτηση f πρέπει: $|x| - x > 0 \Leftrightarrow |x| > x \Leftrightarrow x < 0$.

Άρα $A = (-\infty, 0)$.

ζ) Για να ορίζεται η συνάρτηση f πρέπει:

$\begin{cases} e^x - 1 \geq 0 \\ 1 - \ln x \geq 0 \\ x > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} e^x \geq 1 \\ \ln x \leq 1 \\ x > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 0 \\ x \leq e \\ x > 0 \end{cases}$, άρα $0 < x \leq e$ και $A = (0, e]$

η) $\begin{cases} x^2 - 1 \geq 0 \\ x - 4 \neq 0 \\ x(x-2) \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 \geq 1 \\ x \neq 4 \\ x \neq 0 \text{ και } x \neq 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} |x| \geq 1 \\ x \neq 4 \\ x \neq 0 \text{ και } x \neq 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq -1 \text{ ή } x \geq 1 \\ x \neq 4 \\ x \neq 0 \text{ και } x \neq 2 \end{cases}$

Άρα $A = (-\infty, -1] \cup [1, 2) \cup (2, 4) \cup (4, +\infty)$.

θ) $\begin{cases} |x| + 2 \neq 0 \\ |x| - 2 \geq 0 \\ |x| - 4 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} |x| \neq -2 \text{ ισχύει} \\ |x| \geq 2 \\ |x| \neq 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq -2 \text{ ή } x \geq 2 \\ x \neq \pm 4 \end{cases}$

Άρα $A = (-\infty, -4) \cup (-4, -2] \cup [2, 4) \cup (4, +\infty)$

ι) $\begin{cases} 2\eta\mu x - 1 \neq 0 \\ \varepsilon\varphi x - 1 \neq 0 \\ x \neq k\pi + \frac{\pi}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \eta\mu x \neq \frac{1}{2} \\ \varepsilon\varphi x \neq 1 \\ x \neq k\pi + \frac{\pi}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \eta\mu x \neq \eta\mu\frac{\pi}{6} \\ \varepsilon\varphi x \neq \varepsilon\varphi\frac{\pi}{4} \\ x \neq k\pi + \frac{\pi}{2} \end{cases} \Leftrightarrow$

$\begin{cases} x \neq 2k\pi + \frac{\pi}{6} \text{ ή } x \neq 2k\pi + \pi - \frac{\pi}{6} \\ x \neq k\pi + \frac{\pi}{4} \\ x \neq k\pi + \frac{\pi}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq 2k\pi + \frac{\pi}{6} \text{ ή } x \neq 2k\pi + \frac{5\pi}{6} \\ x \neq k\pi + \frac{\pi}{4} \\ x \neq k\pi + \frac{\pi}{2} \end{cases}$, $k \in \mathbb{Z}$.

Άρα $A = \mathbb{R} - \left\{2k\pi + \frac{\pi}{6}, 2k\pi + \frac{5\pi}{6}, k\pi + \frac{\pi}{4}, k\pi + \frac{\pi}{2}\right\}$, $k \in \mathbb{Z}$.

κ) Για να ορίζεται η συνάρτηση f πρέπει:

$(x-1)^2 \geq 0$, που ισχύει για κάθε $x \in \mathbb{R}$ και

$\sqrt{(x-1)^2} - |x| + 2 \neq 0 \Leftrightarrow |x-1| \neq |x| - 2$

x	$-\infty$		0		1		$+\infty$
$x-1$		$-$		$-$	0	$-$	
x		$-$	0	$+$		$-$	

Αν $x<0$, τότε: $-x+1 \neq -x-2$ που ισχύει.

Αν $0 \leq x < 1$, τότε: $-x+1 \neq x-2 \Leftrightarrow 2x \neq 3 \Leftrightarrow x \neq \dfrac{3}{2}$ που ισχύει.

Αν $x \geq 1$, τότε: $x-1 \neq x-2$ που ισχύει. Άρα $A = \mathbb{R}$.

2.24. **α)** $x^2 - 7x + 6 \neq 0 \Leftrightarrow x \neq 1$ και $x \neq 6$. $A = \mathbb{R} - \{1,6\}$

β) $x-1 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq 1$ και $x-3 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq 3$. Με συναλήθευση: $A = [3,+\infty)$

γ) $4 - x^2 \geq 0 \Leftrightarrow x^2 \leq 4 \Leftrightarrow |x| \leq 2 \Leftrightarrow -2 \leq x \leq 2$ και $x \neq 0$, άρα $A = [-2,0) \cup (0,2]$.

δ) $x^2 + 3x - 10 \geq 0 \Leftrightarrow x \leq -5$ ή $x \geq 2$. $A = (-\infty,-5] \cup [2,+\infty)$

ε) $\begin{cases} x-1>0 \\ x^2-4>0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x>1 \\ x^2>4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x>1 \\ |x|>2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x>1 \\ x<-2 \text{ ή } x>2 \end{cases} \Rightarrow x>2$, άρα $A = (2,+\infty)$

στ) $e^{2x} + 2e^x - 3 > 0 \Leftrightarrow (e^x - 1)(e^x + 3) > 0 \Leftrightarrow e^x > 1 \Leftrightarrow x > 0$, άρα $A = (0,+\infty)$

2.25. **α)** $x + \dfrac{\pi}{2} \neq k\pi + \dfrac{\pi}{2} \Leftrightarrow x \neq k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, $A = \mathbb{R} - \{k\pi\}$, $k \in \mathbb{Z}$

β) $\eta\mu x \neq 1 \Leftrightarrow x \neq 2k\pi + \dfrac{\pi}{2}$, $k \in \mathbb{Z}$

γ) $\dfrac{1+x}{1-x} > 0 \Leftrightarrow x \in (-1,1)$, άρα $A = (-1,1)$

δ) $4^x + 2^x - 2 \neq 0 \overset{2^x = u}{\Leftrightarrow} u^2 + u - 2 \neq 0 \Leftrightarrow u \neq -2$ που είναι αδύνατο

ή $u \neq 1 \Leftrightarrow 2^x \neq 1 \Leftrightarrow x \neq 0$, $A = \mathbb{R}^*$

ε) $A = \mathbb{R}$.

ζ) $x \neq 2$, $A = \mathbb{R} - \{2\}$

2.26. Πρέπει $x^2 - 4x + 4 - |x| + 1 > 0 \ (1)$. Αν $x \geq 0$, τότε:

$$(1) \Rightarrow x^2 - 4x + 4 - x + 1 > 0 \Leftrightarrow x^2 - 5x + 5 > 0 \Leftrightarrow x \in \left[0, \frac{5-\sqrt{5}}{2}\right) \cup \left(\frac{5+\sqrt{5}}{2}, +\infty\right]$$

Αν $x<0$, τότε: $(1) \Rightarrow x^2 - 4x + 4 + x + 1 > 0 \Leftrightarrow x^2 - 3x + 5 > 0$ που ισχύει.

Άρα $A = \left(-\infty, \dfrac{5-\sqrt{5}}{2}\right) \cup \left(\dfrac{5+\sqrt{5}}{2}, +\infty\right)$

2.27. Πρέπει $\lambda^2 + 5\lambda \leq 3\lambda \Leftrightarrow \lambda^2 + 2\lambda \leq 0 \Leftrightarrow -2 \leq \lambda \leq 0$.

Επειδή $\lambda \in \mathbb{Z}$ είναι $\lambda = -2$ ή -1 ή 0.

Αν $\lambda = -2$, είναι $f(x) = \begin{cases} \sqrt{1+x^2} &, x \leq -6 \\ x\ln(x^2+1) &, x \geq -6 \end{cases}$. Είναι $f(-6) = \sqrt{37}$ και $f(-6) = -6\ln 37$

και $\sqrt{37} \neq -6\ln 37$, άρα δεν είναι συνάρτηση.

Αν $\lambda=-1$, είναι $f(x)=\begin{cases}\sqrt{1+x^2} & ,\ x\le -4\\ x\ln\left(x^2+1\right), & x\ge -3\end{cases}$. Είναι συνάρτηση.

Αν $\lambda=0$, είναι $f(x)=\begin{cases}\sqrt{1+x^2} & ,\ x\le 0\\ x\ln\left(x^2+1\right), & x\ge 0\end{cases}$. Είναι $f(0)=1$ και $f(0)=0$ άρα δεν είναι συνάρτηση.

2.28. Πρέπει $3x^2-4\lambda x+4\ne 0$ για κάθε (2)

Άρα $\Delta<0 \Leftrightarrow 16\lambda^2-48<0 \Leftrightarrow \lambda^2<3 \Leftrightarrow |\lambda|<\sqrt{3} \Leftrightarrow -\sqrt{3}<\lambda<\sqrt{3}$

2.29. Πρέπει $\lambda x^2-2x+1\neq 0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

Αν $\lambda=0$ τότε $x\ne\frac{1}{2}$ και η f δεν έχει πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}$.

Αν $\lambda\ne 0$ πρέπει $\Delta<0 \Leftrightarrow 4-4\lambda<0 \Leftrightarrow \lambda>1$.

2.30. Αν $\lambda=0$ τότε $f(x)=\sqrt{-4x+1}$ και $D_f=\left(-\infty,\frac{1}{4}\right]$.

Αν $\lambda\ne 0$ τότε το τριώνυμο $4\lambda x^2-4x+1$ έχει $\Delta=16-16\lambda=16(1-\lambda)$.

- Αν $\lambda<1$ τότε $\Delta>0$ και το τριώνυμο έχει ρίζες

  $x_{1,2}=\frac{4\pm\sqrt{16(1-\lambda)}}{8\lambda}=\frac{1\pm\sqrt{1-\lambda}}{2\lambda} \Leftrightarrow x_1=\frac{1+\sqrt{1-\lambda}}{2\lambda},\ x_2=\frac{1-\sqrt{1-\lambda}}{2\lambda}$.

- Αν $\lambda\in(0,1)$ τότε

  και $D_f=(-\infty,x_2]\cup[x_1,+\infty)$.

x		x_2		x_1	
$4\lambda x^2-4x-1$	+	0	−	0	+

  Ενώ αν $\lambda<0$ τότε

  $D_f=[x_1,x_2]$

x		x_1		x_2	
$4\lambda x^2-4x+1$	−	0	+	0	−

- Αν $1-\lambda<0 \Leftrightarrow \lambda>1$ τότε $\Delta<0$ και $4\lambda x^2-4x+1>0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$, οπότε $D_f=\mathbb{R}$.
- Τέλος αν $1-\lambda=0 \Leftrightarrow \lambda=1$ τότε $\Delta=0$ και

  $4\lambda x^2-4x+1=4x^2-4x+1=(2x-1)^2\ge 0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$. Οπότε $D_f=\mathbb{R}$.

2.31. **α)** Αν $\alpha=0$, τότε $f(x)=\frac{1}{\sqrt{x}}$ και $A=(0,+\infty)\ne\mathbb{R}$.

Αν $\alpha\ne 0$, τότε $\Delta=1+64\alpha^3$.

Αν $\alpha>-\frac{1}{4}$, τότε $\Delta>0$, το τριώνυμο αλλάζει πρόσημο οπότε δεν είναι θετικό για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

Αν $\alpha=-\frac{1}{4}$, τότε $\Delta=0$, και το τριώνυμο έχει μία ρίζα x_1, οπότε $A_f=\mathbb{R}-\{x_1\}\ne\mathbb{R}$.

Αν $\alpha < -\frac{1}{4}$ τότε $\Delta < 0$ και η f έχει πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}$.

2.32. Αν $\lambda = 1$ τότε η f δεν ορίζεται.

Αν $\lambda \neq 1$ τότε $\Delta = 4(\lambda-1)(2\lambda-3)$ και αν $\lambda \in \left(1, \frac{3}{2}\right)$ τότε $\Delta < 0$, $1-\lambda < 0$ και η f δεν ορίζεται.

Αν $\lambda < 1$ τότε $\Delta > 0$, $1-\lambda > 0$ και το τριώνυμο $(1-\lambda)x^2 + 4(\lambda-1)x - 2\lambda + 1$ έχει δύο ρίζες x_1, x_2 και $A_f = (-\infty, x_1] \cup [x_2, +\infty) \neq [1,3]$

Αν $\lambda > \frac{3}{2}$ τότε $\Delta > 0$, $1-\lambda < 0$ και το τριώνυμο έχει δύο ρίζες x_1, x_2 και $A_f = [x_1 x_2]$

άρα $x_1 = 1$ και $x_2 = 3$. Τότε $\begin{cases} (1-\lambda)\cdot 1^2 + 4(\lambda-1)\cdot 1 - 2\lambda + 1 = 0 \\ (1-\lambda)\cdot 3^2 + 4(\lambda-1)\cdot 3 - 2\lambda + 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \lambda = 2$

2.33. Όπου x το $2-x$: $f(x) + f(2-x) = (2-x)^3 + 3$, άρα για κάθε $x \in \mathbb{R}$ είναι $x^3 + 3 = (2-x)^3 + 3 \Leftrightarrow x = 1$ που δεν ισχύει.

2.34. **α)** Είναι $|x| + 1 \neq 0$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$, οπότε $D_f = D_g = \mathbb{R}$

και $f(x) = \frac{x^2-1}{|x|+1} = \frac{|x|^2 - 1}{|x|+1} = \frac{(|x|+1)(|x|-1)}{|x|+1} = |x| - 1 = g(x)$.

Άρα $f(x) = g(x)$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

β) Για να ορίζεται η f, πρέπει: $\begin{cases} x+2>0 \\ x-2>0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x>-2 \\ x>2 \end{cases} \Leftrightarrow x > 2$, οπότε $D_f = (2, +\infty)$.

Για να ορίζεται η g, πρέπει: $x^2 - 4 > 0 \Leftrightarrow x^2 > 4 \Leftrightarrow |x| > 2 \Leftrightarrow x < -2$ ή $x > 2$

Οπότε $D_g = (-\infty, -2) \cup (2, +\infty)$. Είναι $D_f \cap D_g = (2, +\infty)$, άρα για $x \in (2, +\infty)$, έχουμε: $f(x) = \ln(x+2) + \ln(x-2) = \ln[(x+2)(x-2)] = \ln(x^2 - 4) = g(x)$

2.35. **α)** $A_f = \mathbb{R} - \{\pm 1\} \neq A_g = \mathbb{R} - \{1\}$, άρα $f \neq g$. Για $x \in \mathbb{R} - \{\pm 1\}$, είναι:

$$f(x) = \frac{x^2 - x - 2}{x^2 - 1} = \frac{(x-2)\cancel{(x+1)}}{(x-1)\cancel{(x+1)}} = g(x)$$

β) $A_f = A_g = \mathbb{R}$. Για $x \geq 0$, είναι $f(x) = \sqrt{x^2} = |x| = x = g(x)$

γ) $A_f = (-\infty, -3] \cup [0, +\infty)$, $A_g = [0, +\infty)$. Είναι $A_f \neq A_g$ άρα και $f \neq g$.

Όταν $x \in [0, +\infty)$, τότε $f = g$.

δ) $A_f = (-1, 1]$, $A_g = (-1, 1]$. Είναι $A_f = A_g$ και $f(x) = g(x)$.

ε) $A_f = \mathbb{R}^*$, για τη g πρέπει: $x^2 - |x| \neq 0 \Leftrightarrow |x|^2 - |x| \neq 0 \Leftrightarrow |x|(|x| - 1) \neq 0 \Leftrightarrow x \neq 0$ και $x \neq \pm 1$, άρα $A_g = \mathbb{R} - \{0, -1, 1\}$. Είναι $A_f \neq A_g$ άρα και $f \neq g$.

Για $x \in \mathbb{R} - \{0, -1, 1\}$ είναι $f(x) = \frac{5|x|^2 - |x|}{|x|^2} = \frac{5|x| - 1}{|x|}$,

$$g(x) = \frac{5|x|^2 - 6|x| + 1}{|x|^2 - |x|} = \frac{\cancel{(|x|-1)}(5|x|-1)}{|x|\cancel{(|x|-1)}} = \frac{5|x|-1}{|x|} = f(x)$$

2.36.α) Για την f πρέπει $x+2>0 \Leftrightarrow x>-2$ και $2-x>0 \Leftrightarrow x<2$, άρα $A_f=(-2,2)$.

Για τη g πρέπει: $4-x^2>0 \Leftrightarrow x^2<4 \Leftrightarrow |x|<2 \Leftrightarrow -2<x<2$, άρα $A_g=(-2,2)$.

Είναι $A_f=A_g$ και

$f(x)=\ln(x+2)+\ln(2-x)=\ln[(x+2)(2-x)]=\ln(4-x^2)=g(x)$

β) Για την f πρέπει $x+1>0 \Leftrightarrow x>-1$ και $x-1>0 \Leftrightarrow x>1$, άρα $A_f=(1,+\infty)$.

Για τη g πρέπει $\dfrac{x+1}{x-1}>0 \Leftrightarrow ... \Leftrightarrow x<-1$ ή $x>1$. Για $x>1$ είναι $f=g$.

γ) $A_f=(3,+\infty)$, $A_g=\mathbb{R}-\{3\}$. Για $x>3$, είναι $f=g$.

2.37. Αν $x<-1$, τότε $f(x)=-x+1-2x-2+x=-2x-1$.

Αν $-1\le x\le 1$, τότε: $f(x)=-x+1+2x+2+x=2x+3=g(x)$ και αν $x>1$, τότε

$f(x)=x-1+2x+2+x=4x+1$

2.38. Αρχικά θα απαλλάξουμε την f από τα απόλυτα.

Είναι:

x	$-\infty$	0	2	$+\infty$
$x-2$	$-$	$-$	0 $+$	
x	$-$	0 $+$	$+$	

Αν $x<0$ τότε $f(x)=-x+2-3x=-4x-2$.

Αν $0\le x<2$ τότε $f(x)=-x+2+3x=2x+2$

Αν $x\ge 2$ τότε $f(x)=x-2+3x=4x-2$. Δηλαδή $f(x)\begin{cases}-4x-2, & x<0\\ 2x+2, & 0\le x<2\\ 4x-2, & x\ge 2\end{cases}$

Παρατηρούμε ότι, όταν $x\ge 2$ είναι $f(x)=4x-6=g(x)$.

Άρα $f=g$ για κάθε $x\in[2,+\infty)$.

2.39. **α)** Είναι $|x|+2\neq 0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$, οπότε $A_f=A_g=\mathbb{R}$ και:

$$f(x)=\frac{x^2-4}{|x|+2}=\frac{|x|^2-4}{|x|+2}=\frac{(|x|+2)(|x|-2)}{|x|+2}=|x|-2=g(x)$$

Άρα $f(x)=g(x)$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

β) Για να ορίζεται η f πρέπει: $\left.\begin{matrix}x+1>0\\x-1>0\end{matrix}\right\}\Leftrightarrow\left.\begin{matrix}x>-1\\x>1\end{matrix}\right\}\Rightarrow x>1$. Οπότε $A_f=(1,+\infty)$.

Για να ορίζεται η g, πρέπει: $x^2-1>0 \Leftrightarrow x^2>1 \Leftrightarrow |x|>1 \Leftrightarrow x<-1$ ή $x>1$.

Οπότε $A_g=(-\infty,-1)\cup(1,+\infty)$. Όταν $x\in A=A_f\cap A_g=(1,+\infty)$, έχουμε:

$f(x)=\ln(x+1)+\ln(x-1)=\ln[(x+1)(x-1)]=\ln(x^2-1)=g(x)$.

2.40. Αρκεί να δείξουμε ότι υπάρχουν $x\in\mathbb{R}$ για τα οποία ισχύει: $\varphi(x)\neq 0$.

Για $x=2$ είναι: $\varphi(2)=f^2(16)+f(16)+1$. Το $\varphi(2)$ είναι τριώνυμο με διακρίνουσα $\Delta<0$, άρα $f^2(16)+f(16)+1\neq 0 \Leftrightarrow \varphi(2)\neq 0$. Οπότε $\varphi(x)\neq 0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

2.41. Για να είναι $f=g$, αρχικά πρέπει $A_f=A_g$.

Επειδή $A_g=\mathbb{R}$ για να έχει και η f πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}$, πρέπει: $x^2+\lambda x+1\neq 0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$. Αυτό ισχύει όταν $\Delta<0 \Leftrightarrow \lambda^2-4<0 \Leftrightarrow \lambda^2<4 \Leftrightarrow |\lambda|<2 \Leftrightarrow -2<\lambda<2$.

Επίσης πρέπει $f(x)=g(x)$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

Είναι: $\dfrac{\lambda x^3+2\lambda x^2+2x+1}{x^2+\lambda x+1}=\lambda x+1 \Leftrightarrow$

$\lambda x^3+2\lambda x^2+2x+1=\lambda x^3+\lambda^2x^2+\lambda x+x^2+\lambda x+1 \Leftrightarrow$

$2\lambda x^2+2x-\lambda^2x^2-\lambda x-x^2-\lambda x=0 \Leftrightarrow -\left(\lambda^2-2\lambda+1\right)x^2+2(1-\lambda)x=0 \Leftrightarrow$

$-(\lambda-1)^2x^2+2(1-\lambda)x=0$

Για να αληθεύει η τελευταία σχέση για κάθε $x\in\mathbb{R}$, πρέπει: $\begin{cases}(\lambda-1)^2=0\\ 1-\lambda=0\end{cases} \Leftrightarrow \lambda=1.$

2.42. Για να ορίζεται η f πρέπει: $x-\alpha+2\neq 0 \Leftrightarrow x\neq \alpha-2$, άρα $A_f=\mathbb{R}-\{\alpha-2\}$.

Για να ορίζεται η g πρέπει: $x+\beta-1\neq 0 \Leftrightarrow x\neq 1-\beta$, άρα $A_g=\mathbb{R}-\{1-\beta\}$.

Για να είναι ίσες οι συναρτήσεις f,g, πρέπει αρχικά να έχουν το ίδιο πεδίο ορισμού, άρα $\alpha-2=1-\beta \Leftrightarrow \alpha=3-\beta$.

Τότε: $f(x)=\dfrac{x^2-(3-\beta)x+\beta}{x-3+\beta+2}=\dfrac{x^2-(3-\beta)x+\beta}{x+\beta-1}$ και

$$g(x)=\frac{x^2-(\alpha+\beta-1)x+2\alpha-3}{x+\beta-1}=\frac{x^2-(3-\beta+\beta-1)x+2(3-\beta)-3}{x+\beta-1}=\frac{x^2-2x-2\beta+3}{x+\beta-1}$$

$$f(x)=g(x) \Leftrightarrow \frac{x^2-(3-\beta)x+\beta}{x+\beta-1}=\frac{x^2-2x-2\beta+3}{x+\beta-1} \Leftrightarrow$$

$$x^2-(3-\beta)x+\beta=x^2-2x-2\beta+3 \quad (1)$$

Για να είναι ίσες οι συναρτήσεις f,g πρέπει η σχέση (1) να ισχύει για κάθε $x\in\mathbb{R}$ και αυτό συμβαίνει όταν: $\begin{cases}3-\beta=2\\ \beta=-2\beta+3\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\beta=1\\ 3\beta=3\end{cases} \Leftrightarrow \beta=1$. Τότε $\alpha=3-1=2$.

2.43. Για την f πρέπει: $x+2\neq 0 \Leftrightarrow x\neq -2$, οπότε $A_f=\mathbb{R}-\{-2\}$.

Για την g πρέπει: $x^2-x-6\neq 0 \Leftrightarrow x\neq 3$ και $x\neq -2$, άρα $A_g=\mathbb{R}-\{-2,3\}$.

Οπότε, στο $A=A_f\cap A_g=\mathbb{R}-\{-2,3\}$ είναι:

$$(f+g)(x)=f(x)+g(x)=\frac{x^2-9}{x+2}+\frac{x-1}{x^2-x-6}=\frac{x^3-3x^2-8x+26}{x^2-x-6}$$

$$(f\cdot g)(x)=f(x)\cdot g(x)=\frac{x^2-9}{x+2}\cdot\frac{x-1}{x^2-x-6}=\frac{(x-3)(x+3)}{x+2}\cdot\frac{x-1}{(x-3)(x+2)}=\frac{(x+3)(x-1)}{(x+2)^2}$$

Για να ορίζεται η $\frac{f}{g}$ πρέπει $x \in A$ και $g(x) \neq 0 \Leftrightarrow \frac{x-1}{x^2-x-6} \neq 0 \Leftrightarrow x \neq 1$.

Άρα $A_{\frac{f}{g}} = \mathbb{R} - \{-2,3,1\}$ και $\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\frac{x^2-9}{x+2}}{\frac{x-1}{x^2-x-6}} = \frac{(x-3)^2(x+3)}{x-1}$

2.44. $A_f = [1,+\infty)$, $A_g = (-\infty,6]$. $A_{f+g} = A_{fg} = [1,6]$

$(f+g)(x) = \sqrt{x-1} + \sqrt{6-x}$, $(fg)(x) = \sqrt{x-1}\sqrt{6-x}$.

Για την $\frac{f}{g}$ πρέπει επιπλέον: $g(x) \neq 0 \Leftrightarrow x \neq 6$, άρα $A_{\frac{f}{g}} = [1,6)$ και $\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{\sqrt{x-1}}{\sqrt{6-x}}$

Για τη $\frac{g}{f}$ πρέπει $f(x) \neq 0 \Leftrightarrow x \neq 1$, άρα $A_{\frac{g}{f}} = (1,6]$ και $\left(\frac{g}{f}\right)(x) = \frac{\sqrt{6-x}}{\sqrt{x-1}}$

2.45. Για την f, πρέπει $x+1 \neq 0 \Leftrightarrow x \neq -1$. Είναι $D_f = \mathbb{R} - \{-1\}$.

Για την g, πρέπει $x^2-1 \neq 0 \Leftrightarrow x^2 \neq 1 \Leftrightarrow x \neq \pm 1$. Είναι $D_g = \mathbb{R} - \{\pm 1\}$.

Άρα $B = D_f \cap D_g = \mathbb{R} - \{\pm 1\}$.

Είναι: $(f+g)(x) = f(x) + g(x) = \frac{x^2-3x+2}{x+1} + \frac{x-2}{x^2-1} = \frac{x^3-4x^2+6x-4}{x^2-1}$, $x \in B$.

Για τη συνάρτηση $\frac{f}{g}$, πρέπει επιπλέον $g(x) \neq 0 \Leftrightarrow \frac{x-2}{x^2-1} \neq 0 \Leftrightarrow x \neq 2$.

Οπότε $D_{\frac{f}{g}} = \{x \in B / g(x) \neq 0\} = \mathbb{R} - \{\pm 1, 2\}$, άρα για τη συνάρτηση

$h(x) = (2f-3g)(x)$ είναι $D_h = B$.

Τότε $h(x) = 2f(x) - 3g(x) = \frac{2x^2-6x+4}{x+1} - \frac{3x-6}{x^2-1} = \frac{2x^3-8x^2+7x+2}{x^2-1}$.

2.46. $A_f = [1,+\infty)$, $A_g = (-\infty,-2] \cup [2,+\infty)$, $A_f \cap A_g = [2,+\infty) = A_{fg} = A_{f^2g} = A_{fg^2}$

$(fg)(x) = \sqrt{(x-1)(x^2-4)}$, $(f^2g)(x) = (x-1)\sqrt{x^2-4}$, $(fg^2)(x) = (x^2-4)\sqrt{x-1}$

2.47. Είναι $A_f = [-3,6]$ και $A_g = [0,10]$, οπότε $A_f \cap A_g = [0,6]$. Άρα έχουμε:

Αν $x \in [0,4)$ είναι: $(f+g)(x) = f(x) + g(x) = x^2+2x+1-x = x^2+x+1$

Όταν $x \in [4,5)$, τότε: $(f+g)(x) = f(x) + g(x) = x-1+1-x = 0$

Αν $x \in [5,6]$, τότε: $(f+g)(x) = f(x) + g(x) = x-1+2x+3 = 3x+2$

Άρα: $(f+g)(x) = \begin{cases} x^2+x+1, & x \in [0,4) \\ 0, & x \in [4,5) \\ 3x+2, & x \in [5,6] \end{cases}$

2.48. Αν $f(x) = x^2-x+1$, $0 \leq x < 4$ και $g(x) = 2x+x^2+1$, $-3 \leq x < 3$,

τότε $(f-g)(x) = -3x$, $x \in [0,3)$.

Αν $f(x)=x^2-x^2+1,\ 0\le x<4$ και $g(x)=x-4,\ 3\le x\le 15$,

τότε $(f-g)(x)=x^2-2x+5$, $x\in[3,4)$.

Αν $f(x)=2x+5,\ 4\le x\le 8$ και $g(x)=2x+x^2+1,\ -3\le x<3$,

τότε επειδή $A_f\cap A_g=\varnothing$ δεν ορίζεται η $f-g$.

Αν $f(x)=2x+5,\ 4\le x\le 8$ και $g(x)=x-4$, $3\le x\le 15$,

τότε $(f-g)(x)=x+9,\ x\in[4,8]$

2.49. $f:-x^2+x+6>0\Leftrightarrow -2<x<3$, $A_f=(-2,3)$, άρα $A_g=(-\infty,3)$.

α) $(f+g)(x)=\ln\left[\left(-x^2+x+6\right)(3-x)\right],\ x\in(-2,3)$

$(f-g)(x)=\ln\dfrac{-x^2+x+6}{3-x}$, $x\in(-2,3)$ $g:3-x>0\Leftrightarrow x<3$

β) $\ln\left[\left(-x^2+x+6\right)(3-x)\right]\ge\ln\dfrac{-x^2+x+6}{3-x}\Leftrightarrow \ln\dfrac{\cancel{\left(-x^2+x+6\right)}(3-x)}{\dfrac{\cancel{-x^2+x+6}}{3-x}}\ge 0\Leftrightarrow$

$\ln(3-x)^2\ge 0\Leftrightarrow 2\ln(3-x)\ge 0\Leftrightarrow \ln(3-x)\ge 0\Leftrightarrow 3-x\ge 1\Leftrightarrow x\le 2$,

άρα $x\in(-2,2]$.

γ) $\ln(3-x)\ne 0\Leftrightarrow 3-x\ne 1\Leftrightarrow x\ne 2$ και $x\in(-2,3)$, άρα $A_{\frac{f}{g}}=(-2,2)\cup(2,3)$

2.50. Είναι: $f(x)\cdot\left[f(x)+g(x)-4\right]\le g(x)\left[f(x)-g(x)+4\right]+8\Leftrightarrow$

$f^2(x)+f(x)\cdot g(x)-4f(x)\le f(x)g(x)-g^2(x)+4g(x)-8\Leftrightarrow$

$f^2(x)-4f(x)+4+g^2(x)-4g(x)+4\le 0\Leftrightarrow \left(f(x)-2\right)^2+\left(g(x)-2\right)^2\le 0$

Άρα $\left(f(x)-2\right)^2+\left(g(x)-2\right)^2=0\Leftrightarrow f(x)-2=0\Leftrightarrow f(x)=2$

και $g(x)-2=0\Leftrightarrow g(x)=2$. Οπότε $f(x)=g(x)$ για κάθε $x\in A$.

2.51. $f(x)\left[f^2(x)-2f(x)+5\right]=-\left(e^{2x}+e^x\right)$. Επειδή $-\left(e^{2x}+e^x\right)<0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$ και $f^2(x)-2f(x)+5>0$ $(\Delta<0)$, είναι και $f(x)<0$.

2.52. **α)** Το πεδίο ορισμού της f είναι: $A=\mathbb{R}$. $f(x)=0\Leftrightarrow 2x-4=0\Leftrightarrow 2x=4\Leftrightarrow x=2$.

Σημείο τομής με τον $x'x$ το $(2,0)$.

Για $x=0$ είναι: $f(0)=2\cdot 0-4=-4$. Σημείο τομής με τον $y'y$ το $(0,-4)$.

β) Το πεδίο ορισμού της f είναι: $A=\mathbb{R}$.

$f(x)=0\Leftrightarrow(x-2)(x+1)=0\Leftrightarrow x-2=0\Leftrightarrow x=2$ ή $x+1=0\Leftrightarrow x=-1$.

Τα σημεία τομής με τον $x'x$ είναι: $(2,0)$ και $(-1,0)$.

Για $x=0$ είναι: $f(0)=(0-2)(0+1)=-2$. Σημείο τομής με τον $y'y$ το $(0,-2)$.

γ) Για να ορίζεται η f πρέπει: $x+1\geq 0 \Leftrightarrow x\geq -1$. Άρα $A=[-1,+\infty)$.

$f(x)=0 \Leftrightarrow \sqrt{x+1}=0 \Leftrightarrow x+1=0 \Leftrightarrow x=-1$. Σημείο τομής με τον $x'x$ το $(-1,0)$.

Για $x=0$ είναι: $f(0)=\sqrt{0+1}=1$. Σημείο τομής με τον $y'y$ το $(0,1)$.

2.53. **α)** Πρέπει: $f(x)>0 \Leftrightarrow 1-2\eta\mu x>0 \Leftrightarrow$

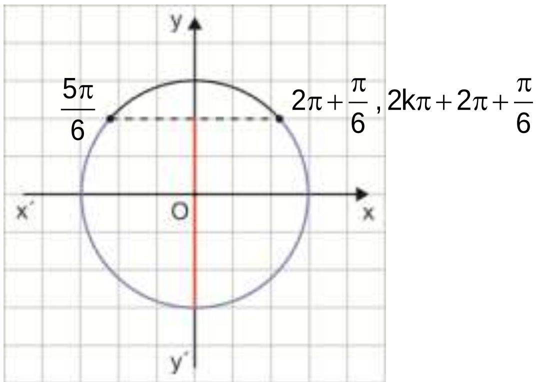
$\eta\mu x<\frac{1}{2} \Leftrightarrow \eta\mu x<\eta\mu\frac{\pi}{6}$

Μέσω του σχήματος παρατηρούμε ότι:

$x\in\left(2k\pi+\frac{5\pi}{6}, 2k\pi+2\pi+\frac{\pi}{6}\right)$, $k\in\mathbb{Z}$ οπότε το

πεδίο ορισμού της f αποτελείται από την ένωση διαστημάτων της μορφής

$\left(2k\pi+\frac{5\pi}{6}, 2k\pi+2\pi+\frac{\pi}{6}\right), k\in\mathbb{Z}$.



β) $f(x)>0 \Leftrightarrow (x+2)(x-3)(x-2)>0 \Leftrightarrow x\in(-2,2)\cup(3,+\infty)$

γ) $f(x)>0 \Leftrightarrow \ln(|x|-1)>0 \Leftrightarrow |x|-1>1 \Leftrightarrow |x|>2 \Leftrightarrow x<-2$ ή $x>2$

2.54. Για να βρίσκεται η C_f κάτω από τον άξονα $x'x$,

πρέπει: $f(x)>0 \Leftrightarrow \frac{x^2-6x+5}{x^2-3x-10}>0 \Leftrightarrow$

$(x^2-6x+5)(x^2-3x-10)>0 \Leftrightarrow$

$(x-1)(x-5)(x+2)(x-5)>0 \Leftrightarrow$

$(x-1)(x-5)^2(x+2)>0$.

Άρα $x\in(-2,1)$.

x	$-\infty$ -2	-2 1	1 5	5 $+\infty$
$x-1$	$-$	$-$	$+$	$+$
$(x-5)^2$	$+$	$+$	$+$	$+$
$x+2$	$-$	$+$	$+$	$+$
Γινόμενο	$+$	$-$	$+$	$+$

2.55. **α)** $D_f=\mathbb{R}$, $D_g=\mathbb{R}$. Για να βρίσκεται η C_f πάνω από την C_g πρέπει:

$f(x)>g(x) \Leftrightarrow x^3-x^2-5x+2>-x^2+2x-4 \Leftrightarrow x^3-7x+6>0$

άρα $(x-1)(x^2+x-6)>0 \Leftrightarrow (x-1)(x+3)(x-2)>0$

x	$-\infty$	-3		1		2	$+\infty$
$x-1$	$-$		$-$	0	$+$		$+$
$x-2$	$-$		$-$		$-$	0	$+$
$x+3$	$-$	0	$+$		$+$		$+$
Γινόμενο	$-$		$+$		$-$		$+$

Άρα η C_f βρίσκεται πάνω από την C_g για $x\in(-3,1)\cup(2,+\infty)$

β) $D_f=\mathbb{R}$, $D_g=\mathbb{R}-\{2\}$ άρα για $x\neq 2$ είναι:

$$f(x)>g(x) \Leftrightarrow x^2+3x+2>\frac{x^2+4x+3}{x-2} \Leftrightarrow (x+1)(x+2)-\frac{(x+1)(x+3)}{x-2}>0$$

$$\frac{(x+1)(x+2)(x-2)-(x+1)(x+3)}{x-2}>0 \Leftrightarrow \frac{(x+1)\left[x^2-4-(x+3)\right]}{x-2}>0$$

$$\Leftrightarrow \frac{(x+1)(x^2-x-7)}{x-2}>0 \Leftrightarrow (x+1)(x-2)(x^2-x-7)>0 \Leftrightarrow$$
$$x\in\left(-\infty,\frac{1-\sqrt{29}}{2}\right)\cup(-1,2)\cup\left(\frac{1+\sqrt{29}}{2}+\infty\right)$$

2.56. Είναι $f(x)>g(x)\Leftrightarrow x^2+2x-4>x^2+2\Leftrightarrow 2x>6\Leftrightarrow x>3$.

Η γραφική παράσταση της f βρίσκεται πάνω ή κάτω από την γραφική παράσταση μιας συνάρτησης g, όταν $x\in(3,+\infty)$.

2.57. **α)** Είναι $A_f=A_g=\mathbb{R}$. $f(x)=g(x)\Leftrightarrow x^2+3x-2=3x+2\Leftrightarrow x^2=4\Leftrightarrow x=\pm2$.

Είναι $g(2)=3\cdot2+2=8$ και $g(-2)=3(-2)+2=-4$.

Σημεία τομής τα $(2,8)$ και $(-2,-4)$.

β) Για να ορίζεται η συνάρτηση f πρέπει: $x+1\neq0\Leftrightarrow x\neq-1$.
Είναι $A_f=\mathbb{R}-\{1\}$ και $A_g=\mathbb{R}$.

$$f(x)=g(x)\Leftrightarrow\frac{6x+12}{x+1}=x+2\Leftrightarrow 6x+12=(x+1)(x+2)\Leftrightarrow$$
$$6x+12=x^2+2x+x+2\Leftrightarrow x^2+3x+2-6x-12=0\Leftrightarrow x^2-3x-10=0\Leftrightarrow$$
$$x=5 \text{ ή } x=-2$$

Είναι $g(5)=5+2=7$ και $g(-2)=-2+2=0$. Σημεία τομής τα $(5,7)$ και $(-2,0)$.

