



180. α) Αφού η συνάρτηση $\frac{1}{1+t^4}$ είναι συνεχής στο \mathbb{R} τότε η συνάρτηση $f(x) = \int_0^x \frac{1}{1+t^4} dt$

είναι παραγωγίσιμη στο \mathbb{R} με $f'(x) = \frac{1}{1+x^4} > 0$ οπότε η $f \uparrow$ στο \mathbb{R} .

Επίσης $f''(x) = \frac{-4x^3}{(1+x^4)^2}$ οπότε $f''(x) > 0 \Leftrightarrow x < 0$.

Άρα η f είναι κυρτή στο $(-\infty, 0]$ και κοίλη στο $[0, +\infty)$ και παρουσιάζει σημείο καμπής το $(0, 0)$.

x	0	
f'	+	+
f''	+	-
f		

β) Εφαρμόζουμε Θ.Μ.Τ. για την f στο $[1, 2]$ οπότε υπάρχει $\xi \in (1, 2)$ τέτοιο ώστε

$$f'(\xi) = \frac{f(2) - f(1)}{2 - 1} \Leftrightarrow \frac{1}{1+\xi^4} = \int_0^2 \frac{1}{1+t^4} dt - \int_0^1 \frac{1}{1+t^4} dt \Leftrightarrow \frac{1}{1+\xi^4} = \int_1^2 \frac{1}{1+t^4} dt \quad (1).$$

$$\text{Είναι } 1 < \xi < 2 \Leftrightarrow 1 < \xi^4 < 16 \Leftrightarrow 2 < 1 + \xi^4 < 17 \Leftrightarrow \frac{1}{2} > \frac{1}{1+\xi^4} > \frac{1}{17},$$

$$\text{άρα από (1)} \Rightarrow \frac{1}{17} < \int_1^2 \frac{1}{1+t^4} dt < \frac{1}{2}.$$

γ) Είναι $f(0) = 0$ και $f'(0) = 1$ οπότε η εφαπτομένη της C_f στο $x_0 = 0$ είναι

$$y - f(0) = f'(0)(x - 0) \Leftrightarrow y - 0 = 1(x - 0) \Leftrightarrow y = x$$

δ) Αφού η $f \uparrow$ στο \mathbb{R} τότε για $x > 0$ θα είναι $f(x) > f(0) \Leftrightarrow f(x) > 0$. Οπότε $f(x) > 0$ για κάθε $x \in [2, 4]$. Επίσης αφού η f είναι κοίλη στο $(0, +\infty)$ τότε σε κάθε σημείο η εφαπτομένη θα είναι πάνω από τη C_f με εξαίρεση το σημείο επαφής. Άρα για $x \geq 0$ θα είναι $f(x) \leq x$ και η ισότητα ισχύει μόνο για $x = 0$. Άρα για $x > 0$ θα είναι $f(x) < x$ (2). Το ζητούμε εμβαδό

$$E = \int_2^4 f(x) dx. \text{ Από τη (2) έχουμε } \int_2^4 f(x) dx < \int_2^4 x dx \Leftrightarrow E < \left[\frac{x^2}{2} \right]_2^4 \Leftrightarrow E < 6.$$

181. α) Για $x = y = 1$, $f(1) = f(1) + f(1) \Leftrightarrow f(1) = 0$.

$$\begin{aligned} \beta) \lim_{y \rightarrow 1} \frac{f(xy) - f(x)}{xy - x} &= \lim_{y \rightarrow 1} \frac{x^2 f(y) + y^2 f(x) - f(x)}{x(y-1)} = \lim_{y \rightarrow 1} \left[x \frac{f(y)}{y-1} + \frac{f(x)(y^2-1)}{x(y-1)} \right] = \\ &= x f'(1) + 2 \frac{f(x)}{x} = \frac{2f(x)}{x} + x. \end{aligned}$$

$$\gamma) f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \stackrel{x=x_0 h}{=} \lim_{h \rightarrow 1} \frac{f(x_0 h) - f(x_0)}{x_0 h - x_0} \stackrel{\beta)}{=} \frac{2f(x_0)}{x_0} + x_0$$

$$\text{άρα } f'(x) = \frac{2f(x)}{x} + x \Leftrightarrow x f'(x) = 2f(x) + x^2 \text{ και για } x > 0 \quad x^2 f'(x) = 2x f(x) + x^3.$$

$$\delta) \frac{x^2 f'(x) - 2x f(x)}{x^4} = \frac{1}{x} \Rightarrow \left(\frac{f(x)}{x^2} \right)' = (\ln x)' \Leftrightarrow \frac{f(x)}{x^2} = \ln x + c \stackrel{f(1)=0}{\Rightarrow} c = 0 \text{ άρα } f(x) = x^2 \ln x.$$

ε) Για $\lambda > 1$ το ζητούμενο εμβαδό είναι:

$$E(\lambda) = \int_1^\lambda f(x) dx = \int_1^\lambda \ln x \left(\frac{x^3}{3} \right)' dx = \left[\frac{x^3}{3} \ln x \right]_1^\lambda - \int_1^\lambda \frac{1}{x} \frac{x^3}{3} dx = \frac{\lambda^3 \ln \lambda}{3} - \left[\frac{x^3}{3} \right]_1^\lambda \Leftrightarrow$$

$$E(\lambda) = \frac{\lambda^3 \ln \lambda - \lambda^3 + 1}{3} = \frac{\lambda^3 (\ln \lambda - 1) + 1}{3}. \text{ Άρα } \lim_{\lambda \rightarrow +\infty} E(\lambda) = \lim_{\lambda \rightarrow +\infty} \frac{\lambda^3 (\ln \lambda - 1) + 1}{3} = +\infty.$$

182. α) Είναι $f(g(x)) \geq g(x) \Leftrightarrow f(g(x)) - g(x) \geq 0$ (1)

Εστω $h(x) = f(g(x)) - g(x)$, $x \in \mathbb{R}$. Παρατηρούμε ότι $h(3) = f(g(3)) - g(3) = f(0) = 0$,
 οπότε η (1) γίνεται: $h(x) \geq h(3)$. Δηλαδή η συνάρτηση h παρουσιάζει ελάχιστο στο $x_0 = 3$.
 Επειδή το $x_0 = 3$ είναι στο εσωτερικό του πεδίου ορισμού της h και η h είναι παραγωγίσιμη
 στο \mathbb{R} με $h'(x) = f'(g(x))g'(x) - g'(x)$, λόγω του θεωρήματος Fermat είναι:

$$h'(3) = 0 \Leftrightarrow f'(g(3))g'(3) - g'(3) = 0 \Leftrightarrow g'(3)[f'(0) - 1] = 0 \quad (2).$$

Επειδή $f'(x)g'(x) > 0$ τα $f'(x)$ και $g'(x)$ είναι ομόσημοι, άρα $g'(3) \neq 0$ και η (2) γίνεται:
 $f'(0) - 1 = 0 \Leftrightarrow f'(0) = 1$.

β) Για κάθε $x \in (1, 2)$ είναι $\frac{f(1821)}{x-1} + \frac{1}{x-2} = 0 \Leftrightarrow f(1821)(x-2) + x - 1 = 0$.

Εστω $g(x) = f(1821)(x-2) + x - 1$, $x \in [1, 2]$.

Είναι $g(1) = f(1821)(1-2) + 1 - 1 = -f(1821)$ και $g(2) = f(1821)(2-2) + 2 - 1 = 1 > 0$.

Επειδή $f'(x)g'(x) > 0$, είναι $f'(x) \neq 0$ και επειδή η f' είναι συνεχής, θα διατηρεί σταθερό
 πρόσημο. Επειδή $f'(0) = 1 > 0$, είναι $f'(x) > 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$, άρα η f είναι γνησίως
 αύξουσα στο \mathbb{R} . Επειδή $1821 > 0$, είναι $f(1821) > f(0) = 0$, άρα $g(1) < 0$ και $g(1)g(2) < 0$.

Επειδή η g είναι συνεχής στο $[1, 2]$, λόγω του θεωρήματος Bolzano, η εξίσωση

$g(x) = 0 \Leftrightarrow f(1821)(x-2) + x - 1 = 0$, έχει τουλάχιστον μία ρίζα στο $(1, 2)$, οπότε και η

εξίσωση $\frac{f(1821)}{x-1} + \frac{1}{x-2} = 0$ έχει τουλάχιστον μια ρίζα στο $(1, 2)$.

γ) Για κάθε $x \geq 0 \Leftrightarrow f(x) \geq f(0) = 0$. Το εμβαδόν του χωρίου που ορίζεται από τη γραφική

παράσταση της f , τους άξονες και την ευθεία $x = 1$ είναι $E = \int_0^1 f(x) dx$, άρα

$\int_0^1 f(x) dx = 1821$. Εστω $F(x) = \int_0^x f(t) dt$, $x \in [0, 1]$. Επειδή η f είναι συνεχής στο $[0, 1]$, η F
 είναι παραγωγίσιμη στο $[0, 1]$ με $F'(x) = f(x)$, οπότε είναι και συνεχής στο διάστημα αυτό.

Από το θεώρημα μέσης τιμής υπάρχει $\xi \in (0, 1)$ τέτοιο ώστε:

$$F'(\xi) = \frac{F(1) - F(0)}{1 - 0} \Leftrightarrow f(\xi) = \int_0^1 f(t) dt \Leftrightarrow f(\xi) = 1821.$$

Είναι $0 < \xi < 1$ και f γνησίως αύξουσα, άρα $f(\xi) < f(1) \Leftrightarrow 1821 < f(1)$.

δ) Επειδή η f είναι γνησίως αύξουσα στο \mathbb{R} , για κάθε $x > 0$ είναι $f(x) > f(0) = 0$ ενώ για κάθε
 $x < 0$ είναι $f(x) < f(0) = 0$. Επειδή $f'(x)g'(x) > 0$ και $f'(x) > 0$, είναι και $g'(x) > 0$, άρα g

γνησίως αύξουσα στο \mathbb{R} . Για κάθε $x > 3$ είναι $g(x) > g(3) = 0$, ενώ για κάθε $x < 3$ είναι $g(x) < g(3) = 0$.

ε) Εστω $\int_0^3 2xg(x)dx = \lambda \in \mathbb{R}$ (3), τότε από τη σχέση $\int_0^3 2xg(x)dx + x + 6 = g(x)$,

έχουμε: $\lambda + x + 6 = g(x)$. Η σχέση (3) γίνεται:

$$\int_0^3 2x(\lambda + x + 6)dx = \lambda \Leftrightarrow \int_0^3 (2\lambda x + 2x^2 + 12x)dx = \lambda \Leftrightarrow$$

$$\left[\lambda x^2 + \frac{2}{3}x^3 + 6x^2 \right]_0^3 = \lambda \Leftrightarrow 9\lambda + 18 + 54 = \lambda \Leftrightarrow 8\lambda = -72 \Leftrightarrow \lambda = -9.$$

Τότε $g(x) = -9 + x + 6 = x - 3$.

183. α) Εστω $xt = u$, τότε $xdt = du$. Για $t = 0$ είναι $u = 0$ και για $t = 1$ είναι $u = x$.

$$\text{Είναι } f(x) = x^2 \int_0^1 \frac{2t}{3f^2(xt)} dt + 1 = \int_0^1 \frac{2xt}{3f^2(xt)} xdt + 1 = \int_0^x \frac{2u}{3f^2(u)} du + 1.$$

Επειδή η f είναι συνεχής στο \mathbb{R} με $f(x) \neq 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$, η f διατηρεί σταθερό πρόσημο.

