ΕΠΑΝΑΛΗΨΗ

1. **α)** Εστω $x_1,x_2 \in \mathbb{R}$ με $f(x_1)=f(x_2)$,

τότε $f(f(x_1))=f(f(x_2)) \Leftrightarrow -2x_1=-2x_2 \Leftrightarrow x_1=x_2$, άρα η f είναι 1–1.

β) Αν αντικαταστήσουμε όπου x το $f^{-1}(x)$, προκύπτει:

$$(f\circ f)(f^{-1}(x))=-2f^{-1}(x) \Leftrightarrow f^{-1}(x)=-\frac{1}{2}f(f(f^{-1}(x)))=-\frac{1}{2}f(x),\ x\in\mathbb{R}.$$

γ) Εστω ότι η f είναι γνησίως αύξουσα. Τότε για κάθε $x_1,x_2\in\mathbb{R}$ με $x_1<x_2$ είναι $f(x_1)<f(x_2)$. Τότε $f(f(x_1))<f(f(x_2)) \Leftrightarrow -2x_1<-2x_2 \Leftrightarrow x_1>x_2$ που είναι άτοπο. Όμοια καταλήγουμε σε άτοπο αν θεωρήσουμε ότι η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $\mathbb{R}$. Άρα η f δεν είναι γνησίως μονότονη.

δ) Για $x=0$ είναι $(f\circ f)(0)=-2\cdot 0 \Leftrightarrow f(f(0))=0$ και για $x=f(0)$ είναι

$f(f(f(0)))=-2f(0) \Leftrightarrow f(0)=-2f(0) \Leftrightarrow f(0)=0$

2. **Α. α)** Για $\alpha=0$ είναι $f(f(\beta))=f(0)+\beta+2$. Εστω $x_1,x_2\in\mathbb{R}$ με $f(x_1)=f(x_2)$,

τότε $f(f(x_1))=f(f(x_2)) \Leftrightarrow f(0)+x_1+2=f(0)+x_2+2 \Leftrightarrow x_1=x_2$ άρα f 1–1.

β) Στην αρχική για $\beta=f^{-1}(\alpha)$, έχουμε:

$f(\alpha+f(f^{-1}(\alpha)))=f(\alpha)+f^{-1}(\alpha)+2 \Leftrightarrow f(2\alpha)-2=f(\alpha)+f^{-1}(\alpha)$

γ) Αν η f ήταν περιττή τότε από τη σχέση $f(-x)=-f(x)$ προκύπτει $f(0)=0$.

Για $\alpha=\beta=0$ η αρχική σχέση γίνεται $f(f(0))=f(0)+2$ (1) $\Leftrightarrow$ $f(0)=f(0)+2 \Leftrightarrow 0=2$ που είναι άτοπο.

Β) Για $\alpha=0$ είναι $f(f(\beta))=f(0)+\beta+2$ και αν θέσουμε όπου β το $f(\beta)$, προκύπτει:

$f(f(f(\beta)))=f(0)+f(\beta)+2 \Leftrightarrow f(f(0)+\beta+2)=f(0)+f(\beta)+2$

Για $\beta=-2$, είναι $f(f(0)-2+2)=f(0)+f(-2)+2 \Leftrightarrow f(f(0))=f(0)+f(-2)+2 \overset{(1)}{\Leftrightarrow}$

$f(0)+2=f(0)+f(-2)+2 \Leftrightarrow f(-2)=0$

3. **α)** $f^2(x)-4xf(x)+4x^2=4x^2-x^2f(4-x) \Leftrightarrow [f(x)-2x]^2=x^2[4-f(4-x)]$ (1)

β) Για $x\neq 0$ είναι $4-f(4-x)=\dfrac{[f(x)-2x]^2}{x^2}\geq 0 \Leftrightarrow f(4-x)\leq 4$ και θέτοντας $4-x=u$, έχουμε $f(u)\leq 4$, άρα και $f(x)\leq 4$ για κάθε $x\neq 0$.

Για $x=0$ από την (1) προκύπτει $f(0)=0$, άρα $f(x)\leq 4$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

γ) Για $x=4$ είναι $f^2(4)-16f(4)=0 \Leftrightarrow f(4)=0$ ή $f(4)=16$ που απορρίπτεται

Για $x=2$ στην αρχική έχουμε: $f^2(2)+4f(2)=8f(2) \Leftrightarrow f^2(2)-4f(2)=0 \Leftrightarrow$

$f(2)(f(2)-4)=0 \Leftrightarrow f(2)=0$ ή $f(2)=4$ αφού έχει 2 ρίζες είναι $f(0)=0$, $f(4)=0$ άρα $f(2)\neq 0$ και $f(2)=4$. Συνεπώς $f(x)\leq f(2)\ \ \forall x\in\mathbb{R}$.

4. **α)** $(1)\ f^{-1}(x)f(x)=1 \overset{f(x)\neq 0}{\Leftrightarrow} f^{-1}(x)=\dfrac{1}{f(x)} \overset{x=f(x)}{\Leftrightarrow} f^{-1}(f(x))=\dfrac{1}{f(f(x))} \Leftrightarrow x=\dfrac{1}{f(f(x))} \Leftrightarrow$

$f(f(x))=\dfrac{1}{x}\ (2)$

β) Στη (2) θέτουμε όπου x το $\dfrac{1}{x}$ έχουμε $f\left(f\left(\dfrac{1}{x}\right)\right)=x$ οπότε $f^{-1}\left[f\left(f\left(\dfrac{1}{x}\right)\right)\right]=f^{-1}(x) \Leftrightarrow$

$f\left(\dfrac{1}{x}\right)=f^{-1}(x) \overset{(1)}{\Leftrightarrow} f\left(\dfrac{1}{x}\right)=\dfrac{1}{f(x)} \Leftrightarrow f(x)f\left(\dfrac{1}{x}\right)=1\ \ (3)$

γ) Στη (3) για $x=1$ έχουμε: $f(1)\cdot f(1)=1 \Leftrightarrow f^2(1)=1 \Leftrightarrow f(1)=1$ ή $f(1)=-1$

Αν $f(1)=1$. Έστω $f\downarrow\mathbb{R}$, τότε για κάθε $x>1$ είναι $f(x)<f(1)=1 \overset{(1)}{\Leftrightarrow} \dfrac{1}{f^{-1}(x)} \Leftrightarrow$

$\dfrac{1}{f^{-1}(x)}<1 \Leftrightarrow f^{-1}(x)>1 \overset{f\downarrow}{\Leftrightarrow} f(f^{-1}(x))<f(1) \Leftrightarrow x<1$ που είναι άτοπο.

Όμοια στις υπόλοιπες περιπτώσεις.

δ) Είναι $f(-1)\cdot f(-1)=1 \Leftrightarrow f^2(-1)=1 \Leftrightarrow f(-1)=1$ ή $f(-1)=-1$

Επειδή $f(1)<f(-1)$, είναι $f(1)=-1$ και $f(-1)=1$

$f^{-1}(x)=x \Leftrightarrow f(f^{-1}(x))=f(x) \Leftrightarrow f(x)=x \Leftrightarrow \dfrac{1}{f^{-1}(x)}=x \Leftrightarrow f^{-1}(x)=\dfrac{1}{x} \Leftrightarrow x=\dfrac{1}{x} \Leftrightarrow$

$x^2=1 \Leftrightarrow x=\pm 1$, δηλαδή για $x=1$ είναι $f^{-1}(1)=1 \Leftrightarrow f(1)=1$ που είναι άτοπο.

Όμοια για $x=-1$.

5. **Α. α)** $3f(x)-2x=\eta\mu f(x)$. Αφού $|\eta\mu f(x)|\le|f(x)|$ τότε $|3f(x)-2x|\le|f(x)|$

β) Είναι $3f(x)=\eta\mu f(x)+2x$ άρα $|3f(x)|=|\eta\mu f(x)+2x|\le|\eta\mu f(x)|+|2x|\le|f(x)|+2|x|$

$2|f(x)|\le 2|x|$ άρα $|f(x)|\le|x|$

Β) α) $|f(x)|\le|x| \Leftrightarrow -|x|\le f(x)\le|x|$ και από το κριτήριο παρεμβολής είναι $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=0$.

Οπότε $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\eta\mu f(x)}{f(x)}=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{\eta\mu h}{h}=1$

β) Από τη σχέση $3f(x)-\eta\mu f(x)=2x \overset{x\neq 0}{\Rightarrow} \dfrac{3f(x)}{x}-\dfrac{\eta\mu f(x)}{x}=2 \Rightarrow$

$\dfrac{3f(x)}{x}-\dfrac{\eta\mu f(x)}{f(x)}\cdot\dfrac{f(x)}{x}=2 \Leftrightarrow \dfrac{f(x)}{x}\left(3-\dfrac{\eta\mu f(x)}{f(x)}\right)=2 \Rightarrow \dfrac{f(x)}{x}=\dfrac{2}{3-\dfrac{\eta\mu f(x)}{f(x)}}$

άρα $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{2}{3-\dfrac{\eta\mu f(x)}{f(x)}}\right)=\dfrac{2}{3-1}=2$.

6. **α)** Είναι: $2f^2(x)+g^2(x)+2x^2=2g(x)\left[f(x)+x\right] \Leftrightarrow$

$2f^2(x)-2f(x)g(x)+g^2(x)+2x^2-2xg(x)=0\ \ (2)$.

Η σχέση (2) είναι εξίσωση 2ου βαθμού ως προς $f(x)$ και επειδή υπάρχουν $f(x), g(x)$ που την επαληθεύουν, ισχύει: $\Delta \geq 0 \Leftrightarrow 4g^2(x) - 8\left[g^2(x) - 2xg(x) + 2x^2\right] \geq 0 \Leftrightarrow$

$4g^2(x) - 8g^2(x) + 16xg(x) - 16x^2 \geq 0 \Leftrightarrow -4g^2(x) + 16xg(x) - 16x^2 \geq 0 \Leftrightarrow$

$g^2(x) - 4xg(x) + 4x^2 \leq 0 \Leftrightarrow (g(x) - 2x)^2 \leq 0 \Leftrightarrow g(x) - 2x = 0 \Leftrightarrow g(x) = 2x$, $x \in \mathbb{R}$.

Τότε η σχέση (1) γίνεται: $2f^2(x) + 4x^2 + 2x^2 = 4x\left[f(x) + x\right] \Leftrightarrow$

$2f^2(x) + 4x^2 + 2x^2 = 4xf(x) + 4x^2 \Leftrightarrow 2f^2(x) - 4xf(x) + 2x^2 = 0 \Leftrightarrow$

$f^2(x) - 2xf(x) + x^2 = 0 \Leftrightarrow (f(x) - x)^2 = 0 \Leftrightarrow f(x) = x$, $x \in \mathbb{R}$.

Τότε είναι $f^2(x) = x^2$ και $g^3(x) = 8x^3$.

Είναι $(f^2 \circ g^3)(x) = f^2(g^3(x)) = (g^3(x))^2 = (8x^3)^2 = 64x^6$,

ενώ $\left[g^3 \circ (2f^2)\right](x) = g^3(2f^2(x)) = 8 \cdot (2x^2)^3 = 64x^6$, $x \in \mathbb{R}$.

Επομένως $(f^2 \circ g^3)(x) = \left[g^3 \circ (2f^2)\right](x)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

β) Επειδή η f έχει πεδίο ορισμού το $(0, +\infty)$ και η g το $(-\infty, 2)$, ισχύει: $f^2(x) = x^2$, $x > 0$ και $g^3(x) = 8x^3$, $x < 2$. Για το πεδίο ορισμού της $f^2 \circ g^3$, έχουμε:

$$\begin{cases} x \in A_{g^3} \\ g^3 \in A_{f^2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x < 2 \\ g^3(x) > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x < 2 \\ 8x^3 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x < 2 \\ x > 0 \end{cases} \text{ άρα } x \in (0,2) \ (1).$$

$$\begin{cases} x \in A_{2f^2} \\ 2f^2(x) \in A_{g^3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 0 \\ 2x^2 < 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 0 \\ x^2 < 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 0 \\ -1 < x < 1 \end{cases} \Rightarrow x \in (0,1) \ (2)$$

Από τις $(1), (2)$ προκύπτει ότι $x \in (0,1)$

γ) Είναι φανερό ότι οι f, g είναι $1-1$.

$f(x) = y \Leftrightarrow x = y$ άρα $f^{-1}(y) = y$, $f^{-1}(x) = x$, $x \in \mathbb{R}$.

$g(x) = y \Leftrightarrow 2x = y \Leftrightarrow x = \dfrac{y}{2}$ άρα $g^{-1}(y) = \dfrac{y}{2}$ και $g^{-1}(x) = \dfrac{x}{2}$, $x \in \mathbb{R}$

Είναι $A_{f^{-1} \circ g^{-1}} = A_{g^{-1} \circ 2f} = \mathbb{R}$, $(f^{-1} \circ g^{-1})(x) = f^{-1}(g^{-1}(x)) = \dfrac{x}{2}$, $(g^{-1} \circ 2f)(x) = g^{-1}(2f(x)) = \dfrac{2x}{2} = x$

$2(f^{-1} \circ g^{-1})(x) = 2 \cdot \dfrac{x}{2} = x = f(x) = \dfrac{1}{2} g(x) = (g^{-1} \circ 2f)(x)$

δ) $f^{821} + g(x) + 1 = 0 \Leftrightarrow x^{821} + 2x + 1 = 0 \ (3)$. Εστω $h(x) = x^{821} + 2x + 1$, $x \in \mathbb{R}$.

Εύκολα αποδεικνύεται ότι $h \uparrow \mathbb{R}$.

$\lim\limits_{x \to -\infty} h(x) = -\infty$, $\lim\limits_{x \to +\infty} h(x) = +\infty$ άρα $h(A) = \mathbb{R}$. Επειδή $0 \in h(A)$, υπάρχει μοναδικό $x_1 \in \mathbb{R}$ τέτοιο ώστε $h(x_1) = 0$.

7. α) Η f είναι συνεχής και δεν έχει ρίζες, οπότε διατηρεί πρόσημο στο $[2,10]$.

Αν $f(x) < 0$ για κάθε $x \in [2,10]$ τότε $f(2) \cdot f(5) \cdot f(10) < 0$ άτοπο,

άρα $f(x) > 0 \ \forall x \in [2,10]$

β) Αν $f(x)>5$ για κάθε $x\in[2,10]$ τότε $\left.\begin{matrix} f(2)>5 \\ f(5)>5 \\ f(10)>5 \end{matrix}\right\} \Rightarrow f(2)\cdot f(5)\cdot f(125)>125 \Leftrightarrow$

$125>125$ άτοπο. Όμοια και αν $f(x)<5 \ \ \forall x\in[2,10]$ προκύπτει $125<125$.

Άρα υπάρχουν $x_1,x_2\in[2,10]$ τέτοια ώστε $f(x_1)<5<f(x_2)$

γ) Λόγω του θεωρήματος ενδιάμεσων τιμών για την f στο $[x_1,x_2]$ υπάρχει $x_0\in[x_1,x_2]$ τέτοιο, ώστε $f(x_0)=5$.

8. **α)** Αφού f συνεχής και $f(x)\neq 0 \ \ \forall x\in[0,1]$ και $f(1)=1>0$ τότε $f(0)>0$

άρα $x_1<x_2 \Leftrightarrow f(x_1)>f(x_2) \Leftrightarrow \dfrac{1}{f(x_1)}<\dfrac{1}{f(x_2)}$ και $\dfrac{1}{x_1}>\dfrac{1}{x_2} \Leftrightarrow -\dfrac{1}{x_1}<-\dfrac{1}{x_2}$

άρα και $h(x_1)<h(x_2)$ άρα $h\uparrow$

β) $\lim\limits_{x\to 0^+} h(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}\left(\dfrac{1}{f(x)}-\dfrac{1}{x}+3\right)=-\infty$ αφού $f(0)>f(1)=1$ και $f(0)\in\mathbb{R}$

$\lim\limits_{x\to 1^-} h(x)=\lim\limits_{x\to 1^-}\left(\dfrac{1}{f(1)}-\dfrac{1}{1}+3\right)=3$ άρα $h(A)=(-\infty,3)$

γ) Η εξίσωση είναι ισοδύναμη με την $h(x)=0$ που έχει μοναδική ρίζα αφού $0\in(-\infty,3)$.

9. **α)** Για $x\neq 0 \overset{:x^2}{\Rightarrow} \left(\dfrac{f(x)}{x^2}\right)^2+\left(\dfrac{\eta\mu x}{x}\right)^2=2\dfrac{f(x)}{x}$

και $\lim\limits_{x\to 0}\left[\left(\dfrac{f(x)}{x^2}\right)^2+\left(\dfrac{\eta\mu x}{x}\right)^2\right]=\lim\limits_{x\to 0}\left[2\dfrac{f(x)}{x}\right] \Leftrightarrow L^2+1=2L \Leftrightarrow (L-1)^2=0 \Leftrightarrow L=1$

β) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(\eta\mu x)}{x^2-x}=\lim\limits_{x\to 0}\left[\dfrac{f(\eta\mu x)}{\eta\mu x}\dfrac{\eta\mu x}{x(x-1)}\right]=1\cdot 1\dfrac{1}{-1}=-1$

γ) Είναι $f^2(x)-2xf(x)+x^2=x^2-\eta\mu^2 x \Rightarrow (f(x)-x)^2=\eta\mu^2 x-x^2$

οπότε $h^2(x)=\eta\mu^2 x-x^2$. Είναι $|\eta\mu x|\leq|x|$ άρα $x^2-\eta\mu^2 x\geq 0$ και $x^2-\eta\mu^2 x=0$ μόνο για $x=0$. Άρα $h(x)$ έχει μοναδική ρίζα την $x=0$ οπότε διατηρεί πρόσημο σε καθένα $(-\infty,0)$, $(0,-\infty)$

δ) $h(x)=\sqrt{x^2-\eta\mu^2 x}$ ή $h(x)=-\sqrt{x^2-\eta\mu^2 x}$

ή $h(x)=\begin{cases} -\sqrt{x^2-\eta\mu^2 x} & , x<0 \\ 0 & , x=0 \\ \sqrt{x^2-\eta\mu^2 x} & , x>0 \end{cases}$ ή $h(x)=\begin{cases} \sqrt{x^2-\eta\mu^2 x} & , x<0 \\ 0 & , x=0 \\ -\sqrt{x^2-\eta\mu^2 x} & , x>0 \end{cases}$

10. **α)** Εστω $g(x)=f(x)-2x$, $x\in[0,1]$. Είναι $g(0)=f(0)$, $g(1)=f(1)-2$.

Για $x=0$ είναι $0<f(0)<1$ και για $x=1$ είναι $1<f(1)<2 \Leftrightarrow -1<f(1)-2<0$, άρα λόγω του θ. Bolzano....

β) Εστω $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ με $x_1 < x_2$, τότε.... $h(x_1) > h(x_2)$

γ) $e^x + 2f(x) - 2e^x f(x) = 0 \Leftrightarrow h(x) = 0$.

$h(0) = \dfrac{1}{f(0)} > 0$, $h(1) = \dfrac{1}{f(1)} + \dfrac{2}{e} - 2 < 0$ άρα λόγω του θ. Bolzano....