2.58. **α)** $A_f\,(-\infty,5]$ και $f(A)=[-2,4]$

β) $f(0)=-1$

γ) $f(x)>0\Leftrightarrow x<-3$ ή $1<x\le5$.

δ) $f(x)=0\Leftrightarrow x=-3$ ή $x=1$

2.59. **Α) α.** Λύσεις της ανίσωσης $f(x)>2$ είναι οι τετμημένες των σημείων της C_f που έχουν τεταγμένη μεγαλύτερη του 2 ή αλλιώς τα τμήματα της C_f που βρίσκονται πάνω από την ευθεία $y=2$. Για τα σημεία των τμημάτων αυτών ισχύει: $x<-4$ ή $\frac{3}{2}<x<\frac{7}{2}$. Άρα $f(x)>2\Leftrightarrow x<-4$ ή $\frac{3}{2}<x<\frac{7}{2}$.

β. Οι λύσεις της ανίσωσης $-2<f(x)\le2$ είναι οι τετμημένες των σημείων της C_f που βρίσκονται εντός της ταινίας των ευθειών $\varepsilon_1: y=2$ και $\varepsilon_2: y=-2$, μαζί με τα κοινά σημεία των ε_1, C_f.

Άρα $-2<f(x)\le2\Leftrightarrow -4\le x<-\frac{3}{2}$ ή $\frac{1}{2}<x\le\frac{3}{2}$ ή $\frac{7}{2}\le x<\frac{9}{2}$.

Β) Είναι $f^2(x)=2f(x)\Leftrightarrow f^2(x)-2f(x)=0\Leftrightarrow f(x)\cdot(f(x)-2)=0\Leftrightarrow$

$$f(x)=0 \text{ ή } f(x)=2$$

Οι λύσεις της αρχικής εξίσωσης είναι οι τετμημένες των σημείων τομής της C_f με τον άξονα $x'x$ και με την ε_1. Επειδή τα σημεία αυτά έχουν συντεταγμένες:

$(-4,2), \left(\frac{3}{2},2\right), \left(\frac{7}{2},2\right), (-3,0), (1,0), (4,0)$, έχουμε: $f(x)=0 \Leftrightarrow x=-3$ ή $x=1$ ή $x=4$ ή $f(x)=2 \Leftrightarrow x=-4$ ή $x=\frac{3}{2}$ ή $x=\frac{7}{2}$

2.60. **α)** Οι λύσεις της εξίσωσης $f(x)=g(x)$ είναι οι τετμημένεςτων σημείων τομής των C_f, C_g. Επειδή οι C_f, C_g τέμνονται στο σημείο $A(-3,1)$, ισχύει $f(x)=g(x) \Leftrightarrow x=-3$.

β) Οι λύσεις της ανίσωσης $f(x)>g(x)$ είναι οι τετμημένες των σημείων εκείνων της C_f που βρίσκονται πάνω από την C_g. Το τμήμα της C_f δεξιά του σημείου Α είναι πάνω από το αντίστοιχο τμήμα της C_g και οι τετμημένες των σημείων αυτών έχουν $x>-3$, άρα $f(x)>g(x) \Leftrightarrow x>-3$.

2.61. **Α) α.** Είναι: $f(x)\big(f(x)-2g(x)\big)+2g(x)=g(x)\big(2-g(x)\big) \Leftrightarrow$

$f^2(x)-2f(x)g(x)+2g(x)=2g(x)-g^2(x) \Leftrightarrow$

$f^2(x)-2f(x)g(x)+g^2(x)=0 \Leftrightarrow \big(f(x)-g(x)\big)^2=0 \Leftrightarrow f(x)=g(x)$

Επειδή οι C_f, C_g τέμνονται στα σημεία $A(1,2)$ και $B(5,4)$, ισχύει:

$f(x)=g(x) \Leftrightarrow x=1$ ή $x=5$

β. Είναι $\big(f(x)+g(x)\big)^2=2f(x)\big(g(x)+2\big)+4\big(g(x)-2\big) \Leftrightarrow$

$f^2(x)+2f(x)g(x)+g^2(x)=2f(x)g(x)+4f(x)+4g(x)-8 \Leftrightarrow$

$f^2(x)-4f(x)+4+g^2(x)-4g(x)+4=0 \Leftrightarrow \big(f(x)-2\big)^2+\big(g(x)-2\big)^2=0 \Leftrightarrow$

$f(x)-2=0$ και $g(x)-2=0 \Leftrightarrow f(x)=g(x)=2$

Όμως $f(1)=g(1)=2$, άρα $f(x)=g(x)=2 \Leftrightarrow x=1$.

Β) Εχουμε: $g(x)f(x)-4g(x)-2f(x)+8<0 \Leftrightarrow g(x)\big(f(x)-4\big)-2\big(f(x)-4\big)<0 \Leftrightarrow$

$\big(g(x)-2\big)\big(f(x)-4\big)<0 \quad (1)$

Για να ισχύει η (1) πρέπει: $\begin{cases} g(x)-2<0 \\ f(x)-4>0 \end{cases} (\alpha)$ ή $\begin{cases} g(x)-2>0 \\ f(x)-4<0 \end{cases} (\beta)$

(α): Είναι $\begin{cases} g(x)<2 \\ f(x)>4 \end{cases}$ Μέσω του σχήματος προκύπτει ότι $\begin{cases} x<1 \\ x>5 \end{cases}$, που είναι αδύνατο.

(β): Είναι $\begin{cases} g(x)>2 \\ f(x)<4 \end{cases}$ Μέσω του σχήματος προκύπτει ότι $\begin{cases} x>1 \\ x<5 \end{cases}$, άρα $x \in (1,5)$.

2.62. Το α είναι η τετμημένη του σημείου τομής της C_f με τον άξονα $x'x$.

Είναι: $f(x)=0 \Leftrightarrow x^2-4x=0 \Leftrightarrow x(x-4)=0 \Leftrightarrow x=0$ ή $x=4$. Άρα $\alpha=4$.

Το β είναι η τεταγμένη του σημείου της C_f, με $x=2$.

Δηλαδή $f(2)=\beta \Leftrightarrow 2^2-4\cdot 2=\beta \Leftrightarrow \beta=-4$.

Όμοια: $f(-2)=\gamma \Leftrightarrow (-2)^2-4\cdot(-2)=\gamma \Leftrightarrow \gamma=12$

2.63. $f(x)=0 \Leftrightarrow g(x)=4 \Leftrightarrow x=0$

2.64. Αν $\alpha>4$, τότε αδύνατη.
Αν $\alpha=4$ μοναδική λύση η $x=0$.
Αν $\alpha\in(2,4)$, τότε 2 λύσεις
Αν $\alpha\in(1,2]$ 3 λύσεις
Αν $\alpha\in[0,5,1]$ 4 λύσεις
Αν $\alpha\in(-1,\ 0,5)$ 3 λύσεις
Αν $\alpha=-1$ 2 λύσεις και
αν $\alpha<-1$ 1 λύση.

2.65. **α)** $f^2(x)-6f(x)+9+g^2(x)-6g(x)+9=0 \Leftrightarrow (f(x)-3)^2+(g(x)-3)^2=0 \Leftrightarrow$
$f(x)=g(x)=3 \Leftrightarrow x=-1$ ή $x=4$

β) $f(x)(g(x)-3)-6(g(x)-3)>0 \Leftrightarrow (f(x)-6)(g(x)-3)>0 \Leftrightarrow$

$$\begin{cases} f(x)>6 \\ g(x)>3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x>5 \\ x>-1 \end{cases} \Rightarrow x>5 \text{ ή } \begin{cases} f(x)<6 \\ g(x)<3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x<5 \\ x<-1 \end{cases} \Rightarrow x<-1.$$

2.66. **α)** Το σημείο Α ανήκει στη γραφική παράσταση της f, αν και μόνο αν:
$f(2)=4 \Leftrightarrow 3\cdot 2^2-\lambda\cdot 2+6=4 \Leftrightarrow 12-2\lambda+6=4 \Leftrightarrow$
$12+6-4=2\lambda \Leftrightarrow 2\lambda=14 \Leftrightarrow \lambda=7$.

β) Το σημείο Β ανήκει στη γραφική παράσταση της f, αν και μόνο αν:

$$f(-2)=-5 \Leftrightarrow \frac{2(-2)-3\lambda}{-2+1}=-5 \Leftrightarrow \frac{-4-3\lambda}{-1}=-5 \Leftrightarrow -4-3\lambda=-1\cdot(-5) \Leftrightarrow$$

$-4-3\lambda=5 \Leftrightarrow -4-5=3\lambda \Leftrightarrow 3\lambda=-9 \Leftrightarrow \lambda=-3$

2.67. Πρέπει: $\begin{cases} f(1)=g(1) \\ \text{και} \\ f(2)=g(2) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1-\alpha+\beta+2=1+\alpha+3\beta \\ \text{και} \\ 2^3-4\alpha+2\beta+2=2^2+2\alpha+3\beta \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2\alpha+2\beta=2 \\ 6\alpha+\beta=6 \end{cases} \Leftrightarrow$

$$\begin{matrix} \beta=1-\alpha \\ 6\alpha+1-\alpha=6 \end{matrix} \Leftrightarrow \begin{cases} \beta=1-\alpha \\ 5\alpha=5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \beta=0 \\ \alpha=1 \end{cases}$$

2.68. Για να διέρχεται η C_f από τα σημεία $A(-1,5)$ και $B(3,7)$ πρέπει:

$$\begin{cases} f(-1)=5 \\ f(3)=7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (-1)^2-\alpha(-1)+\beta=5 \\ 2\cdot 3+\alpha=7 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} 1+\alpha+\beta=5 \\ 6+\alpha=7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha+\beta=4 \\ \alpha=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1+\beta=4 \\ \alpha=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \beta=3 \\ \alpha=1 \end{cases}$$

2.69. **i.** Επειδή η γραφική παράσταση της συνάρτησης f διέρχεται από τα σημεία Α και Β, ισχύει:

$$\begin{cases} f(1)=1 \\ f(-1)=2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{\alpha\cdot 1+2}{1^2+\beta}=1 \\ \dfrac{\alpha\cdot(-1)+2}{(-1)^2+\beta}=2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha+2=1+\beta \\ -\alpha+2=2+2\beta \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha=\beta+1-2 \\ -\alpha-2\beta=0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} \alpha=\beta-1 \\ -(\beta-1)-2\beta=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha=\beta-1 \\ -\beta+1-2\beta=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha=\beta-1 \\ -3\beta=-1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha=\dfrac{1}{3}-1=-\dfrac{2}{3} \\ \beta=\dfrac{-1}{-3}=\dfrac{1}{3} \end{cases}$$

ii. Για $\alpha=-\dfrac{2}{3}$ και $\beta=\dfrac{1}{3}$ είναι: $f(x)=\dfrac{-\frac{2}{3}x+2}{x^2+\frac{1}{3}}=\dfrac{\frac{-2x+6}{2}}{\frac{3x^2+1}{2}}=\dfrac{-2x+6}{3x^2+1}$.

Πρέπει $3x^2+1\neq 0 \Leftrightarrow 3x^2\neq -1$ που ισχύει, άρα $A=\mathbb{R}$.

$f(x)=0 \Leftrightarrow \dfrac{-2x+6}{3x^2+1}=0 \Leftrightarrow -2x+6=0 \Leftrightarrow 2x=6 \Leftrightarrow x=\dfrac{6}{2}=3$.

Σημείο τομής με τον $x'x$, το $(3,0)$.

iii. Η γραφική παράσταση της f βρίσκεται πάνω από τον $x'x$, όταν:

$f(x)>0 \Leftrightarrow \dfrac{-2x+6}{3x^2+1}>0$, επειδή όμως $3x^2+1>0$, είναι

$-2x+6>0 \Leftrightarrow -2x>-6 \Leftrightarrow x<\dfrac{-6}{-2}=3$

iv. Οι τετμημένες των σημείων τομής της γραφικής παράστασης της f με την ευθεία $y=1$, είναι οι λύσεις της εξίσωσης $f(x)=1$. Είναι:

$f(x)=1 \Leftrightarrow \dfrac{-2x+6}{3x^2+1}=1 \Leftrightarrow -2x+6=3x^2+1 \Leftrightarrow 3x^2+2x-5=0 \Leftrightarrow x=1$ ή $x=-\dfrac{5}{3}$

Σημεία τομής τα $(1,1)$ και $\left(-\dfrac{5}{3},1\right)$.

2.70. **α)** Επειδή οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων f,g τέμνονται επί των ευθειών $x=-1$ και $x=2$, ισχύει:

$$\begin{cases} f(-1)=g(-1) \\ f(2)=g(2) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha+4=2+\beta+1 \\ 4\alpha+4=-4+\beta+1 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} \alpha=\beta-1 \\ 4(\beta-1)+4=\beta-3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha=\beta-1 \\ 4\beta-4+4=\beta-3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha=\beta-1 \\ 3\beta=-3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha=-2 \\ \beta=-1 \end{cases}$$

β) Για $\alpha=-2$ και $\beta=-1$ είναι: $f(x)=-2x^2+4$ και $g(x)=-2x$.

$f(x)>g(x)\Leftrightarrow -2x^2+4>-2x\Leftrightarrow -2x^2+2x+4>0\Leftrightarrow$

$x^2-x-2<0\Leftrightarrow x\in(-1,2)$.

Όταν $x\in(-1,2)$ η γραφική παράσταση της f βρίσκεται πάνω από την γραφική παράσταση της g.

x	$-\infty$		-1		2		$+\infty$
x^2-x-2		$+$	0	$-$	0	$+$	

γ) $|g(x)|=4\Leftrightarrow|-2x|=4\Leftrightarrow 2|x|=4\Leftrightarrow|x|=2\Leftrightarrow x=\pm2$

δ) $f(x)=0\Leftrightarrow -2x^2+4=0\Leftrightarrow 2x^2=4\Leftrightarrow x^2=2\Leftrightarrow x=\pm\sqrt{2}$ και

$g(x)=0\Leftrightarrow -2x=0\Leftrightarrow x=0$.

Η γραφική παράσταση της f τέμνει τον $x'x$ στα σημεία $(-\sqrt{2},0)$ και $(\sqrt{2},0)$, ενώ η γραφική παράσταση της g τέμνει τους άξονες στο $(0,0)$.

Για $x=0$ είναι $f(0)=4$, άρα η γραφική παράσταση της f τέμνει τον άξονα $y'y$ στο σημείο $(0,4)$.

2.71. **α)** $f(-1)=g(-1)\Leftrightarrow \alpha+\beta=4\ (1)$

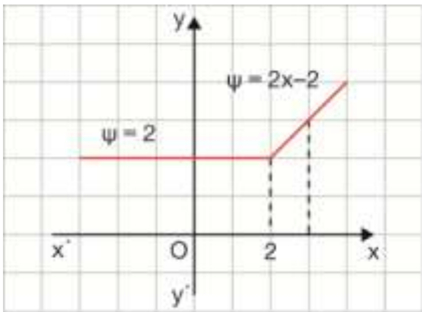
και $f(1)=g(1)\Leftrightarrow -\alpha+\beta=-2\ (2)$

Από το σύστημα των (1), (2), προκύπτει: $\alpha=3$, $\beta=1$

β) $f(x)>g(x)\Leftrightarrow x^3+x^2-x-1>0\Leftrightarrow (x-1)(x+1)^2>0\Leftrightarrow x>1$

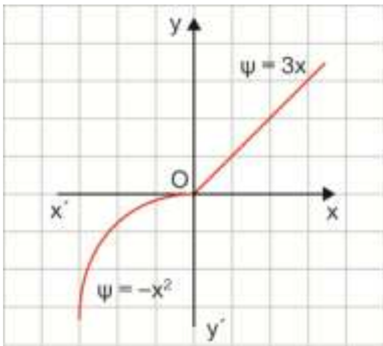
2.72. **α)** Είναι $f(x)=\begin{cases}-x+2+x=2, & x<2\\ x-2+x=2x-2, & x\geq 2\end{cases}$

x	$-\infty$		2		$+\infty$
$x-2$		$-$	0	$+$	

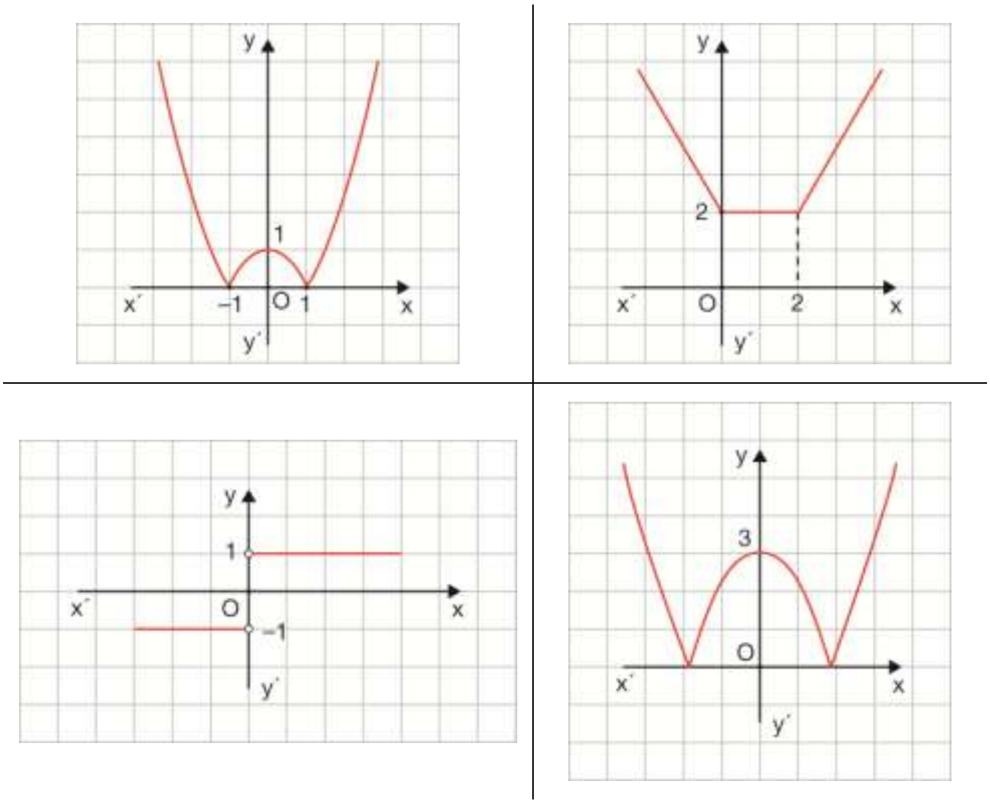


Η γραφική παράσταση της f αποτελείται από την ημιευθεία $f(x)=2$ για $x\in(-\infty,2)$ και από την ημιευθεία $f(x)=2x-2$ για $x\in[2,+\infty)$.

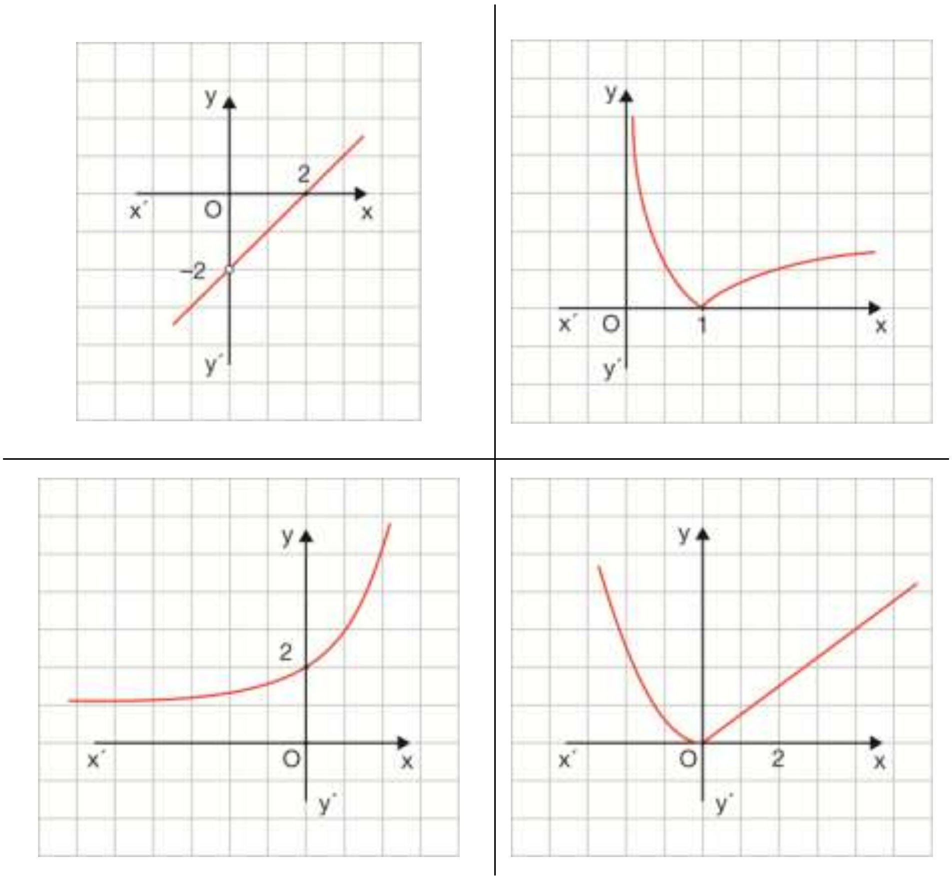
β) Η γραφική παράσταση της f αποτελείται από το τμήμα της παραβολής $f(x)=-x^2$ για $x\in(-\infty,0)$ και από την ημιευθεία $f(x)=3x$ για $x\in[0,+\infty)$.

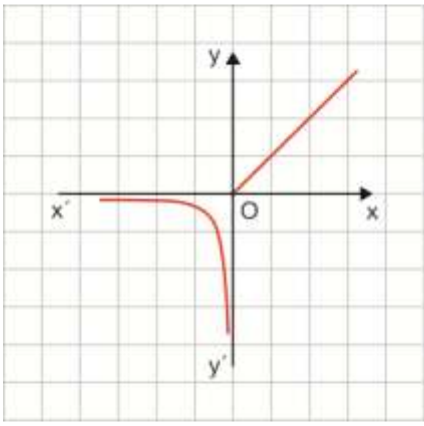


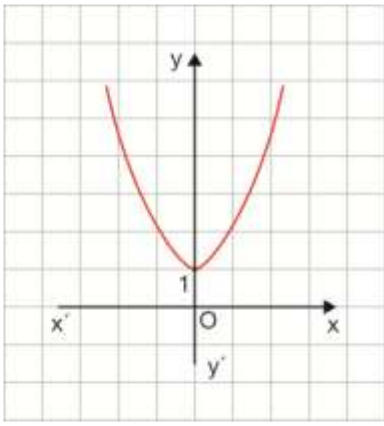
2.73.


y
1
x´
−1
O
1
x
y´
y
2
x´
O
2
x
y´
y
1
x´
O
−1
x
y´
y
3
O
x´
x
y´

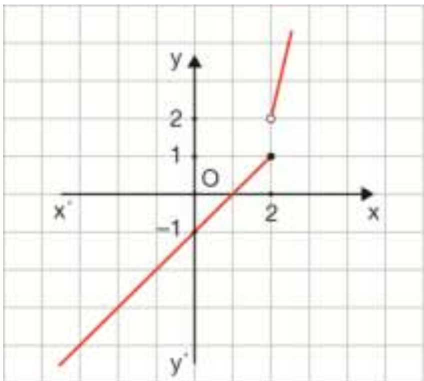
2.74.

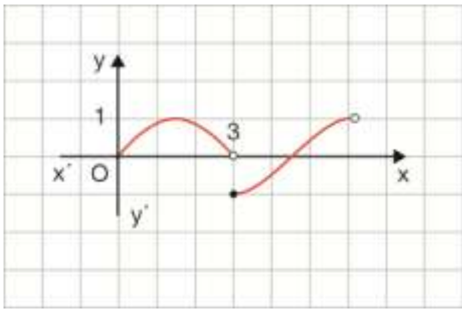

y
2
x´
O
x
−2
y´
y
x´
O
1
x
y´
y
2
x´
O
x
y´
y
x´
O
2
x
y´

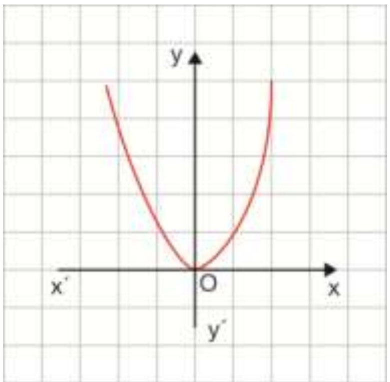

y
x΄
O
x
y΄

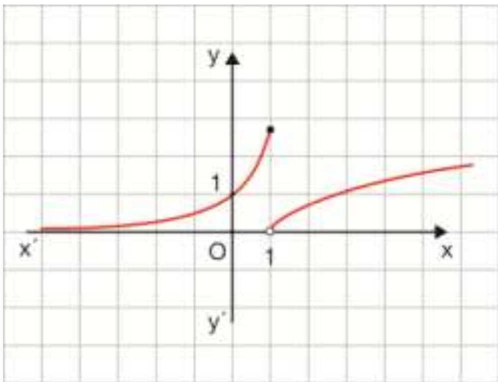

y
1
x΄
O
x
y΄

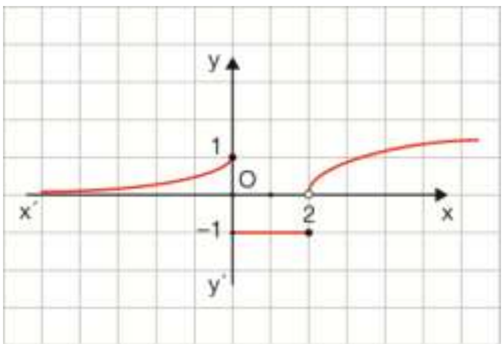
2.75.

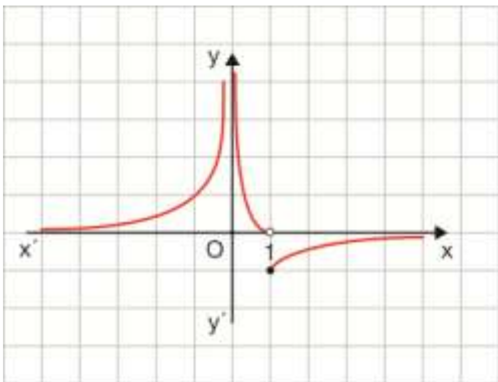

y
2
1
O
x΄
2
x
–1
y΄


y
1
3
x΄
O
x
y΄


y
x΄
O
x
y΄


y
1
x΄
O
1
x
y΄


y
1
O
x΄
2
x
–1
y΄


y
x΄
O
1
x
y΄

2.76. $2f(x)g(x)\geq 2h^2(x)$, $2g(x)h(x)\geq 2f^2(x)$, $2h(x)f(x)\geq 2g^2(x)$

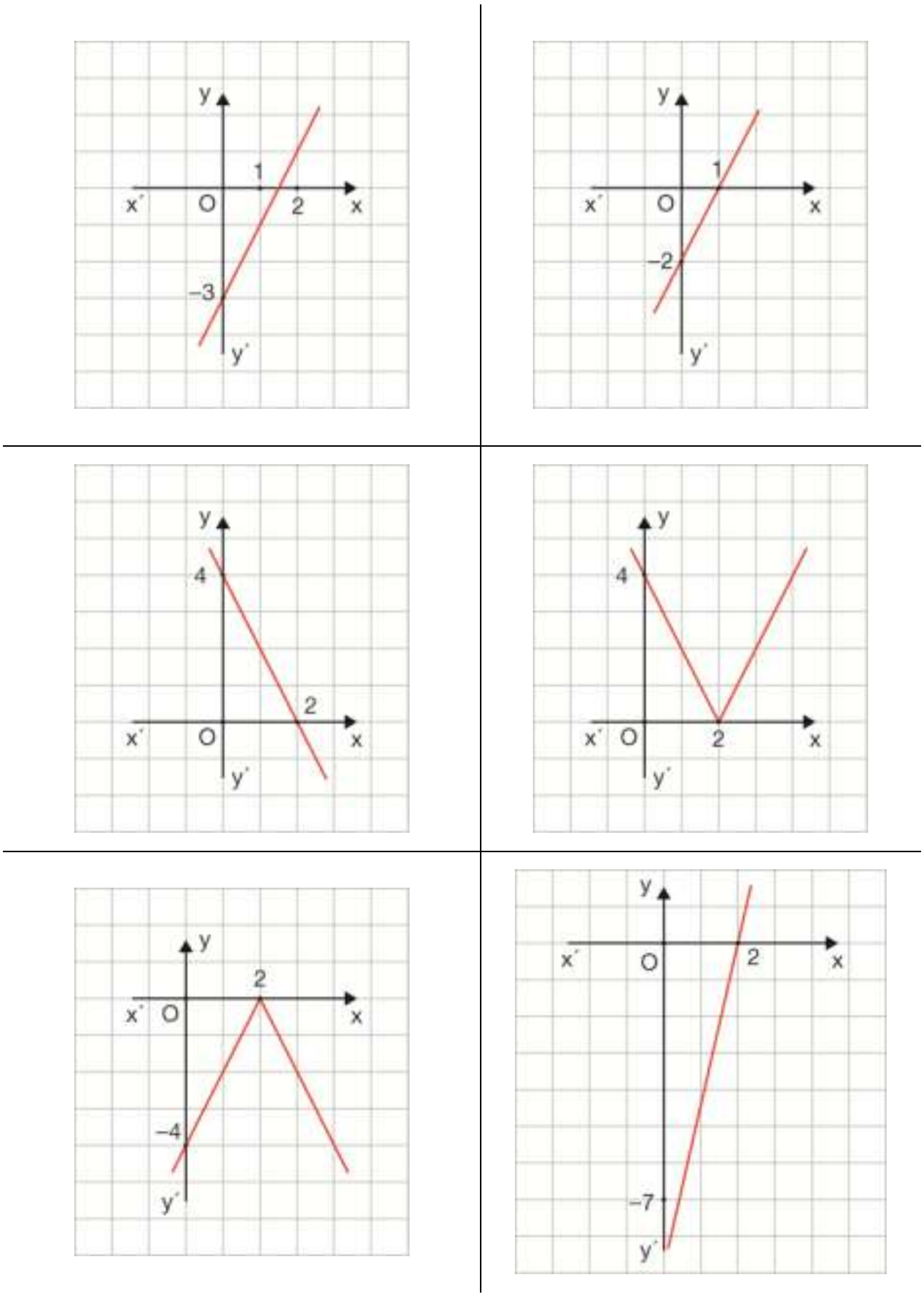
Με πρόσθεση κατά μέλη, έχουμε:

$$2f(x)g(x)+2g(x)h(x)+2h(x)f(x)\geq 2h^2(x)+2f^2(x)+2g^2(x)\Leftrightarrow$$

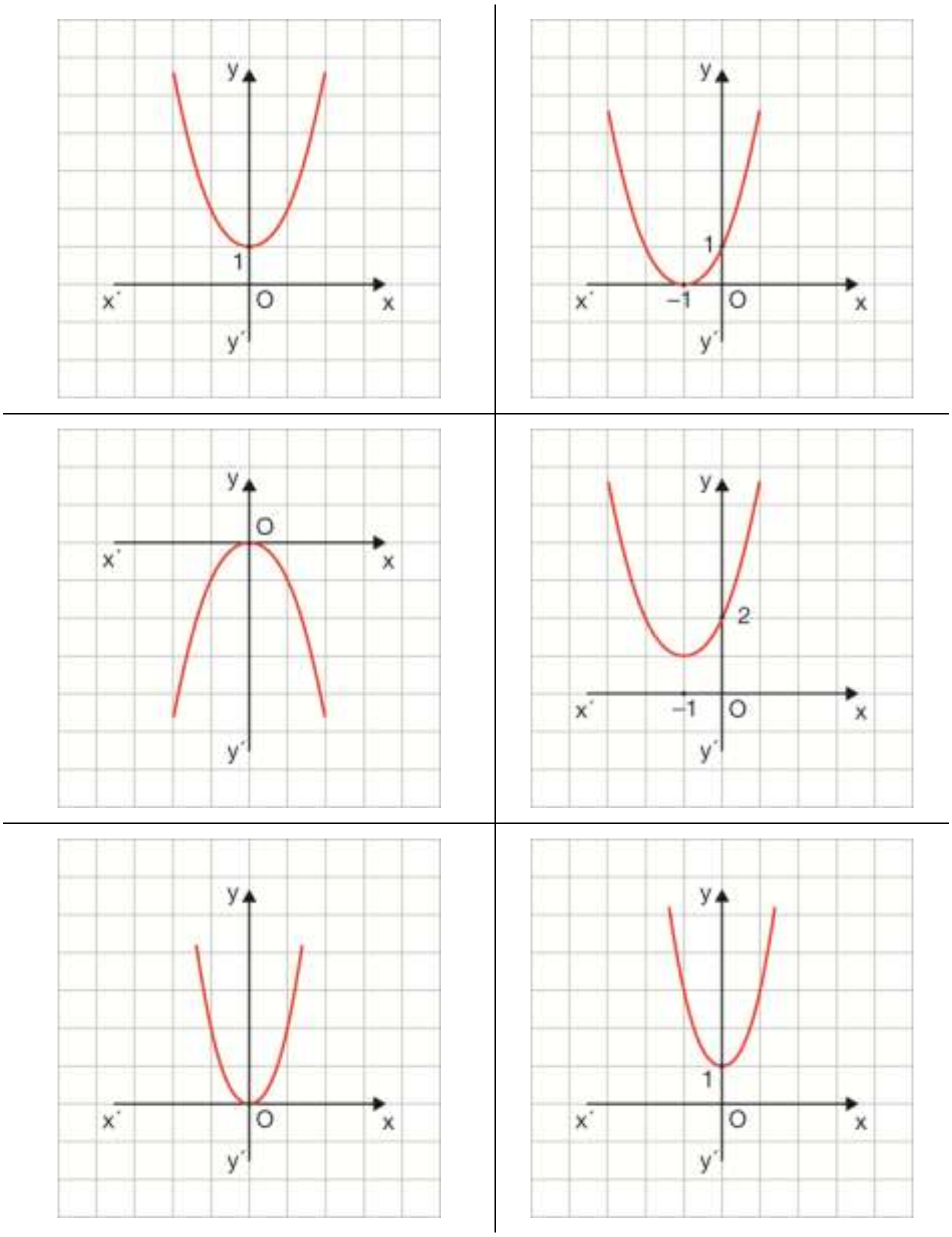
$$\left(f(x)-g(x)\right)^2+\left(g(x)-h(x)\right)^2+\left(f(x)-h(x)\right)^2\leq 0\Leftrightarrow$$

$$\left(f(x)-g(x)\right)^2=\left(g(x)-h(x)\right)^2=\left(f(x)-h(x)\right)^2=0\Leftrightarrow f(x)=g(x)=h(x)$$

2.77.



2.78.



2.79. $f(x)-g(x)=e^x-1$

Αν $x>0$, τότε $f(x)-g(x)=e^x-1>0$ και η C_f βρίσκεται πάνω από τη C_g.

Αν $x<0$, τότε $f(x)-g(x)=e^x-1<0$ και η C_f βρίσκεται κάτω από τη C_g.

Αν $x=0$ τέμνονται.

2.80. $f(x)-g(x)=1-x$

Αν $x<1$, τότε $f(x)-g(x)=1-x>0$ και η C_f βρίσκεται πάνω από τη C_g.

Αν $x>1$, τότε $f(x)-g(x)=1-x<0$ και η C_f βρίσκεται κάτω από τη C_g.

Αν $x=1$ τέμνονται.

2.81. **α)** $y=\lambda x+3-\lambda \Leftrightarrow \lambda(x-1)+3-y=0$

Για να αληθεύει για κάθε $\lambda\in\mathbb{R}$ πρέπει $x=1$ και $y=3$, άρα $(1,3)$

β) $f(x)=g(x)\Leftrightarrow \dfrac{3}{x}=\lambda x+3-\lambda \Leftrightarrow \lambda x^2+(3-\lambda)x-3=0$

$\Delta=(3-\lambda)^2+12\lambda=9-6\lambda+\lambda^2+12\lambda=(\lambda+3)^2\geq 0$, οπότε η εξίσωση έχει λύση για κάθε $\lambda\in\mathbb{R}$.

γ) Αν $\lambda\neq -3$, τότε τέμνονται

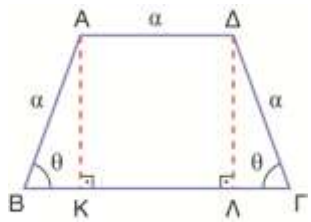
Αν $\lambda=-3$, τότε $g(x)=3x+6$ και το σύστημα έχει μοναδική λύση.

2.82. $y=\dfrac{\lambda x+12}{3x+\lambda}\Leftrightarrow 3xy+\lambda y=\lambda x+12\Leftrightarrow \lambda(y-x)+3xy-12=0$.

Για να αληθεύει για κάθε $\lambda\in\mathbb{R}$ πρέπει $\begin{cases} y-x=0 \\ 3xy-12=0\end{cases}\Leftrightarrow x=2$ και $y=2$ ή $x=-2$ και $y=-2$ $(2,2)$, $(-2,-2)$.

2.83. Από το Πυθαγόρειο Θεώρημα, στο τρίγωνο ΒΚΗ είναι $BH=\sqrt{240^2+x^2}$ και το ΒΗ εκφράζεται σε μέτρα. Επίσης το AB σε μέτρα είναι $3000-x$ οπότε το κόστος Κ είναι: $K=(BH)\cdot 700+AB\cdot 360$, άρα $K(x)=700\sqrt{240^2+x^2}+(3000-x)360$ €, όπου $0\leq x\leq 3000$ και το x εκφράζεται σε μέτρα.

2.84. Σταθερά μεγέθη: $AB=\Gamma\Delta=A\Delta=\alpha$. Μεταβλητό μέγεθος: $AB\Gamma=\theta\in\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$.



Εστω $AK,\Delta\Lambda$ τα ύψη του τραπεζίου.

Επειδή το τραπέζιο $AB\Gamma\Delta$ είναι ισοσκελές, τα τρίγωνα ABK και $\Delta\Lambda\Gamma$ είναι ίσα, οπότε $BK=\Lambda\Gamma$.