Επειδή $f(0) = \int_0^0 \frac{2u}{3f^2(u)} du + 1 = 1 > 0$, είναι $f(x) > 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

β) Επειδή η f είναι συνεχής στο \mathbb{R} , η συνάρτηση $\int_0^x \frac{2u}{3f^2(u)} du$ είναι παραγωγίσιμη, άρα η g είναι

παραγωγίσιμη με $f'(x) = \frac{2x}{3f^2(x)} \Leftrightarrow 3f^2(x)f'(x) = 2x$ ή $(f^3(x))' = (x^2)'$ $\Leftrightarrow f^3(x) = x^2 + c$,

$c \in \mathbb{R}$. Επειδή $f(0) = 1$, είναι $c = 1$, άρα $f^3(x) = x^2 + 1 \Leftrightarrow f(x) = \sqrt[3]{x^2 + 1}$, $x \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned} \gamma) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - \sqrt{x^2 + 1}}{x} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{x^2 + 1} - \sqrt{x^2 + 1}}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\sqrt[3]{x^2 + 1} - 1}{x} - \frac{\sqrt{x^2 + 1} - 1}{x} \right) = \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{(\sqrt[3]{x^2 + 1} - 1) \left[(\sqrt[3]{x^2 + 1})^2 + \sqrt[3]{x^2 + 1} + 1 \right]}{x \left[(\sqrt[3]{x^2 + 1})^2 + \sqrt[3]{x^2 + 1} + 1 \right]} - \frac{(\sqrt{x^2 + 1} - 1)(\sqrt{x^2 + 1} + 1)}{x(\sqrt{x^2 + 1} + 1)} \right) = \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{(\sqrt[3]{x^2 + 1})^3 - 1}{x \left[(\sqrt[3]{x^2 + 1})^2 + \sqrt[3]{x^2 + 1} + 1 \right]} - \frac{(\sqrt{x^2 + 1})^2 - 1}{x(\sqrt{x^2 + 1} + 1)} \right) = \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{x^2 + 1 - 1}{x \left[(\sqrt[3]{x^2 + 1})^2 + \sqrt[3]{x^2 + 1} + 1 \right]} - \frac{x^2 + 1 - 1}{x(\sqrt{x^2 + 1} + 1)} \right) = \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{x}{\left[(\sqrt[3]{x^2 + 1})^2 + \sqrt[3]{x^2 + 1} + 1 \right]} - \frac{x}{(\sqrt{x^2 + 1} + 1)} \right) = 0 \end{aligned}$$

δ) Εστω $F(u) = \int_0^u f(t) dt$, $u \in [0, x]$, $x > 0$. Επειδή η F είναι συνεχής στο $[0, x]$, η F είναι παραγωγίσιμη με $F'(u) = f(u)$, οπότε είναι και συνεχής στο διάστημα αυτό. Από το θεώρημα μέσης τιμής, υπάρχει $\xi \in (0, x)$ τέτοιο ώστε

$$F'(\xi) = \frac{F(x) - F(0)}{x - 0} \Leftrightarrow f(\xi) = \frac{1}{x} \int_0^x f(t) dt \Leftrightarrow \sqrt[3]{\xi^2 + 1} = \frac{1}{x} \int_0^x f(t) dt.$$

$$\begin{aligned} \text{Είναι } 0 < \xi < x &\Leftrightarrow 0 < \xi^2 < x^2 \Leftrightarrow 1 < \xi^2 + 1 < x^2 + 1 \Leftrightarrow 1 < \sqrt[3]{\xi^2 + 1} < \sqrt[3]{x^2 + 1} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow 1 < \frac{1}{x} \int_0^x f(t) dt < \sqrt[3]{x^2 + 1} \Leftrightarrow x < \int_0^x f(t) dt < x \sqrt[3]{x^2 + 1}. \end{aligned}$$

Επειδή $\lim_{x \rightarrow +\infty} x = +\infty$, είναι και $\lim_{x \rightarrow +\infty} \int_0^x f(t) dt = +\infty$.

ε) Είναι $g(x) = \int_{-x}^x \frac{\eta \mu t}{f(t)} dt = \int_{-x}^0 \frac{\eta \mu t}{f(t)} dt + \int_0^x \frac{\eta \mu t}{f(t)} dt = \int_0^x \frac{\eta \mu t}{f(t)} dt - \int_0^{-x} \frac{\eta \mu t}{f(t)} dt.$

Επειδή η συνάρτηση $\frac{\eta \mu t}{f(t)}$ είναι συνεχής στο \mathbb{R} , οι συναρτήσεις $\int_0^x \frac{\eta \mu t}{f(t)} dt$ και $\int_0^{-x} \frac{\eta \mu t}{f(t)} dt$

είναι παραγωγίσιμες στο \mathbb{R} , άρα η g είναι παραγωγίσιμη στο \mathbb{R} με

$$g'(x) = \frac{\eta \mu x}{f(x)} - \frac{\eta \mu(-x)}{f(-x)}(-x)' = \frac{\eta \mu x}{\sqrt[3]{x^2 + 1}} + \frac{-\eta \mu x}{\sqrt[3]{(-x)^2 + 1}} = \frac{\eta \mu x}{\sqrt[3]{x^2 + 1}} - \frac{\eta \mu x}{\sqrt[3]{x^2 + 1}} = 0 \Leftrightarrow g(x) = c_1,$$

$c_1 \in \mathbb{R}$. Επειδή $g(0) = \int_0^0 \frac{\eta \mu t}{f(t)} dt = 0$, είναι $g(x) = 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

184. α) Είναι $f(0) = \int_0^0 \frac{t}{f(t)} dt + 1 = 1.$

β) Επειδή $f(x) \neq 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ και η f είναι συνεχής στο \mathbb{R} , η f διατηρεί σταθερό πρόσημο. Επειδή επιπλέον $f(0) = 1 > 0$ είναι $f(x) > 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

γ) Η συνάρτηση $\frac{t}{f(t)}$ είναι συνεχής στο \mathbb{R} ως ημίγειο συνεχών συναρτήσεων, οπότε η f είναι

παραγωγίσιμη στο \mathbb{R} με $f'(x) = \left(\int_0^x \frac{t}{f(t)} dt + 1 \right)' = \frac{x}{f(x)} \Leftrightarrow f'(x)f(x) = x \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow 2f'(x)f(x) = 2x \Leftrightarrow (f^2(x))' = (x^2)'$$

Για $x=0$ είναι $f^2(0) = c \Leftrightarrow c = 1$. Άρα $f^2(x) = x^2 + 1$ και επειδή $f(x) > 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$

είναι $f(x) = \sqrt{x^2 + 1}$, $x \in \mathbb{R}$.

δ) Για κάθε $x \in \mathbb{R}$ είναι $f(-x) = \sqrt{(-x)^2 + 1} = \sqrt{x^2 + 1} = f(x)$, οπότε η f είναι άρτια. Είναι

$$\int_{-\alpha}^0 f(x) dx = \int_{-\alpha}^0 f(-x) dx. \text{ Θέτουμε } -x = u, \text{ τότε } dx = -du. \text{ Για } x = 0 \text{ είναι } u = 0, \text{ ενώ για } x = -\alpha \text{ είναι } u = \alpha. \text{ Οπότε } \int_{-\alpha}^0 f(x) dx = \int_{-\alpha}^0 f(-x) dx = -\int_{\alpha}^0 f(u) du = \int_0^{\alpha} f(u) du = \int_0^{\alpha} f(x) dx.$$

185. **α)** Εστω ότι η ευθεία ε έχει συντελεστή διεύθυνσης λ . Τότε επειδή εφάπτεται της C_f στο A είναι $f'(x_1) = \lambda$ και επειδή εφάπτεται της C_f στο B είναι $f'(x_2) = \lambda$, άρα $f'(x_1) = f'(x_2)$.

Επειδή η ευθεία ε ταυτίζεται με την AB , είναι: $\lambda_{AB} = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = \lambda$.

$$\text{Άρα } f'(x_1) = f'(x_2) = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} \quad (3).$$

β) Η f είναι συνεχής στο $[x_1, x_2]$ και παραγωγίσιμη στο (x_1, x_2) με $f'(x) = 4x^3 + 6\alpha x^2 + 6\beta x + 1$,

άρα λόγω του θεωρήματος μέσης τιμής, υπάρχει $\xi \in (x_1, x_2)$ τέτοιο ώστε: $f'(\xi) = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$.

Άρα $f'(x_1) = f'(x_2) = f'(\xi)$. Η f' είναι συνεχής σε καθένα από τα διαστήματα $[x_1, \xi]$, $[\xi, x_2]$ και παραγωγίσιμη στα (x_1, ξ) και (ξ, x_2) με $f''(x) = 12x^2 + 12\alpha x + 6\beta = 6(2x^2 + 2\alpha x + \beta)$.

Λόγω του θεωρήματος Rolle υπάρχουν $\xi_1 \in (x_1, \xi)$ και $\xi_2 \in (\xi, x_2)$ τέτοια ώστε $f''(\xi_1) = 0$ και $f''(\xi_2) = 0$. Δηλαδή η f'' έχει τουλάχιστον 2 ρίζες. Όμως η f'' είναι 2ου βαθμού και έχει

το πολύ 2 ρίζες, άρα η f'' έχει ακριβώς 2 ρίζες οπότε έχει $\Delta > 0 \Leftrightarrow 4\alpha^2 - 8\beta > 0 \Leftrightarrow 4\alpha^2 > 8\beta \Leftrightarrow \alpha^2 > 2\beta$.

$$\gamma) \int_{x_1}^{x_2} x f''(x) dx = \int_{x_1}^{x_2} x (f'(x))' dx = [x f'(x)]_{x_1}^{x_2} - \int_{x_1}^{x_2} f'(x) dx \Leftrightarrow$$

$$\int_{x_1}^{x_2} x f''(x) dx = x_2 f'(x_2) - x_1 f'(x_1) - [f(x)]_{x_1}^{x_2} = x_2 f'(x_2) - x_1 f'(x_1) - f(x_2) + f(x_1) \stackrel{(3)}{=} 0.$$

186. **α)** Είναι $f(x) = \int_1^x e^{t+x} \ln t dt = \int_1^x e^x e^t \ln t dt = e^x \int_1^x e^t \ln t dt$.

$$f'(x) = \left(e^x \int_1^x e^t \ln t dt \right)' = e^x \int_1^x e^t \ln t dt + e^x e^x \ln x = f(x) + e^{2x} \ln x \Leftrightarrow f'(x) - f(x) = e^{2x} \ln x.$$

$$\beta) (f'(x) - f(x))' = (e^{2x} \ln x)' \Leftrightarrow f''(x) - f'(x) = 2e^{2x} \ln x + e^{2x} \frac{1}{x} \Leftrightarrow$$

$$f''(x) - (f(x) + e^{2x} \ln x) = 2e^{2x} \ln x + e^{2x} \frac{1}{x} \Leftrightarrow$$

$$f''(x) - f(x) - e^{2x} \ln x = 2e^{2x} \ln x + e^{2x} \frac{1}{x} \Leftrightarrow$$

$$f''(x) - f(x) = 3e^{2x} \ln x + e^{2x} \frac{1}{x} = e^{2x} \left(3 \ln x + \frac{1}{x} \right).$$

γ) Για κάθε $t > 1$ είναι $\ln t > 0 \Leftrightarrow e^t \ln t > 0$, άρα $\int_1^x e^t \ln t dt > 0 \Leftrightarrow e^x \int_1^x e^t \ln t dt > 0 \Leftrightarrow f(x) > 0$.

Επειδή $f'(x) = f(x) + e^{2x} \ln x$, είναι $f'(x) > 0$ για κάθε $x > 1$, άρα η f είναι γνησίως αύξουσα στο $[1, +\infty)$.

δ) Είναι $g(x) = (f''(x) - f'(x))e^{-2x} = \left(f'(x) + 2e^{2x} \ln x + \frac{e^{2x}}{x} - f'(x) \right) e^{-2x} = \ln x + \frac{1}{x}$. Επειδή

$g(x) \geq 0$ για κάθε $x \in [1, e]$ και η g είναι συνεχής στο $[1, e]$, το ζητούμενο εμβαδόν, είναι:

$$E(\Omega) = \int_1^e g(x) dx = \int_1^e \left(2 \ln x + \frac{1}{x} \right) dx = 2 \int_1^e \ln x dx + \int_1^e \frac{1}{x} dx \Leftrightarrow$$

$$E(\Omega) = 2 \int_1^e \ln x (x)' dx + [\ln x]_1^e = 2 [x \ln x]_1^e - 2 \int_1^e \frac{1}{x} dx + \ln e - \ln 1 \Leftrightarrow$$

$$E(\Omega) = 2e - 2[x]_1^e + 1 = 2e - 2e + 2 + 1 = 3$$

187. **α)** Η $f(x) = x + e^x - 1$, $x \in \mathbb{R}$ είναι παραγωγίσιμη στο \mathbb{R} με $f'(x) = 1 + e^x > 0$ άρα η $f \uparrow$ στο \mathbb{R} . Επίσης $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (x - e^x - 1) = -\infty$ και $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (x + e^x - 1) = +\infty$ και αφού η $f \uparrow$ τότε το σύνολο τιμών $f(A) = \left(\lim_{x \rightarrow -\infty}, \lim_{x \rightarrow +\infty} \right) = \mathbb{R}$.