δ) όπου x το $\dfrac{1}{x}$: $\dfrac{1}{x^2} < f\left(\dfrac{1}{x}\right) < \dfrac{1}{x^2} + 1 \overset{\cdot x^4}{\Rightarrow} x^2 < x^4 f\left(\dfrac{1}{x}\right) < x^2 + x^4$ και με κριτήριο παρεμβολής

προκύπτει: $\lim\limits_{x \to 0} x^4 f\left(\dfrac{1}{x}\right) = 0$

Επίσης $\left|x^4 \eta\mu\dfrac{1}{x} f\left(\dfrac{1}{x}\right)\right| \le \left|x^4 f\left(\dfrac{1}{x}\right)\right| \Leftrightarrow -\left|x^4 f\left(\dfrac{1}{x}\right)\right| \le x^4 \eta\mu\dfrac{1}{x} f\left(\dfrac{1}{x}\right) \le \left|x^4 f\left(\dfrac{1}{x}\right)\right|$ και με κριτήριο

παρεμβολής προκύπτει: $\lim\limits_{x \to 0}\left(x^4 \eta\mu\dfrac{1}{x} f\left(\dfrac{1}{x}\right)\right) = 0$.

Επειδή και $\lim\limits_{x \to 0}(\ln x) = \lim\limits_{x \to 0^+}(\ln x) = -\infty$, είναι: $\lim\limits_{x \to 0}\left[x^4 \eta\mu\dfrac{1}{x} f\left(\dfrac{1}{x}\right) + \ln x\right] = -\infty$

11. α) Για $x \neq 0 : f(x) = \dfrac{\eta\mu(\kappa x)}{x} - x^3 \sigma\upsilon\nu\dfrac{1}{x}$ που είναι συνεχής στο $\mathbb{R}^*$ ως πράξη συνεχών

και αφού είναι συνεχής στο 0 θα είναι συνεχής και στο $\mathbb{R}$.

β) $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = \lim\limits_{x \to 0}\left[\kappa\dfrac{\eta\mu(\kappa x)}{\kappa x} - x^3 \sigma\upsilon\nu\dfrac{1}{x}\right] = \kappa \cdot 1 - 0 = f(0) = 4$ άρα $\kappa = 4$, με κριτήριο παρεμβολής

προκύπτει: $\lim\limits_{x \to 0} x^3 \sigma\upsilon\nu\dfrac{1}{x} = 0$

γ) $\left|\dfrac{\eta\mu x}{x}\right| = \dfrac{|\eta\mu x|}{|x|} \le \dfrac{1}{|x|} \Leftrightarrow -\dfrac{1}{|x|} \le \dfrac{\eta\mu x}{x} \le \dfrac{1}{|x|}$, με κριτήριο παρεμβολής προκύπτει: $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{\eta\mu x}{x} = 0$.

$\lim\limits_{x \to -\infty}\left(x^3 \sigma\upsilon\nu\dfrac{1}{x}\right) \overset{\frac{1}{x}=u}{=} \lim\limits_{u \to 0^-}\left(\dfrac{1}{u^3}\sigma\upsilon\nu u\right) = -\infty$, άρα $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$ και όμοια $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$

δ) Επειδή $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$, υπάρχει $\gamma < 0$ τέτοιο, ώστε $f(\gamma) > 0$.

Επειδή $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$, υπάρχει $\delta > 0$ τέτοιο, ώστε $f(\delta) < 0$. Λόγω θ. Bolzano...

12. α) Είναι $h(x)\left(f^2(x) - e^x\right) = 1 \neq 0$ άρα $f^2(x) - e^x \neq 0$ και αφού η f είναι συνεχής τότε η $\left(f^2(x) - e^x\right)$ είναι συνεχής και διατηρεί πρόσημο.

β) Αν $f^2(x) - e^x > 0 \Leftrightarrow f^2(x) > e^x$ τότε για $x = 0$ $f^2(0) > 1$ άτοπο.

Άρα $f^2(x) - e^x < 0 \Leftrightarrow |f(x)| < \sqrt{e^x} \Leftrightarrow -\sqrt{e^x} < f(x) < \sqrt{e^x}$ και από κ.π. $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = 0$

γ) Είναι $h(x) = \dfrac{1}{f^2(x) - e^x}$ οπότε η $h(x)$ είναι συνεχής ως πράξη συνεχής και

$\lim\limits_{x \to -\infty} h(x) = \lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{1}{f^2(x) - e^x} = -\infty$ αφού $\lim\limits_{x \to -\infty}\left(f^2(x) - e^x\right) = 0 - 0 = 0$ και $f^2(x) - e^x < 0$

δ) Εστω $g(x)=(x-1)(e^x+x)\left[h(x)+e^x\right]-x\left[f(x-1)+x\right]$

$g(0)=-(h(0)+1)\geq 0$ γιατί $h(0)+1=\dfrac{1}{f^2(0)-1}+1=\dfrac{f^2(0)}{f^2(0)-1}<0$

Επειδή $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=-\infty$ υπάρχει $\alpha>0$ τέτοιο ώστε $g(\alpha)<0$.

Είναι $g(0)g(\alpha)<0$, οπότε λόγω του θ. Bolzano...

13. α) Εστω $\sigma(x)=\dfrac{f(x)-5}{x}$, $x\neq 0$ με $\lim\limits_{x\to 0}\sigma(x)=4$, τότε $f(x)=x\sigma(x)+5$ και $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=5$

$2\eta\mu(x-1)+10(x-1)^3\leq(x-1)f(x)\leq 8x^2-14x+6\overset{x<1}{\Leftrightarrow}$

$2\dfrac{\eta\mu(x-1)}{x-1}+10(x-1)^2\geq f(x)\geq\dfrac{2\cancel{(x-1)}(4x-3)}{\cancel{x-1}}$ με κριτήριο παρεμβολής είναι $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x)=2$.

β) Εύκολα αποδεικνύεται ότι η h είναι γνησίως φθίνουσα οπότε

$h(A)=\left(\lim\limits_{x\to 1^-} h(x),\ \lim\limits_{x\to 0^+} h(x)\right)=(-2,+\infty)$

γ) Αρκεί να δείξουμε ότι η εξίσωση $e^{f(x)-4}=x$ έχει ακριβώς μία λύση $x_0\in(0,1)$.

Εστω $\varphi(x)=e^{f(x)-4}-x$. Εύκολα αποδεικνύεται ότι η φ είναι $\overset{\gamma}{\downarrow}$ στο $(0,1)$ και $\lim\limits_{x\to 0^+}\varphi(x)=e$,

$\lim\limits_{x\to 1^-}\varphi(x)=e^{-2}-1$. Άρα $\varphi(A)=\left(\dfrac{1}{e^2}-1,e\right)$ και $0\in\varphi(A)$

δ) Η εξίσωση γίνεται $xe^{\lambda}\cdot e^4=e^{f(x)}\Leftrightarrow xe^{\lambda}=e^{f(x)-4}$.

Θεωρώ $\omega(x)=e^{f(x)-4}-xe^{\lambda}$, $x\in(0,1)$ που είναι $\overset{\gamma}{\downarrow}$ και έχει σύνολο τιμών $\left(\dfrac{1}{e^2}-e^{\lambda},e\right)$

- Αν $\dfrac{1}{e^2}-e^{\lambda}<0\Rightarrow e^{\lambda}>e^{-2}\Rightarrow\lambda>-2$ τότε η εξίσωση έχει μία λύση.
- Αν $\dfrac{1}{e^2}-e^{\lambda}\geq 0$ δηλαδή $\lambda\leq -2$ καμία λύση.

14. α. i. Για $y=x_0$ είναι $|f(x)-f(x_0)|\leq|x-x_0|\Leftrightarrow -|x-x_0|\leq f(x)-f(x_0)\leq|x-x_0|$

Επειδή $\lim\limits_{x\to x_0}|x-x_0|=0$, είναι και $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=f(x_0)$.

ii. Αν $x_1\neq x_2$ τότε $\dfrac{h(x_1)-h(x_2)}{x_1-x_2}=\dfrac{f(x_1)-f(x_2)}{x_1-x_2}+4$. Όμως $\left|\dfrac{f(x_1)-f(x_2)}{x_1-x_2}\right|\leq 1\Rightarrow$

$-1\leq\dfrac{f(x_1)-f(x_2)}{x_1-x_2}\leq 1\overset{+4}{\Leftrightarrow} 3\leq\dfrac{h(x_1)-h(x_2)}{x_1-x_2}\leq 5$ άρα $\dfrac{h(x_1)-h(x_2)}{x_1-x_2}>0$ και $h\uparrow\mathbb{R}$

iii. $h(0)=-1<0$. Στην αρχική για $y=0$ προκύπτει: $|f(x)-f(0)|\leq|x|\Leftrightarrow$

$|f(x)|\leq|x|\Leftrightarrow -|x|\leq f(x)\leq|x|\Leftrightarrow\ -|x|+4x-1\leq f(x)+4x-1\leq|x|+4x-1$

και για $x=1$ είναι $2\leq h(1)\leq 4$ άρα $h(1)>0$. Οπότε Bolzano στο $[0,1]$

β) Για $x>0$

i. $|f(x)|\leq|x|\Leftrightarrow\left|\dfrac{f(x)}{x^2}\right|\leq\dfrac{1}{|x|}\Leftrightarrow -\dfrac{1}{|x|}\leq\dfrac{f(x)}{x^2}\leq\dfrac{1}{|x|}$. Επειδή $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{|x|}=0$ είναι και $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x^2}=0$

ii. $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{3x^2+4f(x)}{x^2+|f(x)|}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{3+4\dfrac{f(x)}{x^2}}{1+\left|\dfrac{f(x)}{x^2}\right|}=3$

15. α) Θέτουμε $\kappa-x=\omega$ οπότε $x=\kappa-\omega$ και $\omega\to0$ και το όριο γίνεται

$$\lim_{\omega\to0}\left[\frac{1}{\omega}\eta\mu\left(\frac{\pi}{\kappa}(\kappa-\omega)\right)\right]=\lim_{\omega\to0}\left[\frac{1}{\omega}\eta\mu\left(\pi-\frac{\pi}{\kappa}\omega\right)\right]=\lim_{\omega\to0}\left[\frac{1}{\omega}\eta\mu\left(\frac{\pi}{\kappa}\omega\right)\right]=...=\frac{\pi}{\kappa}$$

β) Είναι $\eta\mu\left(\frac{\pi}{\kappa}x\right)\geq\kappa f(x)-xf(x)\Leftrightarrow(\kappa-x)f(x)\leq\eta\mu\left(\frac{\pi}{\kappa}x\right)$

Για $x>\kappa$ είναι $f(x)\leq\dfrac{\eta\mu\left(\frac{\pi}{\kappa}x\right)}{\kappa-x}$ και $\lim\limits_{x\to\kappa^+}f(x)\leq\lim\limits_{x\to\kappa^+}\dfrac{\eta\mu\left(\frac{\pi}{\kappa}x\right)}{\kappa-x}\Leftrightarrow f(\kappa)\leq\dfrac{\pi}{\kappa}$

Για $x<\kappa$ είναι $f(x)\geq\dfrac{\eta\mu\left(\frac{\pi}{\kappa}x\right)}{\kappa-x}$ και $\lim\limits_{x\to\kappa^+}f(x)\geq\lim\limits_{x\to\kappa^+}\dfrac{\eta\mu\left(\frac{\pi}{\kappa}x\right)}{\kappa-x}\Leftrightarrow f(\kappa)\geq\dfrac{\pi}{\kappa}$

Άρα $f(\kappa)=\dfrac{\pi}{\kappa}$.

γ) Στη σχέση $xf(x)\geq\kappa f(x)-\eta\mu\left(\frac{\pi}{\kappa}x\right)$ για $x=0$ έχουμε $kf(0)\leq0\overset{k>3}{\Leftrightarrow}f(0)\leq0$.

Αν $f(0)=0$, τότε το 0 είναι ρίζα της f.

Αν $f(0)\neq0$ τότε $f(0)<0$, $f(\kappa)=\dfrac{\pi}{k}>0$ άρα από θ.Bolzano στο $[0,k]$ η f έχει ρίζα.

16. α) Αφού $-3,3$ διαδοχικές ρίζες της $f(x)=0$ και η f είναι συνεχής, θα είναι $f(x)\neq0$ για κάθε $x\in(-3,3)$. Επειδή $f(0)>0$ είναι $f(x)>0\quad\forall x\in(-3,3)$

β) Εστω $g(x)=f(2)f(x)+5x^4+x^2-17$ με $\lim\limits_{x\to+\infty}g(x)=-\infty$.

Είναι $f(2)>0$ και $f(x)=\dfrac{1}{f(2)}\left[g(x)-5x^4-x^2+17\right]$ άρα $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=-\infty$

γ) Επειδή $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=-\infty$ υπάρχει $\xi\in(4,+\infty)$ τέτοιο που $f(\xi)<0$ και αφού $f(4)>0$ τότε από το θεώρημα Bolzano η $f(x)=0$ έχει τουλάχιστον μία ρίζα στο $(4,\xi)$.

17. α) Επειδή η f είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$ είναι συνεχής και στο $x_0=0$, άρα $\lim\limits_{x\to0}f(x)=f(0)$.

Παρατηρούμε ότι αν αντικαταστήσουμε $x=0$ στη (1) προκύπτει $f(1)+e^{f(0)}=1$ απ' όπου δεν μπορούμε να υπολογίσουμε το $f(0)$.

Είναι $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[f\left(e^{-x}\right)+e^{f(x)}\right]=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(e^{-x}\right)=0$. Είναι $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(e^{f(x)}\right)=e^{\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)}=e^0=1$

Για το όριο $\lim\limits_{x\to+\infty}f\left(e^{-x}\right)$, θέτουμε $e^{-x}=u$, οπότε όταν $x\to+\infty$, τότε $u\to0$, οπότε:

$\lim\limits_{x\to+\infty}f\left(e^{-x}\right)=\lim\limits_{u\to0}f(u)=f(0)$.

Είναι $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[f\left(e^{-x}\right)+e^{f(x)}\right]=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(e^{-x}\right)=0\Leftrightarrow f(0)+1=0\Leftrightarrow f(0)=-1$.

β) Επειδή $f(1)+e^{f(0)}=1$, έχουμε: $f(1)+e^{-1}=1 \Leftrightarrow f(1)=1-e^{-1}$

Εστω $h(x)=2f(x)+2x+1,\ x\in[0,1]$.

Είναι $h(0)=2f(0)+1=-2+1=-1<0$

$h(1)=2f(1)+2+1=2-2e^{-1}+3=5-\dfrac{2}{e}>0$, δηλαδή $h(0)h(1)<0$ και επειδή η h είναι συνεχής στο $[0,1]$ ως άθροισμα συνεχών συναρτήσεων, λόγω του Θ.Β η $h(x)=0$ έχει τουλάχιστον μία ρίζα στο $(0,1)$.

γ) Εστω $g(x)=f(x)+\dfrac{1}{2e},\ x\in[0,1]$. Η g είναι συνεχής στο $[0,1]$.

$g(0)=f(0)+\dfrac{1}{2e}=-1+\dfrac{1}{2e}<0,\ g(1)=f(1)+\dfrac{1}{2e}$.

Όμως $f(e^0)+e^{f(0)}=e^0 \Leftrightarrow f(1)+\dfrac{1}{e}=1 \Leftrightarrow f(1)=1-\dfrac{1}{e}$, άρα $g(1)=1-\dfrac{1}{e}+\dfrac{1}{2e}>0$

άρα λόγω του Θ.Β πάρχει $x_0\in(0,1)$ τέτοιο, ώστε $g(x_0)=0 \Leftrightarrow f(x_0)=-\dfrac{1}{2e}$

18. α) $\lim\limits_{x\to-2}\dfrac{x+2}{f(x+2)}=2 \underset{x+2=u}{\overset{u\to0}{\Leftrightarrow}} \lim\limits_{u\to0}\dfrac{u}{f(u)}=2$.

Εστω $g(u)=\dfrac{u}{f(u)} \Leftrightarrow g(u)f(u)=u \quad (1)$ αφού η f είναι συνεχής θα ισχύει $\lim\limits_{u\to0}f(u)\in\mathbb{R}$, οπότε

$\lim\limits_{u\to0}g(u)\cdot\lim\limits_{u\to0}f(u)=0$ άρα $\lim\limits_{u\to0}f(u)=0=f(0)$

β) $\lim\limits_{u\to0}\dfrac{u}{f(u)}=2 \Leftrightarrow \lim\limits_{u\to0}\dfrac{f(u)}{u}=\dfrac{1}{2}$

$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(\eta\mu x)}{x}=\lim\limits_{x\to0}\left[\dfrac{f(\eta\mu x)}{\eta\mu x}\cdot\dfrac{\eta\mu x}{x}\right]=\dfrac{1}{2}\cdot1=\dfrac{1}{2}$ γιατί $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(\eta\mu x)}{\eta\mu x}\overset{\eta\mu x=u}{=}\lim\limits_{u\to0}\dfrac{f(u)}{u}=\dfrac{1}{2}$

γ) Εστω $h(x)=f(x)-x+1,\ x\in[0,1]$. Είναι $h(0)=1>0$, $h(1)=f(1)<0$ γιατί

$1>0 \overset{f\downarrow}{\Leftrightarrow} f(1)<f(0)=0$, δηλαδή $h(0)h(1)<0$ και λόγω Θ.Β υπάρχει $x_0\in(0,1)$ τέτοιο, ώστε $h(x_0)=0$. Για κάθε $x_1,x_2\in(0,1)$ με $x_1<x_2$ είναι $f(x_1)>f(x_2)$ και $-x_1+1>-x_2+1$, άρα και $h(x_1)>h(x_2)$, οπότε h γνησίως φθίνουσα και το x_0 είναι μοναδικό.

19. α) Εστω ότι $\exists\theta\in(0,+\infty)$ τέτοιο ώστε $f(\theta)=0$.

Για $x=\theta$ και $y=1$ έχουμε $f(\theta)=0-\dfrac{\theta^2+1}{\theta}\Rightarrow\theta^2=-1$ άτοπο.

Άρα $f(x)\neq0\ \ \forall x\in(0,+\infty)$ και επειδή είναι συνεχής, διατηρεί σταθερό πρόσημο.

β) Αφού $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=+\infty, \exists\alpha\in(0,+\infty)$: $f(\alpha)>0$ άρα $f(x)>0$ για κάθε $x>0$.

Στην (1) για $x=y=1$ είναι: $f(1)=2$ ή $f(1)=-1$ που απορρίπτεται. Άρα $f(1)=2$

γ) Στην (1) για $y=1\Rightarrow f(x)=2f(x)-\dfrac{x^2+1}{x}\Leftrightarrow f(x)=x+\dfrac{1}{x}$

δ) Διαιρώντας με x η εξίσωση γίνεται $x+\sigma\upsilon\nu\dfrac{\pi}{x}-1+\dfrac{1}{x}=0\Leftrightarrow x+\dfrac{1}{x}=1-\sigma\upsilon\nu\dfrac{\pi}{x}$.