Στο ορθογώνιο τρίγωνο ABK ισχύει:

$\eta\mu\theta=\dfrac{AK}{\alpha}\Leftrightarrow AK=\alpha\cdot\eta\mu\theta$ και $\sigma\upsilon\nu\theta=\dfrac{BK}{\alpha}$

$\Leftrightarrow BK=\alpha\sigma\upsilon\nu\theta$

Είναι: $B\Gamma=BK+K\Lambda+\Lambda\Gamma=2BK+K\Lambda=2\alpha\sigma\upsilon\nu\theta+\alpha=\alpha(2\sigma\upsilon\nu\theta+1)$

Για το εμβαδόν Ε του τραπεζίου ισχύει:

$$E=\frac{(B\Gamma+A\Delta)\cdot AK}{2}=\frac{\left[\alpha(2\sigma\upsilon\nu\theta+1)+\alpha\right]\eta\mu\theta}{2}\Leftrightarrow$$

$$E=\frac{\alpha(2\sigma\upsilon\nu\theta+2)\cdot\alpha\eta\mu\theta}{2}=\frac{2\alpha^2(\sigma\upsilon\nu\theta+1)\eta\mu\theta}{2}=\alpha^2(\sigma\upsilon\nu\theta+1)\eta\mu\theta,\ \theta\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$$

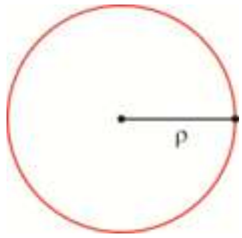
2.85. Ο τύπος που περιγράφει την απόσταση που διανύουν τα δύο σημεία σε χρόνο t sec είναι: $S=U\cdot t$. Για το Α, η απόσταση OA που έχει διανύσει είναι: $OA=3t$ m και για το Β, η απόσταση OB που έχει διανύσει είναι $OB=4t$ m.

Από το νόμο των συνημιτόνων στο τρίγωνο OAB έχουμε:

$$AB^2 = OA^2 + OB^2 - 2OA \cdot OB \cdot \sigma\upsilon\nu 60^o \Leftrightarrow AB^2 = 9t^2 + 16t^2 - 2\cdot 3t \cdot 4t \cdot \frac{1}{2} \Leftrightarrow$$

$$AB^2 = 13t^2 \Leftrightarrow AB = t\sqrt{13}.$$

2.86. Εστω ρ η ακτίνα του κύκλου και α η πλευρά του ισόπλευρου τριγώνου. Επειδή με το κομμάτι της κορδέλας που έχει μήκος x κατασκευάζουμε τον κύκλο που έχει περίμετρο $2\pi\rho$, ισχύει: $2\pi\rho = x \Leftrightarrow \rho = \frac{x}{2\pi}$



Το εμβαδόν E_κ του κύκλου είναι:

$$E_\kappa = \pi\rho^2 = \pi \cdot \left(\frac{x}{2\pi}\right)^2 = \frac{x^2}{4\pi} m^2.$$

Το υπόλοιπο κομμάτι της κορδέλας έχει μήκος $(2-x)m$.

Επειδή η περίμετρος του τριγώνου είναι ίση με 3α, έχουμε:

$$3\alpha = 2 - x \Leftrightarrow \alpha = \frac{2-x}{3} m$$

Το εμβαδόν E_τ του τριγώνου είναι: $E_\tau = \frac{\alpha^2\sqrt{3}}{4} = \frac{\left(\frac{2-x}{3}\right)^2\sqrt{3}}{4} = \frac{(2-x)^2\sqrt{3}}{36} m^2$

Οπότε για το άθροισμα των εμβαδών των δύο σχημάτων έχουμε:

$$E = \frac{x^2}{4\pi} + \frac{(2-x)^2 \cdot \sqrt{3}}{36} = \frac{9x^2 + (2-x)^2 \cdot \sqrt{3}\pi}{36} m^2$$

2.87. Εστω x ο αριθμός των παρευρισκομένων ατόμων στη δεξίωση με $0 < x \le 500$.
Αν στη δεξίωση παρευρεθούν 200 άτομα, τότε το ζευγάρι θα ξοδέψει $200 \cdot 100 = 20.000$ ευρώ. Ο αριθμός των ατόμων, επιπλέον των 200, που θα παρευρεθούν στη δεξίωση είναι $x - 200$.
Επειδή για καθένα από τα $(x-200)$ άτομα αφαιρούνται από τα 100 ευρώ τα $0{,}4$ ευρώ, το αρχικό ποσό θα μειωθεί κατά $(x-200)\cdot 0{,}4 = (0{,}4x - 80)$ ευρώ.

Άρα το κόστος ανά άτομο είναι $100 - (0{,}4x - 80) = 180 - 0{,}4x$.

Οπότε τα συνολικά έξοδα $E(x)$ του ζευγαριού είναι:

$$E(x) = x \cdot (180 - 0{,}4x) = 180x - 0{,}4x^2 \text{ ευρώ},\ x \in (200, 500]$$

2.88. Το κόστος κατασκευής των x μονάδων είναι:

$$P(x) = x \cdot K(x) = x(x^2 - 300x + 40) = x^3 - 300x^2 + 40x$$

Αν $\Pi(x)$ η τιμή πώλησης των x μονάδων, τότε:

$$\Pi(x) = P(x) + \frac{30}{100}P(x) = \frac{13}{10}\cdot P(x) = \frac{13}{10}\cdot(x^3 - 300x^2 + 40x) =$$

$$\frac{13}{10}x^3 - 390x^2 + 52x,\ x > 0.$$

2.89. Εστω S_A το διάστημα που διανύει η κορυφή Α. Τότε $S_A = 0,2t = (OA)$.

Το διάστημα που διανύει η κορυφή Β είναι: $S_B = (OB) = U_B \cdot t$.

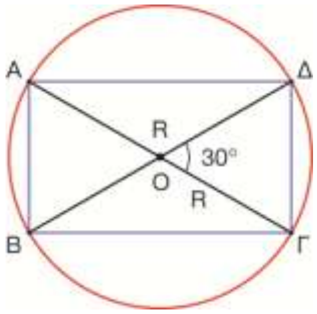
Είναι: $(OA)^2 + (OB)^2 = 3^2 \Leftrightarrow 0,04t^2 + S_B^2 = 9 \Leftrightarrow$

$$S_B^2 = 9 - 0,04t^2 \Leftrightarrow S_B = \sqrt{9 - 0,04t^2} \Leftrightarrow U_B = \frac{\sqrt{9 - 0,04t^2}}{t}.$$

2.90 $(О\Gamma\Delta) = \frac{1}{2} R \cdot R \cdot \eta\mu 30^\circ = \frac{R^2}{4}$

Αν Ε το εμβαδόν του ΑΒΓΔ, τότε:

$E = 4 \cdot (O\Gamma\Delta) = 4 \cdot \frac{R^2}{4} = R^2$, $R > 0$



Σύνθεση συναρτήσεων

2.113. $(g\circ f)(1)=g(f(1))=g(-2)=1$, $(f\circ g)(1)=f(g(1))=f(3)=0$

$(f\circ f)(2)=f(f(2))=f(-1)=-3$, $(g\circ g)(5)=g(g(5))=g(1)=3$

2.114. Είναι $A_f=[-2,+\infty)$ και $A_g=\mathbb{R}^*$.

Για να ορίζεται η $f\circ g$, πρέπει:

$$\left.\begin{array}{c}x\in A_g\\ g(x)\in A_f\end{array}\right\}\Leftrightarrow\left.\begin{array}{c}x\neq 0\\ \dfrac{6x+4}{x^2}\geq -1\end{array}\right\}\Leftrightarrow\left.\begin{array}{c}x\neq 0\\ 6x+4\geq -2x^2\end{array}\right\}\Leftrightarrow\left.\begin{array}{c}x\neq 0\\ 2x^2+6x+4\geq 0\end{array}\right\}\Leftrightarrow$$

$$\left.\begin{array}{c}x\neq 0\\ x^2+3x+2\geq 0\end{array}\right\}\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{c}x\neq 0\\ x\leq -2 \text{ ή } x\geq -1\end{array}\right.$$

Άρα $A_{fog}=(-\infty,-2]\cup[-1,0)\cup(0,+\infty)$ και $(f\circ g)(x)=f(g(x))=\sqrt{g(x)+1}\Leftrightarrow$

$$(f\circ g)(x)=\sqrt{\frac{6x+4}{x^2}+2}=\sqrt{\frac{2x^2+6x+4}{x^2}}.$$

Για να ορίζεται η $g\circ f$, πρέπει: $\left\{\begin{array}{c}x\in A_f\\ f(x)\in A_g\end{array}\right.\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{c}x\geq -2\\ \sqrt{x+2}\neq 0\end{array}\right.\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{l}x\geq -2\\ x\neq -2\end{array}\right.$

Άρα $A_{g\circ f}=(-2,+\infty)$ και: $(g\circ f)(x)=g(f(x))=\dfrac{6f(x)+4}{f^2(x)}=\dfrac{6\sqrt{x+2}+4}{\left(\sqrt{x+2}\right)^2}=\dfrac{2\sqrt{x+2}+4}{x+2}$

2.115. $D_f=[0,+\infty)$ και $D_g=\mathbb{R}-\{\pm 1\}$.

Για να ορίζεται η $f(g(x))$ πρέπει:

$$\left\{\begin{array}{l}x\in D_g\\ g(x)\in D_f\end{array}\right.\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{l}x\in\mathbb{R}-\{-1,1\}\\ \dfrac{1}{x^2-1}\geq 0\end{array}\right.\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{l}x\neq -1 \text{ και } x\neq 1\\ x^2-1>0\end{array}\right.\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{l}x\neq -1 \text{ και } x\neq 1\\ x^2>1\end{array}\right.\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{l}x\neq -1 \text{ και } x\neq 1\\ |x|>1\end{array}\right.\Leftrightarrow$$

$\left\{\begin{array}{l}x\neq -1 \text{ και } x\neq 1\\ x<-1 \text{ ή } x>1\end{array}\right.$ άρα $x<-1$ ή $x>1$, οπότε $D_{f\circ g}=(-\infty,-1)\cup(1,+\infty)$

$$(f\circ g)(x)=f(g(x))=\sqrt{g(x)}=\sqrt{\frac{1}{x^2-1}}=\frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$$

Για να ορίζεται η $g(f(x))$ πρέπει:

$$\left\{\begin{array}{l}x\in D_f\\ f(x)\in D_g\end{array}\right.\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{l}x\in[0,+\infty)\\ \sqrt{x}\in\mathbb{R}-\{-1,1\}\end{array}\right.\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{l}x\geq 0\\ \sqrt{x}\neq -1\\ \sqrt{x}\neq 1\end{array}\right.\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{l}x\geq 0\\ x\neq 1\end{array}\right.,$$

άρα $D_{g\circ f}=[0,1)\cup(1,+\infty)$ και $(g\circ f)(x)=g(f(x))=\dfrac{1}{f^2(x)-1}=\dfrac{1}{\left(\sqrt{x}\right)^2-1}=\dfrac{1}{x-1}$.

2.116. $A_f=\mathbb{R}-\{5\}$, $A_g=\mathbb{R}-\{-2\}$.

$$f\circ g:\begin{cases}x\in A_g\\ g(x)\in A_f\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x\neq-2\\ \dfrac{3}{x+2}\neq5\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x\neq-2\\ x\neq-\dfrac{7}{5}\end{cases},\ \text{άρα } A_{f\circ g}=\mathbb{R}-\left\{-2,-\frac{7}{5}\right\}$$

$$(f\circ g)(x)=f(g(x))=\frac{2g(x)+1}{g(x)-5}=...=-\frac{x+8}{5x+7}$$

$$g\circ f:\begin{cases}x\in A_f\\ f(x)\in A_g\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x\neq5\\ \dfrac{2x+1}{x-5}\neq-2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x\neq5\\ x\neq\dfrac{9}{4}\end{cases},\ A_{g\circ f}=\mathbb{R}-\left\{5,\frac{9}{4}\right\}$$

$$(g\circ f)(x)=g(f(x))=\frac{3}{f(x)+2}=...=\frac{3x-15}{4x-9}$$

$$f\circ f:\begin{cases}x\in A_f\\ f(x)\in A_f\end{cases}\Leftrightarrow...\Leftrightarrow\begin{cases}x\neq5\\ x\neq\dfrac{26}{3}\end{cases},\ A_{f\circ f}=\mathbb{R}-\left\{5,\frac{26}{3}\right\},$$

$$(f\circ f)(x)=f(f(x))=...=\frac{5x-3}{26-3x}$$

$$g\circ g:\begin{cases}x\in A_g\\ g(x)\in A_g\end{cases}\Leftrightarrow...\Leftrightarrow\begin{cases}x\neq-2\\ x\neq-\dfrac{7}{2}\end{cases},\ A_{g\circ g}=\mathbb{R}-\left\{-2,-\frac{7}{2}\right\},$$

$$(g\circ g)(x)=g(g(x))=\frac{3x+6}{2x+7}$$

2.117. $A_f=[2,+\infty)$, $A_g=(-\infty,3]$.

$$f\circ g:\begin{cases}x\in A_g\\ g(x)\in A_f\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x\leq3\\ \sqrt{6-2x}\geq2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x\leq3\\ 6-2x\geq4\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x\leq3\\ x\leq1\end{cases}\Rightarrow x\leq1,\ \text{άρα } A_{f\circ g}=(-\infty,1]$$

$$(f\circ g)(x)=f(g(x))=\sqrt{g(x)-2}=\sqrt{\sqrt{6-2x}-2}$$

$$g\circ f:\begin{cases}x\in A_f\\ f(x)\in A_g\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x\geq2\\ \sqrt{x-2}\leq3\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x\geq2\\ x\leq11\end{cases}\Leftrightarrow2\leq x\leq11,\ A_{g\circ f}=[2,11]$$

$$(g\circ f)(x)=g(f(x))=\sqrt{6-2\sqrt{x-2}}$$

2.118. Εστω η συνάρτηση $g(x)=2x-2$. Τότε για κάθε $x\in\mathbb{R}$ είναι: $f(2x-2)=f(g(x))$, οπότε αρκεί να βρούμε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης $f\circ g$.

Πρέπει: $\begin{cases}x\in D_g\\ g(x)\in D_f\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x\in\mathbb{R}\\ -2\leq2x-2\leq2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x\in\mathbb{R}\\ 0\leq x\leq2\end{cases}$ άρα $x\in[0,2]$ και $D_{f\circ g}=[0,2]$.

2.119. **α)** $0\leq x^2\leq1\Leftrightarrow-1\leq x\leq1$, **β)** $0\leq x-4\leq1\Leftrightarrow4\leq x\leq5$, **γ)** $0\leq\ln x\leq1\Leftrightarrow1\leq x\leq e$

2.120. $\begin{cases} 5 \le x+8 \le 8 \\ 5 \le 9-x^2 \le 8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -3 \le x \le 0 \\ x^2 \le 4 \\ x^2 \ge 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -3 \le x \le 0 \\ -2 \le x \le 2 \\ x \le -1 \text{ ή } x \ge 1 \end{cases} \Rightarrow -2 \le x \le -1$

2.121. α) Είναι $A_g = \mathbb{R} - \{1\}$ και $A_h = \mathbb{R}^*$. Για να ορίζεται η $h \circ g$, πρέπει:

$$\begin{cases} x \in A_g \\ g(x) \in A_h \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \ne 1 \\ \dfrac{1}{x-1} \ne 0 \end{cases} \Leftrightarrow x \ne 1, \text{ οπότε, } A_{h \circ g} = \mathbb{R} - \{1\}.$$

Είναι: $(h \circ g)(x) = h(g(x)) = \dfrac{1}{g(x)} = \dfrac{1}{\frac{1}{1-x}} = 1 - x$. Για να ορίζεται η $h \circ g \circ h$,

πρέπει: $\begin{cases} x \in A_h \\ h(x) \in A_{h \circ g} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \ne 0 \\ \dfrac{1}{x} \ne 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \ne 0 \\ x \ne 1 \end{cases}$. Άρα, $A_{h \circ g \circ h} = \mathbb{R} - \{0,1\}$.

Είναι: $(h \circ g \circ h)(x) = (h \circ g(h(x))) = 1 - h(x) = 1 - \dfrac{1}{x}$.

Για να ορίζεται η $\underbrace{h \circ g \circ h}{} \circ g$, πρέπει:

$$\begin{cases} x \in A_g \\ g(x) \in A_{h \circ g \circ h} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \ne 1 \\ \dfrac{1}{1-x} \ne 0 \text{ ισχύει} \\ \dfrac{1}{1-x} \ne 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \ne 1 \\ 1 \ne 1 - x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \ne 1 \\ x \ne 0 \end{cases}.$$

Άρα $A_{h \circ g \circ h \circ g} = \mathbb{R} - \{0,1\}$.

Είναι: $(h \circ g \circ h \circ g)(x) = (h \circ g \circ h)(g(x)) = 1 - \dfrac{1}{g(x)} = 1 - \dfrac{1}{\frac{1}{1-x}} = 1 - 1 + x = x$.

β) Για να ορίζεται η f, πρέπει $x - 3 \ne 0 \Leftrightarrow x \ne 3$. Άρα $D_f = \mathbb{R} - \{3\}$.

Για να ορίζεται η $f \circ f$, πρέπει:

$$\begin{cases} x \in D_f \\ f(x) \in D_f \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \ne 3 \\ \dfrac{3x-2}{x-3} \ne 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \ne 3 \\ 3x - 2 \ne 3x - 9, \text{ που ισχύει} \end{cases}$$

Άρα, $D_{f \circ f} = \mathbb{R} - \{3\}$ και

$$(f \circ f)(x) = f(f(x)) = \frac{3f(x)-2}{f(x)-3} = \frac{3\frac{3x-2}{x-3} - 2}{\frac{3x-2}{x-3} - 3} = \frac{\frac{9x-6-2x+6}{x-3}}{\frac{3x-2-3x+9}{x-3}} = \frac{7x}{7} = x.$$

2.122. $f \circ f: \begin{cases} x \in A_f \\ f(x) \in A_f \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \ne 1 \\ \dfrac{x-2}{x-1} \ne 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \ne 1 \\ x - 2 \ne x - 1 \end{cases} \Leftrightarrow x \ne 1 \text{ και } A_{f \circ f} = \mathbb{R} - \{1\}$,

$$(f\circ f)(x)=f(f(x))=\frac{\frac{x-2}{x-1}-2}{\frac{x-2}{x-1}-1}=\dots=x$$

2.123. $f(x)=x-4\sqrt{x}+4=\left(\sqrt{x}-2\right)^2$

$$f\circ f:\begin{cases} x\in A_f \\ f(x)\in A_f\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases} x\in[0,4] \\ 0\le\left(\sqrt{x}-2\right)^2\le 4\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases} x\in[0,4] \\ \left|\sqrt{x}-2\right|\le 2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases} x\in[0,4] \\ -2\le\sqrt{x}-2\le 2\end{cases}\Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} x\in[0,4] \\ 0\le\sqrt{x}\le 4\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases} x\in[0,4] \\ 0\le x\le 16\end{cases}\Rightarrow x\in[0,4],$$

$$(f\circ f)(x)=f(f(x))=\left(\sqrt{\left(\sqrt{x}-2\right)^2}-2\right)^2=\left(\cancel{2}-\sqrt{x}-\cancel{2}\right)^2=x$$

2.124. $g\circ h:\begin{cases} x\ge 1 \\ \sqrt{x-1}\ne 0\end{cases}\Rightarrow x>1$ και $(g\circ h(x))=g(h(x))=\dfrac{1}{x-1}$

$$f\circ g\circ h:\begin{cases} x\in A_{g\circ h} \\ (g\circ h)(x)\in A_f\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases} x>1 \\ \dfrac{1}{x-1}\ne 0\end{cases}\Rightarrow x>1$$

$$(f\circ g\circ h)(x)=f((g\circ h(x)))=\frac{1+\frac{1}{x-1}}{\frac{1}{x-1}}=x$$

2.125. $A_g=\mathbb{R}-\{-2\}$.

Αν $f(x)=x^2-3x$, $x\le 0$, τότε για να ορίζεται η $f\circ g$, πρέπει:

$$\begin{cases} x\in D_g \\ g(x)\in D_f\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases} x\ne -2 \\ \dfrac{x+3}{x+2}\le 0\end{cases}\Leftrightarrow -3\le x<-2\text{, τότε}$$

$$(f\circ g)(x)=\left(\frac{x+3}{x+2}\right)^2-3\frac{x+3}{x+2}=-\frac{2x^2+9x+9}{(x+2)^2}$$

Αν $f(x)=\sqrt{x+1}$, $x>0$, τότε για να ορίζεται η $f\circ g$, πρέπει:

$$\begin{cases} x\in D_g \\ g(x)\in D_f\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases} x\ne -2 \\ \dfrac{x+3}{x+2}>0\end{cases}\Leftrightarrow x<-3\text{ ή }x>-2\text{, τότε }(f\circ g)(x)=\sqrt{\frac{x+3}{x+2}+1}=\sqrt{\frac{2x+5}{x+2}}$$

2.126. Αν $f(x)=\dfrac{x}{x-3}$, $x<3$ και $g(x)=\dfrac{1}{x}$, $-5<x<0$, τότε για να ορίζεται η $f\circ g$,

πρέπει: $\begin{cases} x\in D_g \\ g(x)\in D_f \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -5<x<0 \\ \dfrac{1}{x}<3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -5<x<0 \\ \dfrac{1-3x}{x}<0 \end{cases} \Leftrightarrow -5<x<0$,

τότε $(f\circ g)(x)=\dfrac{\dfrac{1}{x}}{\dfrac{1}{x}-3}=\dfrac{1}{1-3x}$

Αν $f(x)=\dfrac{x}{x-3}$, $x<3$ και $g(x)=\sqrt{x}$, $0\le x<4$, τότε για να ορίζεται η $f\circ g$, πρέπει:

$\begin{cases} x\in D_g \\ g(x)\in D_f \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0\le x<4 \\ \sqrt{x}<3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0\le x<4 \\ x<9 \end{cases} \Leftrightarrow 0\le x<4$, τότε $(f\circ g)(x)=\dfrac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-3}$

Αν $f(x)=\dfrac{x+2}{x+1}$, $x\ge 3$ και $g(x)=\dfrac{1}{x}$, $-5<x<0$, τότε για να ορίζεται η $f\circ g$, πρέπει:

$\begin{cases} x\in D_g \\ g(x)\in D_f \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -5<x<0 \\ \dfrac{1}{x}\ge 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -5<x<0 \\ \dfrac{1-3x}{x}\ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -5<x<0 \\ 0<x\le \dfrac{1}{3} \end{cases}$ δεν συναληθεύουν.

Αν $f(x)=\dfrac{x+2}{x+1}$, $x\ge 3$ και $g(x)=\sqrt{x}$, $0\le x<4$, τότε για να ορίζεται η $f\circ g$, πρέπει:

$\begin{cases} x\in D_g \\ g(x)\in D_f \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0\le x<4 \\ \sqrt{x}\ge 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0\le x<4 \\ x\ge 9 \end{cases}$ δεν συναληθεύουν.

2.127. Αν $f(x)=x^2+3$, $-1\le x\le 1$ και $g(x)=\sqrt{x}-2$, $0\le x\le 4$, τότε για να ορίζεται η $f\circ g$,

πρέπει: $\begin{cases} x\in D_g \\ g(x)\in D_f \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0\le x\le 4 \\ -1\le \sqrt{x}-2\le 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0\le x\le 4 \\ 1\le \sqrt{x}\le 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0\le x\le 4 \\ 1\le x\le 9 \end{cases} \Rightarrow 1\le x\le 4$, τότε

$(f\circ g)(x)=\left(\sqrt{x}-2\right)^2+3$

Αν $f(x)=x^2+3$, $-1\le x\le 1$ και $g(x)=x+3$, $4<x\le 7$, τότε για να ορίζεται η $f\circ g$,

πρέπει: $\begin{cases} x\in D_g \\ g(x)\in D_f \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4<x\le 7 \\ -1\le x+3\le 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4<x\le 7 \\ -4\le x\le -2 \end{cases}$ δεν συναληθεύουν.

Αν $f(x)=3x+1$, $1<x\le 10$ και $g(x)=\sqrt{x}-2$, $0\le x\le 4$, τότε για να ορίζεται η $f\circ g$,

πρέπει: $\begin{cases} x\in D_g \\ g(x)\in D_f \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0\le x\le 4 \\ 1<\sqrt{x}-2\le 10 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0\le x\le 4 \\ 3<\sqrt{x}\le 12 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0\le x\le 4 \\ 9<x\le 144 \end{cases}$ δεν

συναληθεύουν.

Αν $f(x)=3x+1$, $1<x\le 10$ και $g(x)=x+3$, $4<x\le 7$, τότε για να ορίζεται η $f\circ g$,

πρέπει: $\begin{cases} x\in D_g \\ g(x)\in D_f \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4<x\le 7 \\ 1<x+3\le 10 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4<x\le 7 \\ -2<x\le 7 \end{cases} \Rightarrow 4<x\le 7$, τότε

$(f\circ g)(x)=3(x+3)+1=3x+10$

2.128. $D_f=\mathbb{R}$ και $D_{f\circ f}=\mathbb{R}$. $(f\circ f)(x)=f(f(x))=\alpha(\alpha x+\beta)+\beta=\alpha^2x+\alpha\beta+\beta$

Για να είναι $(f\circ f)(x)=4x-3$,

για κάθε $x\in\mathbb{R}$ πρέπει: $\begin{cases}\alpha^2=4\\ \alpha\beta+\beta=-3\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\alpha=\pm2\\ \alpha\beta+\beta=-3\end{cases}$ (1)

- Αν $\alpha=2$ τότε η (1) γίνεται $2\beta+\beta=-3\Leftrightarrow 3\beta=-3\Leftrightarrow\beta=-1$ και $f(x)=2x-1$
- Αν $\alpha=-2$ τότε η (1) γίνεται $-2\beta+\beta=-3\Leftrightarrow-\beta=-3\Leftrightarrow\beta=3$ και $f(x)=-2x+3$.

2.129. $(f\circ f)(x)=f(f(x))=\alpha(\alpha x+\beta)+\beta=\alpha^2x+\alpha\beta+\beta$

Για να είναι $(f\circ f)(x)=9x+4$, για κάθε $x\in\mathbb{R}$ πρέπει: $\begin{cases}\alpha^2=9\\ \alpha\beta+\beta=4\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\alpha=\pm3\\ \alpha\beta+\beta=4\end{cases}$ (1)

- Αν $\alpha=3$ τότε η (1) γίνεται $3\beta+\beta=4\Leftrightarrow4\beta=4\Leftrightarrow\beta=1$ και $f(x)=3x+1$
- Αν $\alpha=-3$ τότε η (1) γίνεται $-3\beta+\beta=4\Leftrightarrow-2\beta=4\Leftrightarrow\beta=-2$ και $f(x)=-3x-2$.

2.130. $(f\circ g)(x)=f(g(x))=3x-\lambda^2+2\lambda+1$, $(g\circ f)(x)=3(x+2\lambda+1)-\lambda^2=3x+6\lambda+3-\lambda^2$

$(f\circ g)(x)=(g\circ f)(x)\Leftrightarrow-\lambda^2+2\lambda+1=6\lambda+3-\lambda^2\Leftrightarrow\lambda=-\dfrac{1}{2}$

2.131. $f(g(x))=(x+\beta)^2-\alpha(x+\beta)+\beta-1=x^2+(2\beta-\alpha)x+\beta^2-\alpha\beta+\beta-1$.

Είναι $\begin{cases}2\beta-\alpha=1\\ \beta^2-\alpha\beta+\beta-1=-4\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\alpha=2\beta-1\\ \beta^2-(2\beta-1)\beta+\beta-1=-4\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}2\beta-\alpha=1\\ \beta^2-2\beta-3=0\end{cases}\Leftrightarrow$

$\alpha=5$, $\beta=3$ ή $\alpha=-3$, $\beta=-1$

2.132. Επειδή $A_f=\mathbb{R}-\{2\}$, για να ορίζεται η $f\circ f$

πρέπει: $\begin{cases}x\in A_f\\ f(x)\in A_f\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x\neq2\\ \dfrac{\alpha x}{x-2}\neq2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x\neq2\\ \alpha x\neq2x-4\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x\neq2\\ (\alpha-2)x\neq-4\end{cases}$

Αν $\alpha\neq2$ τότε $x\neq-\dfrac{4}{\alpha-2}$ και δεν μπορεί να ισχύει $(f\circ f)(x)=x\ \ \forall x\neq2$.

Αν $\alpha=2$ τότε $f(x)=\dfrac{2x}{x-2}$. $f(f(x))=\dfrac{2\dfrac{2x}{x-2}}{\dfrac{2x}{x-2}-2}=\dfrac{\dfrac{4x}{x-2}}{\dfrac{4}{x-2}}=x$

2.133. $A_f=\mathbb{R}$, $A_g=(2,+\infty)$.

Για να ορίζεται η $g\circ f$ πρέπει: $\begin{cases}x\in A_f\\ f(x)\in A_g\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x\in\mathbb{R}\\ \dfrac{2e^x+1}{e^x}>2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x\in\mathbb{R}\\ 2e^x+1>2e^x\end{cases}\Leftrightarrow x\in\mathbb{R}$,

άρα $A_{g\circ f}=\mathbb{R}$ και $(g\circ f)(x)=g(f(x))=\ln\left(\dfrac{2e^x+1}{e^x}-2\right)=\ln\dfrac{1}{e^x}=-\ln e^x=-x$.

Για να ορίζεται η $f\circ g$ πρέπει: $\begin{cases} x\in A_g \\ g(x)\in A_f \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x>2 \\ \ln(x-2)\in\mathbb{R} \end{cases} \Rightarrow x>2$

και $(f\circ g)(x)=f(g(x))=\dfrac{2e^{\ln(x-2)}+1}{e^{\ln(x-2)}}=\dfrac{2x-3}{x-2}=\dfrac{-2x+3}{-x+2}=\dfrac{2(g\circ f)(x)+3}{(g\circ f)(x)+2}$

2.134. Για $x=1$ είναι $f(f(1))=1$ και για $x=f(1)$ είναι

$f(f(f(1)))=5f(1)-4\Leftrightarrow f(1)=5f(1)-4\Leftrightarrow f(1)=1$

2.135. Για $x=4$ είναι $f(f(f(4)))=4$ και για $x=f(4)$ είναι

$f(f(f(f(4))))=f^2(4)-3f(4)\Leftrightarrow f(4)=f^2(4)-3f(4)\Leftrightarrow f^2(4)-4f(4)=0\Leftrightarrow$

$f(4)(f(4)-4)=0\Leftrightarrow f(4)=4$ ή $f(4)=0$ που απορρίπτεται.

2.136. $(f\circ g)(x)=x^2-7x+16$ (1)

Η (1) για $x=f(4)$ γίνεται: $f(g(f(4)))=f^2(4)-7f(4)+16 \overset{g(f(4))=4}{\Leftrightarrow}$

$f(4)=f^2(4)-7f(4)+16 \Leftrightarrow f^2(4)-8f(4)+16=0\Leftrightarrow (f(4)-4)^2=0\Leftrightarrow \boxed{f(4)=4}$

$(g\circ f)(4)=4 \Leftrightarrow g(f(4))=4 \Leftrightarrow g(4)=4$, άρα $f(4)=g(4)$ και οι C_f, C_g έχουν τουλάχιστον ένα κοινό σημείο.

2.137. **α)** Όπου x το $f(x)$, έχουμε $f(f(f(x)))=-f(x)\Leftrightarrow f(-x)=-f(x)$, άρα f περιττή.

β) Για $x=0$ είναι $f(0)=-f(0)\Leftrightarrow f(0)=0$

2.138. **α)** Η f είναι σύνθεση των συναρτήσεων $g(x)=e^x$, $h(x)=x^2$, γιατί:

$g(h(x))=e^{h(x)}=e^{x^2}$.

β) Η f είναι σύνθεση των συναρτήσεων $g(x)=x^2$ και $h(x)=\eta\mu 3x$, γιατί:

$g(h(x))=(h(x))^2=(\eta\mu 3x)^2=\eta\mu^2 3x$

γ) Η f είναι σύνθεση των συναρτήσεων $g(x)=3x^2-4x+1$ και $h(x)=e^x$, γιατί:

$g(h(x))=3(h(x))^2-4h(x)+1=3(e^x)^2-4e^x+1=3e^{2x}-4e^x+1$

δ) η f είναι σύνθεση των συναρτήσεων $g(x)=2x^2+x-5$ και $h(x)=\eta\mu x$, γιατί:

$g(h(x))=2h^2(x)+h(x)-5=2\eta\mu^2x+\eta\mu x-5=f(x)$

ε) η f είναι σύνθεση των συναρτήσεων $g(x)=\eta\mu x$ και $h(x)=5x$, γιατί:

$g(h(x))=\eta\mu 5x=f(x)$

ζ) η f είναι σύνθεση των συναρτήσεων $g(x)=\ln x$, $h(x)=3x^2+5$ και $\varphi(x)=\eta\mu x$,

γιατί: $(h(\varphi(x)))=3\varphi^2(x)+5=3\eta\mu^2x+5$ και

$g(h(\varphi(x)))=\ln(h(\varphi(x)))=\ln(3\eta\mu^2x+5)=f(x)$.

2.139. **α)** Εστω $g(x)=u$, τότε: $x-1=u \Leftrightarrow x=u+1$. Επειδή $f(g(x))=x^2-2x+3$, έχουμε:

$f(u)=(u+1)^2-2(u+1)+3=u^2+2u+1-2u-2+3=u^2+2$.

Άρα $f(x)=x^2+2$, $x\in\mathbb{R}$.

β) $x+4=u \Leftrightarrow x=u-4$, τότε $f(u)=2(u-4)^2-5(u-4)+1=2u^2-21u+53$

γ) Εστω $g(x)=u \Leftrightarrow e^x+2=u \Leftrightarrow e^x=u-2 \Leftrightarrow x=\ln(u-2)$, $u>2$.

Επειδή $f(g(x))=3e^{2x}+x+1=3(e^x)^2+x+1$, έχουμε:

$f(u)=3(u-2)^2+\ln(u-2)+1=3u^2-12u+13+\ln(u-2)$, $u>2$.

Άρα $f(x)=3x^2-12x+13+\ln(x-2)$, $x>2$.

δ) $x+\dfrac{1}{x}=u \Rightarrow \left(x+\dfrac{1}{x}\right)^2=u^2 \Leftrightarrow x^2+\dfrac{1}{x^2}=u^2-2$, τότε $f(u)=u^2-2-5=u^2-7$

ε) Εστω $g(x)=u \Leftrightarrow \ln x-1=u \Leftrightarrow \ln x=u+1 \Leftrightarrow x=e^{u+1}$.

Επειδή $f(u)=u+1-2\left(e^{u-1}\right)^2+1=u+2-e^{2u-2}$, $u\in\mathbb{R}$.

Άρα $f(x)=x+2-e^{2x-2}$, $x\in\mathbb{R}$.

στ) $g(x)=u \Leftrightarrow x=u^2-1$, τότε $f(u)=\dfrac{u^2-1}{u^2+1}$

ζ) $x^2+1=u \Leftrightarrow x^2=u-1$, τότε $f(u)=\sqrt{(u-1)^2+2(u-1)+3}=\sqrt{u^2+2}$

2.140. Εστω $2x-1=u \Leftrightarrow 2x=u+1 \Leftrightarrow x=\dfrac{u+1}{2}$, τότε η σχέση $f(2x-1)=x^2-3x+2$,

γίνεται: $f(u)=\left(\dfrac{u+1}{2}\right)^2-3\dfrac{u+1}{2}+2=\dfrac{u^2+2u+1}{4}-\dfrac{3u+3}{2}+2=$

$=\dfrac{u^2+2u+1-6u-6+8}{4}=\dfrac{u^2-4u+3}{4}$, άρα $f(x)=\dfrac{x^2-4x+3}{4}$, $x\in\mathbb{R}$.

2.141. **α)** $f(g(x))=2g(x)-4=4x^2+6x-2 \Leftrightarrow g(x)=2x^2+3x+1$

β) $f(g(x))=g(x)-1=e^x+x\eta\mu x \Leftrightarrow g(x)=e^x+x\eta\mu x+1$

γ) $f(g(x))=\ln(g(x)-1)=x+3 \Leftrightarrow g(x)=e^{x+3}+1$

δ) $f(g(x))=e^{g(x)}=2x+1 \Leftrightarrow g(x)=\ln(2x+1)$, $x>-\dfrac{1}{2}$

2.142. Εστω $f(x)=u \Leftrightarrow \dfrac{x+1}{x+2}=u$, $x\neq-2$.

Τότε: $x+1=ux+2u \Leftrightarrow ux-x=1-2u \Leftrightarrow (u-1)x=1-2u$ (1)

Αν $u=1$, τότε η (1) γίνεται $0=-1$ και είναι αδύνατη. Άρα για $u\neq1$, έχουμε

$x=\dfrac{1-2u}{u-1}$. Επειδή $x\neq-2$, είναι $\dfrac{1-2u}{u-1}\neq-2 \Leftrightarrow 1-2u\neq-2u+2$, που ισχύει.

Άρα $x=\dfrac{1-2u}{u-1}$, $u\neq1$.

Τότε: $g(f(x))=\dfrac{x^2+3x+2}{5x^2+10x+7} \Leftrightarrow g(u)=\dfrac{\left(\dfrac{1-2u}{u-1}\right)^2+3\dfrac{1-2u}{u-1}+2}{5\left(\dfrac{1-2u}{u-1}\right)^2+10\dfrac{1-2u}{u-1}+7} \Leftrightarrow$

$$g(u)=\frac{(1-2u)^2+3(1-2u)(u-1)+2(u-1)^2}{5(1-2u)^2+10(1-2u)(u-1)+7(u-1)^2} \Leftrightarrow g(u)=\frac{u}{7u^2-4u+2}$$

Άρα $g(x)=\dfrac{x}{7x^2-4x+2}$, $x\in\mathbb{R}-\{1\}$.

2.143. $f(x)=x^x=e^{\ln x^x}=e^{x\ln x}$. Είναι σύνθεση των e^x και $x\ln x$.

2.144. α) Για $x=y=0$ είναι $f(0)=0$.

β) Για $y=-x$ είναι $f(-x)=f(x)$.

γ) Όπου y το $-y$: $f(x-y)=f(x)-f(-y)=f(x)-f(y)$.

δ) Για $x=0$ είναι $f(y)=-f(y)\Leftrightarrow f(y)=0$, $y\in\mathbb{R}$, άρα και $f(x)=0$, $x\in\mathbb{R}$.