β) Αφού η f είναι γνησίως αύξουσα θα είναι και 1-1 συνεπώς ορίζεται η f^{-1} .

γ) Επειδή η f είναι \uparrow τότε η εξίσωση $f(x) = f^{-1}(x)$ είναι ισοδύναμη με την

$$f(x) = x \Leftrightarrow x + e^x - 1 = x \Leftrightarrow e^x = 1 \Leftrightarrow x = 0. \text{ Οπότε η } C_f, C_{f^{-1}}$$

τέμνονται στο $(0,0)$. Επίσης $f(x) - x = e^x - 1 > 0$ όταν $x > 0$.

Αφού οι $C_f, C_{f^{-1}}$ είναι συμμετρικές ως προς την $y = x$ και η C_f είναι πάνω από την $y = x$ στο $[0, e]$ τότε η $C_{f^{-1}}$ θα είναι κάτω από την $y = x$. Οπότε το ζητούμενο εμβαδό είναι:

$$E(\Omega) = \int_0^e f(x) - f^{-1}(x) dx = \int_0^e f(x) dx - \int_0^e f^{-1}(x) dx.$$

Θέτω $f^{-1}(x) = u \Leftrightarrow x = f(u)$ και $dx = f'(u) du$ για $x=0$ είναι

$f(u) = f(0)$ άρα $u = 0$ ενώ για $x = e$ είναι $f(u) = e = f(1)$ άρα $u = 1$ οπότε:

$$E(\Omega) = \int_0^e f(x) dx - \int_0^1 u f'(u) du = \int_0^e (x + e^x - 1) dx - [u f(u)]_0^1 + \int_0^1 f(u) du =$$

$$= \left[\frac{x^2}{2} \right]_0^e + [e^x]_0^e - [x]_0^e - f(1) + \int_0^e (u + e^u - 1) du =$$

$$= \frac{e^2}{2} + e^e - 1 - e - \cancel{e} + \frac{1}{2} + \cancel{e} - 1 - 1 = \frac{e^2}{2} + e^e - e - \frac{5}{2}.$$

- δ)** Είναι $e^{g(x)} + g(x) = x + \ln x \Leftrightarrow e^{g(x)} + g(x) - 1 = e^{\ln x} + \ln x - 1$.

$f(g(x)) = f(\ln x)$ και αφού η f είναι 1-1 τότε $g(x) = \ln x$, $x > 0$.

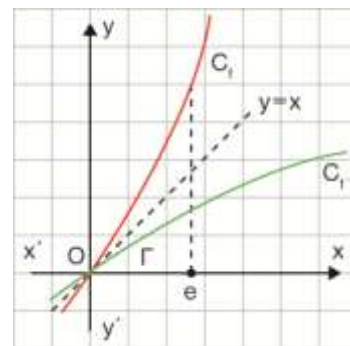
- ε)** Εστω $G(x) = \int_a^x \frac{1}{g(t)} dt$ αρχική της $\frac{1}{g(x)}$ τότε $G'(x) = \frac{1}{g(x)} = \frac{1}{\ln x}$.

Εφαρμόζουμε Θ.Μ.Τ για την G στο $[x, x+1]$ οπότε υπάρχει $\xi \in [x, x+1]$ τέτοιο ώστε

$$G'(\xi) = \frac{G(x+1) - G(x)}{x+1 - x} \Leftrightarrow \frac{1}{\ln \xi} = \int_a^{x+1} \frac{1}{g(t)} dt - \int_a^x \frac{1}{g(t)} dt \Leftrightarrow \frac{1}{\ln \xi} = \int_x^{x+1} \frac{1}{g(t)} dt$$

$$\text{Είναι } x < \xi < x+1 \Leftrightarrow \ln x < \ln \xi < \ln(x+1) \Leftrightarrow \frac{1}{\ln x} > \frac{1}{\ln \xi} > \frac{1}{\ln(x+1)} \Leftrightarrow$$

$$\frac{1}{g(x+1)} < \int_x^{x+1} \frac{1}{g(t)} dt < \frac{1}{g(x)}.$$



στ) Εφαρμόζουμε Θ.Μ.Τ. για την g στο $[e, \pi]$ οπότε υπάρχει $x_0 \in (e, \pi)$ τέτοιο ώστε

$$g'(x_0) = \frac{g(\pi) - g(e)}{\pi - e} \Leftrightarrow \frac{1}{x_0} = \frac{g(\pi) - 1}{\pi - e} \text{ είναι } 0 < e < x_0 < \pi \Leftrightarrow \frac{1}{e} > \frac{1}{x_0} > \frac{1}{\pi}$$

$$\text{οπότε } \frac{\pi}{e} - 1 > g(\pi) - 1 > 1 - \frac{e}{\pi} \Leftrightarrow \frac{\pi}{e} > g(\pi) > 2 - \frac{e}{\pi}.$$

188. **α)** i. Για $x=0$ είναι $f'(0) \cdot f(0) = 0 \Leftrightarrow f'(0) \cdot 1 = 0 \Leftrightarrow f'(0) = 0$

ii. Εστω ότι υπάρχει $x_0 \in \mathbb{R}$ όπου $f(x_0) = 0$ τότε στην (1) για $x = x_0$ είναι

$$f'(-x_0)f(x_0) = -x_0 \Rightarrow f'(-x_0) \cdot 0 = -x_0 \Rightarrow x_0 = 0 \text{ δηλαδή } f(0) = 0 \text{ που είναι άτοπο.}$$

Άρα $f(x) \neq 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ και επειδή η f είναι συνεχής, διατηρεί πρόσημο.

Αφού $f(0) = 1 > 0$ είναι $f(x) > 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

β) i.
$$h'(x) = \frac{-f'(-x)f(x) - f'(x)f(-x)}{f^2(x)}.$$

Αν στη σχέση $f'(-x)f(x) = x$ αντικαταστήσουμε όπου x το $-x$ προκύπτει

$$f'(x)f(-x) = -x \text{ (1)}. \text{ Άρα } h'(x) = \frac{-(-x) - x}{f^2(x)} = 0 \Leftrightarrow h(x) = c.$$

ii. $h(0) = \frac{f(0)}{f(0)} = 1$ άρα $h(x) = 1 \Leftrightarrow f(-x) = f(x)$ (2). Από τις (1), (2) είναι

$$f(x)f'(x) = x \Leftrightarrow 2f(x)f'(x) = 2x \Rightarrow (f^2(x))' = (x^2)' \Leftrightarrow f^2(x) = x^2 + c.$$

Για $x=0$, είναι $c=1$ και επειδή $f(x) > 0$, είναι $f(x) = \sqrt{x^2 + 1}$, $x \in \mathbb{R}$.

γ)
$$E(\Omega) = \int_0^{\sqrt{3}} \frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}} dx = \int_0^{\sqrt{3}} (\sqrt{x^2 + 1})' dx = \left[\sqrt{x^2 + 1} \right]_0^{\sqrt{3}} = 2 - 1 = 1.$$

δ) Από τη σχέση (2) έχουμε ότι η f είναι άρτια. Είναι $\int_{-\alpha}^0 f(-x) dx = \int_{-\alpha}^0 f(x) dx$.

Θέτουμε $-x = u$, τότε $dx = -du$. Για $x=0 \Rightarrow u=0$ και για $x=-\alpha \Rightarrow u=\alpha$.

$$\text{Άρα } -\int_{\alpha}^0 f(u) du = \int_{-\alpha}^0 f(x) dx \Leftrightarrow \int_0^{\alpha} f(x) dx = \int_{-\alpha}^0 f(x) dx.$$

ε) Εστω $g(x) = \int_0^x f(t) dt$, $x \in \mathbb{R}$. Είναι $g'(x) = f(x) > 0 \Rightarrow g \uparrow \mathbb{R}$. Εστω $h(x) = e^x - x - 1$, $x \in \mathbb{R}$.

Είναι $h'(x) = e^x - 1$ και για $x > 0$ είναι $h'(x) > 0 \Rightarrow h \uparrow [0, +\infty)$, ενώ για $x < 0$ είναι

$h'(x) < 0 \Rightarrow h \downarrow (-\infty, 0]$. Η h έχει ελάχιστο στο $x=0$, άρα

$$h(x) \geq h(0) \Leftrightarrow e^x - x - 1 \geq 0 \Leftrightarrow e^x \geq x + 1 \Leftrightarrow g \uparrow \Leftrightarrow g(e^x) \geq g(x+1) \Leftrightarrow \int_0^{e^x} f(t) dt \geq \int_0^{x+1} f(t) dt.$$

189. **α)** $f'(x) = 3x^2 + 1 > 0 \Rightarrow f \uparrow \mathbb{R} \Rightarrow f \uparrow [1, +\infty)$.

β) $f(A) = \left(\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x), \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) \right) = (-\infty, +\infty) = \mathbb{R}.$

γ) Για $x = y$ είναι $|x - y| = |f(x) - f(y)| = 0$. Για $x < y$ από το ΘΜΤ στο $[x, y]$, υπάρχει

$$\xi \in (x, y) : f'(\xi) = \frac{f(x) - f(y)}{x - y} \Leftrightarrow 3\xi^2 + 1 = \frac{f(x) - f(y)}{x - y}.$$

$$\text{Όμως } \left| \frac{f(x) - f(y)}{x - y} \right| = |3\xi^2 + 1| = 3\xi^2 + 1 \geq 1 \Rightarrow |f(x) - f(y)| \geq |x - y| \quad (1)$$

Όμοια για $x > y$. Τώρα θέτουμε όπου x το $f^{-1}(x)$ και όπου y το

$$f^{-1}(y) : |f(f^{-1}(x)) - f(f^{-1}(y))| \geq f(x) - f(y) \Leftrightarrow |x - y| \geq |f^{-1}(x) - f^{-1}(y)| \quad (2).$$

Άρα από (1), (2) είναι $|f^{-1}(x) - f^{-1}(y)| \leq |x - y| \leq |f(x) - f(y)|$. Όμοια για $x > y$.

δ) Αντικαθιστούμε $y = x_0$ και έχουμε: $|f^{-1}(x) - f^{-1}(x_0)| \leq |x - x_0| \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow -|x - x_0| \leq f^{-1}(x) - f^{-1}(x_0) \leq |x - x_0| \Leftrightarrow f^{-1}(x_0) - |x - x_0| \leq f^{-1}(x) \leq f^{-1}(x_0) + |x - x_0|.$$

Από το Κ.Π είναι $\lim_{x \rightarrow x_0} f^{-1}(x) = f^{-1}(x_0)$.

ε) $\lim_{x \rightarrow 2} f^{-1}(x) \stackrel{f^{-1} \text{ συνεχής}}{=} f^{-1}(2) = 0$ γιατί $f(0) = 2$ άρα $f^{-1}(2) = 0$

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\eta \mu f^{-1}(x)}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2} \left[\frac{\eta \mu f^{-1}(x)}{f^{-1}(x)} \cdot \frac{f^{-1}(x)}{x - 2} \right] = \lim_{x \rightarrow 2} \left[\frac{\eta \mu f^{-1}(x)}{f^{-1}(x)} \cdot \frac{f^{-1}(x)}{f(f^{-1}(x)) - 2} \right]$$

Θέτουμε $f^{-1}(x) = \omega$. Είναι $\lim_{x \rightarrow 2} f^{-1}(x) = 0$ άρα $\omega \rightarrow 0$. Τότε

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\eta \mu f^{-1}(x)}{x - 2} = \lim_{\omega \rightarrow 0} \left(\frac{\eta \mu \omega}{\omega} \cdot \frac{\omega}{f(\omega) - 2} \right) = \lim_{\omega \rightarrow 0} \left(\frac{\eta \mu \omega}{\omega} \cdot \frac{\omega}{\omega^3 + \omega} \right) = \lim_{\omega \rightarrow 0} \left(\frac{\eta \mu \omega}{\omega} \cdot \frac{\cancel{\omega}}{\cancel{\omega}(\omega^2 + 1)} \right) = 1 \cdot 1 = 1.$$

στ) $f^{-1}(\xi) + 2\xi = 0 \Leftrightarrow f^{-1}(\xi) = -2\xi \Leftrightarrow f(f^{-1}(\xi)) = f(-2\xi) \Leftrightarrow \xi = f(-2\xi)$.