Όμως ισχύει $x+\frac{1}{x}\geq 2\ \forall x\in(0,+\infty)$ και $f(1)=2$ μόνο για $x=1$. Επίσης $1-\sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{x}\leq 2$ οπότε

$$\left.\begin{aligned} x+\frac{1}{x}&=2\\ 1-\sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{x}&=2\end{aligned}\right\}\Rightarrow x=1$$

20. α) Πρέπει $g(x)>0$ άρα $D_f=\{x\in\mathbb{R}\,/\,g(x)>0\}$

Εστω $x_1<x_2\overset{f\downarrow}{\Leftrightarrow}f(x_1)>f(x_2)\Leftrightarrow\ln(g(x_1))>\ln(g(x_2))\Leftrightarrow g(x_1)>g(x_2)$ άρα $g\downarrow$

β) Είναι $3<4<5<6$ και $g(3)>g(4)>g(5)>g(6)$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{(g(3))^x\left[1-\left(\frac{g(4)}{g(3)}\right)^x+\left(\frac{g(5)}{g(3)}\right)^x\right]}{(g(4))^x\left[\left(\frac{g(6)}{g(4)}\right)^x+\left(\frac{g(5)}{g(4)}\right)^x+1\right]}=\lim_{x\to+\infty}\left\{\left(\frac{g(3)}{g(4)}\right)^x\frac{\left[1-\left(\frac{g(4)}{g(3)}\right)^x+\left(\frac{g(5)}{g(3)}\right)^x\right]}{\left[\left(\frac{g(6)}{g(4)}\right)^x+\left(\frac{g(5)}{g(4)}\right)^x+1\right]}\right\}=+\infty$$

γιατί $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{g(3)}{g(4)}\right)^x=+\infty$ και $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{g(4)}{g(3)}\right)^x=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{g(5)}{g(3)}\right)^x=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{g(6)}{g(4)}\right)^x=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{g(5)}{g(4)}\right)^x=0$

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{(g(5))^x\left[\left(\frac{g(3)}{g(5)}\right)^x-\left(\frac{g(4)}{g(5)}\right)^x+1\right]}{(g(6))^x\left[1+\left(\frac{g(5)}{g(6)}\right)^x+\left(\frac{g(5)}{g(6)}\right)^x+\left(\frac{g(4)}{g(6)}\right)^x\right]}=0$$

γ) Εστω $h(x)=f(x)-\ln 2$, $x\in[1,+\infty)$. $h(1)=f(1)-\ln 2=\ln 4030-\ln 2=\ln 2015>0$.

Επειδή $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=-\infty$ είναι και $\lim\limits_{x\to+\infty}h(x)=-\infty$, οπότε υπάρχει $\alpha>1$ τέτοιο, ώστε $h(\alpha)<0$, δηλαδή $h(1)h(\alpha)<0$ και επειδή η h είναι συνεχής, λόγω του θ.B η $h(x)=0$ έχει τουλάχιστον μία ρίζα στο $(1,\alpha)\subseteq(1,+\infty)$. Εύκολα αποδεικνύεται ότι η h είναι $\downarrow$ στο $(1,\alpha)$, άρα το x_0 είναι μοναδικό.

21. α) Είναι $f^3(x)+5f(x)=x^5+3x+1\Leftrightarrow f(x)\left(f^2(x)+5\right)=x^5+3x+1\Leftrightarrow f(x)=\frac{x^5+3x+1}{f^2(x)+5}$.

Για $x=0$ είναι $f(0)=\frac{1}{f^2(0)+5}>0$ και για $x=-1$ είναι $f(-1)=\frac{-3}{f^2(-1)+5}<0$, δηλαδή $f(0)f(-1)<0$. Επειδή η f είναι συνεχής στο $[-1,0]$ λόγω του θεωρήματος Bolzano η εξίσωση $f(x)=0$ έχει τουλάχιστον μια ρίζα στο $(-1,0)$ και επειδή η f είναι γνησίως αύξουσα η ρίζα είναι μοναδική.

β) Επειδή η f είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$ είναι και 1–1, οπότε αντιστρέφεται.

γ) Είναι $f(x_0)=0$, δηλαδή το σημείο $K(x_0,0)$ ανήκει στη C_f, οπότε το σημείο $M(0,x_0)$ ανήκει στη γραφική παράσταση της f^{-1}.

δ) Επειδή η f είναι γνησίως αύξουσα έχουμε $f(x)=f^{-1}(x)\Leftrightarrow f(x)=x$. Η σχέση (1) γίνεται

$x^3+5x=x^5+3x+1\Leftrightarrow x^5-x^3-2x+1=0$.

Εστω $h(x)=x^5-x^3-2x+1,\ x\in[0,1]$. Είναι $h(0)=1>0$, $h(1)=-1<0$ και h συνεχής στο $[0,1]$, οπότε λόγω του θεωρήματος Bolzano η εξίσωση $h(x)=0\Leftrightarrow\ x^5-x^3-2x+1=0$, έχει τουλάχιστον μια ρίζα στο $(0,1)$.

22. α) $f^2(x)-1=2xf(x)\Leftrightarrow(f(x)-x)^2=x^2+1\neq0\ \ (1)$, άρα η $f(x)-x$ διατηρεί σταθερό πρόσημο.

β) Για $x=0$ είναι $f^2(0)=1\Leftrightarrow f(0)=\pm1$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(0)\cdot x^4-5x^3+2}{x^3-2x^2-x+3}=\lim_{x\to+\infty}\frac{f(0)x^4}{x^3}=\lim_{x\to+\infty}f(0)x$$

Για να είναι $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(0)\cdot x^4-5x^3+2}{x^3-2x^2-x+3}=+\infty$, πρέπει $f(0)>0$, άρα $f(0)=1$

γ) Επειδή $f(0)-0=1>0$ είναι $f(x)-x>0$, άρα $(1)\Rightarrow f(x)-x=\sqrt{x^2+1}\Leftrightarrow f(x)=\sqrt{x^2+1}+x$

δ) $$\lim_{x\to-\infty}f(x)=\lim_{x\to-\infty}\left(\sqrt{x^2+1}+x\right)=\lim_{x\to-\infty}\frac{x^2+1-x^2}{\sqrt{x^2+1}-x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{1}{x\left(-\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}-1\right)}=0$$

23. α) Επειδή η f είναι συνεχής και $f(x)\neq0$ για κάθε $x\in[9,12]$, η f θα διατηρεί σταθερό πρόσημο στο διάστημα $[9,12]$. Επειδή $f(9)>0$ ισχύει ότι $f(x)>0$ για κάθε $x\in[9,12]$.

β) Εστω $g(x)=f^2(x)-f(9)f(10),\ x\in[9,10]$.

Είναι $g(9)=f^2(9)-f(9)f(10)=f(9)\left[f(9)-f(10)\right]$ και

$g(10)=f^2(10)-f(9)f(10)=-f(10)\left[f(9)-f(10)\right]$.

Είναι $g(9)g(10)=-f(9)f(10)\left[f(9)-f(10)\right]^2\le0$

- Αν $g(9)g(10)=0$ τότε $g(9)=0$ ή $g(10)=0$ άρα $x_1=9$ ή $x_1=10$
- Αν $g(9)g(10)<0$, επειδή η g είναι συνεχής στο $[9,10]$ λόγω του θεωρήματος Bolzano υπάρχει $x_1\in(9,10)$ τέτοιο, ώστε $g(x_1)=0\Leftrightarrow(f(x_1))^2=f(9)f(10)$

Όμοια εφαρμόζουμε το θ. Bolzano για την $g(x)=f^2(x)-f(11)f(12)$ στο διάστημα $[11,12]$.

γ) Είναι $f^2(x_1)=f^2(x_2)$ και αφού $f(x)>0$ είναι $f(x_1)=f(x_2)$ για $x_1\neq x_2$ αφού $x_1\in[9,10]$ και $x_2\in[11,12]$. Οπότε η f δεν είναι 1–1.

24. α) Επειδή η f έχει πεδίο ορισμού το $[1,3]$, για να ορίζεται η g πρέπει:

$$\begin{cases}1\le x\le3\\1\le x+1\le3\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}1\le x\le3\\0\le x\le2\end{cases}$$ άρα $1\le x\le2$ και $A_g=[1,2]$.

β) Είναι $g(1)=f(1)+f(2)$ και $g(2)=f(2)+f(3)$.

Όμως $f(1)+2f(2)+f(3)=0\Leftrightarrow f(2)+f(3)=-f(1)-f(2)$, άρα $g(2)=-(f(1)+f(2))$ και

$g(1)g(2)=-(f(1)+f(2))^2\le0$

Αν $g(1)g(2)<0$, τότε επειδή η g είναι συνεχής στο $[1,2]$, λόγω του θεωρήματος Bolzano, υπάρχει $\xi\in(1,2)$ τέτοιο ώστε: $g(\xi)=0 \Leftrightarrow f(\xi+1)=-f(\xi)$.

Αν $g(1)g(2)=0 \Leftrightarrow g(1)=0$ ή $g(2)=0$, τότε $\xi=1$ ή $\xi=2$.

Άρα γενικά υπάρχει $\xi\in[1,2]$ τέτοιο ώστε $g(\xi)=0 \Leftrightarrow f(\xi+1)=-f(\xi)$.

γ) Επειδή η f είναι συνεχής στο $[1,3]$, υπάρχουν $m,M\in\mathbb{R}$ τέτοια, ώστε: $m\le f(x)\le M$ για κάθε $x\in[1,3]$. Άρα $m\le f(1)\le M$, $m\le f(2)\le M$, $m\le f(3)\le M$

Με πρόσθεση κατά μέλη προκύπτει: $3m\le f(1)+f(2)+f(3)\le 3M$.

Όμως $f(1)+2f(2)+f(3)=0 \Leftrightarrow f(1)+f(2)+f(3)=-f(2)$, άρα $3m\le -f(2)\le 3M \Leftrightarrow$

$m\le -\dfrac{f(2)}{3}\le M$. Δηλαδή ο αριθμός $-\dfrac{f(2)}{3}$ ανήκει στο σύνολο τιμών της f, οπότε υπάρχει

$x_0\in[1,3]$ τέτοιο ώστε $f(x_0)=-\dfrac{f(2)}{3}$.

25. α) $f(-2)=6>f(2)=1$ η f είναι γνησίως φθίνουσα. Άρα $f([-2,2])=[1,6]$.

β) Αν $k<1$ ή $k>6$, τότε $k\notin[1,6]$, οπότε η $f(x)=k$ είναι αδύνατη.

Αν $k\in[1,6]$, τότε η $f(x)=k$ έχει μοναδική ρίζα.

γ) $-2<-1<0<1<2 \overset{f\downarrow}{\Leftrightarrow} 6=f(-2)>f(-1)>f(0)>f(1)>f(2)=1$, άρα

$4f(2)<4f(-1)<4f(-2) \Leftrightarrow 4<4f(-1)<24$, $3f(2)<3f(0)<3f(-2) \Leftrightarrow 3<3f(0)<18$ και

$2f(2)<2f(1)<2f(-2) \Leftrightarrow 2<2f(1)<12$ και με πρόσθεση κατά μέλη προκύπτει:

$$9<4f(-1)+3f(0)+2f(1)<54 \Leftrightarrow 1<\frac{4f(-1)+3f(0)+2f(1)}{9}<6$$

Επειδή ο αριθμός $\dfrac{4f(-1)+3f(0)+2f(1)}{9}$ βρίσκεται στο εσωτερικό του συνόλου τιμών της f και η f είναι γνησίως φθίνουσα, οπότε υπάρχει μοναδικός $\xi\in(-2,2)$ τέτοιος ώστε:

$$f(\xi)=\frac{4f(-1)+3f(0)+2f(1)}{9} \Leftrightarrow 9f(\xi)=4f(-1)+3f(0)+2f(1)$$

26. α) Εστω $f\downarrow$ τότε για κάθε $x_1,x_2\in\mathbb{R}$ με $x_1<x_2$ είναι $f(x_1)>f(x_2)$.

Τότε $f(f(x_1))<f(f(x_2))$ και $-f(x_1)<-f(x_2)$, άρα και

$f(f(x_1))-f(x_1)<f(f(x_2))-f(x_2) \Leftrightarrow 1-\dfrac{1}{4}x_1<1-\dfrac{1}{4}x_2 \Leftrightarrow x_1>x_2$ που είναι άτοπο. Άρα $f\uparrow\mathbb{R}$.

β) Εστω $h(x)=f(x)-\lambda x$, $h(0)=f(0)>0$, $h(4)=f(4)-4\lambda$

Στην αρχική για $x=4$: $f(f(4))=f(4)\Rightarrow f(4)=4$ οπότε $h(4)=4(1-\lambda)<0$ οπότε θ.Bolzano στο $[0,4]$.

γ) Είναι $f(f(x))=f(x)-\dfrac{1}{4}x+1 \overset{:x}{\Leftrightarrow} \dfrac{f(f(x))}{x}=\dfrac{f(x)}{x}-\dfrac{1}{4}+\dfrac{1}{x}$ (2)

και $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(f(x))}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{f(f(x))}{f(x)}\cdot\dfrac{f(x)}{x}\right)=\alpha\cdot\alpha=\alpha^2$

Είναι $f\left(f(x)\right)-f(x)=1-\frac{1}{4}x \overset{x>0}{\Leftrightarrow} \frac{f\left(f(x)\right)}{x}-\frac{f(x)}{x}=\frac{1}{x}-\frac{1}{4}$

και $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[\frac{f\left(f(x)\right)}{x}-\frac{f(x)}{x}\right]=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{4}\right) \Leftrightarrow \alpha^2-\alpha=\frac{1}{4} \Leftrightarrow \alpha=\frac{1}{2}$

27. α) $f^3(x)+3f(x)=2x-1\ (1)$. Για $x=x_0$ προκύπτει: $f^3(x_0)+3f(x_0)=2x_0-1\ (2)$.

Με αφαίρεση κατά μέλη των (1), (2) προκύπτει:

$f^3(x)-f^3(x_0)+3f(x)-3f(x_0)=2x-2x_0 \Leftrightarrow$

$\left(f(x)-f(x_0)\right)\left(f^2(x)+f(x)f(x_0)+f^2(x_0)+3\right)=2(x-x_0)$.

Η παράσταση $f^2(x)+f(x)f(x_0)+f^2(x_0)$ είναι 2ου βαθμού ως προς $f(x)$ με

$\Delta=-3f^2(x_0)\le 0$ άρα $f^2(x)+f(x)f(x_0)+f^2(x_0)\ge 0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$, οπότε

$f^2(x)+f(x)f(x_0)+f^2(x_0)+3\ge 3>0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

Άρα $f(x)-f(x_0)=\frac{2(x-x_0)}{f^2(x)+f(x)f(x_0)+f^2(x_0)+3}$

και $\left|f(x)-f(x_0)\right|=\frac{2|x-x_0|}{\left|f^2(x)+f(x)f(x_0)+f^2(x_0)+3\right|}\quad (3)$

Είναι $f^2(x)+f(x)f(x_0)+f^2(x_0)+3\ge 3 \Leftrightarrow \left|f^2(x)+f(x)f(x_0)+f^2(x_0)+3\right|\ge 3 \Leftrightarrow$

$\frac{1}{\left|f^2(x)+f(x)f(x_0)+f^2(x_0)+3\right|}\le\frac{1}{3} \Leftrightarrow \frac{2|x-x_0|}{\left|f^2(x)+f(x)f(x_0)+f^2(x_0)+3\right|}\le\frac{2|x-x_0|}{3}$

Η σχέση (3) γίνεται $\left|f(x)-f(x_0)\right|=\frac{|x-x_0|}{\left|f^2(x)+f(x)\cdot f(x_0)+f^2(x_0)+3\right|}\le\frac{2|x-x_0|}{3} \Leftrightarrow$

$-\frac{2|x-x_0|}{3}\le f(x)-f(x_0)\le\frac{2|x-x_0|}{3}$.

Επειδή $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{2|x-x_0|}{3}=0$ και $\lim\limits_{x\to x_0}\left(-\frac{2|x-x_0|}{3}\right)=0$, από το κριτήριο παρεμβολής είναι και

$\lim\limits_{x\to x_0}\left(f(x)-f(x_0)\right)=0$, άρα η f είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$.

β) Εστω ότι υπάρχουν $x_1,x_2\in\mathbb{R}$ με $x_1<x_2$ τέτοια, ώστε $f(x_1)\ge f(x_2)$, τότε $f^3(x_1)\ge f^3(x_2)$,

άρα και $f^3(x_1)+3f(x_1)\ge f^3(x_2)+3f(x_2) \Leftrightarrow 2x_1-1\ge 2x_2-1 \Leftrightarrow x_1\ge x_2$ που είναι άτοπο.

γ) $f(0)\left(f^2(0)+3\right)=-1 \Leftrightarrow f(0)=-\frac{1}{f^2(0)+3}<0$

και $f(1)\left(f^2(1)+3\right)=1 \Leftrightarrow f(1)=\frac{1}{f^2(1)+3}>0$, άρα λόγω θ.Bolzano και επειδή η f είναι γνησίως αύξουσα υπάρχει μοναδικός $\rho\in(0,1)$ τέτοιος ώστε $f(\rho)=0$.

δ) Επειδή $f(0)<\theta<f(\rho)=0$, λόγω του ΘΕΤ, υπάρχει $\xi\in(0,\rho)$ τέτοιο, ώστε $f(\xi)=\theta$.

28. α) Για $x=1$: $f\left(f(1)\right)-f(1)=2 \Rightarrow f(3)=5$.

Άρα $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{f(1)x^5+2x^3-3}{f(3)x^4+4x+2}=\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{3x^5}{5x^4}=\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{3}{5}x=-\infty$

β) Επειδή η f είναι συνεχής ισχύει ότι $f(6)=8$,είναι $f(3)<7<f(6)$ οπότε λόγω του Θ.Ε.Τ υπάρχει $x_0\in(3,6):\ f(x_0)=7$

γ) $h(3)=3f(3)-50\sigma\upsilon\nu 3\pi=3\cdot 5+50>0$, $h(6)=6f(6)-50\sigma\upsilon\nu 6\pi=6\cdot 8-50=-2<0$ και λόγω του Θ.Bolzano...

δ) Επειδή η f είναι συνεχής στο $[1,6]$, υπάρχουν $m,M\in\mathbb{R}$ τέτοια ώστε $m\le f(x)\le M$ για κάθε $x\in[1,6]$. Άρα $3m\le 3f(2)\le 3M$, $2m\le 2f(4)\le 2M$, $4m\le 4f(5)\le 4M$, άρα και

$m\le\dfrac{3f(2)+2f(4)+4f(5)}{9}\le M$, οπότε υπάρχει $x_0\in[1,6]$ τέτοιο, ώστε

$$f(x_0)=\frac{3f(2)+2f(4)+4f(5)}{9}$$

29. α) $f^2(x)=\alpha^{2x}+4\alpha^x+4=(\alpha^x+2)^2>0$, άρα $f(x)\neq 0$ και επειδή είναι συνεχής, διατηρεί σταθερό πρόσημο.

β) Επειδή $f(0)=-3$ είναι $f(x)<0$, άρα $f(x)=-\alpha^x-2$.