2.145. α) Για $x=y=0$ είναι $f(0)=0$.

β) $y=-x$: $f(0)=xf(-x)+xf(x)\Leftrightarrow x(f(-x)+f(x))=0$ και για $x\neq 0$ είναι $f(-x)=-f(x)$.

γ) Όπου y το $-y$: $f(x-y)=xf(-y)+yf(x)=x(-f(y))+yf(x)=yf(x)-xf(y)$

2.146. α) Στη σχέση $f(xy)=f(x)\cdot f(y)+xy-1$ (1) αντικαθιστούμε $x=y=1$ και προκύπτει: $f(1)=f(1)\cdot f(1)+1-1\Leftrightarrow f(1)=f^2(1)$

$\Leftrightarrow f(1)-f^2(1)=0\Leftrightarrow f(1)(1-f(1))=0\Leftrightarrow f(1)=0$

(απορρίπτεται γιατί $f(x)\neq 0,\ x\in\mathbb{R}^*$) ή $f(1)=1$

β) Η σχέση (1) για $y=\dfrac{1}{x}$, γίνεται:

$$f\left(x\frac{1}{x}\right)=f(x)f\left(\frac{1}{x}\right)+x\frac{1}{x}-1\Leftrightarrow f(1)=f(x)f\left(\frac{1}{x}\right)\Leftrightarrow 1=f(x)f\left(\frac{1}{x}\right)\Leftrightarrow f\left(\frac{1}{x}\right)=\frac{1}{f(x)}$$

γ) Αντικαθιστούμε στην (1) όπου y το $\dfrac{1}{y}$ και προκύπτει:

$$f\left(x\frac{1}{y}\right)=f(x)f\left(\frac{1}{y}\right)+x\frac{1}{y}-1\Leftrightarrow f\left(\frac{x}{y}\right)=f(x)f\left(\frac{1}{y}\right)+\frac{x}{y}-1\Leftrightarrow f\left(\frac{x}{y}\right)=\frac{f(x)}{f(y)}+\frac{x}{y}-1.$$

2.147. α) Για $x=y=1$: $f(1)=f(1)+f(1)\Leftrightarrow f(1)=0$

β) Για $y=x$ είναι $f\left(\dfrac{x}{x}\right)=f(x)+f(x)\Leftrightarrow f(x)=0$, $x\in\mathbb{R}$

2.148. **α)** Για $x=y=0$ είναι: $f(0)=2f(0)+f(0)\Leftrightarrow f(0)=0$

Επομένως η C_f τέμνει τον άξονα $y'y$ στην αρχή Ο των αξόνων.

β) Για $y=0$ είναι:

$f(x+0)=2f(x)+f(0)+2x\Leftrightarrow f(x)=2f(x)+2x\Leftrightarrow f(x)=-2x,\ x\in\mathbb{R}$.

2.149. **α)** Η σχέση (1) για $x=y=0$ γίνεται:

$f(0)-f(0)=f(0)f(0)\Leftrightarrow f^2(0)=0\Leftrightarrow f(0)=0$

Επομένως η C_f διέρχεται από την αρχή των αξόνων

β) Για $x=0$ η (1) γίνεται:

$f(-y)-f(y)=f(0)f(y)\Leftrightarrow f(-y)-f(y)=0\Leftrightarrow f(-y)=f(y),\ y\in\mathbb{R}$

Επομένως η f είναι άρτια.

γ) Για $y=x$ η (1) γίνεται:

$f(x-x)-f(x+x)=f(x)f(x)\Leftrightarrow f(0)-f(2x)=f^2(x)\Leftrightarrow -f(2x)=f^2(x)$

Αν τώρα αντικαταστήσουμε όπου x το $\frac{x}{2}$ προκύπτει:

$-f\left(2\cdot\frac{x}{2}\right)=f^2\left(\frac{x}{2}\right)\Leftrightarrow f(x)=-f^2\left(\frac{x}{2}\right)$.

Όμως $f^2\left(\frac{x}{2}\right)\geq 0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$, οπότε και $f(x)\leq 0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

2.150. **α)** Για $x=y=0$ είναι: $f(0)=0$

β) Για $y=0$ είναι: $f(x)+f(x)=4xf(0)+3x\Leftrightarrow f(x)=\frac{3x}{2},\ x\in\mathbb{R}$.

2.151. **α)** Για $x=y=1$ είναι

$f(1)=\frac{1}{6}f^2(1)+\frac{5}{2}-1\Leftrightarrow f^2(x)-6f(1)+9=0\Leftrightarrow (f(1)-3)^2=0\Leftrightarrow f(1)=3$

β) Για $y=1$ είναι: $f(x)=\frac{1}{6}f(x)\cdot 3+\frac{5}{2}x-x^2\Leftrightarrow f(x)=5x-2x^2$.

2.152. **α)** Όπου x το $-x$ και σύστημα. Είναι $f(x)=\frac{1}{6}(\sigma\upsilon\nu x+3\eta\mu x)$.

β) Όπου x το $\frac{1}{x}$ και σύστημα. Είναι $f(x)=2x$.

2.153. Αν στη σχέση (1) αντικαταστήσουμε όπου x το $-x$ προκύπτει:

$2f(-x)+3f(x)=x^2+4x\quad(2)$

Λύνοντας το σύστημα των $(1),(2)$ έχουμε $f(x)=\frac{1}{5}x^2+4x,\ x\in\mathbb{R}$.

2.154. Εστω $1-x=X+2\Leftrightarrow X=-1-x$.

Αντικαθιστούμε στην δοθείσα σχέση όπου x το $-1-x$ και προκύπτει:

$f(1-(-1-x))+2f(-1-x+2)=(-1-x)^2-(-1-x)\Leftrightarrow$

$f(2+x)+2f(1-x)=x^2+2x+1+1+x=x^2+3x+2$. Άρα

$$\begin{cases} f(1-x)+2f(x+2)=x^2-x \\ 2f(1-x)+f(x+2)=x^2+3x+2 \end{cases}\Bigg|(-2)\Leftrightarrow\begin{cases} -2f(1-x)-4f(x+2)=-2x^2+2x \\ 2f(1-x)+f(x+2)=x^2+3x+2 \end{cases}\overset{(+)}{\Rightarrow}$$

$-3f(x+2)=-x^2+5x+2\Leftrightarrow f(x+2)=\frac{1}{3}(x^2-5x-2)$

Θέτουμε $x+2=u\Leftrightarrow x=u-2$, οπότε

$f(u)=\frac{1}{3}\left((u-2)^2-5(u-2)-2\right)=\frac{1}{3}(u^2-4u+4-5u+10-2)=\frac{1}{3}(u^2-9u+12)\Leftrightarrow$

$f(u)=\frac{1}{3}u^2-3u+4$ $u\in\mathbb{R}$. Άρα $f(x)=\frac{1}{3}x^2-3x+4$, $x\in\mathbb{R}$.

2.155. Εστω $2-x=X+1\Leftrightarrow X=1-x$.

Αντικαθιστούμε στην δοθείσα σχέση όπου x το $1-x$ και είναι:

$2f[2-(1-x)]+f(1-x+1)=(1-x)^2-3(1-x)\Leftrightarrow 2f(x+1)+f(2-x)=x^2+x-2$

Άρα $\begin{cases} 2f(x+1)+f(2-x)=x^2+x-2 \\ f(x+1)+2f(2-x)=x^2-3x \end{cases}\Bigg|(-2)\Leftrightarrow\begin{cases} -4f(x+1)-2f(2-x)=-2x^2-2x+4 \\ f(x+1)+2f(2-x)=x^2-3x \end{cases}$

Με πρόσθεση κατά μέλη προκύπτει:

$-3f(x+1)=-x^2-5x+4\Leftrightarrow f(x+1)=\frac{1}{3}(x^2+5x-4)$

Θέτουμε $x+1=u\Leftrightarrow x=u-1$, οπότε:

$f(u)=\frac{1}{3}\left[(u-1)^2+5(u-1)-4\right]\Leftrightarrow f(u)=\frac{1}{3}(u^2+3u-8)$, $u\in\mathbb{R}$

Άρα $f(x)=\frac{1}{3}(x^2+3x-8)$, $x\in\mathbb{R}$.

2.156. $3-x=X-1\Leftrightarrow X=4-x$.

Όπου x το $4-x$ προκύπτει $f(x-1)+2f(3-x)=(4-x)^2+1=x^2-8x+17$ (1)

$f(3-x)+2f(x-1)=x^2+1\Leftrightarrow f(3-x)=x^2+1-2f(x-1)$

Με αντικατάσταση στην (1) προκύπτει $f(x-1)=\dfrac{x^2+8x-15}{3}$ και για $x-1=u$,

έχουμε $f(x)=\frac{1}{3}x^2+\frac{10}{3}x-2$

2.157. **α)** Για $x=y=0$ είναι $f(0)=0$ και για $y=0$: $f(x)=2x$, $x\in\mathbb{R}$

β) Για $x=y=1$ είναι $f(1)=0$ και για $x=1$ είναι $f(x)=0$

2.158. **α)** Αν στην (1) θέσουμε όπου x το $-x$ έχουμε: $(\nu+1)f(-x)+\nu f(x)=-x^{2\nu+1}$ (2).

Προσθέτοντας τις (1), (2) κατά μέλη προκύπτει: $(2\nu+1)f(x)+(2\nu+1)f(-x)=0\Leftrightarrow$

$f(x)+f(-x)=0\Leftrightarrow f(-x)=-f(x)$ οπότε η f είναι περιττή.

β) Αντικαθιστώντας στην (1) $f(-x)=-f(x)$ προκύπτει:

$(\nu\ +1)f(x)-\nu f(x)=x^{2\nu+1} \Leftrightarrow f(x)\ =x^{2\nu+1}$

γ) $\begin{cases} y=x^{2\nu+1} \\ y=x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=x^{2\nu+1} \\ y=x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^{2\nu+1}-x=0 \\ y=x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\left(x^{2\nu}-1\right)=0 \\ y=x \end{cases} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x=0 \text{ ή } x=1\ ,\ x=-1 \\ y=x \end{cases}$

Άρα κοινά σημεία είναι τα $A(0,0)$, $B(-1,-1)$ και $\Gamma(1,1)$

2.159. Εστω $\dfrac{x+1}{x-2}=y \Leftrightarrow x=\dfrac{2y+1}{y-1}$, οπότε η σχέση γίνεται $f(y)+2f\left(\dfrac{1}{y}\right)=\dfrac{2y+1}{y-1}$.

Όπου y το $\dfrac{1}{y}$ και σύστημα προκύπτει $f(y)=\dfrac{4y+5}{3-3y}$, άρα $f(x)=\dfrac{4x+5}{3-3x}$

2.160. Είναι $f\left(\dfrac{\sqrt{x}}{e}\right)\le \ln x$ (1) και $\ln x\le f(x)-\ln x-2 \Leftrightarrow f(x)\ge 2\ln x+2$ (2)

Θέτουμε στην (1) $\dfrac{\sqrt{x}}{e}=u \Leftrightarrow \sqrt{x}=eu \Leftrightarrow x=e^2u^2$, τότε:

$f(u)\le \ln\left(e^2u^2\right) \Leftrightarrow f(u)\le \ln e^2+\ln u^2 \Leftrightarrow f(u)\le 2+2\ln u$, άρα και $f(x)\le 2+2\ln x$ (3)

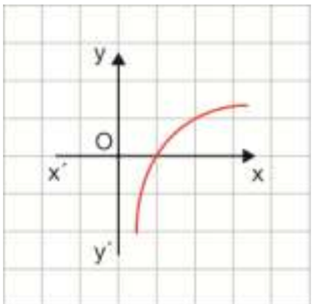
Από τις (2), (3) είναι $f(x)=2+2\ln x$, $x>0$.

2.161. **α)** $f(x+1)\le e^x$, $x+1=u \Leftrightarrow x=u-1$ και $f(u)\le e^{u-1}$,

άρα και $f(x)\le e^{x-1}$ (1)

$e^x\le ef(x) \Leftrightarrow f(x)\ge e^{x-}$ (2).

Από τις $(1),(2)$: $f(x)=e^{x-1}$



2.162. $f(x)+4x-5\le x^2 \Leftrightarrow f(x)\le x^2-4x+5$ (1)

$x^2\le f(x+2)-1 \Leftrightarrow f(x+2)\ge x^2+1$, $x+2=u \Leftrightarrow x=u-2$,

άρα $f(u)\ge (u-2)^2+1 \Leftrightarrow f(u)\ge u^2-4u+5$

άρα και $f(x)\ge x^2-4x+5$ (2). Από τις $(1),(2)$ έχουμε: $f(x)=x^2-4x+5$, $x\in\mathbb{R}$

2.163. **α)** Για $x=y=z=1$ είναι

$f^2(1)-8f(1)+16\le 0 \Leftrightarrow \left(f(1)-4\right)^2\le 0 \Leftrightarrow f(1)=4$.

β) Για $y=z=1$ είναι $f(x)\ge 4$.

Για $x=z=1$ είναι $f(y)\le 4$ άρα και $f(x)\le 4$ οπότε $f(x)=4$, $x\in\mathbb{R}$.

2.164. Για κάθε $x\neq 0$ είναι $f(x)\geq x^2\eta\mu x+\dfrac{1}{x}$ (1). Όπου x το $-x$ προκύπτει:

$$f(-x)\geq(-x)^2\eta\mu(-x)+\frac{1}{-x}\Leftrightarrow -f(x)\geq -x^2\eta\mu x-\frac{1}{x}\Leftrightarrow f(x)\leq x^2\eta\mu x+\frac{1}{x}\ (2)$$

Από τις $(1),(2)$ $\Rightarrow f(x)=x^2\eta\mu x+\dfrac{1}{x}$, $x\neq 0$

Επειδή η f είναι περιττή, είναι $f(-x)=-f(x)$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$

και για $x=0$ είναι $f(0)=0$, άρα $f(x)=\begin{cases}x^2\eta\mu x+\dfrac{1}{x} &, x\neq 0\\ 0 &, x=0\end{cases}$

2.165 **α)** Θέτω στην $f(-x)=-f(x)$ όπου $x=0$ οπότε $f(0)=0$

β) Από την (1) $|x|f(x)\geq x+x^3$ έχουμε

για $x>0$ $xf(x)\geq x+x^3\overset{:x>0}{\Rightarrow}f(x)\geq 1+x^2$ (2)

για $x<0$ $-xf(x)\geq x+x^3\overset{:-x>0}{\Rightarrow}f(x)\geq -1-x^2$ (3)

Στην (1) θέτω όπου $x\to -x$

οπότε $|-x|f(-x)\geq -x-x^3$ $|x|(-f(x))\geq -x-x^3\Leftrightarrow -|x|f(x)\geq -x-x^3$

για $x>0$ $-xf(x)\geq -x-x^3\overset{:-x<0}{\Leftrightarrow}f(x)\leq 1+x^2$ (4)

για $x<0$ $xf(x)\geq -x-x^3\overset{:x<0}{\Leftrightarrow}f(x)\leq -1-x^2$ (5)

Από $(2),(4)$: $f(x)=1+x^2$ για $x>0$.

Από (3), (5): $f(x)=-1-x^2$ για $x<0$

Άρα $f(x)=\begin{cases}-1-x^2, & x<0\\ 0 &, x=0\\ 1+x^2 &, x>0\end{cases}$

2.166 **α)** $g(-x)=-2(-x)+\sqrt{4(-x)^2+1}=2x+\sqrt{4x^2+1}=f(x)$

β) $(f\cdot g)(x)=f(x)\cdot g(x)=\left(\sqrt{4x^2+1}\right)^2-(2x)^2=1$

γ) Αν $x\geq 0\Rightarrow\left.\begin{matrix}2x\geq 0\\ \sqrt{4x^2+1}>0\end{matrix}\right\}\overset{+}{\Rightarrow}2x+\sqrt{4x^2+1}>0\Leftrightarrow f(x)>0$

$x\leq 0\Rightarrow\left.\begin{matrix}-2x\geq 0\\ \sqrt{4x^2+1}>0\end{matrix}\right\}\overset{+}{\Rightarrow}g(x)>0$

δ) Αφού $f(x)\cdot g(x)=1>0$ τότε $f(x),g(x)$ ομόσημοι.

Οπότε αφού $g(x)>0$ όταν $x\leq 0$ τότε $f(x)>0$.

Επίσης αν $x\geq 0$ $f(x)>0$ άρα $f(x)>0$ $\forall x\in\mathbb{R}$.

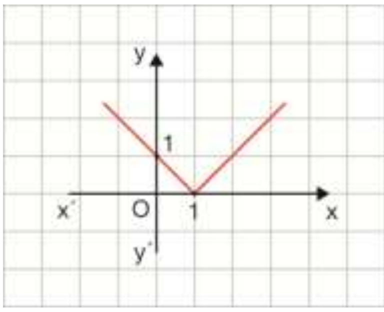
2.167. **α)** $A_f=(-\infty,1]$, $A_g=\mathbb{R}$

$f\circ g:\begin{cases} x\in A_g \\ g(x)\in A_f \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\in\mathbb{R} \\ -x^2+2x\le 1 \end{cases} \Leftrightarrow x^2-2x+1\ge 0 \Leftrightarrow (x-1)^2\ge 0$ που ισχύει,

άρα $A_{f\circ g}=\mathbb{R}$.

$(f\circ g)(x)=f(g(x))=\sqrt{1-g(x)}=\sqrt{(x-1)^2}=|x-1|$.

β) $f(A)=[0,+\infty)$



2.168. **α)** $A_f=\mathbb{R}$, $A_g=(0,+\infty)$

$f\circ g:\begin{cases} x\in A_g \\ g(x)\in A_f \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\in\mathbb{R} \\ e^x>0 \end{cases} \Leftrightarrow x\in\mathbb{R}$, άρα

$A_{f\circ g}=\mathbb{R}$, $(f\circ g)(x)=f(g(x))=\ln e^x=x$

$g\circ f:\begin{cases} x\in A_f \\ f(x)\in A_g \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x>0 \\ \ln x\in\mathbb{R} \end{cases} \Leftrightarrow x>0$, άρα $A_{g\circ f}=(0,+\infty)$,

$(g\circ f)(x)=g(f(x))=e^{\ln x}=x$

β) Επειδή $A_{f\circ g}\ne A_{g\circ f}$ είναι και $f\circ g\ne g\circ f$

γ) $x\cdot x\ge 2x^2+x-2 \Leftrightarrow x^2+x-2\le 0 \Leftrightarrow -2\le x\le 1$. Όμως $x>0$, άρα $x\in(0,1]$.

2.169. **α)** $f\left(\frac{x}{e}\right)\le \ln x$ θέτουμε $\frac{x}{e}=u \Leftrightarrow x=eu$,

τότε $f(u)\le \ln(eu)=\ln e+\ln u=1+\ln u$,

άρα και $f(x)\le \ln x+1,\ x>0\ (1)$. Ακόμη

$\ln x\le f(x)-1 \Leftrightarrow f(x)\ge \ln x+1\ (2)$

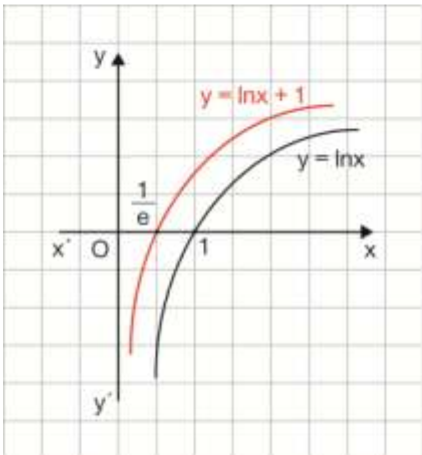
και από τις (1), (2) προκύπτει ότι

$f(x)=\ln x+1,\ x>0$

β) Η C_f δεν τέμνει τον $y'y$.

$f(x)=0 \Leftrightarrow \ln x+1=0 \Leftrightarrow \ln x=-1 \Leftrightarrow x=e^{-1}=\frac{1}{e}$.

Τέμνει τον $x'x$ στο $\left(\frac{1}{e},0\right)$.



2.170 **α)** Για $x=y=0$ $f(0)\le f(0)+f(0) \Leftrightarrow f(0)\ge 0$

β) Για κάθε $x\in\mathbb{R}$ είναι $0\le f(0)=f[x+(-x)]\le f(x)+f(-x)=f(x)+f(x)=2f(x)$

άρα $2f(x)\ge 0$ οπότε $f(x)\ge 0\ \ \forall x\in\mathbb{R}$

γ) Για κάθε $x,y\in\mathbb{R}$ είναι $f(x)=f[(x-y)+y]\le f(x-y)+f(y)$

άρα $f(x)-f(y)\le f(x-y)\ \ (1)$

Όμοια $f(y)=f\left[(y-x)+x\right]\le f(y-x)+f(x)\overset{(i)}{=}f(x-y)+f(x)$ οπότε
$f(y)-f(x)\le f(x-y)$ ή $f(x-y)\ge -\left[f(x)-f(y)\right]$.
Από $(1),(2)$: $-f-(x-y)\le f(x)-f(y)\le f(x-y)\Leftrightarrow |f(x)-f(y)|\le f(x-y)$

2.171 **α)** Για $x=0$ $f(0)\le|\alpha|f(0)\Leftrightarrow f(0)(|\alpha|-1)\ge 0$
Αν $f(0)>0$ τότε $|\alpha|-1\ge 0\Leftrightarrow|\alpha|\ge 1$ $\forall\alpha\in\mathbb{R}$ (άτοπο)
Αν $f(0)<0$ τότε $|\alpha|-1\le 0\Leftrightarrow|\alpha|\le 1$ $\forall\alpha\in\mathbb{R}$ (άτοπο). Άρα $f(0)=0$.
β) Για $x=1$ $f(\alpha)\le|\alpha|f(1)$ $\forall\alpha\in\mathbb{R}$ άρα και $f(x)\le|x|f(1)$ (1) $\forall x\in\mathbb{R}$.
Αν $\alpha=\dfrac{1}{x}$ τότε από την υπόθεση θα είναι $f(1)\le\left|\dfrac{1}{x}\right|f(x)\Rightarrow f(x)\ge|x|f(1)$ (2)
Από $(1),(2)$: $f(x)=|x|f(1)$ (3).
Άρα $f(\alpha x)=|\alpha x|f(1)=|\alpha|\cdot|x|f(1)\overset{(3)}{=}|\alpha|\cdot f(x)$

Μονοτονία – Ακρότατα

2.189. **α)** Είναι $2-x\geq 0\Leftrightarrow x\leq 2$, άρα $D_f=(-\infty,2]$. Για κάθε $x_1,x_2\in D_f$ με $x_1<x_2$,

είναι $-x_1>-x_2\Leftrightarrow 2-x_1>2-x_2\Leftrightarrow \sqrt{2-x_1}>\sqrt{2-x_2}\Leftrightarrow$

$2\sqrt{2-x_1}>2\sqrt{2-x_2}\Leftrightarrow 2\sqrt{2-x_1}+5>2\sqrt{2-x_2}+5\Leftrightarrow f(x_1)>f(x_2)$

Οπότε, η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $(-\infty,2]$.

β) Πρέπει $x-1\geq 0\Leftrightarrow x\geq 1$ και $x\geq 0$, άρα $A_f=[1,+\infty)$.

Για κάθε $x_1,x_2\in A_f$ με $x_1<x_2$, είναι $\begin{cases}\sqrt{x_1-1}<\sqrt{x_2-1}\\ 2\sqrt{x_1}<2\sqrt{x_2}\end{cases}\Rightarrow$

$\sqrt{x_1-1}+2\sqrt{x_1}<\sqrt{x_2-1}+2\sqrt{x_2}\Leftrightarrow f(x_1)<f(x_2)$, άρα $f\uparrow[1,+\infty)$

γ) Για κάθε $x_1,x_2\in A_f=(0,+\infty)$ με $x_1<x_2$, είναι $\ln x_1<\ln x_2\Leftrightarrow$

$-\ln x_1>-\ln x_2\Leftrightarrow 2-\ln x_1>2-\ln x_2\Leftrightarrow f(x_1)>f(x_2)\Rightarrow f\downarrow(0,+\infty)$

δ) Είναι $D_f=\mathbb{R}$

Για κάθε $x_1,x_2\in\mathbb{R}$ με $x_1<x_2$ ισχύει: $\begin{cases}2x_1<2x_2\\ e^{x_1}<e^{x_2}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}e^{2x_1}<e^{2x_2}\\ e^{x_1}<e^{x_2}\end{cases}$,

άρα $e^{2x_1}+e^{x_1}<e^{2x_2}+e^{x_2}\Leftrightarrow e^{2x_1}+e^{x_1}-1<e^{2x_2}+e^{x_2}-1\Leftrightarrow f(x_1)<f(x_2)$,

οπότε η f είναι $\uparrow$ στο $\mathbb{R}$.

ε) Είναι $x\in A_f=\mathbb{R}$

Για κάθε $x_1,\ x_2\in\mathbb{R}$ με $x_1<x_2$ είναι $\begin{cases}x_1^3<x_2^3\\ 3x_1<3x_2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}2x_1^3<2x_2^3\\ 3x_1<3x_2\end{cases}$

άρα $2x_1^3+3x_1<2x_2^3+3x_2\Leftrightarrow 2x_1^3+3x_1-5<2x_2^3+3x_2-5\Leftrightarrow f(x_1)<f(x_2)$,

οπότε η f είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$.

στ) Για κάθε $x_1,x_2\in(0,+\infty)$ με $x_1<x_2$,

είναι $\dfrac{1}{x_1}>\dfrac{1}{x_2}\Leftrightarrow e^{\frac{1}{x_1}}>e^{\frac{1}{x_2}}\Leftrightarrow f(x_1)>f(x_2)\Rightarrow f\downarrow(0,+\infty)$

Για κάθε $x_1,x_2\in(-\infty,0)$ με $x_1<x_2$,

είναι $\dfrac{1}{x_1}>\dfrac{1}{x_2}\Leftrightarrow e^{\frac{1}{x_1}}>e^{\frac{1}{x_2}}\Leftrightarrow f(x_1)>f(x_2)\Rightarrow f\downarrow(-\infty,0)$

ζ) Για κάθε $x_1,\ x_2\in\mathbb{R}$ με $x_1<x_2$

είναι $\begin{cases}2^{x_1}<2^{x_2}\\ 3^{x_1}<3^{x_2}\\ 2^{-x_1}>2^{-x_2}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}2^{x_1}<2^{x_2}\\ 3^{x_1}<3^{x_2}\\ -2^{-x_1}<-2^{-x_2}\end{cases}\Rightarrow 2^{x_1}+3^{x_1}-2^{-x_1}<2^{x_2}+3^{x_2}-2^{-x_2}\Rightarrow f\uparrow\mathbb{R}$

η) $f(x)=x^2-2x=x^2-2x+1-1=(x-1)^2-1,\ x\in\mathbb{R}$.

Για κάθε $x_1,x_2\in(-\infty,1)$ με $x_1<x_2$, είναι $x_1-1<x_2-1<0\Leftrightarrow$

$(x_1-1)^2>(x_2-1)^2\Leftrightarrow(x_1-1)^2-1>(x_2-1)^2-1\Leftrightarrow f(x_1)>f(x_2)\Rightarrow f\downarrow(-\infty,1)$

Για κάθε $x_1, x_2 \in (1,+\infty)$ με $x_1 < x_2$, είναι $0 < x_1 - 1 < x_2 - 1 \Leftrightarrow$

$(x_1-1)^2 < (x_2-1)^2 \Leftrightarrow (x_1-1)^2 - 1 < (x_2-1)^2 - 1 \Leftrightarrow f(x_1) < f(x_2) \Rightarrow f \uparrow (1,+\infty)$

θ) $f(x) = x^2 - 6x + 8 = x^2 - 6x + 9 - 1 = (x-3)^2 - 1,\ x \in \mathbb{R}$

Για κάθε $x_1, x_2 \in (-\infty, 3)$ με $x_1 < x_2$, είναι $x_1 - 3 < x_2 - 3 < 0 \Leftrightarrow$

$(x_1-3)^2 > (x_2-3)^2 \Leftrightarrow (x_1-3)^2 - 1 > (x_2-3)^2 - 1 \Leftrightarrow f(x_1) > f(x_2) \Rightarrow f \downarrow (-\infty, 3)$

Για κάθε $x_1, x_2 \in (3,+\infty)$ με $x_1 < x_2$, είναι $0 < x_1 - 3 < x_2 - 3 \Leftrightarrow$

$(x_1-3)^2 < (x_2-3)^2 \Leftrightarrow (x_1-3)^2 - 1 < (x_2-3)^2 - 1 \Leftrightarrow f(x_1) < f(x_2) \Rightarrow f \uparrow (3,+\infty)$

2.190. **α)** $f(x_1) - f(x_2) = \frac{3}{x_1-1} - \frac{3}{x_2-1} = \frac{3x_2 - \cancel{3} - 3x_1 + \cancel{3}}{(x_1-1)(x_2-1)} = \frac{3(x_2-x_1)}{(x_1-1)(x_2-1)},\ x \neq 1$

Αν $x_1 < x_2 < 1$, τότε $f(x_1) - f(x_2) > 0 \Leftrightarrow f(x_1) > f(x_2) \Rightarrow f \downarrow (-\infty, 1)$

Αν $1 < x_1 < x_2$, τότε $f(x_1) - f(x_2) > 0 \Leftrightarrow f(x_1) > f(x_2) \Rightarrow f \downarrow (1,+\infty)$

β) $f(x_1) - f(x_2) = \frac{x_1-3}{x_1-2} - \frac{x_2-3}{x_2-2} = \frac{\cancel{x_1x_2} - 2x_1 - 3x_2 + \cancel{6} - \cancel{x_1x_2} + 2x_2 + 3x_1 - \cancel{6}}{(x_1-2)(x_2-2)} =$

$= \frac{x_1 - x_2}{(x_1-2)(x_2-2)},\ x \neq 2$

Αν $x_1 < x_2 < 2$, τότε $f(x_1) - f(x_2) < 0 \Leftrightarrow f(x_1) < f(x_2) \Rightarrow f \uparrow (-\infty, 2)$

Αν $2 < x_1 < x_2$, τότε $f(x_1) - f(x_2) < 0 \Leftrightarrow f(x_1) < f(x_2) \Rightarrow f \uparrow (2,+\infty)$

γ) $f(x_1) - f(x_2) = \frac{x_1^3}{x_1^2+1} - \frac{x_2^3}{x_2^2+1} = \frac{(x_1-x_2)(x_1^2x_2^2 + x_1^2 + x_1x_2 + x_2^2)}{(x_1^2+1)(x_2^2+1)},\ x \in \mathbb{R}$

Για κάθε $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ με $x_1 < x_2$, είναι $x_1^2 + x_1x_2 + x_2^2,\ x_1^2x_2^2 > 0$,

άρα $f(x_1) - f(x_2) < 0 \Leftrightarrow f(x_1) < f(x_2) \Rightarrow f \uparrow \mathbb{R}$

δ) $f(x_1) - f(x_2) = \frac{x_1^2}{x_1^2+1} - \frac{x_2^3}{x_2^2+1} = \frac{(x_1-x_2)(x_1+x_2)}{(x_1^2+1)(x_2^2+1)},\ x \in \mathbb{R}$

Αν $x_1 < x_2 < 0$, τότε $f(x_1) - f(x_2) > 0 \Leftrightarrow f(x_1) > f(x_2) \Rightarrow f \downarrow (-\infty, 0)$

Αν $0 < x_1 < x_2$, τότε $f(x_1) - f(x_2) < 0 \Leftrightarrow f(x_1) < f(x_2) \Rightarrow f \uparrow (0,+\infty)$

ε) $f(x_1) - f(x_2) = (x_1 - x_2)(x_1^2 + x_1x_2 + x_2^2 - 1),\ x \in \mathbb{R}$

Αν $1 < x_1 < x_2$, τότε $\begin{cases} x_1^2 > 1 \\ x_1x_2 > 1 \\ x_2^2 > 1 \end{cases} \Rightarrow x_1^2 + x_1x_2 + x_2^2 - 1 > 2 > 0$

και $f(x_1) - f(x_2) < 0 \Leftrightarrow f(x_1) < f(x_2) \Rightarrow f \uparrow (1,+\infty)$

στ) $f(x_1)-f(x_2)=(x_1-x_2)(x_1^2+x_1x_2+x_2^2-2)$, $x\in\mathbb{R}$

$1<x_1<x_2$, τότε $\begin{cases} x_1^2>1 \\ x_1x_2>1 \Rightarrow x_1^2+x_1x_2+x_2^2-2>1>0 \\ x_2^2>1 \end{cases}$

και $f(x_1)-f(x_2)<0 \Leftrightarrow f(x_1)<f(x_2) \Rightarrow f\uparrow(1,+\infty)$

2.191. **α)** Εστω $x_1,x_2\in(-\infty,0)$ με $x_1<x_2$, τότε $x_1^2>x_2^2 \Leftrightarrow -x_1^2<-x_2^2$ (1).

Επίσης $3x_1<3x_2$ (2).

Προσθέτοντας κατά μέλη τις (1) και (2) είναι $-x_1^2+3x_1<x{-}_2^2+3x_2 \Leftrightarrow$

$f(x_1)<f(x_2)$, οπότε η f είναι $\uparrow$ στο $(-\infty,0)$.

Εστω $x_1,x_2\in[0,+\infty)$, με $x_1<x_2$, τότε: $\left.\begin{cases} 2^{x_1}<2^{x_2},\ (2^x\uparrow) \\ x_1^2<x_2^2 \end{cases}\right\} \Rightarrow$

$2^{x_1}+x_1^2<2^{x_2}+x_2^2 \Leftrightarrow f(x_1)<f(x_2)$, άρα η f είναι $\uparrow$ στο $[0,+\infty)$.

Εστω $x_1<0\le x_2$, τότε αφού $x_1<0 \Leftrightarrow -x_1>0 \Leftrightarrow 3-x_1>0$ και $x_1(3-x_1)<0 \Leftrightarrow$

$-x_1^2+3x_1<0 \Leftrightarrow f(x_1)<0$ και επειδή $x_2\ge 0 \Leftrightarrow 2^{x_2}>0$ και $x_2^2\ge 0$, θα ισχύει

$2^{x_2}+x_2^2>0 \Leftrightarrow f(x_2)>0$. Οπότε $f(x_1)<0<f(x_2)$ και η f είναι $\uparrow$ στο $\mathbb{R}$.

β) Εστω $x_1,x_2\in(0,+\infty)$ με $x_1<x_2$, τότε $x_1^2<x_2^2 \Leftrightarrow x_1^2+3<x_2^2+3 \Leftrightarrow$

$f(x_1)<f(x_2) \Rightarrow f\uparrow(0,+\infty)$.

Εστω $x_1,x_2\in(-\infty,0)$ με $x_1<x_2$, τότε $e^{x_1}+1<e^{x_2}+1 \Leftrightarrow f(x_1)<f(x_2) \Rightarrow$

$f\uparrow(-\infty,0)$.

Εστω $x_1\le 0<x_2$, τότε αφού $x_1\le 0 \Leftrightarrow e^{x_1}\le 1 \Leftrightarrow e^{x_1}+1\le 2 \Leftrightarrow f(x_1)\le 2$

και $x_2\ge 0 \Leftrightarrow x_2^2\ge 0 \Leftrightarrow x_2^2+3\ge 3 \Leftrightarrow f(x_2)\ge 3$, άρα $f(x_1)<f(x_2) \Rightarrow$ και f $\uparrow$ $\mathbb{R}$.

γ) $f(x)=-x^2+4x-3=-(x-2)^2+1,\ x<2$

Εστω $x_1,x_2\in(-\infty,2)$ με $x_1<x_2$, τότε $(x_1-2)^2>(x_2-2)^2 \Leftrightarrow$

$-(x_1-2)^2<-(x_2-2)^2$ $-(x_1-2)^2+1<-(x_2-2)^2+1 \Leftrightarrow f(x_1)<f(x_2) \Rightarrow f\uparrow(-\infty,2)$

$f(x)=3(x-1)^2+6$, $x\ge 2$.

Εστω $x_1,x_2\in(2,+\infty)$ με $x_1<x_2$, τότε $3(x_1-1)^2+6<3(x_2-1)^2+6 \Leftrightarrow$

$f(x_1)<f(x_2) \Rightarrow f\uparrow(2,+\infty)$

Εστω $x_1<2\le x_2$, τότε $x_1<2 \Leftrightarrow (x_1-2)^2\ge 0 \Leftrightarrow -(x_1-2)^2\le 0 \Leftrightarrow$

$-(x_1-2)^2+1\le 1 \Leftrightarrow f(x_1)\le 1$

$x_2>2 \Leftrightarrow x_2-1>1 \Leftrightarrow 3(x_2-1)^2>3 \Leftrightarrow 3(x_2-1)^2+6>9 \Leftrightarrow f(x_2)>9$,

άρα $f(x_1)<f(x_2) \Rightarrow$ και f $\uparrow$ $\mathbb{R}$.

δ) Εστω $x_1, x_2 \in (-\infty, 0)$ με $x_1 < x_2$, τότε $x_1^3 < x_2^3 \Leftrightarrow f(x_1) < f(x_2) \Rightarrow f \uparrow (-\infty, 0)$

Εστω $x_1, x_2 \in (0, +\infty)$ με $x_1 < x_2$, τότε $x_1^2 < x_2^2 \Leftrightarrow x_1^2 + 1 < x_2^2 + 1 \Leftrightarrow f(x_1) < f(x_2) \Rightarrow$ $f \uparrow (0, +\infty)$

Εστω $x_1 < 0 \le x_2$, τότε αφού $x_1 < 0 \Leftrightarrow x_1^3 < 0 \Leftrightarrow f(x_1) < 0$

και $x_2 \ge 0 \Leftrightarrow x_2^2 + 1 \ge 1 \Leftrightarrow f(x_2) \ge 1$, άρα $f(x_1) < f(x_2) \Rightarrow$ και $f \uparrow \mathbb{R}$.

2.192. **α)** Η f είναι γνησίως φθίνουσα σε καθένα από τα διαστήματα $(-\infty, -4]$ και $[-1, 4]$, ενώ είναι γνησίως αύξουσα σε καθένα από τα διαστήματα $[-4, -1]$ και $[4, +\infty)$.

β) Επειδή η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $(-\infty, -4]$ και $-6 < -5$, ισχύει:

$f(-6) \ge f(-5) \Leftrightarrow f(-6) - f(-5) > 0 \Leftrightarrow A > 0$

Επειδή η f είναι $\uparrow$ στο $[-4, -1]$ και $-3 < -2 < -1$, ισχύει: $f(-3) < f(-2) < f(-1) \Leftrightarrow$

$f(-3) - f(-2) < 0$ και $f(-1) - f(-2) > 0$, οπότε $B < 0$.