Εστω $h(x) = f(-2x) - x$, $x \in [0, 2]$. Η h είναι συνεχής στο $[0, 2]$ ως σύνθεση και πράξεις συνεχών συναρτήσεων. Είναι $h(2) = f(-4) - 2 = -68 < 0$, $h(0) = f(0) = 2 > 0$, άρα από το Θ. Β υπάρχει $\xi \in (0, 2)$ τέτοιο, ώστε $h(\xi) = 0 \Leftrightarrow f^{-1}(\xi) + 2\xi = 0$.

Είναι $h(x) = f(-2x) - x = -8x^3 - 2x + 2 - x = -8x^3 - 3x + 2$ και

$h'(x) = -24x^2 - 3 < 0 \Rightarrow h \searrow [0, 2]$, οπότε το ξ είναι μοναδικό.

ζ) Είναι $f(x) - x = x^3 + 2 > 0$ για κάθε $x \in [2, 4]$, άρα $f(x) > x > f^{-1}(x)$ για κάθε $x \in [2, 4]$.

$$E(\Omega) = \int_2^4 (f(x) - f^{-1}(x)) dx = \int_2^4 f(x) dx - \int_2^4 f^{-1}(x) dx.$$

Θέτουμε $f^{-1}(x) = u \Leftrightarrow x = f(u)$ και $dx = f'(u) du$.

Για $x = 2 \Rightarrow f(u) = 2 = f(0) \Leftrightarrow u = 0$ και για $x = 4 \Rightarrow f(u) = 4 = f(1) \Leftrightarrow u = 1$.

$$\text{Οπότε } E(\Omega) = \int_2^4 (x^3 + x + 2) dx - \int_0^1 u f'(u) du = \left[\frac{x^4}{4} + \frac{x^2}{2} + 2x \right]_2^4 - \int_0^1 u(3u^2 + 1) du = \dots = \frac{273}{4}.$$

190. **α)** Είναι $[f'(x)]^2 + f(x) \cdot f''(x) = -1$ (1). Έστω ότι η f δεν διατηρεί σταθερό πρόσημο

στο $(0,8)$ τότε αφού η f είναι συνεχής στο $(0,8)$, θα έχει ρίζα $\rho \in (0,8)$ δηλαδή $f(\rho) = 0$.

Στην (1) για $x = \rho$ προκύπτει $[f'(\rho)]^2 = -1$ άτοπο. Άρα η f διατηρεί σταθερό πρόσημο και αφού είναι συνεχής και $f(4) = 4 > 0$ τότε $f(x) > 0$ για κάθε $x \in (0,8)$.

β) $(1) \Rightarrow [f(x)f'(x)]' = (-x)' \Leftrightarrow f(x)f'(x) = -x + c_1$. Για $x = 4$ προκύπτει $c = 4$ άρα

$$f(x)f'(x) = 4 - x \Leftrightarrow 2f(x)f'(x) = 8 - 2x \Leftrightarrow (f^2(x))' = (8x - x^2)' \Leftrightarrow f^2(x) = 8x - x^2 + c_2$$

και για $x = 4$ είναι $16 = 32 - 16 + c_2 \Leftrightarrow c_2 = 0$, άρα $f^2(x) = 8x - x^2$ και αφού $f(x) > 0$ τότε

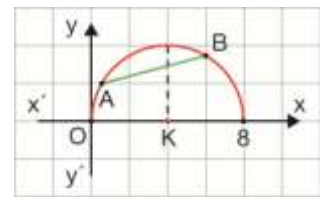
$$f(x) = \sqrt{8x - x^2}.$$

γ) Εστω $f(x) = y \Leftrightarrow \sqrt{8x - x^2} = y \Leftrightarrow 8x - x^2 = y^2 \Leftrightarrow x^2 + y^2 - 8x + 16 = 16 \Leftrightarrow (x-4)^2 + y^2 = 16$,

οπότε αφού $y \geq 0$ τότε η γραφική παράσταση της f είναι το

ημικύκλιο που βρίσκεται πάνω από τον άξονα $x'x$ του κυκλικού δίσκου που έχει κέντρο $K(4,0)$ και $\rho = 4$. Αν A, B δύο τυχαία

σημεία της C_f τότε $AB \leq 2\rho \Leftrightarrow (AB) \leq 8$.



δ) Είναι $l = \int_0^4 \sqrt{8x - x^2} dx$ με βάση το προηγούμενο ερώτημα

το ζητούμενο ολοκλήρωμα εκφράζει το εμβαδό του τεταρτοκυκλίου οπότε $l = \frac{\pi \cdot 4^2}{4} = 4\pi$.

ε) Αφού $f(x) > 0$ και $4 - x \geq 0$ για $x \in [0,4]$ τότε $g(x) \geq 0$ όταν $x \in [0,4]$.

$$\text{Συνεπώς } E(\Omega) = \int_0^4 g(x) dx = \int_0^4 (4-x)\sqrt{8x-x^2} dx = \frac{1}{2} \int_0^4 (8-2x)\sqrt{8x-x^2} dx.$$

$$\text{Θέτω } u = 8x - x^2 \text{ άρα } du = (8-2x)dx \text{ και } \begin{array}{c|c|c} x & 0 & 4 \\ \hline u & 0 & 16 \end{array}$$

$$\text{Άρα } E(\Omega) = \frac{1}{2} \int_0^{16} \sqrt{u} du = \frac{1}{2} \left[\frac{u^{3/2}}{3/2} \right]_0^{16} = \frac{1}{3} \left[\sqrt{u^3} \right]_0^{16} = \frac{1}{3} 16\sqrt{16} = \frac{64}{3} \text{ τ.μ.}$$

191. **α)** Θεωρούμε την $g(x) = f(x) - 3$, συνεχής στο $[0,9]$ με $g(0) = f(0) - 3 = -3 < 0$

και $g(9) = f(9) - 3 = 9 - 3 = 6 > 0$ άρα $g(0) \cdot g(9) < 0$ και από Θ. Bolzano υπάρχει

$x_0 \in (0,9)$ τέτοιο ώστε $g(x_0) = 0 \Leftrightarrow f(x_0) = 3$.

β) Εφαρμόζουμε Θ.Μ.Τ. για την f στα διαστήματα $[0, x_0]$ και $[x_0, 9]$ οπότε υπάρχουν

$x_1 \in (0, x_0)$ και $x_2 \in (x_0, 9)$ τέτοια ώστε:

$$f'(x_1) = \frac{f(x_0) - f(0)}{x_0} = \frac{3}{x_0} \Leftrightarrow \frac{1}{f'(x_1)} = \frac{x_0}{3} \quad (1) \text{ και}$$

$$f'(x_2) = \frac{f(9) - f(x_0)}{9 - x_0} = \frac{9 - 3}{9 - x_0} \Leftrightarrow \frac{1}{f'(x_2)} = \frac{9 - x_0}{6} \Leftrightarrow \frac{2}{f'(x_2)} = \frac{18 - 2x_0}{6} \quad (2).$$

Οπότε προσθέτοντας (1) και (2) έχουμε:

$$\frac{1}{f'(x_1)} + \frac{2}{f'(x_2)} = \frac{x_0}{3} + \frac{18 - 2x_0}{6} = \frac{2x_0 + 18 - 2x_0}{6} = 3.$$

γ) i. Αφού η f είναι κοίλη τότε η $f' \downarrow$. Εφαρμόζουμε Θ.Μ.Τ. για την f στα διαστήματα $[0, 3]$

και $[3, 9]$ οπότε υπάρχουν $\xi_1 \in (0, 3)$ και $\xi_2 \in (3, 9)$ τέτοια ώστε

$$f'(\xi_1) = \frac{f(3) - f(0)}{3} = \frac{f(3)}{3} \text{ και } f'(\xi_2) = \frac{f(9) - f(3)}{9 - 3} = \frac{9 - f(3)}{6}$$

αφού $\xi_1 < \xi_2$ τότε $f'(\xi_1) > f'(\xi_2)$ δηλαδή $\frac{f(3)}{3} > \frac{9 - f(3)}{6} \Leftrightarrow 2f(3) > 9 - f(3) \Leftrightarrow f(3) > 3$.

ii. Εφαρμόζουμε Θ.Μ.Τ. για την f στο $[0, x]$ οπότε υπάρχει $\xi \in (0, x)$ τέτοιο ώστε

$$f'(\xi) = \frac{f(x) - f(0)}{x} \Leftrightarrow f'(\xi) = \frac{f(x)}{x}. \text{ Όμως } \xi < x \text{ και } f' \downarrow \text{ άρα } f'(\xi) > f'(x)$$

δηλαδή $\frac{f(x)}{x} > f'(x) \Rightarrow f(x) > xf'(x) \Leftrightarrow f(x) - xf'(x) > 0$.

iii. Αφού $f(x) - xf'(x) > 0$ τότε $\int_0^9 (f(x) - xf'(x)) dx > 0 \Leftrightarrow \int_0^9 f(x) dx - \int_0^9 xf'(x) dx > 0 \Leftrightarrow$

$$\int_0^9 f(x) dx - [xf(x)]_0^9 + \int_0^9 f(x) dx > 0 \Leftrightarrow 2 \int_0^9 f(x) dx - 9f(9) > 0 \Leftrightarrow$$

$$2 \int_0^9 f(x) dx > 81 \Leftrightarrow \int_0^9 f(x) dx > \frac{81}{2}.$$

192. α) $f'(x) - e^x = f(x) + \lambda x e^x \cdot \frac{1}{x^2} \cdot \int_x^{2x} \frac{1}{1 + \left(\frac{t}{x}\right)^2} dt \Leftrightarrow f'(x) - f(x) = e^x + \lambda e^x \cdot \int_x^{2x} \frac{1}{1 + \left(\frac{t}{x}\right)^2} \cdot \frac{1}{x} dt$

Θέτουμε $\frac{t}{x} = u$ τότε $\frac{dt}{x} = du$. Για $t = x$ είναι $u = 1$ και για $t = 2x$ είναι $u = 2$.

Τότε $f'(x) - f(x) = e^x + \lambda e^x \cdot \int_1^2 \frac{1}{1 + u^2} du$ (1).

Για $x = 1$ είναι $f'(1) - f(1) = e + \lambda e \int_1^2 \frac{1}{1 + u^2} du \Leftrightarrow 3e - e = e + \lambda e \int_1^2 \frac{1}{1 + u^2} du \Leftrightarrow$

$e = \lambda e \int_1^2 \frac{1}{1 + u^2} du \Leftrightarrow \lambda \cdot \int_1^2 \frac{1}{1 + u^2} du = 1$. Η σχέση (1) γίνεται:

$$f'(x) - f(x) = e^x + e^x = 2e^x \Leftrightarrow e^{-x} f'(x) - e^{-x} f(x) = 2 \Leftrightarrow (e^{-x} f(x))' = (2x)' \Leftrightarrow$$

$$e^{-x} f(x) = 2x + c \Leftrightarrow f(x) = (2x + c)e^x, x > 0.$$

Για $x = 1$ είναι $f(1) = (2 + c)e = e \Leftrightarrow c = -1$, άρα $f(x) = (2x - 1)e^x, x > 0$.

β) $\int_x^{x^2} \frac{x \cdot e^x}{x^2 \left(1 + \left(\frac{t}{x}\right)^2\right)} dt = e^x \int_x^{x^2} \frac{1}{1 + \left(\frac{t}{x}\right)^2} \cdot \frac{1}{x} dt$. Θέτουμε $\frac{t}{x} = u$ τότε $\frac{dt}{x} = du$.

Για $t = x$ είναι $u = 1$ και για $t = x^2$ είναι $u = x$. Τότε $e^x \int_x^{x^2} \frac{1}{1 + \left(\frac{t}{x}\right)^2} \cdot \frac{1}{x} dt = e^x \int_1^x \frac{1}{1 + u^2} du$.