γ) $$\lim_{x\to+\infty}\frac{3f(x)-4^x}{2\cdot 3^x+5\cdot 4^x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{-3\alpha^x-6-4^x}{2\cdot 3^x+5\cdot 4^x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\cancel{4^x}\left(-3\cancel{\left(\frac{\alpha}{4}\right)^x}^{\,0}-\frac{6}{4^x}-1\right)}{\cancel{4^x}\left(2\cancel{\left(\frac{3}{4}\right)^x}^{\,0}+5\right)}=-\frac{1}{5}$$

δ) $$\lim_{x\to-\infty}\frac{3f(x)-4^x}{3\cdot 3^x+6\cdot 4^x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{-3\alpha^x-6-4^x}{3\cdot 3^x+6\cdot 4^x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{\alpha^x\left(-3-\frac{6}{\alpha^x}-\left(\frac{4}{\alpha}\right)^x\right)}{3^x\left(3+6\left(\frac{4}{3}\right)^x\right)}=$$

$$\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{\alpha}{3}\right)^x\frac{-3-\frac{6}{\alpha^x}-\cancel{\left(\frac{4}{\alpha}\right)^x}^{\,0}}{3+6\cancel{\left(\frac{4}{3}\right)^x}^{\,0}}=A$$

Αν $\alpha\in(1,3)$ τότε $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{6}{\alpha^x}=+\infty$ και $A=-\infty$. Αν $\alpha\in(0,1)$, τότε $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{6}{\alpha^x}=0$ και $A=-\infty$ και αν $\alpha=1$ είναι $A=-\infty$.

30. α) Εστω ότι υπάρχουν $x_1,x_2\in\mathbb{R}$ με $x_1<x_2$ τέτοια, ώστε $f(x_1)\ge f(x_2)$, τότε $f^3(x_1)\ge f^3(x_2)$, άρα και $f^3(x_1)+f(x_1)\ge f^3(x_2)+f(x_2)\Leftrightarrow 3x_1-1\ge 3x_2-1\Leftrightarrow x_1\ge x_2$ που είναι άτοπο.

β) Επειδή η f είναι γνησίως αύξουσα, είναι 1-1 και αντιστρέφεται. Για $f(x)=y$ και $x=f^{-1}(y)$ προκύπτει $f^{-1}(y)=\dfrac{1}{3}(y^3+y+1)$, άρα $f^{-1}(x)=\dfrac{1}{3}(x^3+x+1)$, $x\in\mathbb{R}$

γ) $f(x)>x\Leftrightarrow f^3(x)>x^3$, άρα και $f^3(x)+f(x)>x^3+x\Leftrightarrow 3x-1>x^3+x\Leftrightarrow$

$$x^3-2x+1<0\Leftrightarrow(x-1)(x^2+x-1)<0\Leftrightarrow\ldots\Leftrightarrow x\in\left(\frac{-1-\sqrt{5}}{2},\frac{-1+\sqrt{5}}{2}\right)\cup(1,+\infty)$$

δ) Όπως **27. α)**

ε) $f\left(f(x)\right)-f\left(x^2-3x\right)=0 \Leftrightarrow f\left(f(x)\right)=f\left(x^2-3x\right) \overset{1-1}{\Leftrightarrow} f(x)=x^2-3x \Leftrightarrow f(x)-x^2+3x=0$

Εστω $g(x)=f(x)-x^2+3x$, $x\in[0,1]$

$f(0)\left(f^2(0)+1\right)=-1 \Leftrightarrow f(0)=-\dfrac{1}{f^2(0)+1}<0$, $f(1)\left(f^2(1)+1\right)=2 \Leftrightarrow f(1)=\dfrac{1}{f^2(1)+1}>0$

και Θ.Β.

στ) $f(x)-f(x_0)=\dfrac{3(x-x_0)}{f^2(x)+f(x)f(x_0)+f^2(x_0)+1} \Leftrightarrow \dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=\dfrac{3}{f^2(x)+f(x)f(x_0)+f^2(x_0)+1}$

και $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{3}{f^2(x)+f(x)f(x_0)+f^2(x_0)+1}=\dfrac{3}{3f^2(x_0)+1}$

ζ) $f^{-1}(0)=\dfrac{1}{3}\left(0^3+0+1\right)=\dfrac{1}{3}$ και $\left(f^{-1}(x)\right)'=\dfrac{1}{3}\left(3x^2+1\right)$, άρα $\left(f^{-1}\right)'(0)=\dfrac{1}{3}$

και ε: $y-\dfrac{1}{3}=\dfrac{1}{3}x \Leftrightarrow y=\dfrac{1}{3}x+\dfrac{1}{3}$

η) Για κάθε $0<x<1 \overset{f\uparrow}{\Leftrightarrow} f(0)<f(x)<f(1)$. Άρα $f(0)<f(0{,}1)<f(1)$ και $f(0)<f(0{,}01)<f(1)$,

άρα και $2f(0)<f(0{,}1)+f(0{,}01)<2f(1) \Leftrightarrow f(0)<\dfrac{f(0{,}1)+f(0{,}01)}{2}<f(1)$, οπότε σύμφωνα με το

ΘΕΤ, υπάρχει $\xi\in(0,1)$ τέτοιο ώστε $f(\xi)=\dfrac{f(0{,}1)+f(0{,}01)}{2} \Leftrightarrow 2f(\xi)=f(0{,}1)+f(0{,}01)$ και

επειδή $f\uparrow$, το ξ είναι μοναδικό.

θ) i. $f^3(2)+f(2)=5 \Leftrightarrow f(2)\left(f^2(2)+1\right)=5$, άρα $f(2)>0$ και

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(2)x^3+x^2-1821}{x^4+4x^2-1}=\lim_{x\to+\infty}\frac{f(2)x^3}{x^4}=\lim_{x\to+\infty}\frac{f(2)}{x}=0$$

ii. Θέτουμε $f(x)=y$ και $x=f^{-1}(y)$. Όταν $x\to 1$, τότε $y\to f(1)$.

$f(1)=k \Leftrightarrow f^{-1}(k)=1=f^{-1}(1)=1$

$$\lim_{x\to1}\frac{3f(x)-6x+3}{x-1}=\lim_{x\to1}\frac{3y-6f^{-1}(y)+3}{f^{-1}(y)-1}=\lim_{y\to1}\frac{3y-6\frac{1}{3}\left(y^3+y+1\right)+3}{\frac{1}{3}\left(y^3+y+1\right)-1}=$$

$$3\lim_{y\to1}\frac{-2y^3+y+1}{y^3+y-2}=3\lim_{y\to1}\frac{\cancel{(y-1)}\left(-2y^2-2y-1\right)}{\cancel{(y-1)}\left(y^2+y+2\right)}=-\frac{15}{4}$$

31. α) $f^3(x)+3x^2f(x)=4\eta\mu^3x \overset{x\neq0}{\Leftrightarrow} \dfrac{f^3(x)}{x^3}+\dfrac{3x^2f(x)}{x^3}=\dfrac{4\eta\mu^3x}{x^3}$

και $\lim\limits_{x\to0}\left[\dfrac{f^3(x)}{x^3}+\dfrac{3x^2f(x)}{x^3}\right]=\lim\limits_{x\to0}\left(\dfrac{4\eta\mu^3x}{x^3}\right) \Leftrightarrow \ell^3+3\ell=4 \Rightarrow \ell=1$

β) i. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(\eta\mu x)}{x}=\lim\left(\dfrac{f(\eta\mu x)}{\eta\mu x}\cdot\dfrac{\eta\mu x}{x}\right)=1\cdot1=1$

ii. $\lim\limits_{x\to0} f(x)=\lim\limits_{x\to0}\left(x\cdot\dfrac{f(x)}{x}\right)=0\cdot1=0$ οπότε $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(f(x))}{x}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(f(x))}{x}\cdot\dfrac{f(x)}{x}=1\cdot1=1$

iii. $\lim\limits_{x\to2}\dfrac{f(x^2-2x)}{x^2-5x+6}=\lim\limits_{x\to2}\dfrac{f(x^2-2x)}{x^2-2x}\cdot\dfrac{x^2-2x}{x^2-5x+6}=\lim\limits_{x\to2}\dfrac{f(x^2-2x)}{x^2-2x}\cdot\dfrac{x\cancel{(x-2)}}{\cancel{(x-2)}(x-3)}=1\cdot\dfrac{2}{-1}=-2$

γ) $f'(0)=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(x)}{x}=\ell=1$, ε: $y=x$

δ) $\begin{cases}x^2+y^2=8\\ y=x\end{cases}\Leftrightarrow x=2$ και $y=2$ ή $x=-2$ και $y=-2$

$\left(x^2(t)+y^2(t)\right)'=(8)'\Leftrightarrow 2x(t)x'(t)+2y(t)y'(t)=0$. Άρα $y'(t)=-1\,cm/s$

32. α) Εστω $x_1,x_2\in(0,+\infty)$ με $x_1<x_2$, τότε $2-x_1>2-x_2$, $-\ln x_1>-\ln x_2$, άρα $f(x_1)>f(x_2)$ και η f είναι γνησίως φθίνουσα.

β) $f(x)=f(1)\overset{1-1}{\Leftrightarrow}x=1$

γ) $x+\ln x>1\Leftrightarrow -x-\ln x<-1\Leftrightarrow 2-x-\ln x<1\Leftrightarrow f(x)<f(1)\overset{f\downarrow}{\Leftrightarrow}x>1$

δ) $f(1)=1>0$ και $f(e)=1-e<0$, άρα λόγω Θ.Β.

ε) $f'(x)=-1-\dfrac{1}{x}$, $f'(1)=-2$

Η εφαπτομένη είναι η ε: $y-f(1)=f'(1)(x-1)\Leftrightarrow y=-2x+3$.

Η ε τέμνει τους άξονες στα σημεία $A(0,3)$ και $B\left(\dfrac{3}{2},0\right)$. $(OAB)=\dfrac{1}{2}\cdot3\cdot\dfrac{3}{2}=\dfrac{9}{4}$

στ) Επειδή η f είναι γνησίως φθίνουσα, είναι 1–1 και αντιστρέφεται. $f^{-1}(f(x))=x$ άρα

$\left(f^{-1}(f(x))\right)'=(x)'$, δηλαδή $\left(f^{-1}\right)'(f(x))\cdot f'(x)=1\Leftrightarrow\left(f^{-1}\right)'(2-x-\ln x)\left(-1-\dfrac{1}{x}\right)=1$

Για $x=1$ είναι: $\left(f^{-1}\right)'(1)\cdot(-1-1)=1\Leftrightarrow\left(f^{-1}\right)'(1)=-\dfrac{1}{2}$

ζ) i. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(x)-2}{x}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\cancel{2}-x-\ln x\cancel{-2}}{x}=\lim\limits_{x\to0}\left(-1-\dfrac{1}{x}\ln x\right)=+\infty$

γιατί $\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{1}{x}=+\infty$, $\lim\limits_{x\to0^+}\ln x=-\infty$

ii. $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{f(x)+x-2}{x-1}=\lim\limits_{x\to1}\dfrac{2-x-\ln x+x-2}{x-1}=-\lim\limits_{x\to1}\dfrac{\ln x-\ln1}{x-1}=-\lim\limits_{x\to1}\dfrac{h(x)-h(1)}{x-1}=-h'(1)=-1$

όπου $h(x)=\ln x$, $h'(x)=\dfrac{1}{x}$ και $h'(1)=1$

33. α) Εστω ότι υπάρχουν $x_1,x_2\in\mathbb{R}$ με $x_1<x_2$ τέτοια, ώστε $f(x_1)\ge f(x_2)$.

Τότε: $e^{f(x_1)}\ge e^{f(x_2)}$ και $e^{f(x_1)}+f(x_1)\ge e^{f(x_2)}+f(x_2)\Leftrightarrow x_1\ge x_2$ άτοπο.

Άρα $f(x_1)<f(x_2)$ και f γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$.

β) Επειδή η f είναι γνησίως αύξουσα είναι και 1-1.

$f(x)=y \Leftrightarrow .... \Leftrightarrow f^{-1}(x)=e^x+x,\ x\in\mathbb{R}$

γ) Για να βρίσκεται η C_f κάτω από τη $C_{f^{-1}}$, αρκεί η $C_{f^{-1}}$ να βρίσκεται πάνω από την $y=x$, δηλαδή $f^{-1}(x)>x \Leftrightarrow e^x+x>x \Leftrightarrow e^x>0$ που ισχύει.

δ) Εστω $f(x)=y$, τότε $x=f^{-1}(y)$. Όταν $x\to 1$ τότε $f^{-1}(y)\to 1$ άρα $y\to 0$.

Άρα $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{f(x)}{x-1}=\lim\limits_{y\to 0}\dfrac{y}{f^{-1}(y)-1}=\lim\limits_{y\to 0}\dfrac{y}{e^y+y-1}=\lim\limits_{y\to 0}\dfrac{1}{\frac{e^y-1}{y}+1}=\dfrac{1}{2}$, γιατί αν θεωρήσουμε τη συνάρτηση $g(x)=e^x$, τότε $g'(0)=1=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-1}{x}$

ε) Είναι $e^{f(1)}+f(1)=1 \Leftrightarrow e^{f(1)}+f(1)-1=0$ (1)

Εστω $h(x)=e^x+x-1,\ x\in\mathbb{R}$. Εύκολα αποδεικνύεται ότι η h είναι $\uparrow$ στο $\mathbb{R}$, τότε η (1) γίνεται:

$h(f(1))=h(0)\overset{1-1}{\Leftrightarrow} f(1)=0$.

$\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{f(x)}{x-1}=\dfrac{1}{2}$, άρα $f'(1)=\dfrac{1}{2}$.

Η εφαπτομένη είναι: $y-f(1)=f'(1)(x-1)\Leftrightarrow y=\dfrac{1}{2}x-\dfrac{1}{2}$.

34. **α)** Για $x=y=0$ είναι $f(0)=f^2(0)\Leftrightarrow f(0)=1$ ή $f(0)=0$ που απορρίπτεται.

β) Για $\nu=2$ είναι $f(2x)=f^2(x)$. Αν στην αρχική αντικαταστήσουμε $y=x$ προκύπτει το ζητούμενο. Εστω ότι ισχύει για $\nu=\kappa$.

Θα δείξουμε ότι ισχύει και για $\nu=\kappa+1$, δηλαδή $f((\kappa+1)x)=f^{\kappa+1}(x)$.

Είναι $f((\kappa+1)x)=f(\kappa x+x)=f(\kappa x)f(x)=f^{\kappa}(x)f(x)=f^{\kappa+1}(x)$

γ) $\lim\limits_{h\to 0}f(x+h)=\lim\limits_{h\to 0}(f(x)f(h))=f(x)\lim\limits_{h\to 0}f(h)=f(x)f(0)=f(x)$

δ) f παραγωγίσιμη στο $x_0=0 \Leftrightarrow f'(0)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)-f(0)}{x}$

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{f(x)f(h)-f(x)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{f(x)(f(h)-1)}{h}=f(x)f'(0)$$

ε) $f^{-1}(f(x+y))=f^{-1}(f(x)f(y))\Leftrightarrow x+y=f^{-1}(f(x)f(y))$ (1)

$f(x)=k\Leftrightarrow x=f^{-1}(k)$, $f(y)=\lambda\Leftrightarrow y=f^{-1}(\lambda)$, τότε $(1)\Rightarrow f^{-1}(k)+f^{-1}(\lambda)=f^{-1}(k\lambda)$

35. **α)** Για $x=1$ είναι $f(-1)=2f(-1)+2\Leftrightarrow f(-1)=-2$

β) $\left(f(x^3-2x)\right)'=\left(2f(-x)+2x\right)'\Leftrightarrow (3x^2-2)f'(x^3-2x)=-2f'(-x)+2$

Για $x=1$: $f'(-1)=-2f'(-1)+2\Leftrightarrow f'(-1)=\dfrac{2}{3}$

γ) $f'(-1)=\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{f(x)+2}{x+1}=\dfrac{2}{3}$. Έστω $g(x)=\dfrac{f(x)+2}{x+1}\Leftrightarrow f(x)=g(x)(x+1)-2$, $x\neq -1$

$$\lim_{x\to -1}\frac{\left(x^2+1\right)\left(g(x)(x+1)-2\right)+4}{x+1}=\lim_{x\to -1}\left[\frac{\left(x^2+1\right)\cancel{(x+1)}g(x)}{\cancel{x+1}}-\frac{2(x-1)\cancel{(x+1)}}{\cancel{x+1}}\right]=$$

$$=2\frac{2}{3}+4=\frac{16}{3}$$

δ) $\left[f^3(5x+2)\right]' = \left[f^3(2x-4)-3x-6\right]' \Leftrightarrow$

$15f^2(5x+2)f'(5x+2) = 6f^2(2x-4)f'(2x-4)-3$

Για $x=-2: 15f^2(-8)f'(-8) = 6f^2(-8)f'(-8)-3 \Leftrightarrow 30f^2(-8) = 12f^2(-8)-3 \Leftrightarrow$

$f^2(-8) = -\frac{1}{6}$ που είναι αδύνατο

36. α) Επειδή f συνεχής, $f(x)\neq 0$ για κάθε $x\in[\alpha,\beta]$, η f διατηρεί σταθερό πρόσημο στο $[\alpha,\beta]$. Επειδή $f(\alpha)f(\beta)f\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right) = \frac{(\alpha+\beta)^3}{8} > 0$, τα $f(\alpha), f(\beta), f\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)$ είναι θετικοί αριθμοί, άρα $f(x)>0$ για κάθε $x\in[\alpha,\beta]$.

β) $\alpha < \frac{\alpha+\beta}{2} < \beta \overset{f\uparrow}{\Leftrightarrow} f(\alpha) < f\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right) < f(\beta)$, άρα $f^3(\alpha) < f(\alpha)f\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)f(\beta) < f^3(\beta) \Leftrightarrow$

$f^3(\alpha) < \frac{(\alpha+\beta)^3}{8} < f^3(\beta) \Leftrightarrow f(\alpha) < \frac{\alpha+\beta}{2} < f(\beta)$ και από το θεώρημα ενδιάμεσων τιμών υπάρχει $x_0\in(\alpha,\beta)$ τέτοιο, ώστε: $f(x_0) = \frac{\alpha+\beta}{2}$.

γ) i. $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{(\alpha+\beta)^3x^3+\eta\mu x}{8f(\alpha)x^3-5x^2+7} = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{(\alpha+\beta)^3+\frac{\eta\mu x}{x^3}}{8f(\alpha)-\frac{5}{x}+\frac{7}{x^3}} = \frac{(\alpha+\beta)^3}{8f(\alpha)} = f(\beta)f\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)$

Είναι $\left|\frac{\eta\mu x}{x^3}\right| \leq \frac{1}{|x^3|} \Leftrightarrow -\frac{1}{|x^3|} \leq \frac{\eta\mu x}{x^3} \leq \frac{1}{|x^3|}$, $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{|x^3|} = \lim\limits_{x\to+\infty}\left(-\frac{1}{|x^3|}\right) = 0$,

άρα και $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\eta\mu x}{x^3} = 0$

ii. $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{f\left(\frac{\alpha+2\beta}{3}\right)x^4 - f(\alpha)x^3 - 2f(\beta)}{f(\beta)x^3+f(\alpha)x^2-\beta} = \lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f\left(\frac{\alpha+2\beta}{3}\right)x^4}{f(\beta)x^3} = \lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f\left(\frac{\alpha+2\beta}{3}\right)x}{f(\beta)} = +\infty$

37. α) Εστω $x_1, x_2 \in D_f = \left(\frac{|z|}{4}, +\infty\right)$, με $x_1 < x_2$, τότε $f(x_1) < f(x_2)$.

β) $f(x) = f^{-1}(x) \Leftrightarrow f(x) = x \overset{f\uparrow}{\Leftrightarrow} \sqrt{4x-|z|}-|z| = x \Leftrightarrow \sqrt{4x-|z|} = x+|z| \Leftrightarrow$

$x^2+2(|z|-2)x+|z|^2+|z| = 0 \quad (1)$.

