

## Μιγαδικοί

1.154.  $3 \leq |z| \leq 7$       1.236.  $|z-1+\sqrt{3}i|=6$       1.233. Να μην χρησιμοποιηθεί η σχέση  $|z-1| \leq 3$

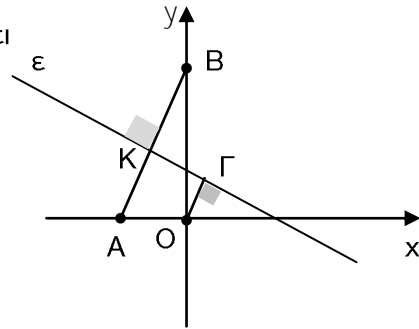
1.264. β)  $|4-2i-2z|=4$       1.326.  $(6+8i)^{2|z|+1} - (1+i)^{12} = 990 \cdot 10^{|z|} + 1064$  .

1.377. α)  $\left(\frac{z_1}{z_2}\right)^{2004} + \left(\frac{z_2}{z_1}\right)^{2007} + \left(\frac{z_1}{z_2}\right)^{2010} = 1$  .      1.399. γ)  $z_1^{30} + z_2^{30} = 2$

1.401. β) Ισχύει  $ΟΓ \perp \epsilon$ , οπότε  $ΟΓ : y = 2x$ . Ο μιγαδικός  $z$  που έχει ελάχιστο μέτρο έχει εικόνα του το  $\Gamma$  και βρίσκεται από τη λύση του συστήματος των  $ΟΓ$  και  $\epsilon$ .

$$\begin{cases} ΟΓ : y = 2x \\ \epsilon : x + 2y - 3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{3}{5} \\ y = \frac{6}{5} \end{cases}, \text{ άρα ο}$$

ζητούμενος μιγαδικός είναι ο  $z_1 = \frac{3}{5} + \frac{6}{5}i$ .



1.473. β) Αν  $z_1, z_2$  δύο από τους προηγούμενους μιγαδικούς με  $z_1 = -z_2$

1.478.  $\left|z - \frac{10}{3}i\right| = \frac{8}{3}$

## Συναρτήσεις

2.105. Να βρείτε συνάρτηση  $f$  για την οποία ισχύει  $f(x+y) = 2f(x) + f(y)$  για κάθε  $x, y \in \mathbb{R}$ .

Λύση

Για  $x=y=0$ , έχουμε:  $f(0) = 2f(0) + f(0) \Leftrightarrow f(0) = 0$ .

Για  $y=0$  είναι  $f(x) = 2f(x) + f(0) \Leftrightarrow f(x) - 2f(x) = 0 \Leftrightarrow -f(x) = 0 \Leftrightarrow f(x) = 0, x \in \mathbb{R}$ .

2.148.  $f(x+y) = 2f(x) + f(y) + 2x$       2.190. γ)  $f(x) = \frac{x^3}{x^2+1}$       2.196.  $f$  γνησίως **αύξουσα**

2.202. Να αποδείξετε ότι δεν υπάρχει γνησίως **φθίνουσα** συνάρτηση  $f : \mathbb{R} \rightarrow (0, +\infty)$

2.205. β)  $f(1) = -1$       2.297. γ)  $\sinh x - \cosh x = e^{\eta\mu x} - e^{\sigma\upsilon\nu x}$

2.309. Δίνεται συνάρτηση  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  για την οποία ισχύουν οι σχέσεις:  $(f \circ f)(x) = 4x - 15$   
και  $(f \circ f \circ f)(x) = 8x - 35$  για κάθε  $x \in \mathbb{R}$ .

## Ερωτήσεις πολλαπλής επιλογής

Κ. Η συνάρτηση  $f(x) = 2e^{-x}$  έχει αντίστροφη την      β)  $g(x) = \ln(2x)$

## Όρια

$$3.97 \quad f^2(x) - 4f(x) \leq x^2 - 4$$

$$3.121. \beta) \lim_{x \rightarrow -1} \left[ (x+1)\eta\mu \frac{2}{x^2-1} + x^{200} - 1 \right]. \quad 3.135. \phi(x) = \frac{f(x) - 2x}{g(x) - 3x}$$

$$3.148. \delta) \text{ Να υπολογίσετε το όριο } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f^2(x) - 1}{x - 1 - e^{f(x)}}, \text{ αν είναι γνωστό ότι } \lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 0.$$

$$3.183. \lim_{x \rightarrow 1} [-2xf(x) - 3g(x)] = +\infty$$

$$3.195. \text{ Να βρείτε τα } \kappa, \lambda \in \mathbb{R} \quad 3.209. 8f(x+y) = f(2x) + f(2y) + 24xy(x+y)$$

$$3.256. \text{ Για τις διάφορες τιμές του } \mu \in \mathbb{R}, \text{ να βρείτε το όριο: } \lim_{x \rightarrow \infty} 2x \left( \mu + \frac{x}{x^2 - 1} \right)$$