Εστω $h(y) = \int_1^y \frac{1}{1 + u^2} du, y \in [1, x], x > 1$. Από το Θ.Μ.Τ. υπάρχει $\xi \in (1, x)$ τέτοιο ώστε

$$h'(\xi) = \frac{h(x) - h(1)}{x-1} \Leftrightarrow h'(\xi)(x-1) = \int_1^x \frac{1}{1+u^2} du. \quad h'(x) = \frac{1}{1+x^2}, \quad h''(x) = -\frac{2x}{(1+x^2)^2} < 0$$

για κάθε $x > 0$ άρα $h' \searrow [0, +\infty)$.

$$\text{Είναι } 0 < \xi < x \Rightarrow h'(x) < h'(\xi) < h'(0) \Leftrightarrow \frac{1}{1+x^2} < h'(\xi) < 1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{x-1}{1+x^2} < (x-1)h'(\xi) < x-1 \Leftrightarrow \frac{e^x(x-1)}{1+x^2} < e^x \int_1^x \frac{1}{1+u^2} du < e^x(x-1).$$

$$\text{Είναι } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x(x-1)}{1+x^2} \stackrel{\text{DLH}}{=} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x(x-1) + e^x}{2x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x \cdot e^x}{2x} = +\infty$$

$$\text{άρα και } \lim_{x \rightarrow +\infty} e^x \int_1^x \frac{1}{1+u^2} du = +\infty.$$

γ) $g(x) = \frac{f(x)}{2x-1} = e^x$. Επειδή $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0$, η $y=0$ είναι οριζόντια ασύμπτωτη της C_g στο $-\infty$.

Εστω $\lambda < 0$. Είναι $E(\lambda) = \int_{\lambda}^0 e^x dx = 1 - e^{\lambda}$ και το ζητούμενο εμβαδό είναι

$$E(\Omega) = \lim_{\lambda \rightarrow -\infty} E(\lambda) = \lim_{\lambda \rightarrow -\infty} (1 - e^{\lambda}) = 1$$

δ) $y - f(1) = f'(1)(x-1) \Leftrightarrow y - e = 3ex - 3e \Leftrightarrow y = 3ex - 2e$

ε) $f'(x) = 2e^x + (2x-1)e^x = (2x+1)e^x$, $f''(x) = 2e^x + (2x+1)e^x = (2x+3)e^x > 0$,

άρα f κυρτή στο $(0, +\infty)$, οπότε βρίσκεται πάνω από κάθε εφαπτομένη της στο διάστημα αυτό, εκτός βέβαια από το σημείο επαφής. Δηλαδή $f(x) \geq 3ex - 2e$.

$$\begin{aligned} \text{στ) } E(\Omega) &= \int_1^2 (f(x) - 3ex + 2e) dx = \int_1^2 (2x-1)e^x dx - \left[\frac{3e}{2} x^2 \right]_1^2 + 2e = \\ &= \left[(2x-1)e^x \right]_1^2 - \int_1^2 2e^x dx - \frac{9e}{2} + 2e = 3e^2 - e - 2e^2 + 2e - \frac{9e}{2} + 2e = e^2 - \frac{3e}{2}. \end{aligned}$$

193. **α)** Είναι (1) $f(x)f'(x) = f'(x) - x$ για κάθε $x \in (-3, 3)$ και παραγωγίζοντας την (1)

έχουμε: $[f'(x)]^2 + f(x)f''(x) = f''(x) - 1$ (2). Αν η f παρουσιάζει σημείο καμπής στο

$x = x_0 \in (-3, 3)$ τότε αφού η f είναι συνεχής στο $[-3, 3]$ πρέπει $f''(x_0) = 0$. Στην (2) για

$x = x_0$ προκύπτει $[f'(x_0)]^2 + 0 = 0 - 1 \Leftrightarrow [f'(x_0)]^2 = -1$ (άτοπο). Άρα η C_f δεν έχει σημεία καμπής.

β) (1) $\Leftrightarrow 2f(x)f'(x) = 2f'(x) - 2x \Leftrightarrow (f^2(x))' = (2f(x) - x^2)' \Leftrightarrow f^2(x) = 2f(x) - x^2 + c$.

Για $x=0$ είναι $16 = 8 + c \Leftrightarrow c = 8$ άρα (3) $f^2(x) - 2f(x) + x^2 - 8 = 0$, $x \in (-3, 3)$

γ) Από (3) $\Leftrightarrow f^2(x) - 2f(x) + 1 = 9 - x^2 \Leftrightarrow (f(x) - 1)^2 = 9 - x^2$.

Εστω $h(x) = f(x) - 1$ τότε (4) $h^2(x) = 9 - x^2$. Αν η $h(x)$ δεν διατηρεί σταθερό πρόσημο

στο $(-3, 3)$ τότε υπάρχουν $x_1, x_2 \in (-3, 3)$ με $x_1 < x_2$ τέτοια ώστε $f(x_1)f(x_2) < 0$. Τότε από

το Θ. Bolzano υπάρχει $\rho \in (x_1, x_2) \subseteq (-3, 3)$ τέτοιο ώστε $h(\rho) = 0$ άρα η (4) για $x = \rho$

γίνεται $0 = 9 - \rho^2 \Leftrightarrow \rho^2 = 9 \Leftrightarrow \rho = 3$ ή $\rho = -3$ (άτοπο) αφού $\rho \in (-3, 3)$.

δ) Αφού η $h(x) = f(x) - 1$ διατηρεί σταθερό πρόσημο, είναι συνεχής και

$h(0) = f(0) - 1 = 4 - 1 = 3 > 0$ τότε $h(x) > 0$. Οπότε από (4) $\Leftrightarrow f(x) = \sqrt{9-x^2}$ δηλαδή

$$f(x) - 1 = \sqrt{9-x^2} \Leftrightarrow f(x) = 1 + \sqrt{9-x^2}, x \in [-3, 3].$$

Είναι $f(-x) = 1 + \sqrt{9-(-x)^2} = 1 + \sqrt{9-x^2} = f(x)$ οπότε η f είναι άρτια.

Επίσης $I = \int_{-\alpha}^0 f(t) dt$. Θέτω $t = -u$ οπότε $dt = -du$ και

t	$-\alpha$	0
u	α	0

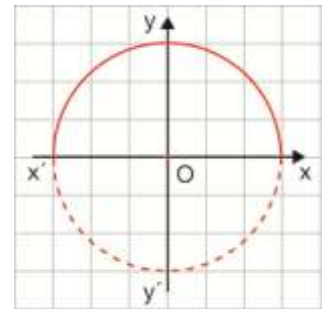
$$\text{Οπότε } I = \int_{\alpha}^0 f(-u)(-du) = \int_0^{\alpha} f(-u) du \stackrel{\text{άρτ}}{=} \int_0^{\alpha} f(u) dx = \int_0^{\alpha} f(t) dt.$$

ε) Είναι $f(x) - 1 = \sqrt{9-x^2} \geq 0$ όταν $x \in [-3, 3]$.

$$\text{Άρα } E(\Omega) = \int_{-3}^3 \sqrt{9-x^2} dx.$$

Εστω $\sqrt{9-x^2} = y \Leftrightarrow 9-x^2 = y^2 \Leftrightarrow x^2 + y^2 = 9$, οπότε το ζητούμενο εμβαδό του ημικυκλίου με κέντρο $O(0,0)$ και $\rho = 3$.

$$E(\Omega) = \frac{\pi \cdot 3^2}{2} = \frac{9\pi}{2}.$$



194. α) Αφού η f είναι συνεχής ισχύει $\lim_{x \rightarrow \alpha^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow \alpha^+} f(x) = f(\alpha) \Leftrightarrow \frac{\alpha}{e} = \ln \alpha$.

Αρκεί να αποδείξουμε ότι η εξίσωση $\frac{\alpha}{e} = \ln \alpha$ έχει μοναδική ρίζα τη $\alpha = e$.

Εστω $g(x) = \ln x - \frac{x}{e}$, $x > 0$ με $g'(x) = \frac{1}{x} - \frac{1}{e} = \frac{e-x}{ex} \geq 0 \Leftrightarrow x \leq e$. Για κάθε $x \in (0, e)$ είναι

$g'(x) > 0 \Rightarrow g \uparrow (0, e]$ και για κάθε $x > e$ είναι $g'(x) < 0 \Rightarrow g \downarrow [e, +\infty)$. Μέγιστο της g το $g(e) = 0$. Άρα $g(x) \leq 0$ για κάθε $x > 0$ και το $=$ ισχύει μόνο για $x = e$.

$$\text{Συνεπώς } \alpha = e \text{ και } f(x) = \begin{cases} \frac{x}{e}, & x \leq e \\ \ln x, & x > e \end{cases}$$

β) Για $x < e$ είναι $f'(x) = \frac{1}{e}$ και για $x > e$ είναι $f'(x) = \frac{1}{x}$. Στο $x_0 = e$ έχουμε

$$\lim_{x \rightarrow e^-} \frac{f(x) - f(e)}{x - e} = \lim_{x \rightarrow e^-} \frac{\frac{x}{e} - 1}{x - e} = \lim_{x \rightarrow e^-} \frac{x - e}{e(x - e)} = \frac{1}{e}, \quad \lim_{x \rightarrow e^+} \frac{f(x) - f(e)}{x - e} = \lim_{x \rightarrow e^+} \frac{\ln x - 1}{x - e} \stackrel{(0/0)}{=} \lim_{x \rightarrow e^+} \frac{\frac{1}{x}}{1} = \frac{1}{e}.$$

$$\text{Άρα } f'(x) = \begin{cases} \frac{1}{e}, & x \leq e \\ \frac{1}{x}, & x > e \end{cases}$$

γ) Από τον προηγούμενο τύπο διαπιστώνουμε ότι $f'(x) > 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ άρα $f \uparrow$ οπότε και

$1-1$ οπότε η f αντιστρέφεται. Για $x \leq e$ είναι: $\frac{x}{e} = y \Leftrightarrow x = ey$ με $ey \leq e \Leftrightarrow y \leq 1$ και για

$x > e$ είναι $\ln x = y \Leftrightarrow x = e^y$ με $e^y > e \Leftrightarrow y > 1$. Άρα $f^{-1}(x) = \begin{cases} ex, & x \leq 1 \\ e^x, & x > 1 \end{cases}$

δ) Η f είναι συνεχής και το πρόσημό της δίνεται στον παρακάτω πίνακα

x	$-e^2$	0	e	e^2
f		$-$	$+$	$+$

Οπότε το ζητούμενο εμβαδό είναι

$$E = -\int_{-e^2}^0 \frac{x}{e} dx + \int_0^e \frac{x}{e} dx + \int_e^{e^2} \ln x dx = -\frac{1}{e} \left[\frac{x^2}{2} \right]_{-e^2}^0 + \frac{1}{e} \left[\frac{x^2}{2} \right]_0^e + \int_e^{e^2} (x)' \ln x dx =$$

$$= \frac{e^4}{2e} + \frac{e^2}{2e} + [x \ln x]_e^{e^2} - \int_e^{e^2} 1 dx = \dots = \frac{e^3 + 2e^2 + e}{2}.$$

195. α) Για κάθε $x \in \mathbb{R} - \{\pm 1\}$ έχουμε $f'(x) = \frac{2(x^2-1) - 2x \cdot 2x}{(x^2-1)^2} = \frac{-2(x^2+1)}{(x^2-1)^2} < 0$.

Άρα η f είναι γνησίως φθίνουσα σε καθένα από τα διαστήματα $(-\infty, -1)$, $(-1, 1)$ και $(1, +\infty)$ και δεν έχει ακρότατα.

β) Είναι $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x}{x^2} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2}{x} = 0$

$$\lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1^-} \left[\frac{1}{x+1} \cdot \frac{2x}{x-1} \right] = -\infty, \quad \lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1^+} \left(\frac{1}{x+1} \cdot \frac{2x}{x-1} \right) = +\infty,$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2}{x} = 0 \text{ οπότε } f(A) = (-\infty, +\infty) = \mathbb{R}.$$

γ) Αφού $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0$ και $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$ τότε η $y=0$ είναι οριζόντια ασύμπτωτη στο $-\infty$ και στο $+\infty$ ενώ από το προηγούμενο ερώτημα η $x=1$ και $x=-1$ είναι κατακόρυφες ασύμπτωτες.