Επειδή οι $C_f, C_{f^{-1}}$ έχουν ένα μόνο κοινό σημείο, η (1) έχει μοναδική λύση, άρα

$\Delta = 0 \Leftrightarrow 4(|z|-2)^2 - 4\left(|z|^2+|z|\right) = 0 \Leftrightarrow \ldots \Leftrightarrow |z| = \frac{4}{5}$.

γ) Επειδή $|z| = \frac{4}{5}$ η εικόνα του z βρίσκεται σε κύκλο με κέντρο Ο και ακτίνα $\frac{4}{5}$. Οι εικόνες Α,Β δύο τυχαίων μιγαδικών z_1, z_2, έχουν μέγιστη απόσταση ίση με τη διάμετρο του κύκλου, άρα

$|z_1-z_2|_{max} = 2\cdot\frac{4}{5} = \frac{8}{5}$, άρα $|z_1-z_2| \leq \frac{8}{5} \Leftrightarrow 5|z_1-z_2|-8 \leq 0$

38. **α)** Εστω $x_1,x_2 \in \mathbb{R}$ με $f(x_1)=f(x_2)$, τότε $f^3(x_1)=f^3(x_2)$ και $3f(x_1)=3f(x_2)$,

άρα και $f^3(x_1)+f(x_1)=f^3(x_2)+f(x_2) \Leftrightarrow x_1-3=x_2-3 \Leftrightarrow x_1=x_2$ άρα η f είναι 1-1, οπότε αντιστρέφεται.

Εστω $f(x)=y$, τότε η σχέση (1) γίνεται: $y^3+3y=x-3 \Leftrightarrow x=y^3+3y+3$.

Όμως $x=f^{-1}(y)$, άρα $f^{-1}(y)=y^3+3y+3$, $y \in \mathbb{R}$, οπότε $f^{-1}(x)=x^3+3x+3$, $x \in \mathbb{R}$.

β) Εστω ότι υπάρχουν $x_1,x_2 \in \mathbb{R}$ με $x_1<x_2$ τέτοια ώστε $f(x_1)\geq f(x_2)$. Τότε $f^3(x_1)\geq f^3(x_2)$, $3f(x_1)\geq 3f(x_2)$ άρα και $f^3(x_1)+3f(x_1)\geq f^3(x_2)+3f(x_2) \Leftrightarrow x_1-3\geq x_2-3 \Leftrightarrow x_1\geq x_2$ που είναι άτοπο. Άρα $f(x_1)<f(x_2)$ και $f\uparrow \mathbb{R}$.

γ) Επειδή η f είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$ ισχύει: $f(x)=f^{-1}(x) \Leftrightarrow$

$f^{-1}(x)=x \Leftrightarrow x^3+3x+3=x \Leftrightarrow x^3+2x+3=0 \Leftrightarrow (x+1)(x^2-x+3)=0 \Leftrightarrow x=-1$ ή

$x^2-x+3=0$ που είναι αδύνατο $(\Delta<0)$.

δ) $f\left(f^{-1}\left(f\left(|z-6-8i|\right)-1\right)\right)=f(3) \Leftrightarrow f\left(|z-6-8i|\right)-1=0 \Leftrightarrow$

$f\left(|z-6-8i|\right)=1 \Leftrightarrow f^{-1}\left(f\left(|z-6-8i|\right)\right)=f^{-1}(1) \Leftrightarrow |z-6-8i|=7 \Leftrightarrow |z-(6+8i)|=7$

Οπότε ο γεωμετρικός τόπος των εικόνων του μιγαδικού z είναι κύκλος με κέντρο $K(6,8)$ και ακτίνα $\rho=7$.

ε) Είναι $|z-(6+8i)|\geq \left||z|-|6+8i|\right| \Leftrightarrow \left||z|-10\right|\leq |z-(6+8i)|=7 \Leftrightarrow \left||z|-10\right|\leq 7 \Leftrightarrow$

$-7\leq |z|-10\leq 7 \Leftrightarrow 10-7\leq |z|\leq 7+10 \Leftrightarrow 3\leq |z|\leq 17$.

στ) Είναι $|z-6-8i|=7 \Leftrightarrow |\alpha+\beta i-6-8i|=7 \Leftrightarrow (\alpha-6)^2+(\beta-8)^2=49 \ (1)$.

Εστω $g(x)=(\alpha-6)^2x^4+(\beta-8)^2x-5$, $x\in[0,1]$.

Η g είναι συνεχής στο διάστημα $[0,1]$ ως άθροισμα συνεχών συναρτήσεων.

Είναι $g(0)=-5<0$, $g(1)=(\alpha-6)^2+(\beta-8)^2-5=49-5=44>0$, δηλαδή $g(0)g(1)<0$

οπότε λόγω του θεωρήματος Bolzano η εξίσωση $g(x)=0 \Leftrightarrow (\alpha-6)^2x^4+(\beta-8)^2x-5=0$

έχει τουλάχιστον μία ρίζα στο $(0,1)$.

39. **α)** Εστω $x_1,x_2 \in \mathbb{R}$ με $f(x_1)=f(x_2)$, τότε $e^{f(x_1)}=e^{f(x_2)}$

και $e^{f(x_1)}+f(x_1)=e^{f(x_2)}+f(x_2) \Leftrightarrow x_1=x_2$, άρα η f είναι 1-1 και αντιστρέφεται.

Εστω $f(x)=y$, τότε $e^y+y=x$. Όμως $x=f^{-1}(y)$, άρα $f^{-1}(y)=e^y+y$, $y\in\mathbb{R}$, οπότε $f^{-1}(x)=e^x+x$, $x\in\mathbb{R}$.

β) Εστω $x_1,x_2 \in \mathbb{R}$ με $x_1<x_2$, τότε $e^{x_1}<e^{x_2}$ και $e^{x_1}+x_1<e^{x_2}+x_2 \Leftrightarrow f^{-1}(x_1)<f^{-1}(x_2)$,

άρα η f^{-1} είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$.

Αν οι $C_f, C_{f^{-1}}$ είχαν κοινά σημεία τότε, επειδή η f^{-1} είναι γνησίως αύξουσα, αυτά θα βρίσκονταν στην $y=x$. Είναι $f(x)=f^{-1}(x) \Leftrightarrow f^{-1}(x)=x \Leftrightarrow e^x+x=x \Leftrightarrow e^x=0$ που είναι αδύνατο. Άρα οι γραφικές παραστάσεις των f,f^{-1} δεν τέμνονται.

γ) Επειδή το $A(e+1,|z|)$ ανήκει στη γραφική παράσταση της f, το σημείο $A'(|z|,e+1)$ ανήκει στη γραφική παράσταση της f^{-1}, άρα: $f^{-1}(|z|)=e+1$. Παρατηρούμε ότι $f^{-1}(1)=e+1$, οπότε

$f^{-1}(|z|)=f^{-1}(1)$ και αφού η f^{-1} είναι 1–1, είναι $|z|=1$. Οπότε ο γεωμετρικός τόπος των εικόνων του μιγαδικού αριθμού z είναι ο μοναδιαίος κύκλος.

δ) Επειδή $f^{-1}(1)=e+1$, είναι $f\left(f^{-1}(1)\right)=f(e+1)\Leftrightarrow 1=f(e+1)$. Παρατηρούμε ότι $f^{-1}(0)=1$, άρα $f(1)=0$. Οπότε: $|z-2f(e+1)i|=|z-f(1)i|\Leftrightarrow|z-2i|=|z|$.

Αν $z=x+yi$, $x,y\in\mathbb{R}$, τότε: $|x+yi-2i|=|x+yi|\Leftrightarrow\sqrt{x^2+(y-2)^2}=\sqrt{x^2+y^2}\Leftrightarrow$

$\cancel{x^2}+\cancel{y^2}-4y+4=\cancel{x^2}+\cancel{y^2}\Leftrightarrow y=1$.

Όμως $|z|=1\Leftrightarrow x^2+y^2=1\Leftrightarrow x^2+1=1\Leftrightarrow x=0$, άρα $z=i$.

ε) $|z|=1\Leftrightarrow|z|^2=1\Leftrightarrow z\bar{z}=1\Leftrightarrow\bar{z}=\dfrac{1}{z}$. Είναι $\bar{w}=\bar{z}+\dfrac{1}{\bar{z}}=\dfrac{1}{z}+\dfrac{1}{\frac{1}{z}}=\dfrac{1}{z}+z=w\Leftrightarrow w\in\mathbb{R}$.

40. **α)** Επειδή η εικόνα του μιγαδικού z βρίσκεται σε κύκλο με κέντρο $K(3,-4)$ και ακτίνα $\rho=5$ είναι: $|z-3+4i|=5$.

Εστω $f(x)=\left|z+x^2-4x-\left(x^2-4x-1\right)i\right|-2x$, $x\in[1,3]$. Η f είναι συνεχής στο διάστημα $[1,3]$, ως σύνθεση και πράξεις συνεχών συναρτήσεων (σύνθεση γιατί το μέτρο είναι τετραγωνική ρίζα).

Είναι $f(1)=|z+1-4-(1-4-1)i|-2=|z-3+4i|-2=5-2=3>0$,

$f(3)=|z+9-12+(9-12-1)i|-6=|z-3+4i|-6=5-6=-1<0$,

δηλαδή $f(1)f(3)<0$, άρα λόγω του θεωρήματος Bolzano η εξίσωση $f(x)=0\Leftrightarrow$

$\left|z+x^2-4x-\left(x^2-4x-1\right)i\right|=2x$ έχει τουλάχιστον μία ρίζα στο διάστημα $(1,3)$.

β) Εστω $z=\alpha+\beta i$, $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$, τότε:

$$\lim_{x\to3}\frac{|z-x+(x+1)i|^2-25}{x-3}=12-2\mathrm{Re}(z)\Leftrightarrow$$

$$\lim_{x\to3}\frac{|\alpha+\beta i-x+(x+1)i|^2-25}{x-3}=12-2\mathrm{Re}(z)\Leftrightarrow$$

$$\lim_{x\to3}\frac{|(\alpha-x)+(\beta+x+1)i|^2-25}{x-3}=12-2\mathrm{Re}(z)\Leftrightarrow$$

$$\lim_{x\to3}\frac{(\alpha-x)^2+(\beta+x+1)^2-25}{x-3}=12-2\mathrm{Re}(z)\Leftrightarrow$$

$$\lim_{x\to3}\frac{\alpha^2-2\alpha x+x^2+\beta^2+x^2+1+2\beta x+2\beta+2x-25}{x-3}=12-2\mathrm{Re}(z)\Leftrightarrow$$

$$\lim_{x\to3}\frac{2x^2+2(\beta+1-\alpha)x+\beta^2+\alpha^2+2\beta-24}{x-3}=12-2\mathrm{Re}(z)\quad(1)$$

Είναι $|z-3+4i|=5\Leftrightarrow(\alpha-3)^2+(\beta+4)^2=25\Leftrightarrow$

$\alpha^2-6\alpha+9+\beta^2+8\beta+16=25\Leftrightarrow\alpha^2+\beta^2=6\alpha-8\beta\ (2)$.

Η σχέση (1) γίνεται:

$$\lim_{x\to 3}\frac{2x^2+2(\beta+1-\alpha)x+6\alpha-8\beta+2\beta-24}{x-3}=12-2\mathrm{Re}(z)\Leftrightarrow$$

$$\lim_{x\to 3}\frac{2x^2+2(\beta+1-\alpha)x+6\alpha-6\beta-24}{x-3}=12-2\mathrm{Re}(z)$$

2	$2(\beta+1-\alpha)$	$6\alpha-6\beta-24$	3
$\downarrow$	6	$6\beta-6\alpha+24$	
2	$2\beta-2\alpha+8$	0	

$$\lim_{x\to 3}\frac{\cancel{(x-3)}(2x+2\beta+8-2\alpha)}{\cancel{x-3}}=12-2\mathrm{Re}(z)\Leftrightarrow$$

$$\lim_{x\to 3}(2x+2\beta+8-2\alpha)=12-2\mathrm{Re}(z)\Leftrightarrow$$

$6+2\beta+8-\cancel{2\alpha}=12-\cancel{2\alpha}\Leftrightarrow 2\beta=-2\Leftrightarrow\beta=-1.$

Από τη σχέση (2) έχουμε: $\alpha^2+1=6\alpha+8\Leftrightarrow\alpha^2-6\alpha-7=0\Leftrightarrow\alpha=-1$ ή $\alpha=7$.

Αν $\alpha=-1$ και $\beta=-1$, τότε $z=-1-i$ και αν $\alpha=7$ και $\beta=-1$, τότε $z=7-i$.

γ) $|z-3+4i|=|z-(3-4i)|\ge\big||z|-|3-4i|\big|\Leftrightarrow 5\ge\left||z|-\sqrt{3^2+(-4)^2}\right|\Leftrightarrow\big||z|-5\big|\le 5\Leftrightarrow$

$-5\le|z|-5\le 5\Leftrightarrow 0\le|z|\le 10$.

41. Επειδή η εικόνα του μιγαδικού, ανήκει σε κύκλο με κέντρο $K(3,-4)$ και ακτίνα $\rho=\sqrt{2}$, ισχύει $(\alpha-3)^2+(\beta+4)^2=2$.

α) Εστω $f(x)=(\alpha-3)^2x^{2\nu}+(\beta+4)^2x^{\nu}-1,\ x\in[0,1]$.

$f(0)=1$ και $f(1)=(\alpha-3)^2+(\beta+4)^2-1=2-1=1.$

Η f είναι συνεχής στο $[0,1]$ και $f(0)f(1)<0$, λόγω Θ.Β η εξίσωση $f(x)=0$ έχει τουλάχιστον μία ρίζα στο διάστημα $(0,1)$.

β) Επειδή η εικόνα του μιγαδικού, ανήκει σε κύκλο με κέντρο $K(3,-4)$ και ακτίνα $\rho=\sqrt{2}$, ισχύει $|z-3+4i|=\sqrt{2}\Leftrightarrow|(z-1+2i)-2+2i|=\sqrt{2}$.

$|(z-1+2i)-2+2i|\ge\big||z-1+2i|-|-2+2i|\big|\Leftrightarrow\big||z-1+2i|-2\sqrt{2}\big|\ge\sqrt{2}\Leftrightarrow$

$-\sqrt{2}\le|z-1+2i|-2\sqrt{2}\le\sqrt{2}\Leftrightarrow\sqrt{2}\le|z-1+2i|\le 3\sqrt{2}$

γ) Αν $z=4-5i$ τότε $f(x)=(4-3)^2x^{2\nu}+(-5+4)^2x^{\nu}-1=x^{2\nu}+x^{\nu}-1$

και $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x^2-2x+4}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^{2\nu}+x^{\nu}-1}{x^2-2x+4}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^{2\nu}}{x^2}$

- Αν $\nu=1$, τότε $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^{2\nu}}{x^2}\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^2}{x^2}=1$
- Αν $\nu>1$, τότε $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^{2\nu}}{x^2}\lim\limits_{x\to+\infty}x^{2\nu-2}=+\infty$

42. α) Εστω $x_1,x_2\in\mathbb{R}$ με $x_1<x_2$, τότε $f(x_1)<f(x_2)$ και η f είναι γνησίως αύξουσα.

β) $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=-\infty$ και $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$, άρα $f(A)=\mathbb{R}$.

γ) $f(0)=-|z|^3<0$, $f(|z|)=|z|^3>0$, άρα λόγω Θ. Bolzano και επειδή η f είναι γνησίως αύξουσα, η $f(x)=0$ έχει μοναδική ρίζα στο $(0,|z|)$.

δ) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)+|z|^3}{\eta\mu x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^3+|z|^2 x}{\eta\mu x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2+|z|^2}{\frac{\eta\mu x}{x}}=|z|^2=1$, άρα ο γ.τ. του $M(z)$ είναι ο μοναδιαίος κύκλος.

43. α) $|z(\alpha)\bar{z}(\beta)-1|<|z(\alpha)-z(\beta)|\Leftrightarrow$

$... \Leftrightarrow \left(|z(\alpha)|^2-1\right)\left(|z(\beta)|^2-1\right)<0\Leftrightarrow \left(f^2(\alpha)+\alpha^2-1\right)\left(f^2(\beta)+\beta^2-1\right)<0$

Εστω $g(x)=f^2(x)+x^2-1$, τότε $g(\alpha)g(\beta)<0$ και g συνεχής, οπότε λόγω Θ. Bolzano υπάρχει $\xi\in(\alpha,\beta)$: $g(\xi)=0$.

β) i. $|z(x)|=2\Leftrightarrow f^2(x)+x^2=4\overset{f(x)=0}{\Leftrightarrow} x^2=4\Leftrightarrow x=\pm 2$.

ii. Επειδή οι ρίζες της f είναι το -2 και το 2, είναι $f(x)\neq 0$ για κάθε $x\in(-2,2)$ και επειδή η f είναι συνεχής, διατηρεί σταθερό πρόσημο.

iii. Επειδή $f(0)=2>0$, είναι $f(x)>0$ για κάθε $x\in(-2,2)$,

άρα $f^2(x)+x^2=4\Leftrightarrow f(x)=\sqrt{4-x^2}$, $x\in[-2,2]$.

iv. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)+f^2(x)-6}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{4-x^2}+4-x^2-6}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{4-x^2}-2-x^2}{x}=$

$$=\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sqrt{4-x^2}-2}{x}-x\right)=\lim_{x\to 0}\left(\frac{\cancel{4}-x^{\cancel{2}}-\cancel{4}}{\cancel{x}\left(\sqrt{4-x^2}+2\right)}-x\right)=0$$

44. α) Για $x=0$ είναι $|z-1|f(0)+|z+i|f(2)=|z-1|$ (1)

και για $x=2$ είναι $|z-1|f(2)+|z+i|f(0)=|z-1|$ (2).

Με αφαίρεση κατά μέλη των (1),(2) προκύπτει:

$|z-1|f(0)+|z+i|f(2)-|z-1|f(2)-|z+i|f(0)=0\Leftrightarrow$

$f(0)\left(|z-1|-|z+i|\right)-f(2)\left(|z-1|-|z+i|\right)=0\Leftrightarrow$

$\left(|z-1|-|z+i|\right)\left(f(0)-f(2)\right)=0\Leftrightarrow |z-1|=|z+i|$ ή $f(0)=f(2)$.

Επειδή η f είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$ και $0<2$ ισχύει ότι $f(0)<f(2)$, οπότε $|z-1|=|z+i|$.

β) $|z-1|=|z+i|\Leftrightarrow|z-1|^2=|z+i|^2\Leftrightarrow(z-1)(\bar{z}-1)=(z+i)(\bar{z}-i)\Leftrightarrow$

$z\bar{z}-z-\bar{z}+1=z\bar{z}+iz+i\bar{z}+1\Leftrightarrow z+\bar{z}=i(z-\bar{z})\Leftrightarrow$

$2\mathrm{Re}(z)=i\cdot 2\mathrm{Im}(z)i\Leftrightarrow \mathrm{Re}(z)=-\mathrm{Im}(z)$

γ) Επειδή $|z-1|=|z+i|$ η σχέση $|z-1|f(x)+|z+i|f(2-x)=|z-1|$ γίνεται:

$|z-1|f(x)+|z-1|f(2-x)=|z-1|\Leftrightarrow f(x)+f(2-x)=1$ (1).

Για $x=1$ είναι $f(1)+f(1)=1\Leftrightarrow 2f(1)=1\Leftrightarrow f(1)=\dfrac{1}{2}$.