Επειδή η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $[-1, 4]$ και $3 < 4$, ισχύει:

$f(3) > f(4) \Leftrightarrow f(3) - f(4) > 0 \quad (1)$

Επειδή η f είναι $\uparrow$ στο $[4, +\infty)$ και $5 < 6$, ισχύει: $f(5) < f(6) \Leftrightarrow f(6) - f(5) > 0 \quad (2)$

Με πρόσθεση κατά μέλη των (1), (2) προκύπτει:

$f(3) - f(4) + f(6) - f(5) > 0 \Leftrightarrow \Gamma > 0$

2.193. Επειδή η f είναι περιττή, ισχύει ότι $f(-x) = -f(x)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Για $x = 0$ είναι $f(0) = -f(0) \Leftrightarrow 2f(0) = 0 \Leftrightarrow f(0) = 0$.

Επειδή η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $\mathbb{R}$, ισχύει ότι:

$x > 0 \overset{f\downarrow}{\Leftrightarrow} f(x) < f(0) = 0$ και για $x < 0 \overset{f\downarrow}{\Leftrightarrow} f(x) > f(0) = 0$

2.194. Επειδή η f είναι γνησίως αύξουσα στο (α, β) ισχύει ότι: για κάθε $x_1, x_2 \in (\alpha, \beta)$ με $x_1 < x_2$ είναι: $f(x_1) < f(x_2)$. Όμως επειδή η f είναι άρτια στο $\mathbb{R}$, ισχύει ότι $f(-x) = f(x)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$, άρα $f(x_1) < f(x_2) \Leftrightarrow f(-x_1) < f(-x_2)$.

Είναι $\alpha < x_1 < x_2 < \beta \Leftrightarrow -\alpha > -x_1 > -x_2 > -\beta$.

Δηλαδή για κάθε $-x_1, -x_2 \in (-\beta, -\alpha)$ με $-x_1 > -x_2$ είναι $f(-x_1) < f(-x_2)$, άρα η f είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $(-\beta, -\alpha)$.

2.195. Εστω $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ με $x_1 < x_2$, τότε

$$|f(x_1) - f(x_2)| < -\frac{1}{2}(x_1 - x_2) \Leftrightarrow \frac{1}{2}(x_1 - x_2) < f(x_1) - f(x_2) < -\frac{1}{2}(x_1 - x_2) \Leftrightarrow$$

$$\frac{1}{2}(x_1 - x_2) - \frac{x_1}{2} + \frac{x_2}{2} < f(x_1) - \frac{x_1}{2} - f(x_2) + \frac{x_2}{2} < -\frac{1}{2}(x_1 - x_2) - \frac{x_1}{2} + \frac{x_2}{2} \Leftrightarrow$$

$$0 < g(x_1) - g(x_2) < x_2 - x_1, \text{ άρα } g(x_1) > g(x_2) \Rightarrow g \downarrow \mathbb{R}$$

2.196. Εστω ότι $f(x)>x$, τότε επειδή η f είναι γνησίως αύξουσα, έχουμε:

$f(f(x))>f(x)>x \Leftrightarrow x>x$ που είναι άτοπο.

Όμοια αν $f(x)<x$. Άρα $f(x)=x$, $x\in\mathbb{R}$.

2.197. **α)** Εστω ότι η f είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$. Τότε για κάθε $x_1,x_2\in\mathbb{R}$ με $x_1<x_2$

είναι $f(x_1)<f(x_2)\overset{f\uparrow}{\Leftrightarrow}f(f(x_1))<f(f(x_2))\Leftrightarrow -x_1<-x_2\Leftrightarrow x_1>x_2$ που είναι άτοπο.

Επειδή η f είναι γνησίως μονότονη, είναι γνησίως φθίνουσα.

β) Αν στη δοθείσα σχέση αντικαταστήσουμε όπου x το $f(x)$, προκύπτει:

$f(f(x))=-x\Leftrightarrow f\big(\underbrace{f(f(x))}_{-x}\big)=-f(x)\Leftrightarrow f(-x)=-f(x)$ (1), άρα η f είναι περιττή.

γ) Για $x=0$ η σχέση (1) γίνεται: $f(0)=-f(0)\Leftrightarrow 2f(0)=0\Leftrightarrow f(0)=0$.

Επειδή η f είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$, ισχύει ότι:

$x>0 \overset{f\uparrow}{\Leftrightarrow} f(x)>f(0)=0$ και για $x<0 \overset{f\uparrow}{\Leftrightarrow} f(x)<f(0)=0$

2.198. Εστω ότι $f(x)>x$, τότε $3f(x)>3x\Leftrightarrow 2x+3f(x)>5x\Leftrightarrow \dfrac{2x+f3(x)}{5}>x\overset{f\uparrow}{\Leftrightarrow}$

$f\left(\dfrac{2x+3f(x)}{5}\right)>f(x)\Leftrightarrow x>f(x)$ που είναι άτοπο.

Όμοια αν $f(x)<x$. Άρα $f(x)=x$, $x\in\mathbb{R}$.

2.199. $f(x)<g(x)\overset{f\uparrow}{\Leftrightarrow} f(f(x))<f(g(x))$ (1)

Αν στη σχέση $f(x)<g(x)$, αντικαταστήσουμε όπου x το $g(x)$, έχουμε:

$f(g(x))<g(g(x))$ (2). Από τις (1), (2) είναι $f(f(x))<f(g(x))<g(g(x))$

2.200. Εστω $x_1,x_2\in(0,+\infty)$ με $x_1<x_2$, θα δείξουμε ότι $f(x_1)<f(x_2)$.

Εστω $f(x_1)\ge f(x_2)$, τότε $e^{f(x_1)}\ge e^{f(x_2)}>0$ (1). Γνωρίζουμε ότι $f(x)\cdot e^{f(x)}=x$, επειδή $x\in(0,+\infty)$ θα ισχύει: $f(x)e^{f(x)}>0$ ή $f(x)>0$ για κάθε $x\in(0,+\infty)$. Η σχέση (1) γίνεται: $f(x_1)\cdot e^{f(x_1)}\ge f(x_2)\cdot e^{f(x_2)}\Leftrightarrow x_1\ge x_2$ που είναι άτοπο. Άρα $f(x_1)<f(x_2)$ και η f είναι γνησίως αύξουσα

2.201. Εστω η f είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$. Τότε για κάθε $x_1,x_2\in(-\infty,0)$ με $x_1<x_2$ είναι $f(x_1)<f(x_2)\Leftrightarrow e^{f(x_1)}<e^{f(x_2)}\Leftrightarrow x_1^2-2x_1<x_2^2-2x_2\Leftrightarrow x_1^2-x_2^2-2x_1+2x_2<0\Leftrightarrow$ $(x_1-x_2)(x_1+x_2)-2(x_1-x_2)<0\Leftrightarrow(x_1-x_2)(x_1+x_2-2)<0$ άτοπο γιατί $x_1-x_2<0$ και $x_1+x_2-2<0$.

Άρα δεν υπάρχει στο $\mathbb{R}$ γνησίως αύξουσα συνάρτηση f για την οποία να ισχύει ότι: $e^{f(x)}-2x=x^2$ για κάθε $x\in(-\infty,0)$.

2.202. Εστω η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $\mathbb{R}$. Τότε για κάθε $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ με $x_1 < x_2$ είναι $f(x_1) > f(x_2) \Leftrightarrow \ln f(x_1) > \ln f(x_2) \Leftrightarrow x_1^2 - 4x_1 + 1 > x_2^2 - 4x_2 + 1 \Leftrightarrow$ $(x_1 - x_2)(x_1 + x_2 - 4) > 0$ που είναι άτοπο, αφού $2 < x_1 < x_2 \Leftrightarrow x_1 - x_2 < 0$, $x_1 + x_2 > 4$

2.203. **α)** Εστω $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ με $x_1 < x_2$, τότε: $f^3(x_1) + 2f(x_1) = x_1^3 - 2x_1^2 + 5x_1 - 1$,

$f^3(x_2) + 2f(x_2) = x_2^3 - 2x_2^2 + 5x_2 - 1$ και με αφαίρεση κατά μέλη, έχουμε:

$f^3(x_1) - f^3(x_1) + 2f(x_1) - 2f(x_2) = x_1^3 - x_2^3 - 2x_1^2 + 2x_2^2 + 5x_1 - 5x_2 \Leftrightarrow$

$(f(x_1) - f(x_2))(f^2(x_1) + f(x_1)f(x_2) + f^2(x_2) + 2) = (x_1 - x_2)(x_1^2 + x_1x_2 + x_2^2 - 2x_1 + 2x_2 + 5)$

Είναι $f^2(x_1) + f(x_1)f(x_2) + f^2(x_2) > 0$ $(\Delta < 0)$,

άρα και $f^2(x_1) + f(x_1)f(x_2) + f^2(x_2) + 2 > 0$ και $x_1^2 + x_1x_2 + x_2^2 - 2(x_1 - x_2) + 5 > 0$,

αφού $x_1^2 + x_1x_2 + x_2^2 > 0$ $(\Delta < 0)$ και $x_1 < x_2$, άρα $f(x_1) - f(x_2) < 0 \Leftrightarrow$

$f(x_1) < f(x_2) \Rightarrow f \uparrow \mathbb{R}$

β) $f(x^3 - 1) > f(x - 1) \overset{f\uparrow}{\Leftrightarrow} x^3 - \cancel{1} > x - \cancel{1} \Leftrightarrow x(x-1)(x+1) > 0 \Leftrightarrow x \in (-1, 0) \cup (1, +\infty)$.

2.204. **α)** Εστω $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ με $x_1 < x_2$, τότε: $f^3(x_1) + 3f(x_1) = x_1 + 3$,

$f^3(x_2) + 3f(x_2) = x_2 + 3$ και με αφαίρεση κατά μέλη,

έχουμε: $f^3(x_1) - f^3(x_1) + 3f(x_1) - 3f(x_2) = x_1^3 - x_2^3 \Leftrightarrow$

$(f(x_1) - f(x_2))(f^2(x_1) + f(x_1)f(x_2) + f^2(x_2) + 3) = (x_1 - x_2)(x_1^2 + x_1x_2 + x_2^2)$

Είναι $f^2(x_1) + f(x_1)f(x_2) + f^2(x_2) > 0$ $(\Delta < 0)$,

άρα και $f^2(x_1) + f(x_1)f(x_2) + f^2(x_2) + 3 > 0$ και $x_1^2 + x_1x_2 + x_2^2 > 0$ $(\Delta < 0)$,

άρα $f(x_1) - f(x_2) < 0 \Leftrightarrow f(x_1) < f(x_2) \Rightarrow f \uparrow \mathbb{R}$

β) Για $x = 1$ είναι $f^3(1) + 3f(1) - 4 = 0 \Leftrightarrow (f(1) - 1)(f^2(1) + f(1) + 4) = 0 \Leftrightarrow f(1) = 1$

Για $x = -3$ είναι $f^3(-3) + 3f(-3) = 0 \Leftrightarrow f(-3)(f^2(-3) + 3) = 0 \Leftrightarrow f(-3) = 0$.

γ) i. $f(f(x^2 - 2)) > f(f(x)) \overset{f\uparrow}{\Leftrightarrow} f(x^2 - 2) > f(x) \overset{f\uparrow}{\Leftrightarrow} x^2 - 2 > x \Leftrightarrow$

$x^2 - x - 2 > 0 \Leftrightarrow x < -1$ ή $x > 2$.

ii. $f(x) > 0 \Leftrightarrow f(x) > f(-3) \overset{f\uparrow}{\Leftrightarrow} x > -3$

iii. $f(x) < 1 \Leftrightarrow f(x) < f(1) \overset{f\uparrow}{\Leftrightarrow} x < 1$

iv. $f\left(f\left(x^2\right)-4\right)<0 \Leftrightarrow f\left(f\left(x^2\right)-4\right)<f(-3) \overset{f\uparrow}{\Leftrightarrow} f\left(x^2\right)-4<-3 \Leftrightarrow f\left(x^2\right)<1 \Leftrightarrow$

$f\left(x^2\right)<f(1) \overset{f\uparrow}{\Leftrightarrow} x^2<1 \Leftrightarrow -1<x<1$

2.205. **α)** Εστω ότι υπάρχουν $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ με $x_1<x_2$ τέτοια, ώστε $f(x_1) \le f(x_2)$, τότε $f^3(x_1) \le f^3(x_2)$ και $f^3(x_1)+3f(x_1) \le f^3(x_2)+3f(x_2) \Leftrightarrow -2x_1 \le -2x_2 \Leftrightarrow x_1 \ge x_2$

που είναι άτοπο. Άρα $f(x_1)>f(x_2) \Rightarrow f \downarrow \mathbb{R}$.

β) Για $x=0$ είναι $f^3(0)+f(0)=0 \Leftrightarrow f(0)\left(f^2(0)+1\right)=0 \Leftrightarrow f(0)=0$

Για $x=-1$ είναι $f^3(-1)+f(-1)=2 \Leftrightarrow f^3(-1)+f(-1)-2=0 \Leftrightarrow$

$\left(f(-1)+1\right)\left(f^2(-1)-f(-1)+2\right)=0 \Leftrightarrow f(-1)=-1$

γ) i. $f(x)<0 \Leftrightarrow f(x)<f(0) \overset{f\downarrow}{\Leftrightarrow} x>0$

ii. $f(x)>-1 \Leftrightarrow f(x)>f(-1) \overset{f\downarrow}{\Leftrightarrow} x<-1$

iii. $f\left(f(x)+1\right)>0 \Leftrightarrow f\left(f(x)+1\right)>f(0) \overset{f\downarrow}{\Leftrightarrow} f(x)+1<0 \Leftrightarrow$

$f(x)<-1 \Leftrightarrow f(x)<f(-1) \overset{f\downarrow}{\Leftrightarrow} x>-1$

iv. $f\left(f\left(f\left(x^2-4\right)\right)\right)>0 \Leftrightarrow f\left(f\left(f\left(x^2-4\right)\right)\right)>f(0) \overset{f\downarrow}{\Leftrightarrow} f\left(f\left(x^2-4\right)\right)<0=f(0) \overset{f\downarrow}{\Leftrightarrow}$

$f\left(x^2-4\right)>0=f(0) \overset{f\downarrow}{\Leftrightarrow} x^2-4<0 \Leftrightarrow x^2<4 \Leftrightarrow -2<x<2$

2.206. **α)** Εστω $f,g \uparrow \mathbb{R}$. Τότε για κάθε $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ με $x_1<x_2$ είναι $f(x_1)<f(x_2)$ και

$g(x_1)<g(x_2) \overset{f\uparrow}{\Leftrightarrow} f\left(g(x_1)\right)<f\left(g(x_2)\right) \Rightarrow f \circ g \uparrow \mathbb{R}$, Όμοια αν $f,g \downarrow \mathbb{R}$

β) Εστω $f,g \uparrow \mathbb{R}$. Τότε για κάθε $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ με $x_1<x_2$ είναι $f(x_1)<f(x_2)$ και

$g(x_1)<g(x_2)$. Είναι $f(x_1)<f(x_2) \overset{f\uparrow}{\Leftrightarrow} f\left(f(x_1)\right)<f\left(f(x_2)\right) \Rightarrow f \circ f \uparrow \mathbb{R}$

και $g(x_1)<g(x_2) \overset{g\uparrow}{\Leftrightarrow} g\left(g(x_1)\right)<g\left(g(x_2)\right) \Rightarrow g \circ g \uparrow \mathbb{R}$

γ) Η συνάρτηση $g(x)=\ln x$, $x>0$, είναι γνησίως αύξουσα στο $(0,+\infty)$, οπότε για κάθε $x>1$ και η $g\left(g(x)\right)=\ln(\ln x)$ είναι γνησίως αύξουσα.

2.207. Εστω $f(x)=\sigma\upsilon\nu x-e^x$, $x \in (0,\pi)$.

Για κάθε $x_1, x_2 \in (0,\pi)$ με $x_1<x_2$ είναι $\sigma\upsilon\nu x_1>\sigma\upsilon\nu x_2$, $e^{x_1}<e^{x_2} \Leftrightarrow -e^{x_1}>-e^{x_2}$, οπότε και $\sigma\upsilon\nu x_1 - e^{x_1} > \sigma\upsilon\nu x_2 - e^{x_2} \Leftrightarrow f(x_1) > f(x_2) \Rightarrow f\downarrow(0,\pi)$

$\alpha < \beta \overset{f\downarrow}{\Leftrightarrow} f(\alpha) > f(\beta) \Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu\alpha - e^{\alpha} > \sigma\upsilon\nu\beta - e^{\beta} \Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu\alpha - \sigma\upsilon\nu\beta > e^{\alpha} - e^{\beta}$

2.208. Για κάθε $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ με $x_1 < x_2$ είναι $e^{x_1} < e^{x_2}$, $2x_1 < 2x_2$,
άρα και $e^{x_1} + 2x_1 < e^{x_2} + 2x_2 \Leftrightarrow f(x_1) < f(x_2) \Rightarrow f\uparrow\mathbb{R}$

$f(x) < 1 \Leftrightarrow f(x) < f(0) \overset{f\uparrow}{\Leftrightarrow} x < 0$

2.209. **α)** Για κάθε $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ με $x_1 < x_2$ είναι $\alpha^{x_1} > \alpha^{x_2} \Leftrightarrow -\alpha^{x_1} < -\alpha^{x_2}$,
άρα και $x_1 - \alpha^{x_1} < x_2 - \alpha^{x_2} \Leftrightarrow f(x_1) < f(x_2) \Rightarrow f\uparrow\mathbb{R}$

β) $\alpha^{x} - \alpha^{x^3} > x - x^3 \Leftrightarrow x^3 - \alpha^{x^3} > x - \alpha^{x} \Leftrightarrow f(x^3) > f(x) \overset{f\uparrow}{\Leftrightarrow} x^3 > x \Leftrightarrow$
$x(x-1)(x+1) > 0 \Leftrightarrow x \in (-1,0) \cup (1,+\infty)$

2.210. **α)** Για κάθε $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ με $x_1 < x_2$ είναι $x_1^3 < x_2^3$, $5x_1 < 5x_2$, άρα και
$x_1^3 + 5x_1 < x_2^3 + 5x_2 \Leftrightarrow x_1^3 + 5x_1 + 1 < x_2^3 + 5x_2 + 1 \Leftrightarrow f(x_1) < f(x_2) \Rightarrow f\uparrow\mathbb{R}$

β) $f(f(x)) > 7 \Leftrightarrow f(f(x)) > f(1) \overset{f\uparrow}{\Leftrightarrow} f(x) > 1 \Leftrightarrow f(x) > f(0) \overset{f\uparrow}{\Leftrightarrow} x > 0$

2.211. **α)** Για κάθε $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ με $x_1 < x_2$ είναι:

$$\begin{cases} -x_1 > -x_2 \\ x_1^3 < x_2^3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1-x_1 > 1-x_2 \\ -x_1^3 > -x_2^3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (1-x_1)^7 > (1-x_2)^7 \\ -x_1^3 > -x_2^3 \end{cases} \overset{(+)}{\Rightarrow}$$

$(1-x_1)^7 - x_1^3 > (1-x_2)^7 - x_2^3 \Leftrightarrow (1-x_1)^7 - x_1^3 + 5 > (1-x_2)^7 - x_2^3 + 5 \Leftrightarrow$
$f(x_1) > f(x_2)$ άρα f γνησίως φθίνουσα στο $\mathbb{R}$.

β) Παρατηρούμε ότι $f(0) = 6$, οπότε η ανίσωση γίνεται:

$f[f(x+1) - 4] > f(0) \overset{f\downarrow}{\Leftrightarrow} f(x+1) - 4 < 0 \Leftrightarrow f(x+1) < 4 \quad (1)$. Παρατηρούμε ότι

$f(1) = 4$, οπότε η σχέση (1) γίνεται: $f(x+1) < f(1) \overset{f\downarrow}{\Leftrightarrow} x+1 > 1 \Leftrightarrow x > 0$.

2.212. **α)** Εστω $x_1, x_2 \in (0,+\infty)$ με $x_1 < x_2$,τότε $\alpha^{x_1} > \alpha^{x_2}$ και $\ln x_1 < \ln x_2 \Leftrightarrow -\ln x_1 > -\ln x_2$
οπότε: $\alpha^{x_1} - \ln x_1 > \alpha^{x_2} - \ln x_2 \Leftrightarrow f(x_1) > f(x_2)$ άρα η συνάρτηση f είναι γνησίως φθίνουσα στο $(0,+\infty)$.

β) $\alpha^{x^2+x+4} - \alpha^{x^2+9} < \ln(x^2+x+4) - \ln(x^2+9) \Leftrightarrow$
$\alpha^{x^2+x+4} - \ln(x^2+x+4) < \alpha^{x^2+9} - \ln(x^2+9) \Leftrightarrow f(x^2+x+4) < f(x^2+9)$,
οπότε επειδή η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $(0,+\infty)$ ισχύει:
$x^2 + x + 4 > x^2 + 9 \Leftrightarrow x > 5$.

2.213. **α)** Για κάθε $x_1,x_2 \in (0,1]$ με $x_1 < x_2$,

είναι $\ln x_1 < \ln x_2 < 0 \Leftrightarrow \ln^2 x_1 > \ln^2 x_2 \Leftrightarrow f(x_1) > f(x_2) \Rightarrow f \downarrow (0,1]$

Για κάθε $x_1,x_2 \in [1,+\infty)$ με $x_1 < x_2$,

είναι $0 < \ln x_1 < \ln x_2 \Leftrightarrow \ln^2 x_1 < \ln^2 x_2 \Leftrightarrow f(x_1) < f(x_2) \Rightarrow f \uparrow [1,+\infty)$

β) Επειδή $x^2+4>1$ και $x^2+x+1>1$ για κάθε $x>0$, είναι:

$$\ln^2(x^2+4) - \ln^2(x^2+x+1) < 0 \Leftrightarrow \ln^2(x^2+4) < \ln^2(x^2+x+1) \Leftrightarrow$$

$$f(x^2+4) < f(x^2+x+1) \overset{f\uparrow}{\Leftrightarrow} x^2+4 < x^2+x+1 \Leftrightarrow x>3$$

2.214. **α)** Εστω $x_1,x_2 \in \mathbb{R}$ με $x_1 < x_2$,τότε $10^{x_1} < 10^{x_2}$, $100^{x_1} < 100^{x_2}$,

άρα και $10^{x_1} + 100^{x_1} < 10^{x_2} + 100^{x_2} \Leftrightarrow 10^{x_1} + 100^{x_1} - 110 < 10^{x_2} + 100^{x_2} - 110 \Leftrightarrow$

$f(x_1) < f(x_2) \Rightarrow f \uparrow \mathbb{R}$

β) i) $10^x + 100^x < 2 \Leftrightarrow 10^x + 100^x - 110 < -108 \Leftrightarrow f(x) < f(0) \overset{f\uparrow}{\Leftrightarrow} x<0$

ii) $f(f(x)) > -108 \Leftrightarrow f(f(x)) > f(0) \overset{f\uparrow}{\Leftrightarrow} f(x) > 0 \Leftrightarrow f(x) > f(1) \overset{f\uparrow}{\Leftrightarrow} x > 1$

2.215. **α)** Εστω $x_1,x_2 \in \mathbb{R}$ με $x_1 < x_2$. Τότε: $-x_1 > -x_2 \Leftrightarrow \begin{cases} 2^{-x_1} > 2^{-x_2} \\ 3^{-x_1} > 3^{-x_2} \end{cases} \overset{(+)}{\Rightarrow}$

$2^{-x_1} + 3^{-x_1} - 1 > 2^{-x_2} + 3^{-x_2} - 1 \Leftrightarrow f(x_1) > f(x_2)$, άρα f γνησίως φθίνουσα στο $\mathbb{R}$.

β) i. $2^{-x} + 3^{-x} < 5 \Leftrightarrow 2^{-x} + 3^{-x} < 1+4 \Leftrightarrow 2^{-x} + 3^{-x} - 1 < 4 \Leftrightarrow f(x) < f(-1) \overset{f\downarrow}{\Leftrightarrow} x > -1$

ii $f(f(x)-1) < 1 \Leftrightarrow f(\underbrace{f(x)-1}_{x_1}) < \underbrace{f(0)}_{x_2} \overset{f\downarrow}{\Leftrightarrow} f(x) - 1 > 0 \Leftrightarrow$

$f(x) > 1 \Leftrightarrow f(x) > f(0) \overset{f\downarrow}{\Leftrightarrow} x < 0.$

2.216. **α)** Εστω $f(x) = x - \sigma\upsilon\nu x$, $x \in [0,\pi]$.

Για κάθε $x_1,x_2 \in (0,\pi)$ με $x_1 < x_2$, είναι $\sigma\upsilon\nu x_1 > \sigma\upsilon\nu x_2 \Leftrightarrow -\sigma\upsilon\nu x_1 < -\sigma\upsilon\nu x_2$,

άρα και $x_1 - \sigma\upsilon\nu x_1 < x_2 - \sigma\upsilon\nu x_2 \Leftrightarrow f(x_1) < f(x_2) \Rightarrow f \uparrow [0,\pi]$

$$x - \sigma\upsilon\nu x < \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow f(x) < f\left(\frac{\pi}{2}\right) \overset{f\uparrow}{\Rightarrow} 0 < x < \frac{\pi}{2}$$

β) Εστω $f(x) = \ln x + e^x$, $x>0$.

Για κάθε $x_1,x_2 \in (0,+\infty)$ με $x_1 < x_2$, είναι $\ln x_1 < \ln x_2$, $e^{x_1} < e^{x_2}$, άρα και

$\ln x_1 + e^{x_1} < \ln x_2 + e^{x_2} \Leftrightarrow f(x_1) < f(x_2) \Rightarrow f \uparrow (0,+\infty)$

$$\ln x + e^x > e \Leftrightarrow f(x) > f(1) \overset{f\uparrow}{\Leftrightarrow} x > 1.$$

2.217. Εστω $f(x)=\ln x+e^x$, $x>0$. Από τη προηγούμενη άσκηση είναι $f\uparrow(0,+\infty)$, οπότε:

$$\ln(x^2+x+1)+e^{x^2+x+1}<\ln(x+5)+e^{x+5}\Leftrightarrow f(x^2+x+1)<f(x+5)\overset{f\uparrow}{\Leftrightarrow}$$
$$x^2+x+1<x+5\Leftrightarrow x\in(-2,2)$$

2.218. $\ln\dfrac{x^2+1}{x^2+x+5}<(x^2+x+5)^5-(x^2+1)^5\Leftrightarrow$

$$\ln(x^2+1)+(x^2+1)^5<\ln(x^2+x+5)+(x^2+x+5)^5 \quad (1)$$

Εστω $f(x)=\ln x+x^5$, $x>0$. Εύκολα αποδεικνύεται ότι $f\uparrow(0,+\infty)$.

$$(1)\Rightarrow f(x^2+1)<f(x^2+x+5)\overset{f\uparrow}{\Leftrightarrow} x^2+1<x^2+x+5\Leftrightarrow x>-4$$

2.219. Εύκολα αποδεικνύεται ότι $f\uparrow(0,+\infty)$.

$$(x^2+1)^3-(x+1)^3<\ln(x+1)-\ln(x^2+1)\Leftrightarrow \ln(x^2+1)+(x^2+1)^3<\ln(x+1)+(x+1)^3\Leftrightarrow$$
$$f(x^2+1)<f(x+1)\overset{f\uparrow}{\Leftrightarrow} x^2+\cancel{1}<x+\cancel{1}\Leftrightarrow x(x+1)<0\Leftrightarrow x\in(-1,0)$$

2.220. Εστω $f(x)=\eta\mu x+x$, $x\in\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$.

Για κάθε $x_1,x_2\in\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$ με $x_1<x_2$, είναι $\eta\mu x_1<\eta\mu x_2$, άρα και

$$\eta\mu x_1+x_1<\eta\mu x_2+x_2\Leftrightarrow f(x_1)<f(x_2)\Rightarrow f\uparrow\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$$

$$\alpha<\beta\overset{f\uparrow}{\Leftrightarrow} f(\alpha)<f(\beta)\Leftrightarrow \eta\mu\alpha+\alpha<\eta\mu\beta+\beta\Leftrightarrow \eta\mu\alpha-\eta\mu\beta<\beta-\alpha$$

2.221. **α)** Εστω $x_1,x_2\in\mathbb{R}$ με $x_1<x_2$, τότε: $\begin{cases} f(x_1)<f(x_2)\\ g(x_1)>g(x_2)\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases} 27f^3(x_1)<27f^3(x_2)\\ -8g^3(x_1)<-8g^3(x_2)\end{cases}$

άρα $27f^3(x_1)-8g^3(x_1)<27f^3(x_2)-8g^3(x_2)\Leftrightarrow h(x_1)<h(x_2)$,

οπότε η συνάρτηση h είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$.

β) $\dfrac{f(0)}{g(0)}=\dfrac{2}{3}\Leftrightarrow 3f(0)=2g(0)$, άρα $(3f(0))^3=(2g(0))^3\Leftrightarrow$

$$27f^3(0)=8g^3(0)\Leftrightarrow 27f^3(0)-8g^3(0)=0\Leftrightarrow h(0)=0$$

$$27f^3(x)>8g^3(x)\Leftrightarrow h(x)>h(0)\overset{h\uparrow}{\Leftrightarrow} x>0$$

2.222. Είναι $(f\circ f)(x^2+x)<(f\circ f)(x+1)\Leftrightarrow f(f(x^2+x))<f(f(x+1))$.

Επειδή η f είναι γνησίως φθίνουσα, ισχύει: $f(x^2+x)>f(x+1)$ και

$$x^2+x<x+1\Leftrightarrow x^2<1\Leftrightarrow -1<x<1.$$

2.223. $(f\circ f)(x^2-2x)<(f\circ f)(x-2)\Leftrightarrow f\left(f(x^2-2x)\right)<f\left(f(x-2)\right)\overset{f\uparrow}{\Leftrightarrow}$

$f(x^2-2x)<f(x-2)\overset{f\uparrow}{\Leftrightarrow} x^2-2x<x-2\Leftrightarrow x^2-3x+2<0\Leftrightarrow x\in(1,2)$

2.224. α) Για $x=0$ είναι $2f(1)=0\Leftrightarrow f(1)=0$. $f(x)=0\Leftrightarrow f(x)=f(1)\overset{1-1}{\Leftrightarrow} x=1$

β) $f(x^2-8)>0\Leftrightarrow f(x^2-8)>f(1)\overset{f\uparrow}{\Leftrightarrow} x^2-8>1\Leftrightarrow x^2>9\Leftrightarrow x<-3$ ή $x>3$

2.225. $0<t<x\overset{f\uparrow}{\Leftrightarrow} f(t)<f(x)\overset{g(t)>0}{\Leftrightarrow} g(t)f(t)>g(t)f(x)\Leftrightarrow f(x)g(t)-f(t)g(t)<0$

2.226. Εστω $x_1,x_2\in\mathbb{R}$ με x_1,x_2, τότε $x_1-3<x_2-3\Leftrightarrow f^3(x_1)+2f(x_1)<f^3(x_2)+2f(x_2)\Leftrightarrow$

$\left(f(x_1)+f(x_2)\right)\left(f^2(x_1)+f(x_1)f(x_2)+f^2(x_2)+2\right)<0$

Το τριώνυμο $f^2(x_1)+f(x_1)f(x_2)+f^2(x_2)+2$ έχει

$\Delta=f^2(x_2)-4\left(f^2(x_2)+2\right)=-3f^2(x_2)-8<0$, άρα $f^2(x_1)+f(x_1)f(x_2)+f^2(x_2)+2>0$

και λόγω της (1) είναι $f(x_1)-f(x_2)<0\Leftrightarrow f(x_1)<f(x_2)\Rightarrow f\uparrow\mathbb{R}$

2.227. α) Η f έχει μέγιστο στο $x=1$, το 5.

β) $f(x)\le 5\Leftrightarrow 3f(x)\le 15\Leftrightarrow 3f(x)-5\le 10\Leftrightarrow h(x)\le 10=h(1)$ μέγιστο το 10

2.228. α) Στο σχήμα παρατηρούμε ότι η f παρουσιάζει ολικό ελάχιστο στο $x=2$ το $f(2)=-4$. Άρα $f(x)\ge f(2)$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$. Δηλαδή $f(x)\ge -4$.

β) Είναι $f(x)\ge f(2)\Leftrightarrow f^3(x)\ge f^3(2)\Leftrightarrow f^3(x)+2\ge f^3(2)+2\Leftrightarrow h(x)\ge h(2)$. Άρα η h παρουσιάζει ολικό ελάχιστο στο $x=2$ το $h(2)=f^3(2)+2=(-4)^3+2=-62$.

2.229. α) $f(x)=x^2-2x+3=(x-1)^2+2$

$(x-1)^2\ge 0\Leftrightarrow (x-1)^2+2\ge 2\Leftrightarrow f(x)\ge 2=f(1)$. Ελάχιστο το 2 για $x=1$.

β) $f(x)=-x^2+4x-5=-(x-2)^2-1$.

$-(x-2)^2\le 0\Leftrightarrow -(x-2)^2-1\le -1\Leftrightarrow f(x)\le -1=f(2)$. Μέγιστο το -1.

γ) $f(x)=x^6-4x^3+3=(x^3-2)^2-1$. Είναι $(x^3-2)^2\ge 0\Leftrightarrow$

$(x^3-2)^2-1\ge -1\Leftrightarrow f(x)\ge -1=f(\sqrt[3]{2})$. Ελάχιστο το -1 για $x=\sqrt[3]{2}$.

δ) $f(x)=e^{2x}-2e^x+2=(e^x-1)^2+1$.

$(e^x-1)^2\ge 0\Leftrightarrow (e^x-1)^2+1\ge 1\Leftrightarrow f(x)\ge 1=f(0)$. Ελάχιστο το 1 για $x=0$.

2.230. Για κάθε $x\in\mathbb{R}$ είναι

$f(x)=y \Leftrightarrow \dfrac{x^2-2x+1}{x^2+x+1}=y \Leftrightarrow ... \Leftrightarrow (y-1)x^2+(y+2)x+y-1=0 \ (1)$

Αν $y=1$, τότε $x=0$ που ανήκει στο $A_f=\mathbb{R}$, άρα η $y=1$ είναι δεκτή.

Αν $y\neq 1$, τότε επειδή η (1) έχει τουλάχιστον μία ρίζα,

είναι $\Delta\geq 0 \Leftrightarrow ... \Leftrightarrow y^2-4y\leq 0 \Leftrightarrow 0\leq y\leq 4$.

Για $y=0$, είναι $\dfrac{x^2-2x+1}{x^2+x+1}=0 \Leftrightarrow x=1$, οπότε η f έχει ελάχιστο το 0 για $x=1$.

Για $y=4$, είναι $\dfrac{x^2-2x+1}{x^2+x+1}=4 \Leftrightarrow x=-1$, οπότε η f έχει μέγιστο το 4 για $x=-1$.

2.231. $f(x)=\sqrt{x^2-2x+2}$, $x\in\mathbb{R}$

$f(x)=y \Leftrightarrow \sqrt{x^2-2x+2}=y\geq 0 \Leftrightarrow x^2-2x+2=y^2 \Leftrightarrow x^2-2x+2-y^2=0 \ (1)$.

Επειδή η (1) έχει τουλάχιστον μία ρίζα, είναι

$\Delta\geq 0 \Leftrightarrow ... \Leftrightarrow y^2\geq 1 \Leftrightarrow y\in(-\infty,-1]\cup[1,+\infty)$. Επειδή όμως $y\geq 0$,τελικά είναι $y\geq 1$.

Για $y=1$, από την (1), έχουμε: $x^2-2x+1=0 \Leftrightarrow (x-1)^2=0 \Leftrightarrow x=1$.

Άρα η f έχει ελάχιστο το 1 για $x=1$.

2.232. Για να ορίζεται η f πρέπει: $1-x^2\geq 0 \Leftrightarrow x^2\leq 1 \Leftrightarrow |x|\leq 1 \Leftrightarrow -1\leq x\leq 1$, άρα $A=[-1,1]$.

Εστω $f(x)=y \Leftrightarrow 3-\sqrt{1-x^2}=y \Leftrightarrow \sqrt{1-x^2}=3-y \ (1)$

Πρέπει $3-y\geq 0 \Leftrightarrow y\leq 3 \ (2)$, τότε η (1) γίνεται: $1-x^2=(3-y)^2 \Leftrightarrow 1-(3-y)^2=x^2$

Επειδή $x^2\geq 0$, είναι $1-(3-y)^2\geq 0 \Leftrightarrow (3-y)^2\leq 1 \Leftrightarrow |3-y|\leq 1 \Leftrightarrow$

$-1\leq 3-y\leq 1 \Leftrightarrow -4\leq -y\leq -2 \Leftrightarrow 2\leq y\leq 4 \ (3)$

Από τις σχέσεις $(2),(3)$ προκύπτει ότι $2\leq y\leq 3$

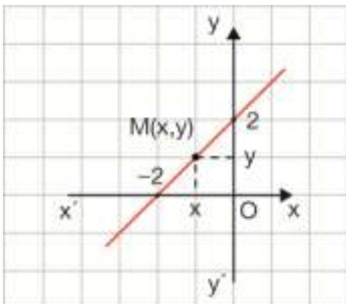
Αν $y=3$, τότε $3-\sqrt{1-x^2}=3 \Leftrightarrow \sqrt{1-x^2}=0 \Leftrightarrow 1-x^2=0 \Leftrightarrow x=\pm 1$,

οπότε η f έχει μέγιστο το 3 για $x=1$ και $x=-1$.

Αν $y=2$, τότε $3-\sqrt{1-x^2}=2 \Leftrightarrow \sqrt{1-x^2}=1 \Leftrightarrow 1-x^2=1 \Leftrightarrow x=0$,

οπότε η f έχει ελάχιστο το 2 για $x=0$.

2.233. Εστω $M(x,y)$ σημείο της ε. Τότε $y=x+2$.



Οι αποστάσεις του M από τους άξονες, είναι:
$d(M,x'x)=|y|=|x+2|$ και $d(M,y'y)=|x|$.

Αν Σ το άθροισμα των τετραγώνων των αποστάσεων του M από τους άξονες, τότε:
$\Sigma=|x+2|^2+|x|^2=(x+2)^2+x^2=2x^2+4x+4$.