δ) Η f είναι συνεχής και $f(x) > 0$ στο $[e, e^2]$ οπότε

$$E(\Omega) = \int_e^{e^2} f(x) dx = \int_e^{e^2} \frac{2x}{x^2-1} dx = [\ln|x^2-1|]_e^{e^2} = \ln(e^4-1) - \ln(e^2-1) = \ln \frac{e^4-1}{e^2-1} = \ln(e^2+1).$$

ε) Εστω $\varphi(x) = f(x) \operatorname{csc} 2x$, $x \in (-1, 1)$. Είναι

$$\varphi(-x) = f(-x) \operatorname{csc}(-2x) = \frac{2(-x)}{(-x)^2-1} \cdot \operatorname{csc} 2x = -\frac{2x}{x^2-1} \operatorname{csc} 2x = -f(x) \operatorname{csc} 2x = -\varphi(x).$$

Άρα η h είναι περιπτή οπότε $\int_{-p}^p \varphi(x) d(x) = \int_{-p}^0 \varphi(x) d(x) + \int_0^p \varphi(x) d(x) = I_1 - I_2$,

$$\text{όμως } I_1 = \int_{-p}^0 \varphi(x) dx = \int_p^0 \varphi(-u)(-du) = \int_0^p \varphi(-u) du = -\int_0^p \varphi(u) du = -I_2.$$

$$\text{Άρα } \int_{-p}^p \varphi(x) dx = -I_2 + I_2 = 0.$$

στ) Είναι $h(t) = \int_3^t \frac{x^3-3x}{x^2-1} + \int_3^t f(x) dx = \int_3^t \frac{x^3-3x+2x}{x^2-1} dx = \int_3^t \frac{x^3-x}{x^2-1} dx$.

Η συνάρτηση $\frac{x^3 - x}{x^2 - 1}$ ορίζεται στο $(-\infty, -1) \cup (-1, 1) \cup (1, +\infty)$ και αφού $3 \in (1, +\infty)$

τότε $A_h = (1, +\infty)$ και $h(t) = \int_3^t \frac{x(x^2 - 1)}{x^2 - 1} dx = \int_3^t x dx = \left[\frac{x^2}{2} \right]_3^t = \frac{t^2 - 9}{2}$.

Άρα $\frac{t^2 - 9}{2} = 8 \Leftrightarrow t^2 = 25 \Leftrightarrow t = 5$ ή $t = -5$ που απορρίπτεται. Άρα $t = 5$.

196. α) Για κάθε $x \in \mathbb{R}$ έχουμε

$$f'(x) = f(x) + 4xe^x \Leftrightarrow f'(x) - f(x) = 4xe^x \Leftrightarrow f'(x)e^{-x} - f(x)e^{-x} = 4x \Leftrightarrow$$

$$(f(x)e^{-x})' = (2x^2)' \Leftrightarrow f(x)e^{-x} = 2x^2 + c \Leftrightarrow f(x) = (2x^2 + c)e^x.$$

Για $x = 0$ είναι $c = 0$ άρα $f(x) = 2x^2e^x$

β) Η f είναι συνεχής στο \mathbb{R} οπότε δεν έχει κατακόρυφες ασύμπτωτες.

Για $x \in (0, +\infty)$ είναι $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} (2xe^x) = +\infty$ άρα η C_f δεν έχει πλάγια ή οριζόντια

ασύμπτωτη στο $+\infty$. Για $x \in (-\infty, 0)$ είναι:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (2x^2e^x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x^2}{e^{-x}} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{4x}{-e^{-x}} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{4}{e^{-x}} = \lim_{x \rightarrow -\infty} (4e^x) = 0.$$

Άρα η $y = 0$ είναι οριζόντια στο $-\infty$.

γ) Είναι $f'(x) = 2e^x \cdot x(x+2)$

Για κάθε $x < -2$ ή $x > 0$ είναι $f'(x) > 0 \Rightarrow f \uparrow (-\infty, -2]$ και $\uparrow [0, +\infty)$.

Για κάθε $x \in (-2, 0)$ είναι $f'(x) < 0 \Rightarrow f \downarrow [-2, 0]$.

Η f έχει τοπικό μέγιστο για $x = -2$ το $f(-2) = 8e^{-2}$ και τοπικό ελάχιστο για $x = 0$ το $f(0) = 0$.

δ) ΘΜΤ για την f' στα διαστήματα $[-1, 0]$ και $[0, 1]$ οπότε υπάρχουν

$$x_1 \in (-1, 0): f''(x_1) = \frac{f'(0) - f'(-1)}{0 - (-1)} = 2e^{-1} \text{ και } x_2 \in (0, 1): f''(x_2) = \frac{f'(1) - f'(0)}{1 - 0} = 6e.$$

Άρα $f''(x_1)f''(x_2) = 2e^{-1}6e = 12$.

ε) Για $t \in [x-2, x]$ με $x < -2$ είναι $x-2 \leq t \leq x \Leftrightarrow f(x-2) \leq f(t) \leq f(x)$ άρα

$$\int_{x-2}^x f(x-2) dt \leq \int_{x-2}^x f(t) dt \leq \int_{x-2}^x f(x) dt \Leftrightarrow f(x-2) \int_{x-2}^x dt \leq \int_{x-2}^x f(t) dt \leq f(x) \int_{x-2}^x dt \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2f(x-2) \leq \int_{x-2}^x f(t) dt \leq 2f(x). \text{ Είναι } \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0 \text{ οπότε } \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x-2) \stackrel{x-2=u}{=} \lim_{u \rightarrow -\infty} f(u) = 0$$

άρα από Κ.Π είναι και $\lim_{x \rightarrow -\infty} \int_{x-2}^x f(t) dt = 0$.

197. α) $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$ και $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = +\infty$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x + 2\alpha}{2\alpha e^{2\alpha+x}} \stackrel{\left(\frac{\infty}{\infty}\right)}{=} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{2\alpha e^{2\alpha+x}} \stackrel{\text{DLH}}{=} 0$

οπότε η $y = 0$ οριζόντια ασύμπτωτη στο $+\infty$. Η f είναι συνεχής στο \mathbb{R} οπότε δεν έχει κατακόρυφες ασύμπτωτες.

$$\beta) f'(x) = e^{2\alpha-x} \left(\frac{1}{2\alpha} - \frac{x}{2\alpha} - 1 \right) \text{ και } f''(x) = e^{2\alpha-x} \left(\frac{x}{2\alpha} + 1 - \frac{2}{2\alpha} \right)$$

Ο.Μ. για $x = 1 - 2\alpha$ και Σ.Κ για $x = 2 - 2\alpha$.

$$\gamma) f(x) = f'(x) \Leftrightarrow \frac{1}{2\alpha} - \frac{x}{2\alpha} - 1 = \frac{x}{2\alpha} + 1 \Leftrightarrow x = \frac{1-4\alpha}{2} \text{ που είναι μοναδική.}$$

$$\delta) d(\alpha) = |f(1) - f'(1)| = e^{2\alpha-1} \left(\frac{1}{2\alpha} + 2 \right),$$

$$d'(\alpha) = e^{2\alpha-1} \left(\frac{8\alpha^2 + 2\alpha - 1}{2\alpha^2} \right) = e^{2\alpha-1} \frac{8 \left(\alpha - \frac{1}{4} \right) \left(\alpha + \frac{1}{2} \right)}{2\alpha^2} \geq 0 \Leftrightarrow \alpha \geq \frac{1}{4}.$$

Για $\alpha > \frac{1}{4}$, είναι $d'(\alpha) > 0 \Rightarrow d \uparrow \left[\frac{1}{4}, +\infty \right)$ και για $\alpha \in \left(0, \frac{1}{4} \right)$ είναι $d'(\alpha) < 0 \Rightarrow d \downarrow \left(0, \frac{1}{4} \right]$.

Το τμήμα έχει το μικρότερο δυνατό μήκος για $\alpha = \frac{1}{4}$.

$$\epsilon) \text{ Είναι } f(x) = (2x+1)e^{\frac{1}{2}-x}.$$

$$E(\lambda) = \int_{-\frac{1}{2}}^{\lambda} f(x) dx = \int_{-\frac{1}{2}}^{\lambda} (2x+1)e^{\frac{1}{2}-x} dx = -2(\lambda+1)e^{\frac{1}{2}-\lambda} + 2e \text{ και}$$

$$\lim_{\lambda \rightarrow +\infty} E(\lambda) = \lim_{\lambda \rightarrow +\infty} \left(-2(\lambda+1)e^{\frac{1}{2}-\lambda} + 2e \right) = 2e$$

$$\text{γιατί } \lim_{\lambda \rightarrow +\infty} (\lambda+1)e^{\frac{1}{2}-\lambda} = \lim_{\lambda \rightarrow +\infty} \frac{\lambda+1}{e^{\lambda-\frac{1}{2}}} \stackrel{\text{DLH}}{=} \lim_{\lambda \rightarrow +\infty} \frac{1}{e^{\lambda-\frac{1}{2}}} = 0.$$

$$198. \alpha) \text{ Είναι } f'(x) = \frac{4(4-x^2)}{(x^2+4)^2}.$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{4x}{x^2+4} = 0 \text{ και } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0.$$

Η f έχει Ο.Ε. το $f(-2) = -1$ και Ο.Μ. το $f(2) = 1$.

$$\beta) \text{ Είναι } f(A) = [-1, 1]$$

$\gamma)$ Η f συνεχής στο \mathbb{R} οπότε δεν έχει κατακόρυφες ασύμπτωτες και αφού $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0$,

$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$ τότε η $y = 0$ είναι οριζόντια ασύμπτωτη της C_f .

$$\delta) \text{ i. } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)\eta\mu x}{2x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\frac{4x}{x^2+1} \frac{\eta\mu x}{2x} \right] = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\frac{2}{x^2+1} \cdot \eta\mu x \right].$$

$$\text{Είναι } \left| \frac{2}{x^2+1} \eta\mu x \right| \leq \frac{2}{x^2+1} \text{ και από κριτήριο παρεμβολής } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)\eta\mu x}{2x} = 0.$$

$$\text{ii. } \int_0^{\frac{1}{x}} f(t) dt = \int_0^{\frac{1}{x}} \frac{4t}{t^2+4} dt = 2 \left[\ln|t^2+4| \right]_0^{\frac{1}{x}} = 2 \left[\ln \left(\frac{1}{x^2} + 4 \right) - \ln 4 \right] = 2 \ln \frac{4x^2+1}{4x^2}.$$

x	$-\infty$	-2	2	$+\infty$
f''		$-$	$+$	$-$
f				

$$\text{Οπότε } \lim_{x \rightarrow +\infty} 2x^2 \int_0^{\frac{1}{x}} f(t) dt = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[4x^2 \ln \frac{4x^2+1}{4x^2} \right] = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln \left(1 + \frac{1}{4x^2} \right)}{\frac{1}{4x^2}} = \lim_{u \rightarrow 0} \frac{\ln(1+u)}{u} \stackrel{0}{=} 1.$$

ε) Για κάθε $t \in \mathbb{R}$ $-1 \leq f(t) \leq 1$ άρα $\int_x^y -1 dt \leq \int_x^y \frac{4t}{t^2+4} dt \leq \int_x^y 1 dt \Leftrightarrow$

$$-(y-x) \leq 2 \left[\ln(t^2+4) \right]_x^y \leq y-x \Leftrightarrow -\left(\frac{y-x}{2} \right) \leq \ln \frac{y^2+4}{x^2+4} \leq \frac{y-x}{2} \Leftrightarrow \left| \ln \frac{y^2+4}{x^2+4} \right| \leq \frac{y-x}{2}.$$

στ) είναι $-1 \leq f(x) \leq 1$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ και $f(-2) = -1$ άρα η εξίσωση $f(x) = -1$ έχει μοναδική λύση $x = -2$.

ζ) Είναι $f(x) \geq -1 \quad \forall x \in \mathbb{R}$ άρα $f(x_1)+1 \geq 0, f(x_2)+1 \geq 0$ και είναι $f(x) = -1$ μόνο για $x = -2$.

Άρα $[f(x_1)+1] + [f(x_2)+1] = 0 \Leftrightarrow x_1 = x_2 = -2$.

η) Είναι $f(-2) = -1 \neq 1 = f(2)$ και f συνεχής στο $[-2, 2]$.

Αφού για παράδειγμα $-1 < \frac{\sqrt{12}}{5} < 1, -1 < \frac{\sqrt{13}}{5} < 1$ τότε από ΘΕΤ υπάρχουν $\alpha, \beta \in (-2, 2)$

τέτοια ώστε $f(\alpha) = \frac{\sqrt{12}}{5}$ και $f(\beta) = \frac{\sqrt{13}}{5}$. Τότε $f^2(\alpha) + f^2(\beta) = \frac{12}{25} + \frac{13}{25} = 1$.