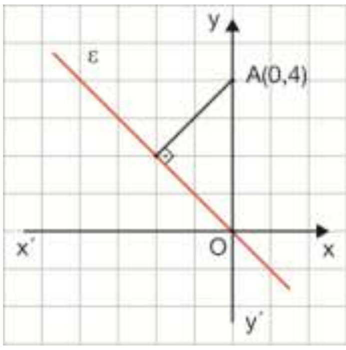
Εχουμε $f(x)<\dfrac{1}{2}\Leftrightarrow f(x)<f(1)$ και επειδή η f είναι γνησίως αύξουσα ισχύει: $x<1$.

δ) Επειδή $\mathrm{Re}(z)=-\mathrm{Im}(z)$, αν $z=x+yi$, είναι $y=-x$

Η εικόνα του z βρίσκεται στην ευθεία ε: $y=-x$.

Εστω $A(0,4)$ η εικόνα του 4i,

τότε $|z-4i|_{min}=d(A,\varepsilon)=\dfrac{|0+4|}{\sqrt{1^2+1^2}}=2\sqrt{2}$



ε) $\lim\limits_{x\to 2}f(x)\overset{(1)}{=}\lim\limits_{x\to 2}\left[1-f(2-x)\right]\overset{2-x=u}{=}\lim\limits_{u\to 0}\left[1-f(u)\right]=1$

45. α) Επειδή το τρίγωνο ΟΑΒ είναι ορθογώνιο στο Ο, ισχύει το πυθαγόρειο θεώρημα:

$|\overrightarrow{OA}|^2+|\overrightarrow{OB}|^2=|\overrightarrow{AB}|^2\Leftrightarrow|z|^2+|w|^2=|z-w|^2\Leftrightarrow$

$x^2+(x-1)^2+f^2(x)+1=(f(x)-x)^2+(2-x)^2\Leftrightarrow xf(x)+x-1=0$.

Αν $g(x)=xf(x)+x-1$, τότε $g(0)\cdot g(1)<0$ και λόγω Θ. Bolzano....

β) $|z|=|w|\Leftrightarrow x^2+(x-1)^2=f^2(x)+1\Leftrightarrow f^2(x)=2x^2-2x\ \ (1)$

Επειδή $x\in[0,1]$ είναι $2x^2-2x\le 0$, όμως $f^2(x)\ge 0$, οπότε λόγω της (1) είναι

$\begin{cases}2x^2-2x=0\\ f^2(x)=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}2x(x-1)=0\\ f(x)=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=0 \text{ ή } x=1\\ f(x)=0\end{cases}$. Άρα $f(0)=0$ και $f(1)=0$

Αν $f(0)=0$, τότε $z=-i$, $w=i$ και $|z-w|=2\neq\sqrt{2}$.

Αν $f(1)=0$, τότε $z=1$, $w=i$ και $|z-w|=\sqrt{2}$.

Για $z=1$ και $w=i$, είναι:

i. $w^{100}=i^{100}=(i^4)^{25}=1=z$

ii. $(z-w)^{100}=(z+w)^{100}\Leftrightarrow(1-i)^{100}=(1+i)^{100}\Leftrightarrow\left[(1-i)^2\right]^{50}=\left[(1+i)^2\right]^{50}\Leftrightarrow$

$(-2i)^{50}=(2i)^{50}\Leftrightarrow 2^{50}i^{50}=2^{50}i^{50}$ που ισχύει.

iii. $(z-kw)^{100}=(1-ki)^{100}=(-i^2-ki)^{100}=\left[-i(k+i)\right]^{100}=i^{100}(kz+w)^{100}=(kz+w)^{100}$

γ) Αν $|z|=|w|$ και $|z-w|\neq\sqrt{2}$, τότε $z=-i$, $w=i$ και

i. $z^{4\nu}=w^{4\kappa}\Leftrightarrow(-i)^{4\nu}=i^{4\kappa}=\left[(-i)^4\right]^{\nu}=(i^4)^{\kappa}\Leftrightarrow 1^{\nu}=1^{\kappa}$ που ισχύει.

ii. Εστω Α,Β,Γ οι εικόνες των u, wu, zu αντίστοιχα.

Τότε: $|\overrightarrow{AB}|=|u-wu|=|u(1-i)|=|u|\sqrt{2}$, $|\overrightarrow{A\Gamma}|=|u+wu|=|u(1+i)|=|u|\sqrt{2}$

και $|\overrightarrow{B\Gamma}|=|zu-wu|=|-2iu|=2|u|$.

Επειδή $|\overrightarrow{AB}|=|\overrightarrow{A\Gamma}|$ το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ισοσκελές.

Επειδή $|\overrightarrow{AB}|^2+|\overrightarrow{A\Gamma}|^2=|\overrightarrow{B\Gamma}|^2$ το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ορθογώνιο.

46. α) Επειδή το $1-i$ είναι ρίζα του $P(z)$, ισχύει:

$$P(1-i)=0 \Leftrightarrow (1-i)^3+f(\beta)(1-i)^2-(1-i)+f(\alpha)=0 \Leftrightarrow$$

$$1-3i+3i^2-i^3+2if(\beta)-1+i+f(\alpha)=0 \Leftrightarrow (-3+f(\alpha))+i(-2f(\beta)-1)=0 \Leftrightarrow \begin{cases} f(\beta)=-\dfrac{1}{2} \\ f(\alpha)=3 \end{cases}$$

Επειδή $f(\alpha)f(\beta)<0$ και η f είναι συνεχής στο $[\alpha,\beta]$ ως πολυωνυμική, λόγω του θεωρήματος Bolzano, υπάρχει $\xi \in (\alpha,\beta)$ τέτοιο, ώστε $f(\xi)=0$.

β) Εστω $g(x)=(x-\alpha)f(2x-\beta)-(x-\beta)f(2x-\alpha)$, $x \in [\alpha,\beta]$

$$g(\alpha)=-(\alpha-\beta)f(\alpha)=-3(\alpha-\beta)>0 \text{ και } g(\beta)=(\beta-\alpha)f(\beta)=-\frac{1}{2}(\beta-\alpha)<0$$

και επειδή η g είναι συνεχής, από Θ. Bolzano υπάρχει $\xi_1 \in (\alpha,\beta)$ τέτοιο ώστε $g(\xi_1)=0$.

47. α) Είναι $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 1^+}|xz+w|=|z+w|$, $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 1^-}\left(|z|x^2+x|w|\right)=|z|+|w|$ και $f(1)=|z+w|$. Επειδή η f είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$, είναι συνεχής και στο $x_0=1$, άρα

$$\lim_{x\to 1^+} f(x)=\lim_{x\to 1^-} f(x)=f(1) \Leftrightarrow |z+w|=|z|+|w| \Leftrightarrow |z+w|^2=\left(|z|+|w|\right)^2 \Leftrightarrow$$

$$(z+w)(\bar{z}+\bar{w})=|z|^2+2|z||w|+|w|^2 \Leftrightarrow \cancel{z\bar{z}}+z\bar{w}+\bar{z}w+\cancel{w\bar{w}}=\cancel{z\bar{z}}+2|z||w|+\cancel{w\bar{w}} \Leftrightarrow$$

$$z\bar{w}+\bar{z}w=2|z||w| \ (1) \Leftrightarrow (z\bar{w}+\bar{z}w)^2=4|z|^2|w|^2 \Leftrightarrow (z\bar{w})^2+2z\bar{w}\bar{z}w+(\bar{z}w)^2=4z\bar{z}w\bar{w} \Leftrightarrow$$

$$(z\bar{w})^2-2z\bar{w}\bar{z}w+(\bar{z}w)^2=0 \Leftrightarrow (z\bar{w}-\bar{z}w)^2=0 \Leftrightarrow z\bar{w}-\bar{z}w=0 \Leftrightarrow z\bar{w}=\bar{z}w \Leftrightarrow$$

$$\frac{z}{w}=\frac{\bar{z}}{\bar{w}} \Leftrightarrow u=\bar{u} \Leftrightarrow u \in \mathbb{R}.$$

β) $$u=\frac{z}{w}=\frac{\alpha+f(\alpha)i}{f(\beta)+\beta i}=\frac{(\alpha+f(\alpha)i)(f(\beta)-\beta i)}{(f(\beta)+\beta i)(f(\beta)-\beta i)}=\frac{\alpha f(\beta)-\alpha\beta i+f(\alpha)f(\beta)i+\beta f(\alpha)}{f^2(\beta)+\beta^2} \Leftrightarrow$$

$$u=\frac{\alpha f(\beta)+\beta f(\alpha)}{f^2(\beta)+\beta^2}+\frac{f(\alpha)f(\beta)-\alpha\beta}{f^2(\beta)+\beta^2}i$$

Είναι $u \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \operatorname{Im}u=0 \Leftrightarrow \dfrac{f(\alpha)f(\beta)-\alpha\beta}{f^2(\beta)+\beta^2}=0 \Leftrightarrow f(\alpha)f(\beta)-\alpha\beta=0 \Leftrightarrow f(\alpha)f(\beta)=\alpha\beta$.

Επειδή $\alpha<0<\beta$, είναι $\alpha\beta<0$ άρα και $f(\alpha)f(\beta)<0$.

Επειδή η f είναι συνεχής στο $[\alpha,\beta]$, λόγω του θεωρήματος Bolzano η εξίσωση $f(x)=0$ έχει τουλάχιστον μία ρίζα στο διάστημα (α,β).

γ) $$f(2)=2f(-1) \Leftrightarrow |2z+w|=2|z|-2|w| \Leftrightarrow |2z+w|^2=\left(2|z|-2|w|\right)^2 \Leftrightarrow$$

$$(2z+w)(2\bar{z}+\bar{w})=4|z|^2-8|z||w|+4|w|^2 \Leftrightarrow$$

$$4z\bar{z}+2z\bar{w}+2\bar{z}w+w\bar{w}-4|z|^2+8|z||w|-4|w|^2=0 \Leftrightarrow$$

$$\cancel{4|z|^2}+2(z\bar{w}+\bar{z}w)+|w|^2-\cancel{4|z|^2}+8|z||w|-4|w|^2=0$$

Όμως λόγω της σχέσης (1) είναι: $z\overline{w}+\overline{z}w=2|z||w|$, άρα $2\cdot 2|z||w|+8|z||w|-3|w|^2=0\Leftrightarrow$

$12|z||w|-3|w|^2=0\overset{|w|=4}{\Leftrightarrow}48|z|-48=0\Leftrightarrow|z|=1$.

Οπότε ο γεωμετρικός τόπος της εικόνας του μιγαδικού z είναι ο μοναδιαίος κύκλος.

48. Είναι $z=(x+\eta\mu x)+(\eta\mu x-x)i$, οπότε $|z|^2=2x^2+2\eta\mu^2 x$. $z_1,z_2=1^2+1^2=2$.

Άρα $f(x)=\dfrac{|z|^2}{z_1z_2x^2}=1+\dfrac{\eta\mu^2 x}{x^2}$.

α) $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left[1+\left(\dfrac{\eta\mu x}{x}\right)^2\right]=1+0=1$

β) $\lim\limits_{x\to 0}f(x)=\lim\limits_{x\to 0}\left[1+\left(\dfrac{\eta\mu x}{x}\right)^2\right]=1+1^2=2$

γ) $\lim\limits_{x\to+\infty}f\left(\dfrac{1}{x}\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left[1+\left(\dfrac{\eta\mu\frac{1}{x}}{\frac{1}{x}}\right)^2\right]=\lim\limits_{\frac{1}{x}=y\to 0}\left[1+\left(\dfrac{\eta\mu y}{y}\right)^2\right]=2$.

49. **α)** $|z-4|^\nu=|2z-5|^\nu\Leftrightarrow|z-4|=|2z-5|\Leftrightarrow\ldots\Leftrightarrow z\overline{z}-2z-2\overline{z}+3=0\Leftrightarrow\ldots\Leftrightarrow$

$(x-2)^2+y^2=1$

β) Εστω ότι $\exists x_1,x_2\in(0,2)$, με $x_1<x_2:f(x_1)\cdot f(x_2)<0$.

Από Θ. Bolzano υπάρχει $\xi\in(x_1,x_2)\subseteq(0,2):f(\xi)=0$.

Στη σχέση $z=f(x)+(x-1)i$ για $x=\xi$, είναι $z=0+(\xi-1)i$, ο οποίος θα ανήκει στον κύκλο

$C:(x-2)^2+y^2=1$, άρα $(0-2)^2+(\xi-1)^2=1\Leftrightarrow(\xi-1)^2=-3$, άτοπο.

γ) Επειδή ο γ.τ. του $z=f(x)+(x-1)i$ είναι ο κύκλος $(x-2)^2+y^2=1$,

τότε $(f(x)-2)^2+(x-1)^2=1\Leftrightarrow(f(x)-2)^2=1-(x-1)^2\Leftrightarrow(f(x)-2)^2=2x-x^2\neq 0$, άρα η

$f(x)-2$ διατηρεί πρόσημο στο $(0,2)$. Επειδή $f(1)-2=-1<0$ είναι $f(x)-2<0\ \ \forall x\in(0,2)$,

άρα $f(x)-2=-\sqrt{2x-x^2}\Leftrightarrow f(x)=2-\sqrt{2x-x^2}$, $x\in(0,2)$

50. **α)** $|z-4|=2$ κύκλος με κέντρο $K(4,0)$ και ακτίνα $\rho_1=2$.

$|w-3i|=1$ κύκλος με κέντρο $\Lambda(0,3)$ και ακτίνα $\rho_2=1$.

β) Επειδή $|z-w|_{min}=(K\Lambda)-\rho_1-\rho_2=5-2-1=2$

και $|z-w|_{max}=(K\Lambda)+\rho_1+\rho_2=5+2+1=8$, ισχύει ότι $2\leq|z-w|\leq 8$.

γ) i. $|z-4|=2\Leftrightarrow(f(x)-4)^2+x^2=4\Leftrightarrow(f(x)-4)^2=4-x^2\neq 0$ (1) για κάθε $x\in[-1,1]$,

άρα $f(x)-4\neq 0$ και επειδή είναι συνεχής, διατηρεί σταθερό πρόσημο.

Είναι $f(0)-4=6-4=2>0$, άρα $f(x)-4>0$.

ii. $f(x)-4=\sqrt{4-x^2}\Leftrightarrow f(x)=\sqrt{4-x^2}+4$

iii. $-1\le x\le 1 \Leftrightarrow |x|\le 1 \Leftrightarrow x^2\le 1 \Leftrightarrow -x^2\ge -1 \Leftrightarrow 4-x^2\ge 3 \Leftrightarrow \sqrt{4-x^2}\ge\sqrt{3} \Leftrightarrow$
$\sqrt{4-x^2}+4\ge\sqrt{3}+4 \Leftrightarrow f(x)\ge\sqrt{3}+4=f(1)$. Άρα η f παρουσιάζει ελάχιστο στο 1 το 5.

51. $P(1+i)=0 \Leftrightarrow ... \Leftrightarrow f(\alpha)=-\frac{1}{2},\ f(\beta)=1.$

α) $f(\alpha)f(\beta)<0$.... Θ.Β.

β) i. $f\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)=0 \Leftrightarrow x=\frac{\alpha+\beta}{2}$

Για κάθε $x\in\left[\alpha,\frac{\alpha+\beta}{2}\right)$ είναι $f(x)\ne 0$ και συνεχής και $f(\alpha)=-\frac{1}{2}<0$,

άρα $f(x)<0$ για κάθε $x\in\left[\alpha,\frac{\alpha+\beta}{2}\right)$. Όμοια $f(x)>0$ στο $\left(\frac{\alpha+\beta}{2},\beta\right]$.

ii. Επειδή $\frac{2\alpha+\beta}{3}\in\left(\alpha,\frac{\alpha+\beta}{2}\right)$, είναι $f\left(\frac{2\alpha+\beta}{3}\right)<0$,

$$\text{άρα } \lim_{x\to+\infty}\frac{f\left(\frac{2\alpha+\beta}{3}\right)x^5-4x+1}{x^4-5x^3+2}=\lim_{x\to+\infty}\frac{f\left(\frac{2\alpha+\beta}{3}\right)x^5}{x^4}=\lim_{x\to+\infty}f\left(\frac{2\alpha+\beta}{3}\right)x=-\infty$$

52. **α)** Εστω $f(x)=\frac{|z-i|x^3-|z-1|x-5x+5}{x-1},\ x\ne 1 \Leftrightarrow f(x)(x-1)=|z-i|x^3-|z-1|x-5x+5$

και $\lim\limits_{x\to 1}\left[f(x)(x-1)\right]=\lim\limits_{x\to 1}\left(|z-i|x^3-|z-1|x-5x+5\right) \Leftrightarrow 0=|z-i|-|z-1| \Leftrightarrow |z-1|=|z-i|$.

$$\text{Τότε } \lim_{x\to 1}\frac{|z-i|x^3-|z-1|x-5x+5}{x-1}=\lim_{x\to 1}\frac{|z-1|x^3-|z-1|x-5x+5}{x-1}=$$

$$=\lim_{x\to 1}\frac{|z-1|x\cancel{(x-1)}(x+1)-5\cancel{(x-1)}}{\cancel{x-1}}=2|z-1|-5$$

Άρα $|z-1|=|z-i| \Leftrightarrow |z-1|^2=|z-i|^2 \Leftrightarrow ... \Leftrightarrow y=x$

β) $g(x)=\frac{|z-1+i|x^3-2x^2-8}{x-2},\ x\ne 2 \Leftrightarrow g(x)(x-2)=|z-1+i|x^3-2x^2-8$

και $\lim\limits_{x\to 2}\left[g(x)(x-2)\right]=\lim\limits_{x\to 2}\left(|z-1+i|x^3-2x^2-8\right) \Leftrightarrow 0=8|z-1+i|-16 \Leftrightarrow |z-1+i|=2$.

$$\text{Τότε } \lim_{x\to 2}\frac{|z-1+i|x^3-2x^2-8}{x-2}=\lim_{x\to 2}\frac{2x^3-2x^2-8}{x-2}=\lim_{x\to 2}\frac{2\cancel{(x-2)}(x^2+x+2)}{\cancel{x-2}}=16$$

Επειδή $|z-1+i|=2$ ο γ.τ. του z είναι κύκλος κέντρου $K(1,-1)$ και ακτίνας 2.

53. **α)** Για $x\ne\pm 2$ είναι $f(x)(x^2-4)=|z|x^2-|z-2|x$ και

$\lim\limits_{x\to+2}\left(f(x)(x^2-4)\right)=\lim\limits_{x\to+2}\left(|z|x^2-|z-2|x\right) \Leftrightarrow 0=4|z|-2|z-2| \Leftrightarrow |z-2|=2|z|$.

$$\text{Τότε } \lim_{x\to 2}f(x)=\lim_{x\to 2}\frac{|z|x^2-2|z|x}{x^2-4}=\lim_{x\to 2}\frac{|z|x\cancel{(x-2)}}{\cancel{(x-2)}(x+2)}=\frac{2|z|}{4}=\frac{|z|}{2}$$

$\lim\limits_{x\to 2}f(x)=1 \Leftrightarrow \frac{|z|}{2}=1 \Leftrightarrow |z|=2$.

Τότε $|z-2|=4 \overset{z=x+yi}{\Leftrightarrow} (x-2)^2+y^2=16 \Leftrightarrow x^2-4x+4+y^2=16 \Leftrightarrow x^2+y^2-4x=12 \ (1)$.