Η παράσταση Σ είναι τριώνυμο και η γραφική της παράσταση είναι παραβολή με κορυφή $K\left(-\frac{\beta}{2\alpha},-\frac{\Delta}{4\alpha}\right)$. Οπότε η Σ γίνεται ελάχιστη όταν $x=x_K=-\frac{\beta}{2\alpha}=-\frac{4}{4}=-1$. Τότε $y=-1+2=1$ και το σημείο Μ έχει συντεταγμένες $(-1,1)$.

2.234. Εστω $M(x,y)$ σημείο της ε. Τότε $y=x-4$. Οι αποστάσεις του Μ από τους άξονες, είναι: $d(M,x'x)=|y|=|x-4|$ και $d(M,y'y)=|x|$.

Αν Σ το άθροισμα των τετραγώνων των αποστάσεων του Μ από τους άξονες, τότε: $\Sigma=|x-4|^2+|x|^2=(x-4)^2+x^2=2x^2-8x+16$.

Η παράσταση Σ είναι τριώνυμο και η γραφική της παράσταση είναι παραβολή με κορυφή $K\left(-\frac{\beta}{2\alpha},-\frac{\Delta}{4\alpha}\right)$. Οπότε η Σ γίνεται ελάχιστη όταν $x=x_K=-\frac{\beta}{2\alpha}=\frac{8}{4}=2$.

Τότε $y=2-4=-2$ και το σημείο Μ έχει συντεταγμένες $(2,-2)$.

2.235. Η f είναι τριώνυμο και παρουσιάζει ελάχιστο για $x=-\frac{\beta}{2\alpha}=\frac{\lambda}{2}$ το $-\frac{\Delta}{4\alpha}=-\frac{\lambda^2-8}{4}$.

Πρέπει $-\frac{\lambda^2-8}{4}=-2 \Leftrightarrow -\lambda^2+8=-8 \Leftrightarrow \lambda^2=16 \Leftrightarrow \lambda=\pm 4$.

2.236. Για να έχει η f ελάχιστο το 1, πρέπει:

$f(x)\geq 1 \Leftrightarrow x^2-(\lambda+1)x+2\geq 1 \Leftrightarrow x^2-(\lambda+1)x+1\geq 0 \quad (1)$

Η τελευταία είναι 2ου βαθμού με

$\Delta=(\lambda+1)^2-4=(\lambda+1-2)(\lambda+1+2)=(\lambda-1)(\lambda+3)$

Για να αληθεύει η (1) για κάθε $x\in\mathbb{R}$, πρέπει

$\Delta\leq 0 \Leftrightarrow (\lambda-1)(\lambda+3)\leq 0 \Leftrightarrow -3\leq\lambda\leq 1$

2.237. $f(x)=y \Leftrightarrow (1-y)x^2+\kappa x+\lambda-y=0 \quad (1)$.

Αν $y=1$, τότε $(1)\Rightarrow \kappa x+\lambda-1=0$ και δεν έχει πάντα λύση ως προς x.

Για $y\neq 1$, επειδή η (1) έχει τουλάχιστον μία ρίζα,

είναι $\Delta\geq 0 \Leftrightarrow 4y^2-4(1+\lambda)y+4\lambda-k^2\leq 0 \quad (2)$. Αν y_1,y_2 με $y_1<y_2$ οι ρίζες του τριωνύμου της (2), τότε $f_{min}=y_1=-3$ και $f_{max}=y_2=3$.

Είναι $y_1+y_2=-\frac{-4(1+\lambda)}{4} \Leftrightarrow 1+\lambda=0 \Leftrightarrow \lambda=-1$

και $y_1y_2=\frac{4\lambda-\kappa^2}{4} \Leftrightarrow -9=\frac{-4-\kappa^2}{4} \Leftrightarrow \kappa^2=32 \Leftrightarrow \kappa=\pm 4\sqrt{2}$

2.238. $f(x)=y \Leftrightarrow (1-y)x^2-4x+\lambda-y=0 \quad (1)$

Αν $y=1$, τότε $(1)\Rightarrow -4x+\lambda-1=0 \Leftrightarrow x=\frac{\lambda-1}{4}$.

Για $y\neq 1$, επειδή η (1) έχει τουλάχιστον μία ρίζα, είναι $\Delta \geq 0 \Leftrightarrow y^2-(1+\lambda)y+\lambda-4\leq 0 \quad (2)$

Αν y_1,y_2 οι ρίζες του τριωνύμου της (2), τότε

$$f_{min}+f_{max}=3 \Leftrightarrow y_1+y_2=3 \Leftrightarrow \frac{1+\lambda}{1}=3 \Leftrightarrow \lambda=2.$$

2.239. α) Εστω $x_1,x_2 \in (0,+\infty)$ με $x_1<x_2$, τότε $-x_1>-x_2 \Leftrightarrow e^{-x_1}>e^{-x_2}$

και $-\ln x_1>-\ln x_2$, άρα και $e^{-x_1}-\ln x_1>e^{-x_2}-\ln x_2 \Leftrightarrow f(x_1)>f(x_2) \Rightarrow f\downarrow(0,+\infty)$

β) $e^{\beta}-e^{\alpha}>e^{\alpha+\beta}\cdot\ln\frac{\alpha}{\beta} \Leftrightarrow \frac{e^{\beta}}{e^{\alpha+\beta}}-\frac{e^{\alpha}}{e^{\alpha+\beta}}>\ln\alpha-\ln\beta \Leftrightarrow e^{-\alpha}-e^{-\beta}>\ln\alpha-\ln\beta \Leftrightarrow$

$e^{-\alpha}-\ln\alpha>e^{-\beta}-\ln\beta \Leftrightarrow f(\alpha)>f(\beta)$ που ισχύει αφού $\alpha<\beta$ και $f\downarrow(0,+\infty)$

γ) $e^{-(x^2+1)}-e^{-(x^2+x+2)}<\ln(x^2+1)-\ln(x^2+x+2) \Leftrightarrow$

$e^{-(x^2+1)}-\ln(x^2+1)<e^{-(x^2+x+2)}-\ln(x^2+x+2) \Leftrightarrow$

$f(x^2+1)<f(x^2+x+2) \overset{f\downarrow}{\Leftrightarrow} x^2+1>x^2+x+2 \Leftrightarrow x<-1$

2.240. α) Εστω $x_1,x_2 \in \mathbb{R}$ με $x_1<x_2$.Επειδή η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $\mathbb{R}$ και ισχύει $f(x)>0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$, έχουμε: $f(x_1)>f(x_2) \Leftrightarrow -f(x_1)<-f(x_2)<0 \quad (1)$.

Επειδή η g είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$ και ισχύει $g(x)<0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$, έχουμε: $g(x_1)<g(x_2)<0 \quad (2)$.

Με πολλαπλασιασμό των (1), (2) κατά μέλη έχουμε:

$-f(x_1)g(x_1)>-f(x_2)g(x_2) \Leftrightarrow (fg)(x_1)<(fg)(x_2)$.

Άρα η συνάρτηση fg είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$.

β) Είναι $f(x+3)>0$ και $g(2x-1)<0$, οπότε:

$$\frac{f(2x-1)}{f(x+3)}>\frac{g(x+3)}{g(2x-1)} \Leftrightarrow f(2x-1)g(2x-1)<f(x+3)g(x+3) \Leftrightarrow$$

$(fg)(2x-1)<(fg)(x+3)$ και επειδή η fg είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$, έχουμε

$2x-1<x+3 \Leftrightarrow x<4$.

2.241. α) $A_f=(0,+\infty)$

β) Εστω $x_1,x_2 \in (0,+\infty)$ με $x_1<x_2$, τότε $2x_1-2<2x_2-2$, $\ln x_1<\ln x_2$,

άρα και $2x_1-2+\ln x_1<2x_2-2+\ln x_2 \Leftrightarrow f(x_1)<f(x_2) \Rightarrow f\uparrow(0,+\infty)$

γ) $f(x)=0 \Leftrightarrow f(x)=f(1) \overset{1-1}{\Leftrightarrow} x=1$

δ) $f(x)>0 \Leftrightarrow f(x)>f(1) \overset{f\uparrow}{\Leftrightarrow} x>1$

2.242. α) Εστω $x_1,x_2 \in (0,+\infty)$ με $x_1<x_2$. Είναι

$$f(x_1)-f(x_2)=x_1^3+3x_1^2-x_2^3-3x_2^2=(x_1-x_2)(x_1^2+x_1x_2+x_2^2+3x_1+3x_2)<0 \Leftrightarrow$$

$f(x_1) < f(x_2) \Rightarrow f \uparrow (0,+\infty)$

β) $f(x)=0 \Leftrightarrow x^3+3x^2-4=0 \Leftrightarrow (x-1)(x^2+4x+4)=0 \Leftrightarrow (x-1)(x-2)^2=0 \Leftrightarrow$

$x=1$ ή $x=2$

γ) $f(x)>0 \Leftrightarrow (x-1)(x-2)^2>0 \Leftrightarrow x\in(1,2)\cup(2,+\infty)$

2.243 **α)** Είναι $D_f=\mathbb{R}^*$ και έστω $y=x^{2014}+\dfrac{\kappa}{x^{2014}}$.

Θέτω $x^{2014}=\omega>0$ οπότε $y=\omega+\dfrac{\kappa}{\omega} \Leftrightarrow \omega^2-y\omega+\kappa=0$

Αφού $\omega\in(0,+\infty)$ θα πρέπει μια ρίζα του τριώνυμου να είναι θετική.

$\Delta\geq 0 \Leftrightarrow y^2-4\kappa\geq 0 \Leftrightarrow |y|\geq 2\sqrt{\kappa} \Leftrightarrow y\geq 2\sqrt{\kappa}$ ή $y\leq -2\sqrt{\kappa}$

Επειδή το γινόμενο των ριζών $\dfrac{\gamma}{\alpha}=\kappa>0$ τότε οι ρίζες είναι ομόσημες και αφού η μία θετική τότε πρέπει να είναι και οι δύο θετικές δηλ. $-\dfrac{\beta}{\alpha}>0 \Leftrightarrow y>0$.

Άρα $y\geq 2\sqrt{\kappa}$ οπότε $f(A)=\left[2\sqrt{\kappa},+\infty\right)$

β) Πρέπει $2\sqrt{\kappa}=20 \Leftrightarrow \sqrt{\kappa}=10 \Leftrightarrow \kappa=100$

Αντίστροφη Συνάρτηση

2.273. **α)** Για κάθε $x \neq -3$ είναι $f(x) = y \Leftrightarrow \dfrac{x}{x+3} = y \Leftrightarrow x(1-y) = 3y \ (1)$.

Αν $y = 1$ τότε η (1) είναι αδύνατη. Για $y \neq 1$ είναι $x = \dfrac{3y}{1-y}$, άρα $f(A) = \mathbb{R} - \{1\}$.

β) Για κάθε $x \geq 2$, είναι $\sqrt{x-2} \geq 0 \Leftrightarrow y \geq 0$ και $f(A) = [0, +\infty)$.

γ) Για να ορίζεται η f πρέπει: $\begin{cases} x+1 \geq 0 \\ 9 - \sqrt{x+1} \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -1 \\ \sqrt{x+1} \leq 9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -1 \\ x+1 \leq 81 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -1 \\ x \leq 80 \end{cases}$

οπότε, $D_f = [-1, 80]$.

Εστω $f(x) = y \Leftrightarrow \sqrt{9 - \sqrt{x+1}} = y$.

Πρέπει $y \geq 0 \ (1)$ και $9 - \sqrt{x+1} = y^2 \Leftrightarrow \sqrt{x+1} = 9 - y^2$.

Πρέπει $9 - y^2 \geq 0 \Leftrightarrow y^2 \leq 9 \Leftrightarrow |y| \leq 3 \Leftrightarrow -3 \leq y \leq 3 \ (2)$

και $x + 1 = (9 - y^2)^2 \Leftrightarrow x = (9 - y^2)^2 - 1$.

Όμως $-1 \leq x \leq 80$ άρα και $-1 \leq (9-y^2)^2 - 1 \leq 80 \Leftrightarrow 0 \leq (9-y^2)^2 \leq 81 \Leftrightarrow$

$(9-y^2)^2 \leq 81 \Leftrightarrow |9 - y^2| \leq 9 \Leftrightarrow -9 \leq 9 - y^2 \leq 9 \Leftrightarrow 0 \leq y^2 \leq 18 \Leftrightarrow$

$-\sqrt{18} \leq y \leq \sqrt{18} \Leftrightarrow -3\sqrt{2} \leq y \leq 3\sqrt{2} \ (3)$

Συναληθεύοντας τους περιορισμούς $(1), (2), (3)$ προκύπτει ότι $f(A) = [0, 3]$.

δ) Για κάθε $x \in \mathbb{R}$ είναι $f(x) = y \Leftrightarrow e^{2x} = y + 1 > 0 \Rightarrow y > -1$, άρα $f(A) = (-1, +\infty)$

ε) Για κάθε $x > 1$, είναι $\ln(x-1) + 3 = y \Leftrightarrow x = e^{y-3} + 1$, $y \in \mathbb{R}$, άρα $f(A) = \mathbb{R}$

στ) Για κάθε $x \in \mathbb{R}$ είναι $-1 \leq \text{συν}3x \leq 1 \Leftrightarrow 3 \leq 2\text{συν}3x + 5 \leq 7 \Leftrightarrow 3 \leq y \leq 7$,
$f(A) = [3, 7]$.

2.274. Για $x \leq 1$ είναι $f(x) = y \Leftrightarrow e^{x-1} = y + 2 > 0 \Rightarrow y > -2$, τότε $x - 1 = \ln(y+2) \Leftrightarrow$
$x = \ln(y+2) + 1 \leq 1 \Leftrightarrow \ln(y+2) \leq 0 \Leftrightarrow y + 2 \leq 1 \Leftrightarrow y \leq -1$ και $f(A_1) = (-2, -1]$

Για $x > 1$ είναι $f(x) = y \Leftrightarrow 1 - 2\ln x = y \Leftrightarrow \ln x = \dfrac{1-y}{2} \Leftrightarrow x = e^{\frac{1-y}{2}}$.

$x > 1 \Leftrightarrow e^{\frac{1-y}{2}} > 1 \Leftrightarrow \dfrac{1-y}{2} > 0 \Leftrightarrow y < 1$ και $f(A_2) = (-\infty, 1)$.

$f(A) = f(A_1) \cup f(A_2) = (-\infty, 1)$

2.275. **α)** **1ος τρόπος**

$f(x) = y \Leftrightarrow x^2 - 6x + 7 = y \Leftrightarrow x^2 - 6x + (7 - y) = 0 \ (1)$.

Επειδή υπάρχουν τιμές του x για τις οποίες $f(x) = y$, η σχέση (1) έχει τουλάχιστον μία λύση.

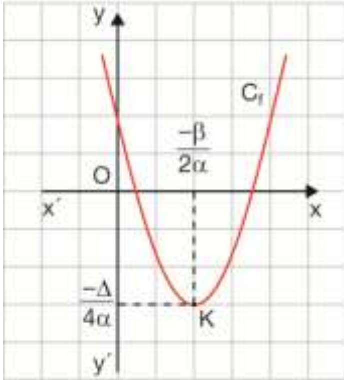
Άρα $\Delta \geq 0 \Leftrightarrow 36 - 4(7-y) \geq 0 \Leftrightarrow 4(7-y) \leq 36 \Leftrightarrow 7 - y \leq 9 \Leftrightarrow y \geq -2$

Επομένως η f έχει σύνολο τιμών το διάστημα $[-2, +\infty)$.

$2^{ος}$ τρόπος

Επειδή η f είναι παραβολή με $\alpha=1>0$ παρουσιάζει ελάχιστο στην κορυφή της $K\left(-\frac{\beta}{2\alpha},\frac{-\Delta}{4\alpha}\right)$. Επειδή $-\frac{\beta}{2\alpha}=\frac{6}{2}=3$ και $-\frac{\Delta}{4\alpha}=-\frac{36-28}{4}=-2$ η f έχει ελάχιστο στο $x=3$ το -2. Επομένως $f(x)\geq -2$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

Άρα $f(A)=[-2,+\infty)$.



β) Για κάθε $x\in\mathbb{R}$ είναι: $f(x)=y\Leftrightarrow \frac{x^2-2}{x^2+2x+2}=y\Leftrightarrow (1-y)x^2-2xy-2-2y=0$ (1)

Αν $y=1$, τότε $(1)\Rightarrow -2x-4=0\Leftrightarrow x=-2$ δεκτό.

Αν $y\neq 1$, τότε επειδή η (1) έχει τουλάχιστον μία λύση, είναι $\Delta\geq 0\Leftrightarrow$

$4y^2-4(1-y)(-2-2y)\geq 0\Leftrightarrow y^2\leq 2\Leftrightarrow -\sqrt{2}\leq y\leq\sqrt{2}$, άρα $f(A)=\left[-\sqrt{2},\sqrt{2}\right]$

2.276. $f(x)=y\Leftrightarrow \frac{x^2-\alpha x+\beta}{x^2+1}=y\Leftrightarrow (1-y)x^2-\alpha x+\beta-y=0$ (1)

Επειδή υπάρχουν $x\in\mathbb{R}$ για τα οποία αληθεύει η (1),

είναι $\Delta\geq 0\Leftrightarrow \alpha^2-4(1-y)(\beta-y)\geq 0\Leftrightarrow -4y^2+4(\beta+1)y+\alpha^2-4\beta\geq 0$

Το τριώνυμο, ως προς y, είναι ετερόσημο του συντελεστή του y^2 όταν $y\in[y_1,y_2]$.

Όμως η f έχει σύνολο τιμών το $[0,2]$, άρα $y_1=0$ και $y_2=2$.

Δηλαδή οι αριθμοί 0,2 είναι ρίζες του τριωνύμου $-4y^2+4(\beta+1)y+\alpha^2-4\beta$, οπότε:

$$\begin{cases}\alpha^2-4\beta=0\\ 16+8(\beta+1)=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\alpha=\pm 2\\ \beta=1\end{cases}$$

2.277. Είναι $A_f=\mathbb{R}$. Έστω $f(x)=y$, τότε:

$\frac{\eta\mu x-4}{\eta\mu x+3}=y\Leftrightarrow y\eta\mu x+3y=\eta\mu x-4\Leftrightarrow (y-1)\eta\mu x=-3y-4$ (1).

Αν $y=1$ τότε από την (1) προκύπτει ότι $0=-7$ που είναι άτοπο.

Οπότε για $y\neq 1$ έχουμε: $\eta\mu x=\frac{-3y-4}{y-1}$.

Επειδή $-1\leq \eta\mu x\leq 1$, $x\in\mathbb{R}$, πρέπει: $-1\leq\frac{-3y-4}{y-1}\leq 1$.

$\frac{-3y-4}{y-1}\leq 1\Leftrightarrow \frac{-3y-4}{y-1}-1\leq 0\Leftrightarrow \frac{-3y-4-y+1}{y-1}\leq 0\Leftrightarrow \frac{-4y-3}{y-1}\leq 0\Leftrightarrow$

$(-4y-3)(y-1)\leq 0\Leftrightarrow y\leq -\frac{3}{4}$ ή $y\geq 1$ (2).

$$\frac{-3y-4}{y-1}\geq -1 \Leftrightarrow \frac{-3y-4}{y-1}+1\geq 0 \Leftrightarrow \frac{-3y-4+y-1}{y-1}\geq 0 \Leftrightarrow \frac{-2y-5}{y-1}\geq 0 \Leftrightarrow$$

$(-2y-5)(y-1)\geq 0 \Leftrightarrow -\frac{5}{2}\leq y\leq 1$ (3). Με συναλήθευση των σχέσεων (2), (3) προκύπτει ότι: $y\in\left[-\frac{5}{2},-\frac{3}{4}\right]$, άρα $f(A)=\left[-\frac{5}{2},-\frac{3}{4}\right]$.

2.278. α) Για κάθε $x_1,x_2\in\mathbb{R}$ με $f(x_1)=f(x_2)$ είναι: $\frac{x_1-1}{x_1^2+3}=\frac{x_2-1}{x_2^2+3}\Leftrightarrow$

$(x_1-x_2)(3+x_1+x_2-x_1x_2)=0\Leftrightarrow x_1=x_2$ ή $3+x_1+x_2-x_1x_2=0$ (1)

Για $x_1=0$, η (1) γίνεται $x_2=-3$. Είναι $f(0)=-\frac{1}{3}=f(-3)$, άρα η f δεν είναι 1-1.

β) Για κάθε $x_1,x_2\in A_f=[-1,+\infty)$ με $x_1\neq x_2$,

είναι $\sqrt{x_1+1}\neq\sqrt{x_2+1}\Leftrightarrow f(x_1)\neq f(x_2)\Rightarrow f$ 1–1

γ) Για κάθε $x_1,x_2\in\mathbb{R}$ με $x_1<x_2$ είναι: $2x_1^3<2x_2^3$, $3x_1<3x_2$, άρα και

$2x_1^3+3x_1<2x_2^3+3x_2\Leftrightarrow 2x_1^3+3x_1+2<2x_2^3+3x_2+2\Leftrightarrow f(x_1)<f(x_2)\Rightarrow f\uparrow\mathbb{R}$

άρα και 1–1.

δ) Για κάθε $x_1,x_2\in(0,+\infty)$ με $f(x_1)=f(x_2)$ είναι: $\frac{x_1}{\sqrt{x_1^2+3}}=\frac{x_2}{\sqrt{x_2^2+3}}\Leftrightarrow$

$\frac{x_1^2}{x_1^2+3}=\frac{x_2^2}{x_2^2+3}\Leftrightarrow(x_1-x_2)(x_1+x_2)=0\Leftrightarrow x_1=x_2$ ή $x_1=-x_2$ που είναι άτοπο.

Όμοια αν $x_1,x_2\in(-\infty,0)$. Αν $x_1<0$ και $x_2>0$, τότε $f(x_1)<0$ και $f(x_2)>0$, δηλαδή $f(x_1)\neq f(x_2)$, άρα η f είναι 1–1.

ε) Εστω $x_1,x_2\in A_f=\mathbb{R}-\{1\}$ με $f(x_1)=f(x_2)$.

Τότε: $\frac{x_1}{x_1-1}=\frac{x_2}{x_2-1}\Leftrightarrow x_1=x_2$, άρα f 1–1.

στ) Για κάθε $x_1,x_2\in\mathbb{R}$ με $x_1<x_2$ είναι: $-x_1>-x_2\Leftrightarrow e^{-x_1}>e^{-x_2}$ και $-2x_1>-2x_2$

άρα και $e^{-x_1}-2x_1>e^{-x_2}-2x_2\Leftrightarrow f(x_1)>f(x_2)\Rightarrow f\downarrow\mathbb{R}$, άρα f 1–1.

ζ) Για κάθε $x_1,x_2\in\mathbb{R}^*$ με $x_1\neq x_2$ είναι: $\frac{2}{x_1}\neq\frac{2}{x_2}\Leftrightarrow e^{\frac{2}{x_1}}\neq e^{\frac{2}{x_2}}\Leftrightarrow f(x_1)\neq f(x_2)$

άρα f 1–1.

η) $\frac{x+2}{x-2}>0\Leftrightarrow A_f=(-\infty,-2)\cup(2,+\infty)$. Για κάθε $x_1,x_2\in A_f$ με $f(x_1)=f(x_2)$ είναι

$\ln\frac{x_1+2}{x_1-2}=\ln\frac{x_2+2}{x_2-2}\Leftrightarrow\frac{x_1+2}{x_1-2}=\frac{x_2+2}{x_2-2}\Leftrightarrow x_1=x_2$ άρα f 1–1.

2.279. α) $A_f=\mathbb{R}$. Για κάθε $x_1,x_2\in\mathbb{R}$ με $f(x_1)=f(x_2)$ είναι:

$x_1^4+5=x_2^4+5\Leftrightarrow x_1^4=x_2^4\Leftrightarrow x_1=x_2$ ή $x_1=-x_2$.

$f(1)=6=f(-1)$. Άρα η f δεν είναι 1–1.

β) $A_f=\mathbb{R}$. Για κάθε $x_1,x_2\in\mathbb{R}$ με $f(x_1)=f(x_2)$ είναι:

$$\frac{x_1+3}{x_1^2+2}=\frac{x_2+3}{x_2^2+2}\Leftrightarrow(x_1+3)(x_2^2+2)=(x_1^2+2)(x_2+3)\Leftrightarrow$$

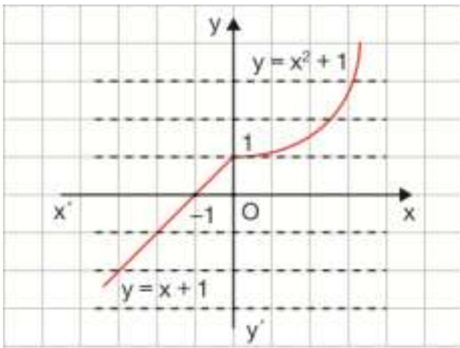
$x_1x_2^2+2x_1+3x_2^2=x_1^2x_2+3x_1^2+2x_2\Leftrightarrow(x_1-x_2)(x_1x_2+3x_1+3x_2-2)=0$ $x_1=x_2$ ή $x_1x_2+3x_1+3x_2-2=0$ (1).

Για $x_1=0$ είναι $f(0)=\frac{3}{2}$ και από την (1) προκύπτει $x_2=\frac{2}{3}$ και $f\left(\frac{2}{3}\right)=\frac{3}{2}$

Δηλαδή υπάρχουν διαφορετικά x_1,x_2 για τα οποία $f(x_1)=f(x_2)$. Οπότε η f δεν είναι 1–1.

2.280. Κάνοντας την γραφική παράσταση της συνάρτησης f διαπιστώνουμε, ότι δεν υπάρχουν διαφορετικά σημεία με την ίδια τεταγμένη, γιατί κάθε οριζόντια ευθεία τέμνει την C_f το πολύ σε ένα σημείο.

Άρα η f είναι 1–1.



2.281. **α)** Για κάθε $x_1,x_2\in\mathbb{R}$ με $f(x_1)=f(x_2)$ είναι: $f(f(x_1))=f(f(x_2))$, άρα και

$f(f(x_1))-f(x_1)=f(f(x_2))-f(x_2)\Leftrightarrow x_1-1=x_2-1\Leftrightarrow x_1=x_2$, άρα f 1–1.

β) Για $x=1$ είναι $f(f(1))=f(1)\overset{1-1}{\Leftrightarrow}f(1)=1$

2.282. **α)** Για κάθε $x_1,x_2\in\mathbb{R}$ με $f(x_1)=f(x_2)$ είναι: $f(f(x_1))=f(f(x_2))$, άρα και

$f(f(x_1))-f(x_1)=f(f(x_2))-f(x_2)\Leftrightarrow-2x_1=-2x_2\Leftrightarrow x_1=x_2$, άρα f 1–1.

β) Για $x=0$ είναι $f(f(f(0)))=f(f(0))\overset{1-1}{\Leftrightarrow}f(f(0))=f(0)\overset{1-1}{\Leftrightarrow}f(0)=0$

2.283. **α)** Για κάθε $x_1,x_2\in\mathbb{R}$ με $f(x_1)=f(x_2)$ είναι:

$f(f(x_1))=f(f(x_2))\Rightarrow f(f(f(x_1)))=f(f(f(x_2)))$, άρα και

$f(f(f(x_1)))-f(f(x_1))=f(f(f(x_2)))-f(f(x_2))\Leftrightarrow 2x_1=2x_2\Leftrightarrow x_1=x_2$ άρα f 1–1.

β) Για $x=0$ είναι $f(f(f(0)))=f(f(0))\overset{1-1}{\Leftrightarrow}f(f(0))=f(0)\overset{1-1}{\Leftrightarrow}f(0)=0$

2.284. **α)** Για κάθε $x_1,x_2\in\mathbb{R}$ με $f(x_1)=f(x_2)$ είναι: $f^3(x_1)=f^3(x_2)$, άρα και

$f^3(x_1)+4f(x_1)=f^3(x_2)+4f(x_2)\Leftrightarrow 2x_1+3=2x_2+3\Leftrightarrow x_1=x_2$, άρα f 1–1.

β) Για $x=1$ είναι

$f^3(1)+4f(1)=5\Leftrightarrow f^3(1)+4f(1)-5=0\Leftrightarrow(f(1)-1)(f^2(1)+f(1)+5)=0\Leftrightarrow f(1)=1$

2.285. Για $x=1$ είναι

$f^2(1)+9=6f(1)\Leftrightarrow f^2(1)-6f(1)+9=0\Leftrightarrow(f(1)-3)^2=0\Leftrightarrow f(1)=3$.

Για $x=-1$ είναι

$f^2(-1)+9=6f(-1)\Leftrightarrow f^2(-1)-6f(-1)+9=0\Leftrightarrow(f(-1)-3)^2=0\Leftrightarrow f(-1)=3$.

Δηλαδή $f(1)=f(-1)$, άρα η f δεν είναι 1–1 και επομένως δεν αντιστρέφεται.

2.286. **α)** Για $x=2$ είναι: $(f\circ f)(2)=2\Leftrightarrow f(f(2))=2$. Για $x=f(2)$ είναι:

$(f\circ f)(f(2))=3f(2)-4\Leftrightarrow f(\underbrace{f(f(2))}_{2})=3f(2)-4\Leftrightarrow f(2)=3f(2)-4\Leftrightarrow f(2)=2$.

β) Για $x=2$ είναι: $g(2)=(2-1)^4+2\cdot 2f(2)+5-4\cdot 2\Leftrightarrow g(2)=1+4\cdot 2+5-8=6$.

Για $x=0$ είναι $g(0)=(-1)^4+2\cdot 0f(0)+5-4\cdot 0=6$.

Δηλαδή $g(0)=g(2)$, άρα η g δεν είναι 1–1 και επομένως δεν είναι αντιστρέψιμη.

2.287. **α)** Για $x=2$ είναι $f(f(f(2)))=2$

και για $x=f(2)$, είναι $f\left(\underbrace{f(f(f(2)))}_{2}\right)=4f(2)-6\Leftrightarrow f(2)=4f(2)-6\Leftrightarrow f(2)=2$

β) $g(0)=g(2)=5$

2.288. Για $x=0$ είναι: $f^2(1)\le f(1)\cdot f(0)$ (1) και για $x=-1$ είναι: $f^2(0)\le f(0)\cdot f(1)$ (2)

Με πρόσθεση κατά μέλη των (1), (2) προκύπτει:

$f^2(1)+f^2(0)\le 2f(0)\cdot f(1)\Leftrightarrow f^2(1)+f^2(0)-2f(0)\cdot f(1)\le 0\Leftrightarrow(f(1)-f(0))^2\le 0$.

Όμως $(f(1)-f(0))^2\ge 0$, οπότε $(f(1)-f(0))^2=0\Leftrightarrow f(1)-f(0)=0\Leftrightarrow f(1)=f(0)$.

Οπότε η f δεν είναι 1–1 και δεν αντιστρέφεται.

2.289. Για $x=0$ είναι: $f^2(2)\le f(2)\cdot f(0)$ (1) και για $x=2$ είναι: $f^2(0)\le f(0)\cdot f(2)$ (2)

Με πρόσθεση κατά μέλη των (1), (2) προκύπτει:

$f^2(2)+f^2(0)\le 2f(0)f(2)\Leftrightarrow f^2(2)+f^2(0)-2f(0)f(2)\le 0\Leftrightarrow(f(2)-f(0))^2\le 0$.

Όμως $(f(2)-f(0))^2\ge 0$, οπότε $(f(2)-f(0))^2-0\Leftrightarrow f(2)-f(0)=0\Leftrightarrow f(2)=f(0)$.

Οπότε η f δεν είναι 1–1 και δεν αντιστρέφεται.

2.290. Για $x=0$ είναι: $f(1)=f(2)$ και αν η f ήταν 1–1, τότε $1=2$ άτοπο.

2.291. **α)** Αντικαθιστώντας όπου x το $g^{-1}(x)$, προκύπτει:

$(f\circ g)(g^{-1}(x))=(g\circ f)(g^{-1}(x))\Leftrightarrow f(g(g^{-1}(x)))=g(f(g^{-1}(x)))$, όμως

$g(g^{-1}(x))=x$, άρα $f(x)=g(f(g^{-1}(x)))$.

Επειδή η g^{-1} είναι συνάρτηση, ισχύει:

$g^{-1}\left(f(x)\right)=g^{-1}\left(g\left(f\left(g^{-1}(x)\right)\right)\right)\Leftrightarrow\left(g^{-1}\circ f\right)(x)=\left(f\circ g^{-1}\right)(x)$.

β) Αντικαθιστώντας όπου x το $f^{-1}(x)$, προκύπτει:

$(f\circ g)\left(f^{-1}(x)\right)=(g\circ f)\left(f^{-1}(x)\right)\Leftrightarrow f\left(g\left(f^{-1}(x)\right)\right)=g\left(f\left(f^{-1}(x)\right)\right)$.

Επειδή $f\left(f^{-1}(x)\right)=x$, ισχύει: $f\left(g\left(f^{-1}(x)\right)\right)=g(x)$. Επειδή ορίζεται η f^{-1}, ισχύει:

$f^{-1}\left(f\left(g\left(f^{-1}(x)\right)\right)\right)=f^{-1}\left(g(x)\right)\Leftrightarrow g\left(f^{-1}(x)\right)=f^{-1}\left(g(x)\right)\Leftrightarrow\left(g\circ f^{-1}\right)(x)=\left(f^{-1}\circ g\right)(x)$.

γ) Από το προηγούμενο σκέλος, ισχύει: $g\left(f^{-1}(x)\right)=f^{-1}\left(g(x)\right)$

Αντικαθιστώντας όπου x το $g^{-1}(x)$, προκύπτει:

$g\left(f^{-1}\left(g^{-1}(x)\right)\right)=f^{-1}\left(g\left(g^{-1}(x)\right)\right)\Leftrightarrow g\left(f^{-1}\left(g^{-1}(x)\right)\right)=f^{-1}(x)$, άρα και

$g^{-1}\left(g\left(f^{-1}\left(g^{-1}(x)\right)\right)\right)=g^{-1}\left(f^{-1}(x)\right)\Leftrightarrow f^{-1}\left(g^{-1}(x)\right)=g^{-1}\left(f^{-1}(x)\right)\Leftrightarrow$

$\left(f^{-1}\circ g^{-1}\right)(x)=\left(g^{-1}\circ f^{-1}\right)(x)$.

2.292. **α)** Εστω $x_1,x_2\in\mathbb{R}$ με $g(x_1)=g(x_2)$ τότε $h\left(g(x_1)\right)=h\left(g(x_2)\right)\Leftrightarrow x_1=x_2$ άρα η g είναι 1–1 και αντιστρέφεται.

β) Είναι $(g\circ f)(x)=x\Leftrightarrow g\left(f(x)\right)=x\Leftrightarrow g^{-1}\left(g\left(f(x)\right)\right)=g^{-1}(x)\Leftrightarrow f(x)=g^{-1}(x)$.

Άρα $f=g^{-1}$.

Ακόμη είναι: $(h\circ g)(x)=x\Leftrightarrow h\left(g(x)\right)=x$ και θέτοντας όπου x το $f(x)$ προκύπτει: $h\left(g\left(f(x)\right)\right)=f(x)\Leftrightarrow h(x)=f(x)$, δηλαδή $h=f$.

2.293. Επειδή $f\left(g(x)\right)=x$ ισχύει για κάθε $x\in\mathbb{R}$, θέτουμε όπου x το $g^{-1}(x)$ και προκύπτει: $f\left(g\left(g^{-1}(x)\right)\right)=g^{-1}(x)\Leftrightarrow f(x)=g^{-1}(x)$. Όμοια στη σχέση $g\left(f(x)\right)=x$ θέτουμε όπου x το $f^{-1}(x)$ και προκύπτει: $g\left(f\left(f^{-1}(x)\right)\right)=f^{-1}(x)\Leftrightarrow g(x)=f^{-1}(x)$.

2.294. **α)** Για κάθε $x_1,x_2\in\mathbb{R}$ με $f(x_1)=f(x_2)$ είναι

$f\left(f(x_1)\right)=f\left(f(x_2)\right)\Leftrightarrow 3-2e^{x_1-1}=3-2e^{x_2-1}\Leftrightarrow x_1=x_2$

β) Για $x=1$ είναι $f\left(f(1)\right)=1$ και για $x=f(1)$ είναι

$f\left(f\left(f(1)\right)\right)=3-2e^{f(1)-1}\Leftrightarrow f(1)=3-2e^{f(1)-1}\Leftrightarrow 2e^{f(1)-1}+f(1)-3=0\quad(1)$

Εστω $g(x)=2e^{x-1}+x-3,\ x\in\mathbb{R}$ Εύκολα αποδεικνύεται ότι η g είναι γνησίως αύξουσα και επειδή $g(1)=0$ η $x=1$ είναι η μοναδική ρίζα της $g(x)=0$.

$(1)\Rightarrow g\left(f(1)\right)=0\Leftrightarrow g\left(f(1)\right)=g(1)\overset{1-1}{\Leftrightarrow}f(1)=1$

γ) Εστω ότι η f είναι γνησίως αύξουσα. Τότε για κάθε $x_1,x_2\in\mathbb{R}$ με $x_1<x_2$ είναι

$f(x_1)<f(x_2)\overset{f\uparrow}{\Leftrightarrow}f\left(f(x_1)\right)<f\left(f(x_2)\right)\Leftrightarrow 3-2e^{x_1-1}<3-2e^{x_1-1}\Leftrightarrow x_1>x_2$ άτοπο.

Όμοια αν η f είναι γνησίως φθίνουσα.

2.295. **α)** Για κάθε $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ με $f(x_1) = f(x_2)$ είναι

$$f(f(x_1)) = f(f(x_2)) \Leftrightarrow \alpha x_1 - \beta = \alpha x_2 - \beta \Leftrightarrow x_1 = x_2$$

β) Αρκεί για κάθε $y_0 \in \mathbb{R}$, να βρούμε x_0 τέτοιο, ώστε $f(x_0) = y_0$.

Εστω $y_0 = \alpha x_0 - \beta \Leftrightarrow x_0 = \dfrac{y_0 + \beta}{\alpha}$.