199. **α)** i. Είναι $f'(x) = 2f^2(x) - 6f(x) + 9 \Leftrightarrow f'(x) = f^2(x) + f^2(x) - 6f(x) + 9 \Leftrightarrow$

$$(1) \Rightarrow f'(x) = f^2(x) + (f(x)-3)^2 > 0 \text{ για κάθε } x \in [\alpha, \beta] \text{ οπότε η } f \text{ είναι } \uparrow \text{ στο } [\alpha, \beta].$$

ii. Αφού $\alpha < \beta$ και η $f \uparrow$ τότε $f(\alpha) < f(\beta) \Leftrightarrow f(\alpha) < 3f(\alpha) \Leftrightarrow 2f(\alpha) > 0 \Leftrightarrow f(\alpha) > 0$ και για $x \geq \alpha$ θα είναι $f(x) \geq f(\alpha) > 0$ άρα $f(x) > 0$.

iii. Από την (1) προκύπτει ότι $f'(x) > f^2(x)$

και αφού $f(x) > 0$ τότε $\frac{f'(x)}{f(x)} > f(x) \Leftrightarrow \frac{f'(x)}{f(x)} - f(x) > 0$

οπότε και $\int_{\alpha}^{\beta} \left(\frac{f'(x)}{f(x)} - f(x) \right) dx > 0 \Leftrightarrow \int_{\alpha}^{\beta} \frac{f'(x)}{f(x)} dx - \int_{\alpha}^{\beta} f(x) dx > 0 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \left[\ln f(x) \right]_{\alpha}^{\beta} > \int_{\alpha}^{\beta} f(x) dx \Leftrightarrow \int_{\alpha}^{\beta} f(x) dx < \ln \frac{f(\beta)}{f(\alpha)} = \ln 3.$$

β) Αφού η f είναι παραγωγίσιμη τότε από την (1) θα είναι και η f' παραγωγίσιμη με

$$f''(x) = 2f(x)f'(x) + 2[f(x)-3]f'(x) = 2f'(x)[2f(x)-3].$$

Αν $f(\alpha) > 2$ τότε $f(x) \geq f(\alpha) > 2 \Leftrightarrow 2f(x) > 4 \Leftrightarrow 2f(x)-3 > 1 > 0$ οπότε η

$$f''(x) = 2f'(x)[2f(x)-3] > 0 \text{ αφού και } f'(x) > 0, \text{ συνεπώς η } f \text{ κυρτή.}$$

γ) Εστω ότι υπάρχουν 3 σημεία $A(x_1, f(x_1)), B(x_2, f(x_2))$ και $\Gamma(x_3, f(x_3))$ με $x_1 < x_2 < x_3$

τα οποία είναι συνευθειακά. Τότε $AB \parallel B\Gamma$ δηλαδή $\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1} = \frac{f(x_3)-f(x_2)}{x_3-x_2}$ (2).

Εφαρμόζουμε Θ.Μ.Τ. για την f στα διαστήματα $[x_1, x_2]$, $[x_2, x_3]$. Τότε υπάρχουν

$$\xi_1 \in (x_1, x_2) \text{ και } \xi_2 \in (x_2, x_3) \text{ τέτοια ώστε } f'(\xi_1) = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} \text{ και } f'(\xi_2) = \frac{f(x_3) - f(x_2)}{x_3 - x_2}.$$

Από (2) θα είναι $f'(\xi_1) = f'(\xi_2)$ (άτοπο) αφού $\xi_1 < \xi_2$ και η $f' \uparrow$.

200. α) Είναι $f'(x)f(x) = x \Leftrightarrow 2f'(x)f(x) = 2x$ ή $(f^2(x))' = (x^2)'$ $\Leftrightarrow f^2(x) = x^2 + c$.

Για $x=0$ προκύπτει $c=1$ άρα $f^2(x) = x^2 + 1 \neq 0$. Άρα $f(x) \neq 0$ και αφού η f συνεχής τότε

διατηρεί πρόσημο και αφού $f(0) = 1 > 0$ τότε $f(x) > 0$ άρα $f(x) = \sqrt{x^2 + 1}$.

β) i. Είναι $\left| \frac{\eta\mu x}{f(x)} \right| = \left| \frac{\eta\mu x}{\sqrt{x^2 + 1}} \right| \leq \frac{1}{\sqrt{x^2 + 1}} \Leftrightarrow -\frac{1}{\sqrt{x^2 + 1}} \leq \frac{\eta\mu x}{\sqrt{x^2 + 1}} \leq \frac{1}{\sqrt{x^2 + 1}}$.

Όμως $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{\sqrt{x^2 + 1}} = 0$ άρα από κριτήριο παρεμβολής $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\eta\mu x}{f(x)} = 0$.

ii. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\eta\mu x}{f(x) - 1} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\eta\mu x}{\sqrt{x^2 + 1} - 1} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\eta\mu x (\sqrt{x^2 + 1} + 1)}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \left[\frac{\eta\mu x}{x} \cdot \frac{\sqrt{x^2 + 1} + 1}{x} \right]$.

Όμως $\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\sqrt{x^2 + 1} + 1}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \left[\frac{1}{x} (\sqrt{x^2 + 1} + 1) \right] = -\infty$ και

$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sqrt{x^2 + 1} + 1}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \left[\frac{1}{x} (\sqrt{x^2 + 1} + 1) \right] = +\infty$. Οπότε δεν υπάρχει το $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\eta\mu x}{f(x) - 1}$.

γ) Είναι $f'(x) = \frac{2x}{2\sqrt{x^2 + 1}} = \frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}}$. Η f είναι \downarrow στο $(-\infty, 0]$

και \uparrow στο $[0, +\infty)$ και έχει ελάχιστο για $x=0$ το $f(0) = 1$.

x	$-\infty$	0	$+\infty$
f'	$-$		$+$
f	\nearrow		\searrow

δ) i. $I_0 = \int_0^1 \frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}} dx = \int_0^1 (\sqrt{x^2 + 1})' dx = \left[\sqrt{x^2 + 1} \right]_0^1 = \sqrt{2} - 1$

$I_1 = \int_0^1 \frac{x^3}{\sqrt{x^2 + 1}} dx = \int_0^1 x^2 \frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}} dx = \int_0^1 x^2 (\sqrt{x^2 + 1})' dx = \left[x^2 \sqrt{x^2 + 1} \right]_0^1 - \int_0^1 2x \sqrt{x^2 + 1} dx =$

$= \sqrt{2} - \int_0^1 (x^2 + 1)' \sqrt{x^2 + 1} dx = \sqrt{2} - \left[\frac{(x^2 + 1)^{3/2}}{\frac{3}{2}} \right]_0^1 = \sqrt{2} - \frac{2}{3} \left[(\sqrt{x^2 + 1})^3 \right]_0^1 = \frac{2 - \sqrt{2}}{3}$.

ii. Είναι $I_v = \int_0^1 \frac{x^{2v+1}}{f(x)} dx = \int_0^1 x^{2v} \frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}} dx = \int_0^1 x^{2v} (\sqrt{x^2 + 1})' dx =$

$= \left[x^{2v} \sqrt{x^2 + 1} \right]_0^1 - \int_0^1 2vx^{2v-1} \sqrt{x^2 + 1} dx = \sqrt{2} - 2v \int_0^1 x^{2v-1} f(x) dx$.

iii. Για $v=2$ $I_2 = \sqrt{2} - 4 \int_0^1 x^3 \sqrt{x^2 + 1} dx$.

Θέτω $x^2 + 1 = u \Leftrightarrow x^2 = u - 1$ και $2x dx = du$ για $\begin{array}{c|c|c} x & 0 & 1 \\ \hline u & 1 & 2 \end{array}$

Άρα $I_2 = \sqrt{2} - 2 \int_0^1 x^2 \sqrt{x^2 + 1} \cdot 2x dx = \sqrt{2} - 2 \int_1^2 (u-1) \sqrt{u} du = \sqrt{2} - 2 \int_1^2 u^{3/2} du + 2 \int_1^2 u^{1/2} du =$

$$\begin{aligned}
 &= \sqrt{2} - 2 \left[\frac{4^{\frac{5}{2}}}{\frac{5}{2}} \right]_1^2 + 2 \left[\frac{4^{\frac{5}{2}}}{\frac{3}{2}} \right]_1^2 = \sqrt{2} - \frac{4}{5} \left[\sqrt{4^5} \right]_1^2 + \frac{4}{3} \left[\sqrt{4^3} \right]_1^2 = \\
 &= \sqrt{2} - \frac{4}{5} (4\sqrt{2} - 1) + \frac{4}{3} (2\sqrt{2} - 1) = \frac{7\sqrt{2} - 8}{15}.
 \end{aligned}$$

201. α) Είναι $\frac{xf(x)+9}{2+f^2(x)} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow 2xf(x)+18 = 2+f^2(x) \Leftrightarrow f^2(x) - 2xf(x) = 16 \Leftrightarrow$

$$f^2(x) - 2xf(x) + x^2 = x^2 + 16 \Leftrightarrow (f(x) - x)^2 = x^2 + 16.$$

Εστω $\varphi(x) = f(x) - x$ τότε αφού $\varphi^2(x) = x^2 + 16 \neq 0$ θα είναι $\varphi(x) \neq 0$ και αφού η φ είναι συνεχής τότε θα διατηρεί σταθερό πρόσημο. Όμως $\varphi(0) = f(0) = 4 > 0$ άρα $\varphi(x) > 0$

οπότε $\varphi(x) = \sqrt{x^2 + 16} \Leftrightarrow f(x) = x + \sqrt{x^2 + 16}$

β) i. Είναι $h(x) = \ln f(x) = \ln(x + \sqrt{x^2 + 16})$.

Για κάθε $x \in \mathbb{R}$, $x + \sqrt{x^2 + 16} > x + \sqrt{x^2} = x + |x| \geq 0$ άρα $A_h = \mathbb{R}$.

ii. $h'(x) = \frac{f'(x)}{f(x)} = \frac{1}{x + \sqrt{x^2 + 16}} \left(1 + \frac{2x}{2\sqrt{x^2 + 16}} \right) = \frac{1}{\sqrt{x^2 + 16}} > 0$ άρα η h' είναι \uparrow οπότε

αντιστρέφεται.

Εστω $y = h(x) = \ln(x + \sqrt{x^2 + 16}) \Leftrightarrow e^y = x + \sqrt{x^2 + 16} \Leftrightarrow \sqrt{x^2 + 16} = e^y - x \Leftrightarrow$

οπότε $x^2 + 16 = e^{2y} - 2xe^y + x^2 \Leftrightarrow 2xe^y = e^{2y} - 16 \Leftrightarrow x = \frac{e^{2y} - 16}{2e^y}$ άρα $h^{-1}(x) = \frac{e^{2x} - 16}{2e^x}$.

Πρέπει $e^y - x > 0 \Leftrightarrow e^y > \frac{e^{2y} - 16}{2e^y} \Leftrightarrow e^{2y} > -16$ που αληθεύει πάντα,

άρα $h^{-1}(x) = \frac{e^{2x} - 16}{2e^x}$, $x \in \mathbb{R}$.

γ) $I_1 = \int_0^3 \frac{1}{\sqrt{x^2 + 16}} dx = \int_0^3 [h(x)]' dx = [h(x)]_0^3 = h(3) - h(0) = \ln f(3) - \ln f(0) = \ln 8 - \ln 4 = \ln 2$.

δ) $I_2 + 16I_1 = \int_0^3 \frac{x^2}{\sqrt{x^2 + 16}} dx + 16 \int_0^3 \frac{1}{\sqrt{x^2 + 16}} dx = \int_0^3 \frac{x^2 + 16}{\sqrt{x^2 + 16}} dx = \int_0^3 \sqrt{x^2 + 16} dx = I_3$.

ε) $I_3 = \int_0^3 \sqrt{x^2 + 16} dx = \int_0^3 (x)' \sqrt{x^2 + 16} dx = [x\sqrt{x^2 + 16}]_0^3 - \int_0^3 \frac{x}{\sqrt{x^2 + 16}} dx =$
 $= 15 - \int_0^3 \frac{x^2}{\sqrt{x^2 + 16}} dx \Leftrightarrow I_3 = 15 - I_2 \Leftrightarrow I_3 + I_2 = 15$.