$$3.299. \delta) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^{x+2} - 2^{x+1} + 3}{e^x + 2^{x+2}} \quad \epsilon) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2^{2x+1} - 2^x - 1}{3 \cdot 4^x - 2^{x+2} + 1} \quad 3.292. \sigma\tau) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{5x + \sin^2 x - 2\eta\mu x}{4x + \eta\mu x}$$

$$3.327. \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = 0$$

$$3.356. \delta) f(x) = \begin{cases} \frac{\sqrt{1+\eta\mu x} - 1}{x}, & x < 0 \\ \frac{1}{2}, & x = 0, \quad x_0 = 0 \\ \frac{\eta\mu x}{2x}, & x > 0 \end{cases} \quad 3.370. f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 + 2x - 8}{\sqrt{2x+5} - 3}, & -\frac{5}{2} \leq x < 2 \\ \alpha x^2 + (\beta - 1)x, & x \geq 2 \end{cases}$$

$$3.391. \text{ στο } x_0 = 6 \quad 3.394. \text{ συνεχής στο } x_0 = 0 \quad 3.425. \beta^2 < 3\gamma$$

$$3.469. \delta) x^6 + 8x^4 + \lambda^2 x^2 + \lambda x = 8 \quad 3.545. f^2(x) + xf(x) = 4 \text{ για κάθε } x \geq 0 \text{ και } f(3) = -4.$$

$$3.568. x \in (0, 4) \quad 3.581. x \in (2, 3) \quad 3.591. \xi \in [\alpha, \beta] \quad 3.594. \xi \in [\alpha, \beta]$$

$$3.596. \xi \in [\alpha, \beta] \quad 3.597. \xi \in [0, 1] \quad 3.599. \xi \in [\alpha, \beta] \quad 3.609. f(0) = -\sqrt{6}$$

## Παράγωγοι

$$4.67. (f(x) - 2)^2 + (g(x) + 3)^2 = \left| \sqrt{x^2 + 9} - 3 \right| \text{ για κάθε } x > -4. \quad 4.130. f \text{ συνεχής στο } \mathbb{R}$$

$$4.223. e^{-y} [f'(x) + f(x)] = e^{-x} [f'(y) + f(y)]$$

$$4.225. \text{ Δίνεται δύο φορές παραγωγίσιμη συνάρτηση } f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \quad 4.275. f(x) = \alpha x^2 + \beta x + \gamma$$

4.322. Δίνονται οι παραγωγίσιμες συναρτήσεις  $f, g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , για τις οποίες ισχύει  $f(x) - g(x) = x$ , για κάθε  $x \in \mathbb{R}$ . Να αποδείξετε ότι οι εφαπτομένες των  $C_f, C_g$  στα σημεία με την ίδια τετμημένη, τέμνονται στον άξονα  $y'y$ .

4.334.  $f(x-2) \leq x^2 - 3x + 2 \leq f(x-3) + 2x - 4$ ,

β) Να αποδείξετε ότι οι εφαπτόμενες της  $C_f$  στα Α και Β τέμνονται κάθετα.

4.335.  $f: \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \rightarrow \mathbb{R}^*$

4.347. Να βρείτε τον ελάχιστο αριθμό τεμαχίων που πρέπει να κατασκευαστούν, ώστε ο ρυθμός μεταβολής του κέρδους να είναι θετικός.

4.374.  $x(t) = e^{t^2}$

4.378. Πεζοπόρος Α βρίσκεται σε απόσταση 4 Km ανατολικά από ένα σταυροδρόμι Ο και βαδίζει προς αυτό με ταχύτητα 8 Km/h.

4.382. γ) Το εμβαδό του τριγώνου ΟΑΒ τη χρονική στιγμή κατά την οποία ο ρυθμός μεταβολής της τετμημένης του Μ είναι διπλάσιος από την απόλυτη τιμή του ρυθμού μεταβολής της τεταγμένης του.

4.384. β) Εστω σημείο Σ που κινείται στην (ε) με τετμημένη μεγαλύτερη από το 1, της οποίας η ταχύτητα είναι  $\frac{3}{4}$  cm/sec. Να βρείτε:

## Επανάληψη

13.  $2\eta\mu(x-1) + 10(x-1)^3 \leq (x-1)f(x) \leq 8x^2 - 14x + 6$

20. γ) Αν  $g(1) = 4030$  και  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$ , να αποδείξετε ότι υπάρχει μοναδικό  $x_0 \in (1, +\infty)$  τέτοιο, ώστε  $f(x_0) = \ln 2$ .

29.  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3f(x) - 4^x}{3 \cdot 3^x + 6 \cdot 4^x}$

37.  $f(x) = \sqrt{4x - |z|} - |z|$

64. γ)  $f(x_0) = 6x_0$

## Θέματα πανελλαδικών

25. γ)  $|z^3 - z^2|^2 = |z^2 + \bar{z}|^2 + |z^3 + \bar{z}|^2$ .

31.  $w = z - 3i + \frac{1}{z - 3i}$