Όμως $|z|=2 \Leftrightarrow x^2+y^2=4$, οπότε η σχέση (1) γίνεται: $4-4x=12 \Leftrightarrow -4x=8 \Leftrightarrow x=-2$ και $(-2)^2+y^2=4 \Leftrightarrow 4+y^2=4 \Leftrightarrow y^2=0 \Leftrightarrow y=0$.

Άρα $z=-2$.

β) $f(1)=\dfrac{|z|}{3} \Leftrightarrow \dfrac{|z|-|z-2|}{-3}=\dfrac{|z|}{3} \Leftrightarrow |z|-|z-2|=-|z| \Leftrightarrow 2|z|=|z-2|$

Αν $z=x+yi$, $x,y\in\mathbb{R}$, τότε:

$$2|x+yi|=|x+yi-2| \Leftrightarrow 2\sqrt{x^2+y^2}=\sqrt{(x-2)^2+y^2} \Leftrightarrow 4(x^2+y^2)=(x-2)^2+y^2 \Leftrightarrow$$

$$4x^2+4y^2=x^2-4x+4+y^2 \Leftrightarrow 3x^2+3y^2+4x=4 \Leftrightarrow x^2+y^2+\frac{4}{3}x=\frac{4}{3} \Leftrightarrow$$

$$x^2+2\frac{2}{3}x+\frac{4}{9}+y^2=\frac{4}{3}+\frac{4}{9} \Leftrightarrow \left(x+\frac{2}{3}\right)^2+y^2=\frac{16}{9}.$$

Άρα ο γεωμετρικός τόπος της εικόνας Μ του μιγαδικού z είναι κύκλος με κέντρο $K\left(-\dfrac{2}{3},0\right)$ και ακτίνα $\rho=\dfrac{4}{3}$.

γ) Εστω $g(x)=f(x)-(|z-2|+|z|)x^2-x^3+1,\ x\in[0,1]$.

Η g είναι συνεχής στο διάστημα $[0,1]$ ως πράξεις συνεχών συναρτήσεων.

Είναι $g(0)=f(0)+1=\dfrac{|z|\cdot 0-|z-2|\cdot 0}{0^2-4}+1=1>0$,

$$g(1)=f(1)-(|z-2|+|z|)-1+1=\frac{|z|-|z-2|}{-3}-|z-2|-|z|=\frac{-|z|+|z-2|-3|z-2|-3|z|}{3} \Leftrightarrow$$

$g(1)=\dfrac{-2|z-2|-4|z|}{3}<0$, δηλαδή $g(0)g(1)<0$, άρα λόγω του θεωρήματος Bolzano η εξίσωση $g(x)=0 \Leftrightarrow f(x)=(|z-2|+|z|)x^2+x^3-1$ έχει τουλάχιστον μία ρίζα στο $(0,1)$.

54. Είναι : $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\eta\mu\alpha x}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\alpha\eta\mu\alpha x}{\alpha x}=\lim\limits_{u\to 0}\dfrac{\alpha\eta\mu u}{u}=\alpha$ με $u=\alpha x$, $x\neq 0$.

Αν $x>0$ τότε: $\dfrac{\eta\mu(|z|x)}{x}\le\dfrac{\eta\mu 5x}{x}+\dfrac{\eta\mu x}{x}$, οπότε:

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{\eta\mu(|z|x)}{x}\le\lim_{x\to 0^+}\left(\frac{\eta\mu 5x}{x}+\frac{\eta\mu x}{x}\right) \Leftrightarrow |z|\le 6 \ (1).$$

Αν $x<0$ τότε: $\dfrac{\eta\mu(|z|x)}{x}\ge\dfrac{\eta\mu 5x}{x}+\dfrac{\eta\mu x}{x}$, οπότε:

$$\lim_{x\to 0^-}\frac{\eta\mu(|z|x)}{x}\ge\lim_{x\to 0^-}\left(\frac{\eta\mu 5x}{x}+\frac{\eta\mu x}{x}\right) \Leftrightarrow |z|\ge 6 \ (2).$$

Από τις σχέσεις (1), (2) προκύπτει ότι: $|z|=6$. Επομένως ο γεωμετρικός τόπος των εικόνων του μιγαδικού z είναι κύκλος, με κέντρο $O(0,0)$ και ακτίνα 6 .

55. **α)** Είναι $f(-1)=-|z|+|w|-|z+w|$ και $f(1)=|z|+|w|-|z+w|$.

Για τους μιγαδικούς z,w ισχύει:

$$\big||z|-|w|\big| \le |z+w| \le |z|+|w| \Leftrightarrow \begin{cases} \big||z|-|w|\big| \le |z+w| \\ |z+w| \le |z|+|w| \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -|z+w| \le |z|-|w| \le |z+w| \\ 0 \le |z|+|w|-|z+w| \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -|z+w| \le |z|-|w| \text{ και } |z|-|w| \le |z+w| \\ f(1) \ge 0 \end{cases}$$

άρα $\begin{cases} -|z|+|w|-|z+w| \le 0 \\ f(1) \ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} f(-1) \le 0 \\ f(1) \ge 0 \end{cases}$, δηλαδή $f(-1)f(1) \le 0$.

Αν $f(-1)f(1) < 0$, τότε επειδή η f είναι συνεχής ως πολυωνυμική, λόγω του θεωρήματος Bolzano η εξίσωση $f(x)=0$ έχει μία τουλάχιστον ρίζα στο $(-1,1)$.

Αν $f(-1)f(1)=0 \Leftrightarrow f(-1)=0$ ή $f(1)=0$, τότε η εξίσωση $f(x)=0$ έχει ρίζα το 1 ή το (-1).

Οπότε η εξίσωση $f(x)=0$ έχει μία τουλάχιστον ρίζα στο $[-1,1]$.

β) $f(x)=x^{2\nu+1}+|w|\,x^{2\nu}-|z+w|$

i. $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x^3}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^{2\nu+1}+|w|\,x^{2\nu}-|z+w|}{x^3}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^{2\nu+1}}{x^3}=\lim\limits_{x\to+\infty}x^{2\nu-2}$

Αν $2\nu-2>0 \Leftrightarrow \nu>1$, τότε $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x^3}=+\infty$, άρα για να είναι $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x^3}=1$

πρέπει $\nu=1$.

ii. $z=w+3i$, άρα $|w+3i|=|z|=1$ κύκλος με κέντρο $\Lambda(0,-3)$ και $\rho_2=1$.

$|z-w|=|z-z+3i|=3$.

Επειδή ο συμμετρικός κύκλος του μοναδιαίου ως προς την αρχή O των αξόνων είναι ο ίδιος κύκλος, η εικόνα του $-z$ βρίσκεται στο μοναδιαίο κύκλο, οπότε

$|z+w|=|w-(-z)|=|w-z|=3$

56. α) Για κάθε $x_1,x_2 \in \left[0,\dfrac{\pi}{2}\right]$ με $x_1<x_2$ είναι: $\begin{cases} x_1^2<x_2^2 \\ \sigma\upsilon\nu x_1>\sigma\upsilon\nu x_2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1^2<x_2^2 \\ -\sigma\upsilon\nu x_1<-\sigma\upsilon\nu x_2 \end{cases}$

οπότε, $x_1^2+\sigma\upsilon\nu x_1<x_2^2+\sigma\upsilon\nu x_2 \Leftrightarrow x_1^2+\sigma\upsilon\nu x_1-|z|<x_2^2+\sigma\upsilon\nu x_2-|z| \Leftrightarrow f(x_1)<f(x_2)$

Άρα η f είναι γνησίως αύξουσα στο $\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right]$.

β) Είναι $f(0)=-|z|-1$ και $f\left(\dfrac{\pi}{2}\right)=\pi^2-|z|$,

άρα $f\left(\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right]\right)=\left[f(0),f\left(\dfrac{\pi}{2}\right)\right]=\left[-|z|-1,\pi^2-|z|\right]$

γ) Για να έχει η f ακριβώς μια ρίζα στο $\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$ πρέπει το σύνολο τιμών της να περιέχει το 0.

Επειδή $f(0)<0$, πρέπει: $f\left(\dfrac{\pi}{2}\right)>0 \Leftrightarrow \pi^2-|z|>0 \Leftrightarrow |z|<\pi^2$.

Επομένως ο γεωμετρικός τόπος των εικόνων του μιγαδικού z αποτελείται από τα σημεία του κυκλικού δίσκου με κέντρο $O(0,0)$ και ακτίνα π^2 εκτός από τα σημεία του κύκλου αυτού.

57. α) Εστω $f(x)=\dfrac{\alpha x^2-\beta x+2}{x^2-1}$, $x\neq\pm1$ με $\lim\limits_{x\to1}f(x)=\dfrac{1}{2}$ και $\alpha=|z-3-4i|$, $\beta=|w-3+6i|$.

Είναι: $f(x)(x^2-1)=\alpha x^2-\beta x+2$

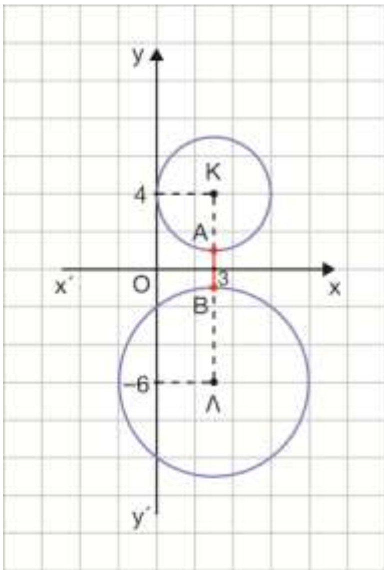
άρα και $\lim\limits_{x\to1}\left[f(x)(x^2-1)\right]=\lim\limits_{x\to1}(\alpha x^2-\beta x+2)\Leftrightarrow \alpha-\beta+2=0\Leftrightarrow \beta=\alpha+2$.

Τότε: $f(x)=\dfrac{\alpha x^2-\alpha x-2x+2}{x^2-1}=\dfrac{\alpha x(x-1)-2(x-1)}{(x-1)(x+1)}=\dfrac{\cancel{(x-1)}(\alpha x-2)}{\cancel{(x-1)}(x+1)}=\dfrac{\alpha x-2}{x+1}$

και $\lim\limits_{x\to1}f(x)=\lim\limits_{x\to1}\dfrac{\alpha x-2}{x+1}=\dfrac{\alpha-2}{2}$.

Είναι $\lim\limits_{x\to1}f(x)=\dfrac{1}{2}\Leftrightarrow\dfrac{\alpha-2}{2}=\dfrac{1}{2}\Leftrightarrow\alpha=3$

Άρα $|z-3-4i|=3$ και ο γεωμετρικός τόπος των εικόνων του μιγαδικού z είναι κύκλος με κέντρο $K(3,4)$ και ακτίνα $\rho_1=3$.



β) Επειδή $\alpha=3$ είναι $\beta=3+2=5$, άρα $|w-3+6i|=5$ και ο γεωμετρικός τόπος των εικόνων του μιγαδικού w είναι κύκλος με κέντρο $\Lambda(3,-6)$ και ακτίνα $\rho_2=5$.

γ) Είναι $(K\Lambda)=|-6-4|=10$ και

$|z-w|_{min}=(AB)=(K\Lambda)-\rho_1-\rho_2=10-3-5=2$.

58. α) $|iz-w|^2=|z|^2+|w|^2\Leftrightarrow(iz-w)(-i\bar z-\bar w)=z\bar z+w\bar w\Leftrightarrow$

$-i^2z\bar z-iz\bar w+i\bar z w+w\bar w=z\bar z+w\bar w\Leftrightarrow z\bar z-iz\bar w+i\bar z w+w\bar w=z\bar z+w\bar w\Leftrightarrow$

$-iz\bar w+i\bar z w=0\Leftrightarrow z\bar w=\bar z w\Leftrightarrow\dfrac{z}{w}=\dfrac{\bar z}{\bar w}\Leftrightarrow\dfrac{z}{w}\in\mathbb{R}$.

β) $z\bar w-\bar z w=0\Leftrightarrow 2\mathrm{Im}(z\bar w)i=0\Leftrightarrow\mathrm{Im}(z\bar w)=0$,

όμως $z\bar w=\alpha f(\alpha)-\beta f(\beta)+(\alpha\beta+f(\alpha)f(\beta))i$

άρα $\alpha\beta+f(\alpha)f(\beta)=0\Leftrightarrow f(\alpha)f(\beta)=-\alpha\beta<0$.

Επειδή η f είναι συνεχής στο $[\alpha,\beta]$, λόγω του θεωρήματος Bolzano η εξίσωση $f(x)=0$ έχει τουλάχιστον μια ρίζα στο (α,β).

γ) Αρκεί $|z|^2+|-iw|^2=|z+iw|^2\Leftrightarrow|z|^2+|i|^2|w|^2=|-i^2z+iw|^2\Leftrightarrow$

$|z|^2+|w|^2=|-i(iz-w)|^2\Leftrightarrow|z|^2+|w|^2=|-i|^2|iz-w|^2\Leftrightarrow|z|^2+|w|^2=|iz-w|^2$ που ισχύει.

59. α) $|z+w|=|z-w|\Leftrightarrow|z+w|^2=|z-w|^2\Leftrightarrow(z+w)(\bar z+\bar w)=(z-w)(\bar z-\bar w)\Leftrightarrow$

$z\bar z+z\bar w+w\bar z+w\bar w=z\bar z-z\bar w-w\bar z z+w\bar w\Leftrightarrow 2z\bar w+2w\bar z=0\Leftrightarrow z\bar w+w\bar z=0\Leftrightarrow$

$z\bar w+\overline{z\bar w}=0\Leftrightarrow 2\mathrm{Re}(z\bar w)=0\Leftrightarrow\mathrm{Re}(z\bar w)=0$

Είναι $z\bar w=(f(1)+i)(1-f(2)i)=f(1)-f(1)f(2)i+i+f(2)=(f(1)+f(2))+(1-f(1)f(2))i$

$\mathrm{Re}(z\bar w)=0\Leftrightarrow f(1)+f(2)=0\Leftrightarrow f(1)=-f(2)$.

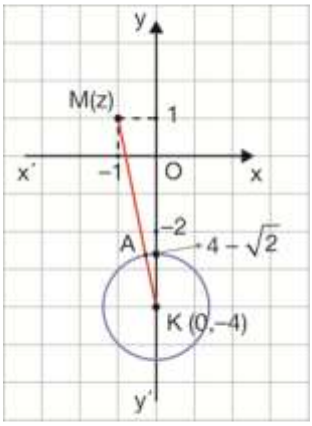
Είναι $f(1)f(2)=-f^2(2)\le 0$.

Αν $f(1)f(2)<0$, τότε επειδή η f είναι συνεχής στο $[1,2]$, λόγω του θεωρήματος Bolzano, η εξίσωση $f(x)=0$ έχει τουλάχιστον μια ρίζα στο διάστημα $(1,2)$.

Αν $f(1)f(2)=0 \Leftrightarrow f(1)=0$ ή $f(2)=0$

η εξίσωση $f(x)=0$ έχει ρίζα το 1 ή το 2.

Άρα γενικά, η εξίσωση $f(x)=0$ έχει τουλάχιστον μια ρίζα στο διάστημα $[1,2]$.



β) $f(1)=-f(2)=-1$ άρα $z=-1+i$.

γ) Ο γ. τόπος του u είναι κύκλος με κέντρο $K(0,-4)$ και ακτίνα $\rho=\sqrt{2}$.

Είναι $(MK)=\sqrt{(-1-0)^2+(1+4)^2}=\sqrt{26}$.

$|z-u|_{min}=(MA)=(MK)-(KA)=\sqrt{26}-\sqrt{2}$

60. α) $|z+9i|=3|z+i| \Leftrightarrow |z+9i|^2=9|z+i|^2 \Leftrightarrow \ldots \Leftrightarrow |z|=3$

β) $|z|=3 \Leftrightarrow 1+f^2(1)=9 \Leftrightarrow f^2(1)=8$

γ) Εστω $g(x)=2xf^2(x)-5-4x$, $x\in[0,1]$.

$g(0)=-5<0$, $g(1)=2f^2(1)-5-4=7>0 \ldots$

Επειδή η g είναι συνεχής, από το Θ. Bolzano υπάρχει $x_0\in(0,1): g(x_0)=0$

δ) $3w=iz+2 \Leftrightarrow z=\dfrac{3w-2}{i}$

$$\left|\frac{3w-2}{i}\right|=|z|=3 \Leftrightarrow \frac{|3w-2|}{1}=3 \Leftrightarrow 3\left|w-\frac{2}{3}\right|=3 \Leftrightarrow \left|w-\frac{2}{3}\right|=1$$

κύκλος με κέντρο $K\left(\dfrac{2}{3},0\right)$ και ακτίνα 1.

61. α) $$z=\frac{\alpha+if(\alpha)}{\beta-if(\beta)}=\frac{(\alpha+if(\alpha))(\beta+if(\beta))}{(\beta-if(\beta))(\beta+if(\beta))}=\frac{\alpha\beta+i\alpha f(\beta)+i\beta f(\alpha)-f(\alpha)f(\beta)}{\beta^2+f^2(\beta)} \Leftrightarrow$$

$$z=\frac{\alpha\beta-f(\alpha)f(\beta)}{\beta^2+f^2(\beta)}+\frac{\alpha f(\beta)+\beta f(\alpha)}{\beta^2+f^2(\beta)}i$$

β) Αν η εικόνα του z βρίσκεται στον άξονα $y'y$,

τότε: $Re(z)=0 \Leftrightarrow \dfrac{\alpha\beta-f(\alpha)f(\beta)}{\beta^2+f^2(\beta)} \Leftrightarrow \alpha\beta-f(\alpha)f(\beta)=0 \quad (1)$

Εστω $g(x)=f(x)-x$, $x\in[\alpha,\beta]$. Είναι $g(\alpha)=f(\alpha)-\alpha>0$ και από την (1) είναι

$\dfrac{f(\beta)}{\beta}=\dfrac{\alpha}{f(\alpha)}<1 \Leftrightarrow f(\beta)<\beta \Leftrightarrow f(\beta)-\beta<0 \Leftrightarrow g(\beta)<0$, δηλαδή $g(\alpha)g(\beta)<0$.

Επειδή η g είναι συνεχής στο $[\alpha,\beta]$, λόγω του Θεωρήματος Bolzano η εξίσωση $g(x)=0 \Leftrightarrow f(x)=x$ έχει μια τουλάχιστον ρίζα στο διάστημα (α,β).

62. **α)** $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$ και $f(0)=-2$. Θ. Bolzano για την f στα $(x_1,0)$ και $(0,x_2)$, όπου $x_1<0$ με $f(x_1)>0$ και $x_2>0$ με $f(x_2)>0$.

β) Είναι $f(x)=\alpha(x-z_1)(x-z_2)(x-z_3)(x-z_4)$

και $f(1+i)=\alpha(1+i-z_1)(1+i-z_2)(1+i-z_3)(1+i-z_4)=-4+6i \Leftrightarrow$

$\alpha(1+i)^4+2(1+i)^3-3(1+i)^2+\beta(1+i)-2=-4+6i \Leftrightarrow \alpha=-2$, $\beta=8$.

63. **α)** $|z-1|+|z+1|=4$, άρα ο γ.τ. του $M(z)$ είναι έλλειψη.

