Μιγαδικοί

1.154. $3 \le |z| \le 7$ **1.236.** $|z-1+\sqrt{3}i| = 6$ **1.157.** $|z-6| = 2$

1.233. Να μην χρησιμοποιηθεί η σχέση $|z-1| \le 3$

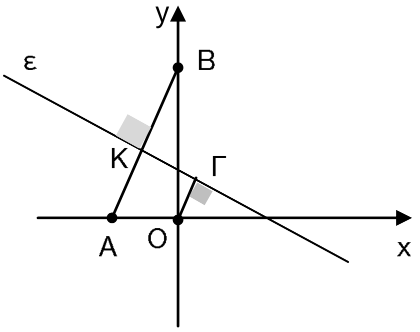
1.264. β) $|4-2i-2z| = 4$ **1.326.** $(6+8i)^{2|z|+1} - (1+i)^{12} = 990 \cdot 10^{|z|} + 1064$.

1.377. α) $\left(\frac{z_1}{z_2}\right)^{2004} + \left(\frac{z_2}{z_1}\right)^{2007} + \left(\frac{z_1}{z_2}\right)^{2010} = 1$. **1.399. γ)** $z_1^{30} + z_2^{30} = 2$

1.401. β) Ισχύει $ΟΓ \perp ε$, οπότε $ΟΓ: y = 2x$.Ο μιγαδικός z που έχει ελάχιστο μέτρο έχει εικόνα του το Γ και βρίσκεται από τη λύση του συστήματος των ΟΓ και ε.

$$\begin{cases} ΟΓ: y = 2x \\ ε: x + 2y - 3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{3}{5} \\ y = \frac{6}{5} \end{cases}$$, άρα ο

ζητούμενος μιγαδικός είναι ο $z_1 = \frac{3}{5} + \frac{6}{5}i$.



1.473. β) Αν z_1, z_2 δύο από τους προηγούμενους μιγαδικούς με $z_1 = -z_2$ **1.478.** $\left|z - \frac{10}{3}i\right| = \frac{8}{3}$

Συναρτήσεις

2.105. Να βρείτε συνάρτηση f για την οποία ισχύει $f(x+y) = 2f(x) + f(y)$ για κάθε $x, y \in \mathbb{R}$.

Λύση

Για $x = y = 0$, έχουμε: $f(0) = 2f(0) + f(0) \Leftrightarrow f(0) = 0$.

Για $y = 0$ είναι $f(x) = 2f(x) + f(0) \Leftrightarrow f(x) - 2f(x) = 0 \Leftrightarrow -f(x) = 0 \Leftrightarrow f(x) = 0,\ x \in \mathbb{R}$.

2.148. $f(x+y) = 2f(x) + f(y) + 2x$ **2.190. γ)** $f(x) = \frac{x^3}{x^2+1}$ **2.196.** f γνησίως αύξουσα

2.202. Να αποδείξετε ότι δεν υπάρχει γνησίως φθίνουσα συνάρτηση $f: \mathbb{R} \to (0, +\infty)$

2.205. β) $f(1) = -1$ **2.297. γ)** $συνx - ημx = e^{ημx} - e^{συνx}$

2.309. Δίνεται συνάρτηση $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ για την οποία ισχύουν οι σχέσεις: $(f \circ f)(x) = 4x - 15$ και $(f \circ f \circ f)(x) = 8x - 35$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Ερωτήσεις πολλαπλής επιλογής

Κ. Η συνάρτηση $f(x) = 2e^{-x}$ έχει αντίστροφη την β) $g(x) = \ln(2x)$

Όρια

3.97 $f^2(x)-4f(x)\le x^2-4$

3.121. β) $\lim\limits_{x\to -1}\left[(x+1)\eta\mu\dfrac{2}{x^2-1}+x^{200}-1\right]$. **3.135.** $\varphi(x)=\dfrac{f(x)-2x}{g(x)-3x}$

3.148. δ) Να υπολογίσετε το όριο $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{f^2(x)-1}{x-1-e^{f(x)}}$, αν είναι γνωστό ότι $\lim\limits_{x\to 1}f(x)=0$.