Οπότε για $x_0 = f\left(\dfrac{y_0+\beta}{\alpha}\right)$ έχουμε: $f(x_0) = f\left(f\left(\dfrac{y_0+\beta}{\alpha}\right)\right) = \cancel{\alpha}\dfrac{y_0+\beta}{\cancel{\alpha}} - \beta = y_0$

γ) Όπου x το $f(x)$: $f\left(\underbrace{f(f(x))}_{\alpha x - \beta}\right) = \alpha f(x) - \beta \Leftrightarrow f(\alpha x - \beta) = \alpha f(x) - \beta$

δ) Για $f(x) = y$ και $x = f^{-1}(y)$ έχουμε:

$$f(y) = \alpha f^{-1}(y) - \beta \Leftrightarrow \frac{f(y)+\beta}{\alpha} = f^{-1}(y) \Leftrightarrow f\left(\frac{f(y)+\beta}{\alpha}\right) = y,$$

άρα και $f\left(\dfrac{f(x)+\beta}{\alpha}\right) = x$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$

2.296. **α)** Εστω $f(x) = \ln x - 1 + x$, $x > 0$. Εύκολα αποδεικνύεται ότι $f \uparrow \mathbb{R} \Rightarrow f$ 1–1,

άρα $\ln x = 1 - x \Leftrightarrow \ln x - 1 + x = 0 \Leftrightarrow f(x) = f(1) \overset{1-1}{\Leftrightarrow} x = 1$.

β) Εστω $f(x) = e^{2x} + 2x - 2 + e^x$, $x \in \mathbb{R}$. Εύκολα αποδεικνύεται ότι $f \uparrow \mathbb{R} \Rightarrow f$ 1–1,

άρα $e^{2x} + 2x = 2 - e^x \Leftrightarrow e^{2x} + 2x - 2 + e^x = 0 \Leftrightarrow f(x) = f(0) \overset{1-1}{\Leftrightarrow} x = 0$.

γ) Εστω $f(x) = x^7 + 2x^9 - 3$, $x \in \mathbb{R}$. Εύκολα αποδεικνύεται ότι $f \uparrow \mathbb{R} \Rightarrow f$ 1–1,

άρα $x^7 + 2x^9 - 3 = 0 \Leftrightarrow f(x) = f(1) \overset{1-1}{\Leftrightarrow} x = 1$.

δ) Εστω $f(x) = 3^x + x^3 - 1$, $x \in \mathbb{R}$. Εύκολα αποδεικνύεται ότι $f \uparrow \mathbb{R} \Rightarrow f$ 1–1,

άρα $3^x + x^3 = 1 \Leftrightarrow 3^x + x^3 - 1 = 0 \Leftrightarrow f(x) = f(0) \overset{1-1}{\Leftrightarrow} x = 0$

ε) Εστω $f(x) = 4^x + x - 18$, $x \in \mathbb{R}$. Εύκολα αποδεικνύεται ότι $f \uparrow \mathbb{R} \Rightarrow f$ 1–1,

άρα $4^x + x = 18 \Leftrightarrow 4^x + x - 18 = 0 \Leftrightarrow f(x) = f(2) \overset{1-1}{\Leftrightarrow} x = 2$

στ) Εστω $f(x) = \ln x + 2 - \sqrt{5-x}$, $x \in (0,5]$. Εύκολα αποδεικνύεται ότι $f \uparrow \mathbb{R} \Rightarrow f$ 1–1,

άρα $\ln x + 2 = \sqrt{5-x} \Leftrightarrow \ln x + 2 - \sqrt{5-x} = 0 \Leftrightarrow f(x) = f(1) \overset{1-1}{\Leftrightarrow} x = 1$

2.297. **α)** Εστω $f(x) = x^{11} + 3x^5$, $x \in \mathbb{R}$. Εύκολα αποδεικνύεται ότι $f \uparrow \mathbb{R} \Rightarrow f$ 1-1, οπότε:

$$(x^3+x)^{11} - 3(x+1)^5 = (x+1)^{11} - 3(x^3+x)^5 \Leftrightarrow$$

$$(x^3+x)^{11} + 3(x^3+x)^5 = (x+1)^{11} + 3(x+1)^5 \Leftrightarrow$$

$$f(x^3+x) = f(x+1) \overset{1-1}{\Leftrightarrow} x^3 + \cancel{x} = \cancel{x} + 1 \Leftrightarrow x = 1$$

β) $\ln\frac{e^x+1}{e^{-x}+1}=7\left(e^{-x}+1\right)^3-7\left(e^x+1\right)^3\Leftrightarrow$

$\ln\left(e^x+1\right)+7\left(e^x+1\right)^3=\ln\left(e^{-x}+1\right)+7\left(e^{-x}+1\right)^3$ (1)

Εστω $f(x)=\ln x+7x^3$, $x>0$. Εύκολα αποδεικνύεται ότι $f\uparrow(0,+\infty)\Rightarrow f$ 1–1,

οπότε: $(1)\Rightarrow f\left(e^x+1\right)=f\left(e^{-x}+1\right)\overset{1-1}{\Leftrightarrow} e^x+\cancel{1}=e^{-x}+\cancel{1}\Leftrightarrow x=-x\Leftrightarrow x=0$.

γ) Εστω $f(x)=e^x+x$, $x\in\mathbb{R}$. Εύκολα αποδεικνύεται ότι $f\uparrow\mathbb{R}\Rightarrow f$ 1–1, οπότε:

$\sigma\upsilon\nu x-\eta\mu x=e^{\eta\mu x}-e^{\sigma\upsilon\nu x}\Leftrightarrow e^{\sigma\upsilon\nu x}+\sigma\upsilon\nu x=e^{\eta\mu x}+\eta\mu x\Leftrightarrow$

$f(\sigma\upsilon\nu x)=f(\eta\mu x)\overset{1-1}{\Leftrightarrow}\sigma\upsilon\nu x=\eta\mu x\Leftrightarrow \varepsilon\varphi x=1\Leftrightarrow x=k\pi+\frac{\pi}{4}$, $k\in\mathbb{Z}$

2.298. **α)** Εστω $x_1,x_2\in\mathbb{R}$ με $g(x_1)=g(x_2)$. Τότε: $g(g(x_1))=g(g(x_2))$ και

$g(x_1)+g(g(x_1))=g(x_2)+g(g(x_2))\Leftrightarrow f(x_1+2)=f(x_2+2)\overset{1-1}{\Leftrightarrow} x_1=x_2$, άρα g 1-1.

β) $g\left(e^x+2x\right)=g(x+1)\overset{1-1}{\Leftrightarrow} e^x+2x=x+1\Leftrightarrow e^x+x-1=0$

Εστω $h(x)=e^x+x-1$, $x\in\mathbb{R}$. Εύκολα αποδεικνύεται ότι $f\uparrow\mathbb{R}\Rightarrow f$ 1–1 οπότε:

$e^x+x-1=0\Leftrightarrow h(x)=h(0)\overset{1-1}{\Leftrightarrow} x=0$

2.299. **α)** Εστω $x_1,x_2\in\mathbb{R}$ με $f(x_1)=f(x_2)$, τότε

$f(f(x_1))=f(f(x_2))\Leftrightarrow 2x_1+1=2x_2+1\Leftrightarrow x_1=x_2\Rightarrow f$ 1–1

β) Για $x=-1$, είναι $f(f(-1))=-1$ και για $x=f(-1)$ είναι

$f(f(f(-1)))=2f(-1)+1\Leftrightarrow f(-1)=2f(-1)+1\Leftrightarrow f(-1)=-1$

γ) $f(x)=x\Leftrightarrow f(f(x))=f(x)\Leftrightarrow 2x+1=x\Leftrightarrow x=-1$

2.300. **α)** Εστω $x_1,x_2\in\mathbb{R}$ με $f(x_1)=f(x_2)$, τότε $f(f(x_1))=f(f(x_2))$ και $f^3(x_1)=f^3(x_2)$,

άρα $f(f(x_1))+f^3(x_1)=f(f(x_2))+f^3(x_2)\Leftrightarrow 2x_1+3=2x_2+3\Leftrightarrow x_1=x_2\Rightarrow f$ 1–1

β) $f\left(2x^3+x\right)=f(4-x)\overset{1-1}{\Leftrightarrow} 2x^3+x=4-x\Leftrightarrow x^3+x-2=0\Leftrightarrow$

$(x-1)\left(x^2+x+1\right)=0\Leftrightarrow x=1$

2.301. **α)** Για $x=y=0$ η σχέση $f(x-y)=f(x)-f(y)$ (1), γίνεται: $f(0)=0$.

Επειδή η εξίσωση $f(x)=0$ έχει μοναδική ρίζα και $f(0)=0$, η $x=0$ είναι η μοναδική ρίζα της f. Εστω $x_1,x_2\in\mathbb{R}$ με $f(x_1)=f(x_2)$. Τότε: $f(x_1)-f(x_2)=0$ και λόγω της (1), είναι: $f(x_1-x_2)=0$ άρα $x_1-x_2=0\Leftrightarrow x_1=x_2$. Οπότε η f είναι 1-1.

β) Εστω $x_1,x_2\in\mathbb{R}$ με $g(x_1)=g(x_2)$. Τότε:

$f(x_1)-x_1=f(x_2)-x_2\Leftrightarrow f(x_1)-f(x_2)=x_1-x_2$ και λόγω της (1),

είναι: $f(x_1-x_2)=x_1-x_2$ (2)

Επειδή η C_f τέμνει την $y=x$ το πολύ σε ένα σημείο και $f(0)=0$, η εξίσωση $f(x)=x$ έχει μοναδική ρίζα την $x=0$. Οπότε η (2) γίνεται: $x_1-x_2=0 \Leftrightarrow x_1=x_2$, άρα η g είναι 1–1 και αντιστρέφεται.

2.302. α) Εστω $x_1,x_2 \in \mathbb{R}$ με $x_1 \neq x_2$. Τότε: $x_1^3 \neq x_2^3 \Leftrightarrow x_1^3+2 \neq x_2^3+2 \Leftrightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$.
Άρα η f είναι 1–1. $f(x)=y \Leftrightarrow x^3+2=y \Leftrightarrow x^3=y-2$.

- Αν $y-2 \geq 0 \Leftrightarrow y \geq 2$ τότε: $x=\sqrt[3]{y-2} \Leftrightarrow f^{-1}(y)=\sqrt[3]{y-2},\ y \geq 2$, άρα: $f^{-1}(x)=\sqrt[3]{x-2},\ x \geq 2$.
- Αν $y-2<0 \Leftrightarrow y<2$, τότε $-y+2>0$ και $x=-\sqrt[3]{-y+2} \Leftrightarrow f^{-1}(y)=-\sqrt[3]{-y+2}$, $y<-2$ και $f^{-1}(x)=-\sqrt[3]{-x+2}$, $x<2$. Άρα $f^{-1}(x)=\begin{cases} \sqrt[3]{x-2}, & x \geq 2 \\ -\sqrt[3]{-x+2}, & x<2 \end{cases}$.

β) Εύκολα αποδεικνύεται ότι η f είναι 1–1.
$f(x)=y \Leftrightarrow e^{-x}=y+1$. Πρέπει $y+1>0 \Leftrightarrow y>-1$, τότε
$-x=\ln(y+1) \Leftrightarrow f^{-1}(y)=-\ln(y+1),\ y>-1$

γ) Αρχικά εξετάζουμε αν η f είναι 1–1. $D_f=\mathbb{R}$. Εστω $x_1,x_2 \in \mathbb{R}$ με $f(x_1)=f(x_2)$ τότε $e^{x_1-3}+2=e^{x_2-3}+2 \Leftrightarrow e^{x_1-3}=e^{x_2-3} \Leftrightarrow x_1-3=x_2-3 \Leftrightarrow x_1=x_2$ άρα f 1–1.
$f(x)=y \Leftrightarrow e^{x-3}+2=y \Leftrightarrow e^{x-3}=y-2$ (1) πρέπει $y-2>0 \Leftrightarrow y>2$ (2).
Η (1) γίνεται: $x-3=\ln(y-2) \Leftrightarrow x=\ln(y-2)+3 \Leftrightarrow f^{-1}(y)=\ln(y-2)+3,\ y>2$, (λόγω της (2)). Άρα $f^{-1}(x)=\ln(x-2)+3,\ x>2$.

δ) Εύκολα αποδεικνύεται ότι η f είναι 1–1.
$$f(x)=y \Leftrightarrow \frac{x}{x+3}=y \Leftrightarrow x=xy+3y \Leftrightarrow x(1-y)=3y \quad (1)$$
Αν $y=1$, η (1) είναι αδύνατη. Για $y \neq 1$ είναι $x=\dfrac{3y}{1-y}$, άρα $f^{-1}(x)=\dfrac{3x}{1-x},\ x \neq 1$

2.303. α) Είναι $f(x)=x^2-6x+10=x^2-6x+9+1=(x-3)^2+1$.
Για κάθε $x_1,x_2 \in [3,+\infty)$ με $x_1<x_2$, είναι: $x_1-3<x_2-3 \Leftrightarrow$
$(x_1-3)^2<(x_2-3)^2 \Leftrightarrow (x_1-3)^2+1<(x_2-3)^2+1 \Leftrightarrow f(x_1)<f(x_2)$.
Άρα η f είναι $\uparrow [3,+\infty)$, οπότε είναι και 1–1.
$f(x)=y \Leftrightarrow (x-3)^2+1=y \Leftrightarrow (x-3)^2=y-1,\ y-1 \geq 0 \Leftrightarrow y \geq 1$, τότε
$x-3=\sqrt{y-1} \Leftrightarrow x=\sqrt{y-1}+3$, άρα $f^{-1}(y)=\sqrt{y-1}+3,\ y \geq 1$

β) $\dfrac{2x-2}{x+1}>0 \Leftrightarrow A_f=(-\infty,-1)\cup(1,+\infty)$. Εύκολα αποδεικνύεται ότι η f είναι 1–1.
$$f(x)=y \Leftrightarrow \ln\frac{2x-2}{x+1}=y \Leftrightarrow \frac{2x-2}{x+1}=e^y \Leftrightarrow (2-e^y)x=2+e^y \quad (1)$$
Αν $y=\ln 2$, η (1) είναι αδύνατη, οπότε για $y \neq \ln 2$ είναι $x=\dfrac{2+e^y}{2-e^y}$,

άρα $f^{-1}(x)=\dfrac{e^x+2}{2-e^x}$, $x\neq\ln 2$

2.304. $A_f=\mathbb{R}-\{1\}$. Για κάθε $x_1,x_2\in\mathbb{R}-\{1\}$ με $f(x_1)=f(x_2)$

ισχύει: $\dfrac{2x_1+3}{x_1-1}=\dfrac{2x_2+3}{x_2-1}\Leftrightarrow(2x_1+3)(x_2-1)=(2x_2+3)(x_1-1)\Leftrightarrow$

$2x_1x_2-2x_1+3x_2-3=2x_1x_2-2x_2+3x_1-3\Leftrightarrow -5x_1=-5x_2\Leftrightarrow x_1=x_2$,

άρα f 1–1, οπότε αντιστρέφεται.

Για κάθε $x\neq 1$, $y=f(x)\Leftrightarrow y=\dfrac{2x+3}{x-1}\Leftrightarrow y(x-1)=2x+3\Leftrightarrow yx-y=2x+3\Leftrightarrow$

$yx-2x=y+3\Leftrightarrow(y-2)x=y+3$ (1).

- Αν $y=2$, $(1)\Leftrightarrow 0x=5$ αδύνατη.
- Αν $y\neq 2$, $(1)\Leftrightarrow x=\dfrac{y+3}{y-2}$ πρέπει: $x\neq 1\Leftrightarrow\dfrac{y+3}{y-2}\neq 1\Leftrightarrow y+3\neq y-2\Leftrightarrow 3\neq -2$,

ισχύει δηλαδή: $f(A)=\mathbb{R}-\{2\}$, όποτε $A_{f^{-1}}=\mathbb{R}-\{2\}$ και $f^{-1}(y)=\dfrac{y+3}{y-2}$ ή

$f^{-1}(x)=\dfrac{x+3}{x-2}$, $x\neq 2$.

2.305. α) Εστω $f(x_1)=f(x_2)$ με $x_1,x_2\in\mathbb{R}$,τότε $5f(x_1)=5f(x_2)$ και $2f^3(x_1)=2f^3(x_2)$,

άρα $2f^3(x_1)-5f(x_1)=2f^3(x_2)-5f(x_2)$ (1), όμως

$2f^3(x)-5f(x)+x=0\Leftrightarrow 2f^3(x)-5f(x)=-x$ άρα η (1) γίνεται:

$-x_1=-x_2\Leftrightarrow x_1=x_2$ και η f είναι 1–1, οπότε και αντιστρέφεται.

β) $2f^3(x)-5f(x)+x=0\Leftrightarrow x=-2f^3(x)+5f(x)$ (2). Αν $f(x)=y$ τότε και $x=f^{-1}(y)$

και η (2) γίνεται: $f^{-1}(y)=-2y^3+5y$ όποτε $f^{-1}(x)=-2x^3+5x$, $x\in\mathbb{R}$.

2.306. α) Εστω $x_1,x_2\in\mathbb{R}$ με $f(x_1)=f(x_2)$,τότε $f(f(x_1))=f(f(x_2))$ και

$f(f(x_1))-f(x_1)=f(f(x_2))-f(x_2)\Leftrightarrow x_1+2=x_2+2\Leftrightarrow x_1=x_2\Rightarrow$ f 1–1

β) $f(x)=y\Rightarrow f(y)-y=f^{-1}(y)+2$, άρα $f^{-1}(x)=f(x)-x-2$, $x\in\mathbb{R}$

2.307. α) Όταν $x\in A_1=(-\infty,3]$ είναι $f(x)=-x^2+6x-5=-(x-3)^2+4$

Για $x_1,x_2\in A_1$ με $x_1\neq x_2$ είναι $x_1-3\neq x_2-3\Leftrightarrow(x_1-3)^2\neq(x_2-3)^2\Leftrightarrow$

$-(x_1-3)^2+4\neq-(x_2-3)^2+4\Leftrightarrow f(x_1)\neq f(x_2)$. Άρα f 1–1 στο A_1.

$f(x)=y\Leftrightarrow-(x-3)^2+4=y\Leftrightarrow(x-3)^2=4-y$. Πρέπει $4-y\geq 0\Leftrightarrow y\leq 4$.

Τότε: $x-3=-\sqrt{4-y}\Leftrightarrow x=3-\sqrt{4-y}$ ή $f^{-1}(y)=3-\sqrt{4-y}$, $y\leq 4$ ή

$f^{-1}(x)=3-\sqrt{4-x}$, $x\leq 4$.

Όταν $x\in A_2=(3,+\infty)$ είναι $f(x)=x+1$

Για $x_1,x_2\in A_2$ με $x_1\neq x_2$ είναι $x_1+1\neq x_2+1\Leftrightarrow f(x_1)\neq f(x_2)$ άρα η f είναι 1–1

στο $f(x)=y\Leftrightarrow x+1=y\Leftrightarrow x=y-1$. Πρέπει $y-1>3\Leftrightarrow y>4$.

Τότε: $f^{-1}(y)=y-1,\ y>4$ ή $f^{-1}(x)=x-1,\ x>4$

Επειδή $f(A_1)=(-\infty,4]$, $f(A_2)=(4,+\infty)$ και $f(A_1)\cap f(A_2)=\varnothing$

η f αντιστρέφεται με $f^{-1}(x)=\begin{cases}3-\sqrt{4-x} & ,\ x\le 4\\ x-1 & ,\ x>4\end{cases}$

β) Όταν $x\in A_1=(-\infty,0]$ είναι $f(x)=x^3-1$.

Για $x_1,x_2\in A_1$ με $x_1\ne x_2$ είναι $x_1^3\ne x_2^3 \Leftrightarrow x_1^3-1\ne x_2^3-1 \Leftrightarrow f(x_1)\ne f(x_2)$.

Άρα η f είναι 1–1.

$f(x)=y\Leftrightarrow x^3-1=y\Leftrightarrow x^3=y+1$. Πρέπει $y+1\le 0\Leftrightarrow y\le -1$.

Τότε: $x=-\sqrt[3]{-y-1}$ ή $f^{-1}(y)=-\sqrt[3]{-y-1},\ y\le -1$ ή $f^{-1}(x)=-\sqrt[3]{-x-1},\ x\le -1$

Όταν $x\in A_2=(0,+\infty)$ είναι $f(x)=-x+2$.

Για $x_1,x_2\in A_2$ με $x_1\ne x_2$ είναι: $-x_1+2\ne -x_2+2\Leftrightarrow f(x_1)\ne f(x_2)$.

Άρα η f είναι 1–1.

$f(x)=y\Leftrightarrow -x+2=y\Leftrightarrow x=2-y$. Πρέπει $2-y>0\Leftrightarrow y<2$.

Τότε $f^{-1}(y)=2-y,\ y<2$ ή $f^{-1}(x)=2-x,\ x<2$. Επειδή $f(A_1)=(-\infty,-1]$,

$f(A_2)=(-\infty,2)$ και $f(A_1)\cap f(A_2)\ne\varnothing$ η f δεν αντιστρέφεται.

2.308. **β)** $f^{-1}(4)=2,\ f^{-1}(1)=1,\ f^{-1}(6)=3$

2.309. **α)** Εστω $x_1,x_2\in\mathbb{R}$ με $f(x_1)=f(x_2)$, τότε $f(f(x_1))=f(f(x_2))\Leftrightarrow$

$4x_1-15=4x_2-15\Leftrightarrow x_1=x_2\Rightarrow f$ 1–1.

β) $f(f(x))=u\Leftrightarrow 4x-15=u\Leftrightarrow x=\dfrac{u+15}{4}$.

Αντικαθιστώντας στη σχέση $f(f(f(x)))=8x-35$, έχουμε:

$f(u)=8\dfrac{u+15}{4}-35=2u-5$, άρα $f(x)=2x-5,\ x\in\mathbb{R}$.

2.310. **α)** Εστω $x_1,x_2\in\mathbb{R}$ με $f(x_1)=f(x_2)$, τότε $f(f(x_1))=f(f(x_2))\Leftrightarrow$

$3+4x_1=3+4x_2\Leftrightarrow x_1=x_2\Rightarrow f$ 1–1

β) Αντικαθιστώντας στην $f(f(x))=3+4x$ όπου x το $f(x)$, έχουμε:

$f(f(f(x)))=3+4f(x)\Leftrightarrow 64x+63=3+4f(x)\Leftrightarrow f(x)=16x+15,\ x\in\mathbb{R}$

2.311. **α)** Εστω $x_1,x_2\in\mathbb{R}$ με $g(x_1)=g(x_2)$. Επειδή η f είναι συνάρτηση, ισχύει:

$f(g(x_1))=f(g(x_2))\Leftrightarrow -2x_1+5=-2x_2+5\Leftrightarrow x_1=x_2$, άρα g 1–1.

β) Αρκεί να δείξουμε ότι για κάθε $x_1,x_2\in\mathbb{R}$ με $x_1<x_2$ είναι $g(x_1)>g(x_2)$.

Εστω ότι $g(x_1)\le g(x_2)$, τότε επειδή η f είναι γνησίως αύξουσα ισχύει:

$f(g(x_1))\le f(g(x_2))\Leftrightarrow -2x_1+5\le -2x_2+5\Leftrightarrow x_1\ge x_2$ που είναι άτοπο.

Άρα $g(x_1)>g(x_2)$ και η g είναι γνησίως φθίνουσα στο $\mathbb{R}$.

γ) Αν $f=g$ τότε $f\left(f(x)\right)=-2x+5$ και για $f(x)=y$ είναι

$$f(y)=-2x+5 \Leftrightarrow x=\frac{5-f(y)}{2} \Leftrightarrow f^{-1}(y)=\frac{5-f(y)}{2} \text{ άρα } f^{-1}(x)=\frac{5-f(x)}{2},\ x\in\mathbb{R}.$$

2.312. α) Εστω $x_1,x_2\in\mathbb{R}$ με $f(x_1)=f(x_2)$, τότε $e^{f(x_1)}=e^{f(x_2)}$ και

$e^{f(x_1)}+f(x_1)=e^{f(x_2)}+f(x_2)\Leftrightarrow x_1+2=x_2+2\Leftrightarrow x_1=x_2$ άρα η f είναι 1–1 και αντιστρέφεται.

β) Επειδή η f είναι 1–1 έχουμε: $f(\ln x)=f\left(\frac{e}{x}\right)\Leftrightarrow \ln x=\frac{e}{x}\Leftrightarrow \ln x-\frac{e}{x}=0$.

Θεωρούμε τη συνάρτηση $g(x)=\ln x-\frac{e}{x}$, $x\in(0,+\infty)$.

Για κάθε $x_1,x_2\in(0,+\infty)$ με $x_1<x_2$ είναι: $\frac{e}{x_1}>\frac{e}{x_2}\Leftrightarrow -\frac{e}{x_1}<-\frac{e}{x_2}$ και $\ln x_1<\ln x_2$

άρα $\ln x_1-\frac{e}{x_1}<\ln x_2-\frac{e}{x_2}\Leftrightarrow g(x_1)<g(x_2)$, άρα η g είναι γνησίως αύξουσα στο $(0,+\infty)$, οπότε και 1–1.

Επειδή $g(e)=0$, έχουμε: $\ln x-\frac{e}{x}=0\Leftrightarrow g(x)=g(e)\Leftrightarrow x=e$.

γ) Είναι $f(x)=y\Leftrightarrow x=f^{-1}(y)$, οπότε η σχέση $e^{f(x)}+f(x)=x+2$ γίνεται:

$e^{y}+y=f^{-1}(y)+2\Leftrightarrow f^{-1}(y)=e^{y}+y-2$, $y\in\mathbb{R}$ άρα $f^{-1}(x)=e^{x}+x-2$, $x\in\mathbb{R}$.

δ) Παρατηρούμε ότι $f^{-1}(0)=e^{0}-2=-1$ άρα $f(-1)=0$.

Εχουμε: $(x^3-8)(e^x-3)<f(-1)\Leftrightarrow (x^3-8)(e^x-3)<0\Leftrightarrow$

$(x-2)(x^2+2x+4)(e^x-3)<0\Leftrightarrow$

x	$-\infty$	$\ln 3$	2	$+\infty$
$x-2$	$-$		$-$ 0	$+$
x^2+2x+4	$+$		$+$	$+$
e^x-3	$-$	0	$+$	$+$
Γινόμενο	$+$	0	$-$ 0	$+$

Άρα $x\in(\ln 3,2)$

2.313. α) Εστω $x_1,x_2\in\mathbb{R}$ με $f(x_1)=f(x_2)$. Τότε $\frac{e^{x_1}}{e^{x_1}+1}=\frac{e^{x_2}}{e^{x_2}+1}\Leftrightarrow$

$e^{x_1}(e^{x_2}+1)=e^{x_2}(e^{x_1}+1)\Leftrightarrow e^{x_1+x_2}+e^{x_1}=e^{x_1+x_2}+e^{x_2}\Leftrightarrow e^{x_1}=e^{x_2}\Leftrightarrow x_1=x_2$.

Άρα η f είναι 1–1 και υπάρχει η αντίστροφή της.

$f(x)=y\Leftrightarrow \frac{e^x}{e^x+1}=y\Leftrightarrow e^x=e^xy+y\Leftrightarrow e^x-e^xy=y\Leftrightarrow e^x(1-y)=y\ \ (1)$.

Αν $1-y=0\Leftrightarrow y=1$, η σχέση (1) γίνεται: $0=1$ και είναι αδύνατη.

Άρα για $y\neq 1$ η (1) γίνεται: $e^x=\frac{y}{1-y}$.

Επειδή $e^x > 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$, πρέπει: $\frac{y}{1-y} > 0 \Leftrightarrow y(1-y) > 0 \Leftrightarrow 0 < y < 1$.

Τότε: $e^x = \frac{y}{1-y} \Leftrightarrow x = \ln\frac{y}{1-y}$ ή $f^{-1}(y) = \ln\frac{y}{1-y}$, $y \in (0,1)$, οπότε και

$f^{-1}(x) = \ln\frac{x}{1-x}$, $x \in (0,1)$.

β) Για να ορίζεται η $f^{-1} \circ g$, πρέπει:

$$\begin{cases} x \in A_g \\ g(x) \in A_{f^{-1}} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 0 \\ (1-\ln x) \in (0,1) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 0 \\ 0 < 1-\ln x < 1 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} x > 0 \\ -1 < -\ln x < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 0 \\ 0 < \ln x < 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 0 \\ e^0 < x < e^1 \end{cases}, \text{ άρα } 1 < x < e \text{ και } A_{f^{-1}\circ g} = (1,e).$$

Είναι $\left(f^{-1} \circ g\right)(x) = f^{-1}\left(g(x)\right) = \ln\frac{g(x)}{1-g(x)} = \ln\frac{1-\ln x}{\ln x}$.

Εστω $x_1, x_2 \in (1,e)$ με $x_1 < x_2$,

τότε: $\ln x_1 < \ln x_2$ και $\begin{cases} -\ln x_1 > -\ln x_2 \\ \frac{1}{\ln x_1} > \frac{1}{\ln x_2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1-\ln x_1 > 1-\ln x_2 > 0 \\ \frac{1}{\ln x_1} > \frac{1}{\ln x_2} > 0 \end{cases}$.

Άρα και $\frac{1-\ln x_1}{\ln x_1} > \frac{1-\ln x_2}{\ln x_2} \Leftrightarrow \ln\frac{1-\ln x_1}{\ln x_1} > \ln\frac{1-\ln x_2}{\ln x_2} \Leftrightarrow \left(f^{-1}\circ g\right)(x_1) > \left(f^{-1}\circ g\right)(x_2)$,

άρα η $f^{-1} \circ g$ είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $(1,e)$.

γ) Επειδή $1 < \alpha < \beta < e$ και η $f^{-1} \circ g$ είναι γνησίως φθίνουσα,

ισχύει: $\left(f^{-1}\circ g\right)(\alpha) > \left(f^{-1}\circ g\right)(\beta) \Leftrightarrow \ln\frac{1-\ln\alpha}{\ln\alpha} > \ln\frac{1-\ln\beta}{\ln\beta} \Leftrightarrow$

$\frac{1-\ln\alpha}{\ln\alpha} > \frac{1-\ln\beta}{\ln\beta} \Leftrightarrow \frac{1-\ln\alpha}{1-\ln\beta} > \frac{\ln\alpha}{\ln\beta}$.

2.314. α) $D_f = \mathbb{R}$. Για κάθε $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ με $x_1 < x_2$ είναι: $\begin{cases} x_1^{31} < x_2^{31} \\ 4x_1 < 4x_2 \end{cases}$

οπότε $x_1^{31} + 4x_1 < x_2^{31} + 4x_2 \Leftrightarrow x_1^{31} + 4x_1 + 4 < x_2^{31} + 4x_2 + 4 \Leftrightarrow f(x_1) < f(x_2)$,

δηλαδή η f είναι γνησίως αύξουσα, άρα και 1–1 στο $\mathbb{R}$, οπότε είναι αντιστρέψιμη.

$y = f(x) \Leftrightarrow y = x^{31} + 4x + 4 \Leftrightarrow x^{31} + 4x + 4 - y = 0 \quad (1)$

Η (1) έχει ως προς $x \in \mathbb{R}$ λύση για κάθε y, γιατί είναι πολυωνυμική περιττού βαθμού. Άρα $f(A) = \mathbb{R}$.

$f^{-1}(9) = x \Leftrightarrow f(x) = 9 \Leftrightarrow f(x) = f(1) \overset{f\ 1-1}{\Leftrightarrow} x = 1$.

β) Επειδή η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων f και f^{-1} θα τέμνονται επί της ευθείας $y = x$,οπότε αντί να λύσουμε την εξίσωση $f(x) = f^{-1}(x)$ μπορούμε να λύσουμε την εξίσωση $f(x) = x$, $x \in \mathbb{R}$ ή

$x^{31} + 4x + 4 = x \Leftrightarrow x^{31} + 3x + 4 = 0$.

Εστω $g(x)=x^{31}+3x+4$, $x\in\mathbb{R}$. Είναι $g(-1)=0$ και για κάθε $x_1,x_2\in\mathbb{R}$ με

$x_1<x_2$ είναι: $\begin{cases} x_1^{31}<x_2^{31} \\ 3x_1<3x_2 \end{cases}$, οπότε $x_1^{31}+3x_1<x_2^{31}+3x_2 \Leftrightarrow$

$x_1^{31}+3x_1+4<x_2^{31}+3x_2+4 \Leftrightarrow g(x_1)<g(x_2)$, άρα g γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$ και η $x=-1$είναι μοναδική ρίζα της $g(x)=0$.

2.315. **α)** Για κάθε $x_1,x_2\in\mathbb{R}$ με $x_1<x_2$ είναι: $\begin{cases} 2e^{x_1-1}<2e^{x_2-1} \\ x_1-2<x_2-2 \end{cases} \overset{(+)}{\Rightarrow}$

$2e^{x_1-1}+x_1-2<2e^{x_2-1}+x_2-2 \Leftrightarrow f(x_1)<f(x_2) \Rightarrow f\uparrow\mathbb{R}$, άρα και 1–1.

$$f(x)=f^{-1}(x) \overset{f\uparrow}{\Leftrightarrow} f(x)=x \Leftrightarrow 2e^{x-1}+x-2=x \Leftrightarrow x=1$$

β) $f^{-1}(x^2-3x+3)<1 \overset{f\uparrow}{\Leftrightarrow} f\left(f^{-1}(x^2-3x+3)\right)<f(1) \Leftrightarrow x^2-3x+3<1 \Leftrightarrow$

$x^2-3x+2<0 \Leftrightarrow 1<x<2$

2.316. **α)** Για κάθε $x_1,x_2\in\mathbb{R}$ με $x_1<x_2$ είναι: $\begin{cases} 2^{x_1}<2^{x_2} \\ x_1-4<x_2-4 \end{cases} \overset{(+)}{\Rightarrow}$

$2^{x_1}+x_1-4<2^{x_2}+x_2-4 \Leftrightarrow f(x_1)<f(x_2) \Rightarrow f\uparrow\mathbb{R}$, άρα και 1–1.

$$f(x)=f^{-1}(x) \overset{f\uparrow}{\Leftrightarrow} f(x)=x \Leftrightarrow 2^x+x-4=x \Leftrightarrow 2^x=4 \Leftrightarrow x=2$$

β) $f(f(x))=f(2^x) \overset{1-1}{\Leftrightarrow} f(x)=2^x \Leftrightarrow 2^x+x-4=2^x \Leftrightarrow x=4$

γ) $f^{-1}(x-2)<3 \overset{f\uparrow}{\Leftrightarrow} f\left(f^{-1}(x-2)\right)<f(3) \Leftrightarrow x-2<7 \Leftrightarrow x<9$

2.317. **α)** Επειδή η f είναι γνησίως μονότονη θα είναι 1–1 και θα αντιστρέφεται.

$f\left(-3+f^{-1}(x^2-3x)\right)=4 \Leftrightarrow f\left(-3+f^{-1}(x^2-3x)\right)=f(3) \overset{f\ 1-1}{\Leftrightarrow}$

$-3+f^{-1}(x^2-3x)=3 \Leftrightarrow f^{-1}(x^2-3x)=6 \Leftrightarrow f^{-1}(x^2-3x)=f^{-1}(-2) \overset{f^{-1}\ 1-1}{\Leftrightarrow}$

$x^2-3x=-2 \Leftrightarrow x^2-3x+2=0 \Leftrightarrow x=1$ ή $x=2$

β) Επειδή η C_f διέρχεται από τα σημεία Α και Β ισχύει: $f(3)=4$ και $f(6)=-2$

δηλαδή $f(3)>f(6)$ άρα η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $\mathbb{R}$.

$$f^{-1}(x-5)<3 \overset{f\downarrow}{\Leftrightarrow} f\left(f^{-1}(x-5)\right)<f(3) \Leftrightarrow x-5>4 \Leftrightarrow x>9.$$

2.318. **α)** Εστω $x_1,x_2\in\mathbb{R}$ με $x_1<x_2$. Τότε $\begin{cases} -3x_1>-3x_2 \\ -2x_1>-2x_2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -3x_1>-3x_2 \\ 2e^{-2x_1}>2e^{-2x_2} \end{cases}$.

Με πρόσθεση κατά μέλη προκύπτει: $2e^{-2x_1}-3x_1>2e^{-2x_2}-3x_2 \Leftrightarrow$

$2e^{-2x_1}-3x_1-2e^2>2e^{-2x_2}-3x_2-2e^2 \Leftrightarrow f(x_1)>f(x_2)$,

οπότε η f είναι $\downarrow$ στο $\mathbb{R}$ και επομένως είναι 1–1 και αντιστρέφεται.

β) Παρατηρούμε ότι $f(-1)=2e^2-3\cdot(-1)-2e^2=3$, οπότε η εξίσωση γίνεται:

$f\left(f^{-1}\left(x-2e^2\right)-1\right)=f(-1)\overset{f\ 1-1}{\Leftrightarrow} f^{-1}\left(x-2e^2\right)-1=-1\Leftrightarrow$

$f^{-1}\left(x-2e^2\right)=0\Leftrightarrow x-2e^2=f(0)\Leftrightarrow x-2e^2=2-2e^2\Leftrightarrow x=2$.

γ) Επειδή η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $\mathbb{R}$, ισχύει:

$f^{-1}\left(f(x)-1-2e^2\right)<0\Leftrightarrow f\left(f^{-1}\left(f(x)-1-2e^2\right)\right)>f(0)\Leftrightarrow$

$f(x)-1-2e^2>2-2e^2\Leftrightarrow f(x)>3\Leftrightarrow f(x)>f(-1)$ άρα $x<-1$.

2.319. **α)** Εστω $x_1,x_2\in\mathbb{R}$ με $x_1<x_2$. Τότε $\begin{cases}3x_1^5<3x_2^3\\ 2x_1^3<2x_2^3\end{cases}\overset{+}{\Rightarrow} 3x_1^5+2x_1^3<3x_2^3+2x_2^3\Leftrightarrow$

$3x_1^5+2x_1^3-1<3x_2^3+2x_2^3-1\Leftrightarrow f(x_1)<f(x_2)\Rightarrow f\uparrow\mathbb{R}$, άρα και 1–1.