β) $\left(|z-1|+|z+1|\right)^2=4^2 \Leftrightarrow ... \Leftrightarrow \left|z^2\right|+\left|z^2-1\right|=7$.

γ) Επειδή οι εικόνες των z_1,z_2 βρίσκονται στην έλλειψη, είναι $|z_1-z_2|_{max}=(AA')=4$, άρα $|z_1-z_2|\le 4$

δ) Εστω $x_1,x_2\in\mathbb{R}$, με $x_1<x_2$, τότε... $f(x_1)<f(x_2)$.

ε) $f(x)=f^{-1}(x)\Leftrightarrow f(x)=x \Leftrightarrow \left|z^2\right|\cdot x^{2\nu+1}+\left|z^2-1\right|x-8=0 \Leftrightarrow \left|z^2\right|x^{2\nu+1}+\left(7-\left|z^2\right|\right)x-8=0$.

Προφανής η $x=1$ και η $g(x)=\left|z^2\right|x^{2\nu+1}+\left(7-\left|z^2\right|\right)x-8$ είναι $\uparrow$.

64. **α)** Αν $z=\alpha+\beta i$, τότε $|z|=1 \Leftrightarrow \alpha^2+\beta^2=1$ (1)

$$f(x)=\left|z-x^2 i\right|+3=\left|\alpha+\left(\beta-x^2\right)i\right|+3=\sqrt{\alpha^2+\left(\beta-x^2\right)^2}+3=\sqrt{x^4-2\mathrm{Im}(z)\cdot x^2+1}+3$$

β) Η f είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$ ως σύνθεση και πράξεις συνεχών συναρτήσεων.

γ) Εστω $g(x)=f(x)-6x$, $x\in[0,1]$.

$g(0)=f(0)=4>0$ και $g(1)=f(1)-6=\sqrt{2-2\beta}-3<0$ και g συνεχής ...Θ. Bolzano

δ) $f(2)=6 \Leftrightarrow \sqrt{17-8\beta}+3=6 \Leftrightarrow \beta=1$. Τότε $(1)\Rightarrow \alpha=0$, άρα $z=i$.

ε) **i.** $|w|=|iz|=1$ μοναδιαίος κύκλος

ii. $|z-w|=|z-iz|=|z(1-i)|=|z||1-i|=1\cdot\sqrt{2}=\sqrt{2}$

65. **α)** Εστω $z=\alpha+\beta i$ με $\beta\neq 0$, τότε:

$f(x)=|xz+1|-4=|x(\alpha+\beta i)+1|-4=|(\alpha x+1)+\beta x i|-4 \Leftrightarrow$

$f(x)=\sqrt{(\alpha x+1)^2+\beta^2x^2}-4=\sqrt{\left(\alpha^2+\beta^2\right)x^2+2\alpha x+1}-4$.

Η f είναι συνεχής και παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ ως σύνθεση και πράξεις συνεχών συναρτήσεων.

β) **i.** $f(-2)=f(2) \Leftrightarrow |-2z+1|-4=|2z+1|-4 \Leftrightarrow |-2z+1|=|2z+1| \Leftrightarrow$

$|-2z+1|^2=|2z+1|^2 \Leftrightarrow (-2z+1)(-2\bar{z}+1)=(2z+1)(2\bar{z}+1) \Leftrightarrow$

$4z\bar{z}-2z-2\bar{z}+1=4z\bar{z}+2z+2\bar{z}+1 \Leftrightarrow 4z=-4\bar{z} \Leftrightarrow z=-\bar{z} \Leftrightarrow z\in I$.

ii. Επειδή $z\in I$ είναι $z=\beta i$ με $\beta\neq 0$ και $f(x)=\sqrt{\beta^2x^2+1}-4$, $f'(x)=\dfrac{\beta^2 x}{\sqrt{\beta^2x^2+1}}$.

Είναι $f'(x)=0 \Leftrightarrow \beta x=0 \Leftrightarrow x=0$.

Για κάθε $x<0$ είναι $f'(x)<0$

άρα η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $(-\infty,0]$.

x	$-\infty$	0	$+\infty$
f'	$-$	0	$+$
f	$\searrow$		$\nearrow$

Για κάθε $x>0$ είναι $f'(x)>0$, άρα η f είναι γνησίως αύξουσα στο $[0,+\infty)$.

$$\lim_{x\to-\infty} f(x)=\lim_{x\to-\infty}\left(\sqrt{\beta^2x^2+1}-4\right)=\lim_{x\to-\infty}\left(-x\sqrt{\beta^2+\frac{1}{x^2}}-4\right)=$$

$$=\lim_{x\to-\infty}\left[x\left(-\sqrt{\beta^2+\frac{1}{x^2}}-\frac{4}{x}\right)\right]=+\infty,$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty}\left[x\left(\sqrt{\beta^2+\frac{1}{x^2}}-\frac{4}{x}\right)\right]=+\infty \text{ και } f(0)=-3, \text{ οπότε:}$$

Για το διάστημα $\Delta_1=(-\infty,0]$ έχουμε: $f(\Delta_1)=\left[f(0),\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)\right)=[-3,+\infty)$ και για το διάστημα $\Delta_2=[0,+\infty)$ έχουμε: $f(\Delta_2)=\left[f(0),\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)\right)=[-3,+\infty)$. Άρα $f(A)=[-3,+\infty)$.

Επειδή το 0 ανήκει στο $f(\Delta_1)$ και η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $\Delta_1=(-\infty,0]$, υπάρχει μοναδικό $x_1\in\Delta_1$ τέτοιο ώστε $f(x_1)=0$. Επειδή το 0 ανήκει στο $f(\Delta_2)$ και η f είναι γνησίως αύξουσα στο $\Delta_2=[0,+\infty)$, υπάρχει μοναδικό $x_2\in\Delta_2$ τέτοιο ώστε $f(x_2)=0$.

Άρα η εξίσωση $f(x)=0$ έχει ακριβώς δύο ρίζες.

iii. $|\xi z+1|=14\Leftrightarrow|\xi z+1|-4=10\Leftrightarrow f(\xi)=10$.

Επειδή το 10 ανήκει στο σύνολο τιμών της f υπάρχει $\xi\in A=\mathbb{R}$ τέτοιο ώστε $f(\xi)=10$.

66. $|z|^2-2\mathrm{Re}(z)\mathrm{Im}(z)=x^2+9\Leftrightarrow f^2(x)+\eta\mu^2x-2f(x)\eta\mu x=x^2+9\Leftrightarrow$

$\left(f(x)-\eta\mu x\right)^2=x^2+9$

α) Επειδή $x^2+9\neq0$ είναι και $f(x)-\eta\mu x\neq0$ και επειδή η g είναι συνεχής, διατηρεί σταθερό πρόσημο.

β) $g(0)=f(0)=3>0$, άρα $g(x)>0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$,

άρα $\left(f(x)-\eta\mu x\right)^2=x^2+9\Leftrightarrow f(x)-\eta\mu x=\sqrt{x^2+9}\Leftrightarrow f(x)=\sqrt{x^2+9}+\eta\mu x$.

γ) $$\lim_{x\to0}\frac{f(x)+\eta\mu x-3}{x}=\lim_{x\to0}\frac{\sqrt{x^2+9}+2\eta\mu x-3}{x}=\lim_{x\to0}\left(\frac{\sqrt{x^2+9}-3}{x}+2\frac{\eta\mu x}{x}\right)=$$

$$=\lim_{x\to0}\left(\frac{x^2+9-9}{x\left(\sqrt{x^2+9}+3\right)}+2\frac{\eta\mu x}{x}\right)=2$$

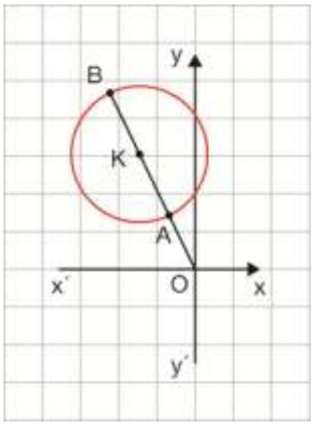
δ) $f(0)=3$, $f(\pi)=\sqrt{\pi^2+9}>\pi$.

$3<\pi<\sqrt{\pi^2+9}$ και f συνεχής στο $[0,\pi]$, οπότε σύμφωνα με το ΘΕΤ υπάρχει $x_0\in(0,\pi)$ τέτοιο ώστε $f(x_0)=\pi$.

67. α) $|w|=2\Leftrightarrow\left|\frac{z-1}{z-i}\right|=2\Leftrightarrow|z-1|^2=4|z-i|^2\Leftrightarrow\ldots\Leftrightarrow\left(x+\frac{1}{3}\right)^2+\left(y-\frac{4}{3}\right)^2=\frac{8}{9}$

β) $(OK)=\sqrt{\frac{1}{9}+\frac{16}{9}}=\frac{\sqrt{17}}{3}$, $|z|_{min}=(OK)-\rho=\frac{\sqrt{17}}{3}-\frac{2\sqrt{2}}{3}=\frac{\sqrt{17}-2\sqrt{2}}{3}$,

$|z|_{max} = (OK) + \rho = \dfrac{\sqrt{17} + 2\sqrt{2}}{3}$



γ) $\left(\alpha + \dfrac{1}{3}\right)^2 + \left(\beta - \dfrac{4}{3}\right)^2 = \dfrac{8}{9}$

Εστω $f(x) = 9\left(\alpha + \dfrac{1}{3}\right)^2 x^3 + 9\left(\beta - \dfrac{4}{3}\right)^2 x - 1,\ x \in [0,1]$

$f(0) = -1 < 0$,

$f(1) = 9\left(\alpha + \dfrac{1}{3}\right)^2 + 9\left(\beta - \dfrac{4}{3}\right)^2 - 1 = 8 - 1 = 7 > 0$ ... Θ.Β.

δ) $|w - 6 + 8i| \le |w| + |-6 + 8i| \le 2 + 10 = 12$ και

$|w - 6 + 8i| \ge \big||w| - |-6 + 8i|\big| \le |2 - 10| = 8$

68. α) Εστω $g(x) = \dfrac{\alpha x^2 - \beta x - 6}{x^2 - 4}$, $x \ne \pm 2 \Leftrightarrow g(x)(x^2 - 4) = \alpha x^2 - \beta x - 6$

και $\lim\limits_{x\to 2}\left[g(x)(x^2 - 4)\right] = \lim\limits_{x\to 2}(\alpha x^2 - \beta x - 6) \Leftrightarrow 0 = 4\alpha - 2\beta - 6 \Leftrightarrow \beta = 2\alpha - 3$

Τότε $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{\alpha x^2 - (2\alpha - 3)x - 6}{x^2 - 4} = \lim\limits_{x\to 2} \dfrac{\alpha x(x-2) + 3(x-2)}{(x-2)(x+2)} = \dfrac{2\alpha + 3}{4} = \dfrac{7}{4} \Leftrightarrow \alpha = 2,\ \beta = 1$.

β) $|z + 2 - 2i| = 2$ κύκλος με κέντρο $K(-2,2)$ και ακτίνα $\rho_1 = 2$.

$|w - 1 + i| = 1$ κύκλος με κέντρο $\Lambda(1,-1)$ και ακτίνα $\rho_2 = 1$.

γ) $(K\Lambda) = \sqrt{(-2-1)^2 + (2+1)^2} = 3\sqrt{2}$,

$|z - w|_{min} = (K\Lambda) - \rho_1 - \rho_2 = 3\sqrt{2} - 3$, $|z - w|_{min} = (K\Lambda) + \rho_1 + \rho_2 = 3\sqrt{2} + 3$

δ) $2 = |z + 2 - 2i| \ge \big||z| - |2 - 2i|\big| \Leftrightarrow \big||z| - 2\sqrt{2}\big| \le 2 \Leftrightarrow -2 \le |z| - 2\sqrt{2} \le 2 \Leftrightarrow$

$2\left(\sqrt{2} - 1\right) \le |z| \le 2\left(\sqrt{2} + 1\right)$

ε) $1 = |w - 1 + i| \ge \big||w| - |1 - i|\big| \Leftrightarrow \big||w| - \sqrt{2}\big| \le 1 \Leftrightarrow -1 \le |w| - \sqrt{2} \le 1 \Leftrightarrow \sqrt{2} - 1 \le |w| \le \sqrt{2} + 1$.

69. α) Αν $z = x + yi$, τότε $|z| = 5 \Leftrightarrow x^2 + y^2 = 25 \quad (1)$

$|z - 1 - 2i| = 2\sqrt{2} \Leftrightarrow (x-1)^2 + (y-2)^2 = \left(2\sqrt{2}\right)^2 \Leftrightarrow x^2 - 2x + y^2 - 4y = 3 \overset{(1)}{\Leftrightarrow}$

$25 - 2x - 4y = 3 \Leftrightarrow x = 11 - 2y$.

Τότε $(1) \Rightarrow (11 - 2y)^2 + y^2 = 25 \Leftrightarrow ... \Leftrightarrow y = \dfrac{24}{5}$ ή $y = 4$

Αν $y = \dfrac{24}{5}$ τότε $x = \dfrac{7}{5}$ και $z = \dfrac{7}{5} + \dfrac{24}{5}i$, ενώ αν $y = 4$ τότε $x = 3$ και $z = 3 + 4i$.

β) $z_1 = \dfrac{7}{5} + \dfrac{24}{5}i$, $z_2 = 3 + 4i$

$|z_2|^2 x^3 + \mathrm{Re}(z_1)x + |z_1 + z_2| = 0 \Leftrightarrow 25x^3 + \dfrac{7}{5}x + \sqrt{\dfrac{66}{5}} = 0$

Εστω $f(x) = 25x^3 + \dfrac{7}{5}x + \sqrt{\dfrac{66}{5}}$, $x \in [-1,0]$.

$f(0)=\sqrt{\frac{66}{5}}>0$, $f(-1)=-25-\frac{7}{5}+\sqrt{\frac{66}{5}}<0$ ... Θ. Bolzano

Εστω $x_1,x_2\in(-1,0)$ με $x_1<x_2$ ..... $f(x_1)<f(x_2)$ άρα f γνησίως αύξουσα και η ρίζα είναι μοναδική.

70. α) $f(x)=\begin{cases}\sqrt{(x^2+\beta x)^2+\alpha^2x^2} & ,x\geq 2\\ \sqrt{(x^2-\beta x)^2+\alpha^2x^2} & ,x<2\end{cases}$ $\lim\limits_{x\to 2^-}f(x)=\lim\limits_{x\to 2^+}f(x)=f(2)\Leftrightarrow .....\Leftrightarrow\beta=0$

β) $f(1)=1\Leftrightarrow|1+iz|=1\Leftrightarrow|i(-i+z)|=1\Leftrightarrow|i||z-i|=1\Leftrightarrow|z-i|=1$

71. α) $|f(x)-4|\leq x^2-8x+16\Leftrightarrow|f(x)-4|\leq(x-4)^2$.

Για $x=4$ είναι $f(4)=0$

Για $x\neq 4$: $\frac{|f(x)-4|}{|x-4|}\leq|x-4|\Leftrightarrow\left|\frac{f(x)-4}{x-4}\right|\leq|x-4|\Leftrightarrow-|x-4|\leq\frac{f(x)-4}{x-4}\leq|x-4|$

$\lim\limits_{x\to 4}|x-4|=0$, άρα και $\lim\limits_{x\to 4}\frac{f(x)-4}{x-4}=0\Leftrightarrow f'(4)=0$.

Τότε $\lim\limits_{x\to 4}\frac{f'(x)}{x-4}=2=\lim\limits_{x\to 4}\frac{f'(x)-f'(4)}{x-4}=f''(4)$

β) $w=-\frac{1}{z}$, $|z|=1$ και $|w|=\left|-\frac{1}{z}\right|=1$ μοναδιαίος κύκλος.

γ) i. $\lim\limits_{x\to 4}\frac{xf(x)-16}{\sqrt{x}-2}=\lim\limits_{x\to 4}\frac{(xf(x)-16)(\sqrt{x}+2)}{(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}-2)}=\lim\limits_{x\to 4}\frac{(xf(x)-4x+4x-16)(\sqrt{x}+2)}{x-4}=$

$$=\lim_{x\to 4}\frac{\big(x(f(x)-4)+4(x-4)\big)(\sqrt{x}+2)}{x-4}=$$

$$=\lim_{x\to 4}\left[x(\sqrt{x}+2)\frac{f(x)-4}{x-4}+4(\sqrt{x}+2)\right]=16$$

ii. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\frac{f(4-x)-f(4+x)}{x}}{\frac{\eta\mu x}{x}}=\lim\limits_{x\to 0}\left[\frac{\frac{f(4-x)-f(4)}{x}}{\frac{\eta\mu x}{x}}-\frac{\frac{f(4+x)-f(4)}{x}}{\frac{\eta\mu x}{x}}\right]=0$

γιατί $\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(4-x)-f(4)}{x}\overset{4-x=u}{=}\lim\limits_{u\to 4}\frac{f(u)-f(4)}{4-u}=-f'(4)=0$, $\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(4+x)-f(4)}{x}=f'(4)=0$

72. α) $f(-1)=-|z|+|w|-|z+w|$, $f(1)=|z|+|w|-|z+w|$

$|z+w|\leq|z|+|w|\Leftrightarrow|z|+|w|-|z+w|\geq 0\Leftrightarrow f(1)\geq 0$

$|z+w|\geq||z|-|w||\Leftrightarrow-|z+w|\leq|z|-|w|\leq|z+w|$ άρα $-|z|+|w|-|z+w|\leq 0\Leftrightarrow f(-1)\leq 0$

$f(-1)f(1)\leq 0$

Αν $f(-1)f(1)<0$ και f συνεχής τότε λόγω Θ. Bolzano...

Αν $f(-1)f(1)=0\Leftrightarrow f(-1)=0$ ή $f(1)=0$.

β) $f(x)=2x^3+3x^2-|z+w|$ και $f(1)=0 \Leftrightarrow 5-|z+w|=0 \Leftrightarrow |z+w|=5$

Τότε $|z+w|=|z|+|w|$. Αν A,B οι εικόνες των z,w αντίστοιχα, τότε $\left|\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}\right|=\left|\overrightarrow{OA}\right|+\left|\overrightarrow{OB}\right|$,

άρα τα σημεία O,A,B είναι συνευθειακά.

73. α) $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 1^+} f(x)=f(1) \Leftrightarrow |z_1+z_2|=|z_1|+|z_2| \Leftrightarrow |z_1+z_2|^2=(|z_1|+|z_2|)^2 \Leftrightarrow \ldots \Leftrightarrow \dfrac{z_1}{z_2}=\dfrac{\overline{z_1}}{\overline{z_2}}$

β) Θέτουμε $\dfrac{x^2|z_2|+x|z_1|-8}{x-2}=g(x)$, $x\neq 2 \Leftrightarrow x^2|z_2|+x|z_1|=g(x)(x-2)+8$

άρα και $\lim\limits_{x\to 2}\left(x^2|z_2|+x|z_1|\right)=\lim\limits_{x\to 2}\left(g(x)(x-2)+8\right) \Leftrightarrow 4|z_2|+2|z_1|=8 \quad (1)$

$\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{f(x)-8}{x-2}=\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2|z_2|+x|z_1|-4|z_2|-2|z_1|}{x-2}=4|z_2|+|z_1|=6 \quad (2)$

Από (1), (2) είναι $|z_2|=2$ και $|z_1|=2$.