3.183. $\lim\limits_{x\to 1}[-2xf(x)-3g(x)]=+\infty$

3.195. Να βρείτε τα $\kappa,\lambda\in\mathbb{R}$ **3.209.** $8f(x+y)=f(2x)+f(2y)+24xy(x+y)$

3.256. Για τις διάφορες τιμές του $\mu\in\mathbb{R}$, να βρείτε το όριο: $\lim\limits_{x\to -\infty}2x\left(\mu+\dfrac{x}{x^2-1}\right)$

3.299. δ) $\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{e^{x+2}-2^{x+1}+3}{e^x+2^{x+2}}$ **ε)** $\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{2^{2x+1}-2^x-1}{3\cdot 4^x-2^{x+2}+1}$ **3.292. στ)** $\lim\limits_{x\to -\infty}\dfrac{5x+\sigma\upsilon\nu^2 x-2\eta\mu x}{4x+\eta\mu x}$

3.327. $\lim\limits_{x\to +\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to +\infty}g(x)=0$

3.356. δ) $f(x)=\begin{cases}\dfrac{\sqrt{1+\eta\mu x}-1}{x}, & x<0\\ \dfrac{1}{2}, & x=0\\ \dfrac{\eta\mu x}{2x}, & x>0\end{cases}$, $x_0=0$ **3.370.** $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^2+2x-8}{\sqrt{2x+5}-3}, & -\dfrac{5}{2}\le x<2\\ \alpha x^2+(\beta-1)x, & x\ge 2\end{cases}$

3.391 . στο $x_0=6$ **3.394.** συνεχής στο $x_0=0$ **3.425.** $\beta^2<3\gamma$

3.469. δ) $x^6+8x^4+\lambda^2x^2+\lambda x=8$ **3.545.** $f^2(x)+xf(x)=4$ για κάθε $x\ge 0$ και $f(3)=-4$.

3.568. $x\in(0,4)$ **3.581.** $x\in(2,3)$ **3.591.** $\xi\in[\alpha,\beta]$ **3.594.** $\xi\in[\alpha,\beta]$

3.596. $\xi\in[\alpha,\beta]$ **3.597.** $\xi\in[0,1]$ **3.599.** $\xi\in[\alpha,\beta]$ **3.609.** $f(0)=-\sqrt{6}$

Παράγωγοι

4.67. $(f(x)-2)^2+(g(x)+3)^2=\left|\sqrt{x^2+9}-3\right|$ για κάθε $x>-4$. **4.130.** f συνεχής στο $\mathbb{R}$

4.223. $e^{-y}[f'(x)+f(x)]=e^{-x}[f'(y)+f(y)]$

4.225. Δίνεται δύο φορές παραγωγίσιμη συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ **4.275.** $f(x)=\alpha x^2+\beta x+\gamma$

4.322. Δίνονται οι παραγωγίσιμες συναρτήσεις $f,g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, για τις οποίες ισχύει $f(x)-g(x)=x$, για κάθε $x\in\mathbb{R}$. Να αποδείξετε ότι οι εφαπτομένες των C_f, C_g στα σημεία με την ίδια τετμημένη, τέμνονται στον άξονα $y'y$.

4.334. $f(x-2)\le x^2-3x+2\le f(x-3)+2x-4$,

β)Να αποδείξετε ότι οι εφαπτόμενες της C_f στα A και B τέμνονται κάθετα.

4.335. $f:\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)\to\mathbb{R}^*$

4.347. Να βρείτε τον ελάχιστο αριθμό τεμαχίων που πρέπει να κατασκευαστούν, ώστε ο ρυθμός μεταβολής του κέρδους να είναι θετικός.

4.374. $x(t)=e^{t^2}$

4.378. Πεζοπόρος Α βρίσκεται σε απόσταση 4 Km ανατολικά από ένα σταυροδρόμι Ο και βαδίζει προς αυτό με ταχύτητα 8 Km/h.

4.382. **γ)** Το εμβαδό του τριγώνου ΟΑΒ τη χρονική στιγμή κατά την οποία ο ρυθμός μεταβολής της τετμημένης του Μ είναι διπλάσιος από την απόλυτη τιμή του ρυθμού μεταβολής της τεταγμένης του.

4.384. **β)** Εστω σημείο Σ που κινείται στην (ε) με τετμημένη μεγαλύτερη από το 1, της οποίας η ταχύτητα είναι $\frac{3}{4}cm/sec$. Να βρείτε:

Επανάληψη

13. $2\eta\mu(x-1)+10(x-1)^3\le(x-1)f(x)\le 8x^2-14x+6$

20. **γ)** Αν $g(1)=4030$ και $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=-\infty$, να αποδείξετε ότι υπάρχει μοναδικό $x_0\in(1,+\infty)$ τέτοιο, ώστε $f(x_0)=\ln 2$.

29. $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{3f(x)-4^x}{3\cdot 3^x+6\cdot 4^x}$

37. $f(x)=\sqrt{4x-|z|}-|z|$

64. **γ)** $f(x_0)=6x_0$

Θέματα πανελλαδικών

25. **γ)** $|z^3-z^2|^2=|z^2+\bar{z}|^2+|z^3+\bar{z}|^2$.

31. $w=z-3i+\frac{1}{z-3i}$