β) $f\left(f^{-1}(4\sigma\upsilon\nu x+2)\right)=4\Leftrightarrow f\left(f^{-1}(4\sigma\upsilon\nu x+2)\right)=f(1)\overset{1-1}{\Leftrightarrow} f^{-1}(4\sigma\upsilon\nu x+2)=1\Leftrightarrow$

$f\left(f^{-1}(4\sigma\upsilon\nu x+2)\right)=f(1)\Leftrightarrow 4\sigma\upsilon\nu x+2=4\Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu x=\dfrac{1}{2}\Leftrightarrow x=2k\pi\pm\dfrac{\pi}{3}$, $k\in\mathbb{Z}$

γ) $f^{-1}\left(f\left(x^2+2x+2\right)-5\right)>0\overset{f\uparrow}{\Leftrightarrow} f\left(x^2+2x+2\right)-5>f(0)\Leftrightarrow$

$f\left(x^2+2x+2\right)>4=f(1)\overset{f\uparrow}{\Leftrightarrow} x^2+2x+2>1\Leftrightarrow (x+1)^2>0\Leftrightarrow x\neq 1$

2.320. **α)** Είναι $A_f=[0,+\infty)$. Έστω $x_1,x_2\in[0,+\infty)$ με $x_1<x_2$, τότε: $\sqrt{x_1}<\sqrt{x_2}$ και

$\sqrt[3]{x_1}<\sqrt[3]{x_2}$ και με πρόσθεση κατά μέλη έχουμε: $\sqrt{x_1}+\sqrt[3]{x_1}<\sqrt{x_2}+\sqrt[3]{x_2}\Leftrightarrow$

$f(x_1)<f(x_2)$. Οπότε η f είναι γνησίως αύξουσα στο $[0,+\infty)$.

β) Είναι $f^{-1}(x)=64\Leftrightarrow x=f(64)=\sqrt{64}+\sqrt[3]{64}=8+4=12$.

γ) Επειδή $f(64)=12$ είναι $f^{-1}(12)=64$,

οπότε: $f(x)\cdot f^{-1}(x)=12f^{-1}\left(f^{-1}(12)\right)\Leftrightarrow f(x)\cdot f^{-1}(x)=f(64)f^{-1}(64)$ (1)

Θεωρούμε τη συνάρτηση $h(x)=f(x)\cdot f^{-1}(x), x\geq 0$.

Επειδή οι f και f^{-1} είναι γνησίως αύξουσες και έχουν σύνολο τιμών το $[0,+\infty)$,

για $x_1,x_2\in[0,+\infty)$ με $x_1<x_2$ έχουμε: $f(x_1)<f(x_2)$ και $f^{-1}(x_1)<f^{-1}(x_2)$

άρα και $f(x_1)f^{-1}(x_1)<f(x_2)f^{-1}(x_2)\Leftrightarrow h(x_1)<h(x_2)$, άρα η h είναι γνησίως αύξουσα οπότε και 1–1. Η (1) γίνεται: $h(x)=h(64)\Leftrightarrow x=64$.

2.321. **α)** Εστω $x_1,x_2\in\mathbb{R}$ με $f(x_1)=f(x_2)$, τότε $f(f(x_1))=f(f(x_2))$ και

$f(f(x_1))-f(x_1)=f(f(x_2))-f(x_2)\Leftrightarrow\lambda x_1=\lambda x_2\Leftrightarrow x_1=x_2\Rightarrow f$ 1–1

β) $f(f(x))-f(x)=\lambda x \quad (1)$

όπου x το $f^{-1}(x): f(f(f^{-1}(x)))-f(f^{-1}(x))=\lambda f^{-1}(x) \Leftrightarrow f(x)-x=\lambda f^{-1}(x) \Leftrightarrow$

$$\frac{f(x)-x}{\lambda}=f^{-1}(x) \Leftrightarrow f\left(\frac{f(x)-x}{\lambda}\right)=f(f^{-1}(x)) \Leftrightarrow f\left(\frac{f(x)-x}{\lambda}\right)=x$$

$$f(x)=x \Leftrightarrow f(x)-x=0 \Leftrightarrow \frac{f(x)-x}{\lambda}=0 \Leftrightarrow f\left(\frac{f(x)-x}{\lambda}\right)=f(0) \Leftrightarrow x=f(0)$$

γ) Η (1) για $x=0$ γίνεται: $f(f(0))-f(0)=0 \Leftrightarrow f(f(0))=f(0) \overset{f\ 1-1}{\Leftrightarrow} f(0)=0$

άρα $x=0$ και κοινό σημείο των C_f, $y=x$ είναι το $O(0,0)$.

2.322. α) Εστω $x_1,x_2 \in \mathbb{R}$ με $f(x_1)=f(x_2)$,

τότε $f(f(x_1))=f(f(x_2)) \Leftrightarrow 2x_1-1=2x_2-1 \Leftrightarrow x_1=x_2 \Rightarrow f$ 1–1.

β) Αρκεί για κάθε $y_0 \in \mathbb{R}$, να βρούμε x_0 τέτοιο, ώστε $f(x_0)=y_0$.

Εστω $y_0=2x_0-1 \Leftrightarrow x_0=\frac{y_0+1}{2}$. Οπότε για $x_0=f\left(\frac{y_0+1}{2}\right)$, έχουμε:

$$f(x_0)=f\left(f\left(\frac{y_0+1}{2}\right)\right)=\cancel{2}\,\frac{y_0+1}{\cancel{2}}-1=y_0.$$

γ) Όπου x το $f^{-1}(x)$, έχουμε $f(f(f^{-1}(x)))-2f^{-1}(x)+1=0 \Leftrightarrow f^{-1}(x)=\frac{f(x)+1}{2}$,

άρα $f^{-1}(17)=\frac{f(17)+1}{2}$.

Είναι $f(f(x))=2x-1$ και αντικαθιστώντας όπου x το $f(x)$, έχουμε:

$$f(f(f(x)))=2f(x)-1 \Leftrightarrow f(2x-1)=2f(x)-1$$

Είναι $f(17)=f(2\cdot 9-1)=2f(9)-1$,

άρα $f^{-1}(17)=\frac{2f(9)-1+1}{2}=f(9)=f(2\cdot 5-1)=2f(5)-1$

$$4f(x)=f^{-1}(17)+3 \Leftrightarrow 4f(x)=2f(5)-1+3 \Leftrightarrow 2f(x)-1=f(5) \Leftrightarrow$$

$$f(2x-1)=f(5) \overset{1-1}{\Leftrightarrow} 2x-1=5 \Leftrightarrow x=3$$

2.323. Α) α) Αρκεί για κάθε $y_0 \in \mathbb{R}$, να βρούμε x_0 τέτοιο, ώστε $f(x_0)=y_0$.

Εστω $y_0=2013x_0+2014 \Leftrightarrow x_0=\frac{y_0-2014}{2013}$. Οπότε για $x_0=f\left(\frac{y_0-2014}{2013}\right)$,

έχουμε: $f(x_0)=f\left(f\left(\frac{y_0-2014}{2013}\right)\right)=\cancel{2013}\,\frac{y_0-2014}{\cancel{2013}}+2014=y_0$.

β) Εστω $x_1,x_2 \in \mathbb{R}$ με $f(x_1)=f(x_2)$, τότε ......

Β) $f(f(k))=2013k+2014 \Leftrightarrow f(k)=2013k+2014 \Leftrightarrow$

$$k=2013k+2014 \Leftrightarrow k=-\frac{1007}{1006}.$$

2.324. **β)** $f^{-1}(-4)=\alpha \Leftrightarrow f(\alpha)=-4 \Leftrightarrow \alpha=-3$, $f^{-1}(0)=\beta \Leftrightarrow f(\beta)=0=f(-1) \Leftrightarrow \beta=-1$

και $f^{-1}(2)=\gamma \Leftrightarrow f(\gamma)=2=f(2) \Leftrightarrow \gamma=2$

γ) $f(x)=f^{-1}(x) \overset{f\uparrow}{\Leftrightarrow} f(x)=x \Leftrightarrow x=-2$ ή 2 ή 4.

2.325. $f^{-1}(6)=\alpha \Leftrightarrow f(\alpha)=6=f(1) \overset{1-1}{\Leftrightarrow} \alpha=1$

$f^{-1}(x)=1 \Leftrightarrow x=f(1)=6$

2.326. Εστω $x_1,x_2 \in \mathbb{R}$ με $g(x_1)=g(x_2) \Leftrightarrow \dots \Leftrightarrow x_1=x_2$ άρα g 1–1.

$g(x)=y \Leftrightarrow 1+\sqrt{x+1}=y \Leftrightarrow \sqrt{x+1}=y-1$.

Για $y \geq 1$ είναι $x+1=(y-1)^2 \Leftrightarrow x=y^2-2y$, άρα $g^{-1}(x)=x^2-2x=f(x)$, $x \geq 1$

$x^2=2x+1+\sqrt{x+1} \Leftrightarrow x^2-2x=1+\sqrt{x+1} \Leftrightarrow f(x)=g(x)=f^{-1}(x) \Leftrightarrow$

$f(x)=x \Leftrightarrow x^2-2x=x \Leftrightarrow x^2-3x=0 \Leftrightarrow x=0$ ή $x=3$.

2.327. **α)** Εστω $x_1,x_2 \in \mathbb{R}$ με $x_1<x_2$,..... $f\uparrow\mathbb{R} \Rightarrow f$ 1–1.

$f^{-1}(-5)=k \Leftrightarrow f(k)=-5=f(1) \overset{1-1}{\Leftrightarrow} x=1$.

β) $f(x)=f^{-1}(x) \overset{f\uparrow}{\Leftrightarrow} f(x)=x \Leftrightarrow 3^x+\cancel{x}-9=\cancel{x} \Leftrightarrow x=2$

γ) $f^{-1}(f(\ln x)-3)>0 \overset{f\uparrow}{\Leftrightarrow} f\left(f^{-1}(f(\ln x)-3)\right)>f(0) \Leftrightarrow$

$f(\ln x)-3>-8 \Leftrightarrow f(\ln x)>-5=f(1) \overset{f\uparrow}{\Leftrightarrow} \ln x>1 \Leftrightarrow x>e$

2.328. **α)** Εστω $x_1,x_2 \in \mathbb{R}$ με $x_1<x_2$,..... $f\uparrow\mathbb{R} \Rightarrow f$ 1–1.

β) $f^{-1}(-128)=k \Leftrightarrow f(k)=-128=f(0) \overset{1-1}{\Leftrightarrow} k=0$

$f^{-1}(2)=b \Leftrightarrow f(b)=2=f(2) \overset{1-1}{\Leftrightarrow} b=2$

γ) $f(x)=f^{-1}(x) \overset{f\uparrow}{\Leftrightarrow} f(x)=x \Leftrightarrow 4x^5+\cancel{x}-128=\cancel{x} \Leftrightarrow x^5=32 \Leftrightarrow x=2$

2.329. **α)** Εστω $x_1,x_2 \in \mathbb{R}$ με $x_1<x_2$,..... $f\uparrow\mathbb{R} \Rightarrow f$ 1–1.

β) $f(x)=f^{-1}(x) \overset{f\uparrow}{\Leftrightarrow} f(x)=x \Leftrightarrow x^3+e^x+\cancel{x}-1=\cancel{x} \Leftrightarrow x^3+e^x-1=0$.

Εστω $g(x)=x^3+e^x-1$, $x \in \mathbb{R}$, Εύκολα αποδεικνύεται ότι η g είναι $\uparrow$, οπότε και

1–1, άρα $x^3+e^x-1=0 \Leftrightarrow g(x)=g(0) \overset{1-1}{\Leftrightarrow} x=0$

2.330. **α)** Εστω $x_1,x_2 \in \mathbb{R}$ με $x_1<x_2 \Leftrightarrow x_1^3<x_2^3 \Leftrightarrow$

$4x_1^3<4x_2^3 \Leftrightarrow 4x_1^3-1<4x_2^3-1 \Leftrightarrow \frac{4x_1^3-1}{3}<\frac{4x_2^3-1}{3} \Leftrightarrow f(x_1)<f(x_2) \Rightarrow f\uparrow\mathbb{R}$

β) $f(x)=y \Leftrightarrow 4x^3-1=3y \Leftrightarrow x^3=\frac{3y+1}{4}$

Αν $y \ge -\frac{1}{3}$, τότε $x=\sqrt[3]{\frac{3y+1}{4}}$ και αν $y<-\frac{1}{3}$, τότε $x=-\sqrt[3]{\frac{-3y-1}{4}}$,

άρα $f^{-1}(x)=\begin{cases} \sqrt[3]{\frac{3x+1}{4}} \quad , x \ge -\frac{1}{3} \\ -\sqrt[3]{\frac{-3x-1}{4}}, x<-\frac{1}{3} \end{cases}$

γ) $f(x)=f^{-1}(x) \overset{f\uparrow}{\Leftrightarrow} f(x)=x \Leftrightarrow \frac{4x^3-1}{3}=x \Leftrightarrow 4x^3-3x-1=0 \Leftrightarrow x=1$ ή

$4x^2+4x+1=0 \Leftrightarrow (2x+1)^2=0 \Leftrightarrow x=-\frac{1}{2}$. Κοινά σημεία τα $(1,1)$, $\left(-\frac{1}{2},-\frac{1}{2}\right)$.

2.331. α) Εστω $x_1,x_2 \in \mathbb{R}$ με $x_1<x_2$,...... $f\uparrow\mathbb{R} \Rightarrow f$ 1–1.

$f^{-1}(11)=k \Leftrightarrow f(k)=11=f(1) \overset{1-1}{\Leftrightarrow} k=1$

β) $f(x)=f^{-1}(x) \overset{f\uparrow}{\Leftrightarrow} f(x)=x \Leftrightarrow 4x^{33}+x+5=0$

Εστω $g(x)=4x^{33}+x+5$, $x \in \mathbb{R}$.

Εστω $x_1,x_2 \in \mathbb{R}$ με $x_1<x_2 \Rightarrow ... \Rightarrow g(x_1)<g(x_2) \Rightarrow g\uparrow\mathbb{R} \Rightarrow g$ 1–1.

$4x^{33}+x+5=0 \Leftrightarrow g(x)=g(-1) \overset{1-1}{\Leftrightarrow} x=-1$

2.332. α) Εστω $x_1,x_2 \in \mathbb{R}$ με $f(x_1)=f(x_2)$. Τότε: $f^3(x_1)=f^3(x_2)$ και

$f^3(x_1)+3f(x_1)=f^3(x_2)+3f(x_2) \Leftrightarrow x_1+3=x_2+3 \Leftrightarrow x_1=x_2 \Rightarrow f$ 1–1.

$f(x)=y \Leftrightarrow y^3+3y-3=x$, άρα $f^{-1}(y)=y^3+3y-3$, $y \in \mathbb{R}$.

β) Εστω ότι υπάρχουν $x_1,x_2 \in \mathbb{R}$ με $x_1<x_2$ τέτοια, ώστε $f(x_1) \ge f(x_2)$,

τότε $f^3(x_1) \ge f^3(x_2)$ και $f^3(x_1)+3f(x_1) \ge f^3(x_2)+3f(x_2) \Leftrightarrow$

$x_1+3 \ge x_2+3 \Leftrightarrow x_1 \ge x_2$ που είναι άτοπο.

γ) $f(x)=f^{-1}(x) \overset{f\uparrow}{\Leftrightarrow} f(x)=x \Leftrightarrow x^3+3x=x+3 \Leftrightarrow x^3+2x-3=0 \Leftrightarrow x=1$ ή

$x^2+x+3=0$ που είναι αδύνατο.

2.333. α) Εστω $x_1,x_2 \in \mathbb{R}$ με $f(x_1)=f(x_2)$. Τότε: $e^{f(x_1)}=e^{f(x_2)}$ και

$e^{f(x_1)}+f(x_1)=e^{f(x_2)}+f(x_2) \Leftrightarrow x_1+2=x_2+2 \Leftrightarrow x_1=x_2 \Rightarrow f$ 1–1.

$f(x)=y \Leftrightarrow e^y+y=x+2 \Leftrightarrow f^{-1}(y)=e^y+y-2$, $y \in \mathbb{R}$.

β) $f(-1)=a \Leftrightarrow f^{-1}(a)=-1=f^{-1}(0) \overset{1-1}{\Leftrightarrow} a=0$

$f(e^2)=b \Leftrightarrow f^{-1}(b)=e^2=f^{-1}(2) \overset{1-1}{\Leftrightarrow} b=2$

2.334. **α)** Εστω $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ με $f(x_1) = f(x_2)$.

Τότε: $\dfrac{e^{x_1}}{e^{x_1}+2} = \dfrac{e^{x_2}}{e^{x_2}+2} \Leftrightarrow e^{x_1+x_2} + 2e^{x_1} = e^{x_1+x_2} + 2e^{x_2} \Leftrightarrow 2e^{x_1} + 2e^{x_2} \Leftrightarrow x_1 = x_2$,

άρα f 1–1

β) Εστω $f^{-1}\left(f^{-1}\left(\dfrac{3}{2}\right)\right) = \alpha \Leftrightarrow f^{-1}\left(\dfrac{3}{2}\right) = f(\alpha) \Leftrightarrow \dfrac{3}{2} = f(f(\alpha)) \Leftrightarrow \dfrac{e^{f(\alpha)}}{e^{f(\alpha)}+2} = \dfrac{3}{2} \Leftrightarrow$

$2e^{f(\alpha)} = 3e^{f(\alpha)} + 6 \Leftrightarrow e^{f(\alpha)} = -6$ αδύνατο

2.335. **α)** Εστω $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ με $f(x_1) = f(x_2)$. Τότε:

$f(f(x_1)) = f(f(x_2)) \Leftrightarrow f(f(x_1)) + f(x_1) = f(f(x_2)) + f(x_2) \Leftrightarrow$

$x_1 - 2 = x_2 - 2 \Leftrightarrow x_1 = x_2$, άρα η f είναι 1–1 και αντιστρέφεται.

β) Αν $f(x) = x$, τότε η (1) γίνεται: $f(x) = x - x - 2 \overset{f(x)=x}{\Leftrightarrow} x = -2$.

γ) Αν στη σχέση (1) αντικαταστήσουμε όπου x το $f(x)$, προκύπτει:

$f(f(f(x))) = f(x) - f(f(x)) - 2 \Leftrightarrow f(x - f(x) - 2) = f(x) - (x - f(x) - 2) \Leftrightarrow$

$f(x - f(x) - 2) = f(x) - x + f(x) + 2 - 2 \Leftrightarrow f(x - f(x) - 2) = 2f(x) - x$.

δ) Επειδή $f(x) = y$ και $f^{-1}(y) = x$ η (1) γίνεται: $f(y) = f^{-1}(y) - y - 2 \Leftrightarrow$

$f^{-1}(y) - f(y) = y + 2$, $y \in \mathbb{R}$, άρα $f^{-1}(x) - f(x) = x + 2$, $x \in \mathbb{R}$.

2.236. **α) i.** Εστω $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ με $f(x_1) = f(x_2)$, τότε $f(f(x_1)) = f(f(x_2)) \Leftrightarrow$

$(f \circ f)(x_1) = (fof)(x_2) \Leftrightarrow x_1^5 = x_2^5 \Leftrightarrow x_1 = x_2$, οπότε η f είναι 1–1 και αντιστρέφεται.

ii. Για κάθε $x \in \mathbb{R}$ είναι $f(f(x)) = x^5$. Αντικαθιστώντας όπου x το $f(x)$ έχουμε:

$f(f(f(x))) = f^5(x) \Leftrightarrow f((fof)(x)) = f^5(x) \Leftrightarrow f(x^5) = (f(x))^5$.

β) i. Επειδή η f είναι 1–1 έχουμε: $f(x) = x \Leftrightarrow f(f(x)) = f(x) \Leftrightarrow x^5 = f(x)$, οπότε

$x^5 = x \Leftrightarrow x^5 - x = 0 \Leftrightarrow x(x-1)(x+1)(x^2+1) = 0 \Leftrightarrow$

$x = 0$ ή $x = \pm 1$ ή $x^2 = -1$ που είναι αδύνατο.

ii. Οι αριθμοί $-1, 0, 1$ είναι ρίζες της εξίσωσης $f(x) = x$, οπότε: $f(1) = 1$, $f(-1) = -1$ και $f(0) = 0$. Άρα $f^5(-1) + f^5(1) = (-1)^5 + 1^5 = -1 + 1 = 0 = f(0)$.

iii. Είναι $f(32) = f(2^5)$ και με βάση τα προηγούμενα είναι: $f(2^5) = f^5(2)$,

οπότε $f^5(2) = 243 \Leftrightarrow f^5(2) = 3^5 \Leftrightarrow f(2) = 3$.

2.337. Για $x = 3$ είναι: $f(f(3)) = 3^2 - 6 \cdot 3 + 12 \Leftrightarrow f(f(3)) = 3$. Άρα $f(f(f(3))) = f(3)$ (1)

Όμως αν όπου x στη σχέση $f(f(x)) = x^2 - 6x + 12$, (2) αντικαταστήσουμε το $f(3)$,

προκύπτει: $f(f(f(3))) = f^2(3) - 6f(3) + 12$ (3)

Από τις σχέσεις (1), (3), προκύπτει ότι:

$f^2(3) - 6f(3) + 12 = f(3) \Leftrightarrow f^2(3) - 7f(3) + 12 = 0 \Leftrightarrow f(3) = 3$ ή $f(3) = 4$.

Για $x=4$ η (2) γίνεται: $f(f(4))=4^2-6\cdot 4+12=4$ και για $x=f(4)$ είναι:
$\underbrace{f(f(f(4)))}=f^2(4)-6f(4)+12 \Leftrightarrow f(4)=f^2(4)-7f(4)+12=0 \Leftrightarrow f(4)=3$ ή

$f(4)=4$. Άρα $f(3)=f(4)=3$ ή $f(3)=f(4)=4$ ή $f(3)=3$ και $f(4)=4$ ή $f(3)=4$ και $f(4)=3$.
Όμως η f είναι αντιστρέψιμη οπότε και 1–1, άρα $f(3)=3$ και $f(4)=4$ ή $f(3)=4$ και $f(4)=3$. Και στις δύο περιπτώσεις, ισχύει: $f(3)+f(4)=7$.

2.338. α) Η σχέση: $f(x)-f(y)=f\left(\dfrac{x}{y}\right)$ (1) για $x=y=1$ γίνεται:

$f(1)-f(1)=f(1) \Leftrightarrow f(1)=0$. Οπότε η $x=1$ είναι η μοναδική ρίζα της f.
Εστω $x_1,x_2 \in \mathbb{R}^*$ με $f(x_1)=f(x_2)$. Η σχέση (1) για $x=x_1$ και $y=x_2$, γίνεται:

$f(x_1)-f(x_2)=f\left(\dfrac{x_1}{x_2}\right) \Leftrightarrow f\left(\dfrac{x_1}{x_2}\right)=0 \Leftrightarrow \dfrac{x_1}{x_2}=1 \Leftrightarrow x_1=x_2$, οπότε η f είναι 1–1,

οπότε αντιστρέφεται.

β) Εστω $f(x)=\kappa$ και $f(y)=\lambda$, τότε $x=f^{-1}(\kappa)$ και $y=f^{-1}(\lambda)$.

Είναι $f(x)-f(y)=f\left(\dfrac{x}{y}\right)$, άρα:

$$f^{-1}(f(x)-f(y))=f^{-1}\left(f\left(\frac{x}{y}\right)\right) \Leftrightarrow f^{-1}(\kappa-\lambda)=\frac{x}{y} \Leftrightarrow f^{-1}(\kappa-\lambda)=\frac{f^{-1}(\kappa)}{f^{-1}(\lambda)}.$$

γ) $f(x)+f(x^2+1)=f(x^2+6)+f(x-1) \Leftrightarrow f(x)-f(x^2+6)=f(x-1)-f(x^2+1) \Leftrightarrow$

$$f\left(\frac{x}{x^2+6}\right)=f\left(\frac{x-1}{x^2+1}\right) \overset{f\,1-1}{\Leftrightarrow} \frac{x}{x^2+6}=\frac{x-1}{x^2+1} \Leftrightarrow x^3+x=x^3+6x-x^2-6 \Leftrightarrow$$

$x^2-5x+6=0 \Leftrightarrow x=2$ ή $x=3$.

2.339. α) i. Εστω $h(x)=f(x)-g(x)$, $x\in\mathbb{R}$. Εστω $x_1,x_2\in\mathbb{R}$ με $x_1<x_2$.

Τότε: $\begin{cases} f(x_1)>f(x_2) \\ g(x_1)<g(x_2) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} f(x_1)>f(x_2) \\ -g(x_1)>-g(x_2) \end{cases}$

άρα $f(x_1)-g(x_1)>f(x_2)-g(x_2) \Leftrightarrow h(x_1)>h(x_2)$, άρα η h είναι γνησίως φθίνουσα στο $\mathbb{R}$. Επειδή $\theta>0$ είναι $x+\theta>x$, άρα $h(x+\theta)<h(x) \Leftrightarrow$

$f(x+\theta)-g(x+\theta)<f(x)-g(x) \Leftrightarrow g(x+\theta)-g(x)>f(x+\theta)-f(x)$.

ii. Επειδή η h είναι γνησίως φθίνουσα στο $\mathbb{R}$, η εξίσωση $h(x)=0$ έχει το πολύ μια ρίζα στο $\mathbb{R}$.

β) Παρατηρούμε ότι $f(0)=g(0)=1$, δηλαδή το σημείο $A(0,1)$ είναι κοινό σημείο των C_f, C_g. Επειδή $h(0)=0$ και η h είναι γνησίως φθίνουσα στο $\mathbb{R}$, η $x=0$ είναι η μοναδική ρίζα της εξίσωσης $h(x)=0$, οπότε το σημείο $A(0,1)$ είναι το μοναδικό κοινό σημείο των C_f, C_g

2.340. A) Είναι $f(x)+(f\circ g^{-1})(x)=6 \Leftrightarrow (f\circ g^{-1})(x)=6-f(x)$ (1), οπότε

$$2(f\circ g^{-1})(x)-4(f\circ g)(x)=4x-18 \overset{(1)}{\Rightarrow} 2(6-f(x))-4(f\circ g)(x)=4x-18 \Leftrightarrow$$
$$12-2f(x)-4(f\circ g)(x)=4x-18 \Leftrightarrow -2f(x)-4(f\circ g)(x)=4x-30 \Leftrightarrow$$
$$f(x)+2(f\circ g)(x)=-2x+15 \quad (2)$$

Αν στη σχέση $f(x)+(f\circ g^{-1})(x)=6$ αντικαταστήσουμε όπου x το $g(x)$,

προκύπτει:

$$f(g(x))+(f\circ g^{-1})(g(x))=6 \Leftrightarrow f(g(x))+\left[(f\circ g^{-1})\circ g\right](x)=6 \Leftrightarrow$$
$$f(g(x))+\left[f\circ(g\circ g^{-1})(x)\right]=6 \Leftrightarrow f(g(x))+f(x)=6 \Leftrightarrow f(g(x))=6-f(x).$$

Η σχέση (2) γίνεται:

$$f(x)+2(6-f(x))=-2x+15 \Leftrightarrow f(x)+12-2f(x)=-2x+15 \Leftrightarrow$$
$$-f(x)=-2x+3 \Leftrightarrow f(x)=2x-3,\ x\in\mathbb{R}.$$

Είναι $f(g(x))=2g(x)-3$ και η σχέση (2) γίνεται:

$$2x-3+2(2g(x)-3)=-2x+15 \Leftrightarrow 2x-3+4g(x)-6=-2x+15 \Leftrightarrow$$
$$4g(x)=-4x+24 \Leftrightarrow g(x)=-x+6,\ x\in\mathbb{R}.$$

B) i. Είναι $f(g(x))=6-(2x-3)=9-2x$, οπότε $h(9-2x)=3e^{-2x}-6x+21$.

Θέτουμε $9-2x=\omega \Leftrightarrow x=\dfrac{9-\omega}{2}$, τότε:

$$h(\omega)=3e^{-2\frac{9-\omega}{2}+8}-6\frac{9-\omega}{2}+21=3e^{-9+\omega+8}-27+3\omega+21 \Leftrightarrow h(\omega)=3e^{\omega-1}+3\omega-6,$$

$\omega\in\mathbb{R}$ άρα $h(x)=e^{x-1}+3x-6$, $x\in\mathbb{R}$.

ii. Αρχικά θα δείξουμε ότι η f είναι γνησίως μονότονη, οπότε θα είναι και 1–1 που απαιτείται για να λυθεί η εξίσωση. Εστω $x_1,x_2\in\mathbb{R}$ με $x_1<x_2$, τότε:

$x_1-1<x_2-1 \Leftrightarrow e^{x_1-1}<e^{x_2-1}$ και $3x_1<3x_2 \Leftrightarrow 3x_1-6<3x_2-6$. Με πρόσθεση κατά μέλη προκύπτει ότι: $e^{x_1-1}+3x_1-3<e^{x_2-1}+3x_2-6 \Leftrightarrow h(x_1)<h(x_2)$, άρα η h είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$, οπότε είναι και 1–1. Παρατηρούμε ότι

$h(1)=3e^{1-1}+3\cdot 1-6=3+3-6=0$, οπότε: $h(x)=0 \Leftrightarrow h(x)=h(1) \overset{1\text{-}1}{\Leftrightarrow} x=1$.

iii. $e^{x^3-1}-e^{x-1}>3(x-x^3) \Leftrightarrow e^{x^3-1}-e^{x-1}>3x-3x^3 \Leftrightarrow e^{x^3-1}+3x^3>e^{x-1}+3x$ (3)

Εστω $\varphi(x)=e^{x-1}+3x$, $x\in\mathbb{R}$.

Εύκολα αποδεικνύεται ότι η φ είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$, οπότε η (3)

γίνεται: $\varphi(x^3)>\varphi(x) \overset{\varphi\uparrow}{\Leftrightarrow} x^3>x \Leftrightarrow x^3-x>0 \Leftrightarrow$

$x(x^2-1)>0 \Leftrightarrow x(x-1)(x+1)>0$

x	$-\infty$	-1	0	1	$+\infty$
$x(x-1)(x+1)$	$-$	$+$	$-$	$+$	

Άρα $x\in(-1,0)\cup(1,+\infty)$.

2.341. **α)** Εστω ότι η $f(x)=0$ έχει δύο ρίζες ρ_1,ρ_2 με $\rho_1 \neq \rho_2$.

Τότε $f(\rho_1)=f(\rho_2) \overset{1-1}{\Leftrightarrow} \rho_1=\rho_2$ που είναι άτοπο.

β) Είναι $\alpha>\beta$, $\alpha>\gamma$ και $\alpha^2=\beta^2+\gamma^2$. Εστω $x_1,x_2 \in \mathbb{R}$ με $x_1<x_2$,

τότε: $\left(\dfrac{\beta}{\alpha}\right)^{x_1} > \left(\dfrac{\beta}{\alpha}\right)^{x_2}$, $\left(\dfrac{\gamma}{\alpha}\right)^{x_1} > \left(\dfrac{\gamma}{\alpha}\right)^{x_2}$, άρα και

$$\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^{x_1}+\left(\frac{\gamma}{\alpha}\right)^{x_1}-1>\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^{x_2}+\left(\frac{\gamma}{\alpha}\right)^{x_2}-1 \Leftrightarrow f(x_1)>f(x_2) \Rightarrow f \downarrow \mathbb{R}$$

γ) $\alpha^x=\beta^x+\gamma^x \Leftrightarrow \left(\dfrac{\beta}{\alpha}\right)^{x}+\left(\dfrac{\gamma}{\alpha}\right)^{x}-1=0 \Leftrightarrow f(x)=0 \Leftrightarrow f(x)=f(2) \overset{1-1}{\Leftrightarrow} x=2$

2.342. **α)** Εστω ότι υπάρχουν $x_1,x_2 \in \mathbb{R}$ με $x_1<x_2$ τέτοια, ώστε $f(x_1)\geq f(x_2)$,

τότε $f^3(x_1)\geq f^3(x_2)$, $14f(x_1)\geq 14f(x_2)$, άρα και

$f^3(x_1)+14f(x_1)\geq f^3(x_2)+14f(x_2) \Leftrightarrow x_1^3-4x_1^2+6x_1-\cancel{3} \geq x_2^3-4x_2^2+6x_2-\cancel{3} \Leftrightarrow$

$(x_1-x_2)\left(x_1^2+(x_2-4)x_1+x_2^2-4x_2+6\right)\geq 0 \quad (1)$

Το τριώνυμο $x_1^2+(x_2-4)x_1+x_2^2-4x_2+6$, έχει $\Delta=-3x_2^2+8x_2-8<0$, αφού έχει $\Delta'<0$, άρα $x_1^2+(x_2-4)x_1+x_2^2-4x_2+6>0$ και λόγω της (1), είναι $x_1-x_2\geq 0 \Leftrightarrow x_1 \geq x_2$ που είναι άτοπο.

β) $f(x)=f^{-1}(x) \overset{f\uparrow}{\Leftrightarrow} f(x)=x \Leftrightarrow \cancel{x^3}+14x=\cancel{x^3}-4x^2+6x-3 \Leftrightarrow 4x^2+8x+3=0 \Leftrightarrow$

$x=-\dfrac{1}{2}$ ή $x=-\dfrac{3}{2}$. Κοινά σημεία: $\left(-\dfrac{1}{2},-\dfrac{1}{2}\right)$, $\left(-\dfrac{3}{2},-\dfrac{3}{2}\right)$.

γ) $f(x)>x \Leftrightarrow f^3(x)>x^3$, $14f(x)>14x$ άρα και

$f^3(x)+14f(x)>x^3+14x \Leftrightarrow x^3-4x^2+6x-3>x^3+14x \Leftrightarrow$

$4x^2+8x+3<0 \Leftrightarrow -\dfrac{3}{2}<x<-\dfrac{1}{2}$.

δ) $f^{-1}(0)=\alpha \Leftrightarrow f(\alpha)=0 \Leftrightarrow \alpha^3-4\alpha^2+6\alpha-3=0 \Leftrightarrow \alpha=1$ ή $\alpha^2-3\alpha+3=0$ αδύνατο.

2.343. **α)** Για $x=y=1$ είναι: $f(1)=f(1)+f(1)+1 \Leftrightarrow f(1)=-1$.

β) Για $y=\dfrac{1}{x}$ είναι: $f\left(x\dfrac{1}{x}\right)=f(x)+f\left(\dfrac{1}{x}\right)+1 \Leftrightarrow f(1)=f(x)+f\left(\dfrac{1}{x}\right)+1 \Leftrightarrow$

$-1=f(x)+f\left(\dfrac{1}{x}\right)+1 \Leftrightarrow f\left(\dfrac{1}{x}\right)=-f(x)-2$

γ) Για $\nu=1$ είναι $f(x^1)=1\cdot f(x)+1-1 \Leftrightarrow f(x)=f(x)$ που ισχύει.

Εστω ότι ισχύει για $\nu=\kappa$, δηλαδή $f(x^\kappa)=\kappa f(x)+\kappa-1$. Θα αποδείξουμε ότι η (2) αληθεύει και για $\nu=\kappa+1$, δηλαδή: $f(x^{\kappa+1})=(\kappa+1)f(x)+\kappa$.

Είναι $f(x^{\kappa+1})=f(x^\kappa\cdot x)=$

$$=f(x^\kappa)+f(x)+1=\kappa f(x)+\kappa-1+f(x)+1=(\kappa+1)f(x)+\kappa$$

δ) Εστω $x_1, x_2 \in (0,+\infty)$ με $f(x_1) = f(x_2)$.

Αντικαθιστώντας στην (1) $x = x_1$ και $y = \frac{1}{x_2}$, έχουμε:

$f\left(x_1 \frac{1}{x_2}\right) = f(x_1) + f\left(\frac{1}{x_2}\right) + 1 \Leftrightarrow f\left(\frac{x_1}{x_2}\right) = f(x_1) - f(x_2) - 2 + 1 \Leftrightarrow$ άρα $f\left(\frac{x_1}{x_2}\right) = -1$.

Επειδή η εξίσωση $f(x) = -1$ έχει μοναδική ρίζα την $x = 1$, ισχύει ότι:

$\frac{x_1}{x_2} = 1 \Leftrightarrow x_1 = x_2$, άρα η f είναι 1–1.

2.344. **α)** Εστω ότι υπάρχει $\rho \in \mathbb{R}$ τέτοιο, ώστε $f(\rho) < \rho$. Τότε επειδή η f είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$ ισχύει: $f(f(\rho)) < f(\rho) \Leftrightarrow \rho < f(\rho)$ που είναι άτοπο.

β) Όμοια καταλήγουμε σε άτοπο αν $f(\rho) > \rho$. Οπότε $f(x) = x$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

γ) Επειδή $f(x) = x$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$, ισχύει ότι: $f^{-1}(f(x)) = f^{-1}(x) \Leftrightarrow x = f^{-1}(x)$ άρα $f(x) = f^{-1}(x)$, $x \in \mathbb{R}$.

δ) **i.** Εστω $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ με $x_1 < x_2$. Τότε: $x_1^3 < x_2^3$ και $3x_1 < 3x_2$, οπότε και $x_1^3 + 3x_1 < x_2^3 + 3x_2 \Leftrightarrow x_1^3 + 3x_1 - 3 < x_2^3 + 3x_2 - 3 \Leftrightarrow f(x_1) < f(x_2)$

Άρα η f είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$ οπότε και 1–1.

ii. $(x^3 + 3x - 3)^3 + 3(x^3 + 3x - 3) - 3 = x \Leftrightarrow f^3(x) + 3f(x) - 3 = x \Leftrightarrow (f \circ f)(x) = x$.

Επειδή η f είναι γνησίως αύξουσα ισχύει ότι $f(x) = x$.

Άρα $x^3 + 3x - 3 = x \Leftrightarrow x^3 + 2x - 3 = 0$

Από το σχήμα Horner προκύπτει ότι $x = 1$ ή $x^2 + x + 3 = 0$ που είναι αδύνατη.

2.345. **α)** Για $\beta = 0$ είναι $f(f(\alpha)) = f(0) + \alpha$ για κάθε $\alpha \in \mathbb{R}$, άρα και $f(f(x)) = f(0) + x$ (1) για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Για $\alpha = 0$ είναι $f(\beta + f(\beta)) = f(2\beta)$, άρα και $f(x + f(x)) = f(2x)$ (2) για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Αν στην (1) αντικαταστήσουμε όπου x το $f(x)$ προκύπτει:

$f(f(f(x))) = f(0) + f(x) \overset{(1)}{\Leftrightarrow} f(f(0) + x) = f(0) + f(x)$ και για $x = 0$ είναι $f(f(0)) = 2f(0)$

Όμως η (1) για $x = 0$ γίνεται $f(f(0)) = f(0)$, άρα $2f(0) = f(0) \Leftrightarrow f(0) = 0$.

β) Από την (1) είναι $f(f(x)) = x$.

γ) Εστω $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ με $f(x_1) = f(x_2)$, τότε $f(f(x_1)) = f(f(x_2)) \Leftrightarrow x_1 = x_2$, άρα f 1–1.

δ) Από τη σχέση (2), έχουμε: $f(x + f(x)) = f(2x) \overset{f\ 1-1}{\Leftrightarrow} x + f(x) = 2x \Leftrightarrow f(x) = x$.