στ) Είναι $\left. \begin{aligned} I_2 + I_3 &= 15 \\ I_2 - I_3 &= -16I_1 \end{aligned} \right\} \Leftrightarrow \begin{aligned} I_2 + I_3 &= 15 \\ I_2 - I_3 &= -16\ln 2 \end{aligned}$, οπότε $I_2 = \frac{15}{2} - 8\ln 2$ και $I_3 = \frac{15}{2} + 8\ln 2$.

202. α) Είναι $(f(x) + x)(f'(x) + 1) = x \Leftrightarrow 2(f(x) + x)(f'(x) + 1) = 2x \Leftrightarrow [(f(x) + x)^2]' = (x^2)'$

$(f(x)+x)^2 = x^2 + c$. Για $x=0$ προκύπτει $c=1$ οπότε $(f(x)+x)^2 = x^2 + 1$.

Εστω $\varphi(x) = f(x) + x$, τότε έχουμε $\varphi^2(x) = x^2 + 1 \neq 0$. Άρα $\varphi(x) \neq 0$ και αφού η φ είναι συνεχής θα διατηρεί σταθερό πρόσημο. Είναι $\varphi(0) = f(0) = 1 > 0$ άρα $\varphi(x) > 0$ οπότε

$$\varphi(x) = \sqrt{x^2 + 1} \Leftrightarrow f(x) + x = \sqrt{x^2 + 1} \Leftrightarrow f(x) = \sqrt{x^2 + 1} - x, \quad x \in \mathbb{R}.$$

β) Για κάθε $x \in \mathbb{R}$ είναι $f(x) = \sqrt{x^2 + 1} - x > \sqrt{x^2} - x = |x| - x \geq 0$ άρα $f(x) > 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

γ) Για κάθε $x \in (0, +\infty)$ είναι $|\eta\mu f(x)| \leq |f(x)| = f(x) \Leftrightarrow -f(x) \leq \eta\mu(f(x)) \leq f(x)$.

$$\text{Είναι } f(x) = \sqrt{x^2 + 1} - x = \frac{x^2 + 1 - x^2}{\sqrt{x^2 + 1} + x} = \frac{1}{\sqrt{x^2 + 1} + x} \text{ και}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{\sqrt{x^2 + 1} + x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x \left(\sqrt{1 + \frac{1}{x^2}} + 1 \right)} = 0,$$

άρα από κριτήριο παρεμβολής προκύπτει ότι $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\eta\mu(f(x))) = 0$.

δ) Η f είναι παραγωγίσιμη στο \mathbb{R} με $f'(x) = \frac{2x}{2\sqrt{x^2 + 1}} - 1 = \frac{x - \sqrt{x^2 + 1}}{\sqrt{1 + x^2}} = \frac{-f(x)}{\sqrt{x^2 + 1}} < 0$ (3).

Επομένως η f είναι \downarrow στο \mathbb{R} άρα και $1-1$, συνεπώς αντιστρέφεται. Εστω

$$f(x) = y \Leftrightarrow y = \sqrt{x^2 + 1} - x \Leftrightarrow y + x = \sqrt{x^2 + 1} \Rightarrow y^2 + 2xy + x^2 = x^2 + 1 \Leftrightarrow 2xy = 1 - y^2 \Leftrightarrow x = \frac{1 - y^2}{2y}.$$

Είναι $y + x \geq 0 \Leftrightarrow y + \frac{1 - y^2}{2y} \geq 0 \Leftrightarrow \frac{y^2 + 1}{y} \geq 0$ που ισχύει αφού $y = f(x) > 0$.

$$\text{Άρα } f^{-1}(y) = \frac{1 - y^2}{2y}, \quad y > 0 \text{ δηλαδή } f^{-1}(x) = \frac{1 - x^2}{2x}, \quad x > 0.$$

ε) Από τη σχέση (3) $\Leftrightarrow -\frac{f'(x)}{f(x)} = \frac{1}{\sqrt{x^2 + 1}}$.

$$\begin{aligned} \text{Άρα } I &= \int_{2\sqrt{2}}^0 \frac{1}{\sqrt{x^2 + 1}} dx = -\int_{2\sqrt{2}}^0 \frac{f'(x)}{f(x)} dx = \int_0^{2\sqrt{2}} \frac{f'(x)}{f(x)} dx = [\ln f(x)]_0^{2\sqrt{2}} = \\ &= \ln f(2\sqrt{2}) - \ln 1 = \ln(3 - 2\sqrt{2}). \end{aligned}$$

203. **α)** Εστω $I = \int_0^2 f^2(x) dx + \int_0^2 (f'(x))^2 dx = f^2(0) - f^2(2)$ (1),

$$\begin{aligned} \text{τότε } I &= \int_0^2 f^2(x) dx + \int_0^2 (f'(x))^2 dx + \int_0^2 2f(x)f'(x) dx - \int_0^2 2f(x)f'(x) dx = \\ &= \int_0^2 [f^2(x) + (f'(x))^2 + 2f(x)f'(x)] dx - \int_0^2 [f^2(x)]' dx = \\ &= \int_0^2 (f(x) + f'(x))^2 dx - [f^2(x)]_0^2 = \int_0^2 (f(x) + f'(x))^2 dx - (f^2(2) - f^2(0)) \Leftrightarrow \\ I &= \int_0^2 (f(x) + f'(x))^2 dx + I \Leftrightarrow \int_0^2 (f(x) + f'(x))^2 dx = 0. \end{aligned}$$

Είναι $(f(x) + f'(x))^2 \geq 0$ για κάθε $x \in [0, 2]$ αν υπάρχει $x_0 \in [0, 2]$ τέτοιο ώστε

$$f(x_0) + f'(x_0) \neq 0 \text{ τότε } \int_0^2 (f(x) + f'(x))^2 dx > 0 \text{ άτοπο.}$$

Άρα $f(x)+f'(x)=0$ (2) για κάθε $x \in [0,2]$

$$\begin{aligned} \beta) \text{ Είναι } \int_0^2 (f'(x))^2 dx &= \int_0^2 f'(x) \cdot f'(x) dx = \int_0^2 f'(x) (-f(x)) dx = \\ &= -\int_0^2 f'(x) f(x) dx = -\left[\frac{f^2(x)}{2} \right]_0^2 = \frac{1}{2}(f^2(0) - f^2(2)) \quad (3). \end{aligned}$$

Άρα η σχέση (1) με βάση την (3) γίνεται

$$\int_0^2 f^2(x) dx + \frac{1}{2}(f^2(0) - f^2(2)) = f^2(0) - f^2(2) \Leftrightarrow \int_0^2 f^2(x) dx = \frac{1}{2}(f^2(0) - f^2(2)) \quad (4).$$

Από (3) και (4) προκύπτει ότι $\int_0^2 f^2(x) dx = \int_0^2 (f'(x))^2 dx = \frac{1}{2}(f^2(0) - f^2(2))$

γ) Είναι $f(x)+f'(x)=0 \Leftrightarrow e^{x^2} f'(x) + e^{x^2} f(x) = 0 \Leftrightarrow (e^{x^2} f(x))' = 0 \Leftrightarrow e^{x^2} f(x) = c$.

Για $x=1$ προκύπτει $c=e^2$, άρα $e^{x^2} f(x) = e^2 \Leftrightarrow f(x) = e^{2-x}$, $x \in [0,2]$.

204. α) Εστω $I = \int_0^\lambda \frac{f(x)}{f(\lambda-x)+f(x)} dx$. Θέτω $u = \lambda - x$ οπότε $dx = -du$ και $\begin{array}{c|c|c} x & 0 & \lambda \\ \hline u & \lambda & 0 \end{array}$

$$\text{οπότε } I = \int_\lambda^0 \frac{f(\lambda-u)}{f(u)+f(\lambda-u)} (-du) = \int_0^\lambda \frac{f(\lambda-u)}{f(u)+f(\lambda-u)} du = \int_0^\lambda \frac{f(\lambda-x)}{f(x)+f(\lambda-x)} dx.$$

β) i. Είναι $f\left(\frac{\pi}{2}-x\right)+f(x) = \sigma\upsilon\nu\left(\frac{\pi}{2}-x\right) + \sigma\upsilon\nu x = \eta\mu x + \sigma\upsilon\nu x \neq 0$ για κάθε $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ οπότε

$$I_1 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\eta\mu x}{\eta\mu x + \sigma\upsilon\nu x} dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{f\left(\frac{\pi}{2}-x\right)}{f\left(\frac{\pi}{2}-x\right)+f(x)} dx \stackrel{(a)}{=} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{f(x)}{f(x)+f\left(\frac{\pi}{2}-x\right)} dx =$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sigma\upsilon\nu x}{\eta\mu x + \sigma\upsilon\nu x} dx = I_3, \text{ άρα } I_1 = I_3$$

$$\text{και } I_1 + I_3 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\eta\mu x}{\eta\mu x + \sigma\upsilon\nu x} dx + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sigma\upsilon\nu x}{\eta\mu x + \sigma\upsilon\nu x} dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\eta\mu x + \sigma\upsilon\nu x}{\eta\mu x + \sigma\upsilon\nu x} dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} 1 dx = \frac{\pi}{2},$$

$$\text{άρα } 2I_1 = \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow I_1 = \frac{\pi}{4}.$$

ii. Είναι $f'(x)h'(x) = f'(x)h(x) + f(x)h'(x)$, δηλαδή

$$-\eta\mu x \cdot h'(x) = -\eta\mu x \cdot h(x) + \sigma\upsilon\nu x \cdot h'(x) \Leftrightarrow$$

$$\eta\mu x \cdot h(x) = (\eta\mu x + \sigma\upsilon\nu x) h'(x) \Leftrightarrow \frac{h'(x)}{h(x)} = \frac{\eta\mu x}{\eta\mu x + \sigma\upsilon\nu x}.$$

$$\text{Οπότε } I_2 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{h'(x)}{h(x)} dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\eta\mu x}{\eta\mu x + \sigma\upsilon\nu x} dx = I_1 = \frac{\pi}{4}.$$

iii. Από το προηγούμενο ερώτημα έχουμε

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{h'(x)}{h(x)} dx = \frac{\pi}{4} \Leftrightarrow \int_0^{\frac{\pi}{2}} [\ln h(x)]' dx = \frac{\pi}{4} \Leftrightarrow [\ln h(x)]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{4} \Leftrightarrow \ln h\left(\frac{\pi}{2}\right) - \ln h(0) = \frac{\pi}{4} \quad (1).$$

Θεωρούμε τη συνάρτηση $\varphi(x) = \ln h(x)$ η οποία είναι παραγωγίσιμη στο $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ με

$\varphi'(x) = \frac{h'(x)}{h(x)}$ οπότε από Θ.Μ.Τ. υπάρχει $\rho \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ τέτοιο ώστε

$$\varphi'(\rho) = \frac{\varphi\left(\frac{\pi}{2}\right) - \varphi(0)}{\frac{\pi}{2} - 0} \Leftrightarrow \frac{h'(\rho)}{h(\rho)} = \frac{\ln h\left(\frac{\pi}{2}\right) - \ln h(0)}{\frac{\pi}{2}} \stackrel{(*)}{\Leftrightarrow} \frac{h'(\rho)}{h(\rho)} = \frac{\frac{\pi}{4}}{\frac{\pi}{2}} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow h'(\rho) = \frac{1}{2}h(\rho).$$

$$205. \text{ α) Εστω } I = \int_{-x}^x \frac{\sigma\upsilon\nu t}{1+e^t} dt = \int_{-x}^0 \frac{\sigma\upsilon\nu t}{1+e^t} dt + \int_0^x \frac{\sigma\upsilon\nu t}{1+e^t} dt.$$

$$\text{Αν } I_1 = \int_{-x}^0 \frac{\sigma\upsilon\nu t}{1+e^t} dt \text{ τότε θέτω } t = -u \text{ οπότε } dt = -du \text{ και } \begin{array}{c|c|c} t & -x & 0 \\ \hline u & x & 0 \end{array}$$

$$\text{άρα } I_1 = \int_x^0 \frac{\sigma\upsilon\nu(-u)}{1+e^{-u}} (-du) = \int_0^x \frac{\sigma\upsilon\nu u}{1+\frac{1}{e^u}} du = \int_0^x \frac{e^u \sigma\upsilon\nu u}{1+e^u} du = \int_0^x \frac{e^t \sigma\upsilon\nu t}{1+e^t} dt.$$

$$\text{Άρα } I = \int_0^x \frac{e^t \sigma\upsilon\nu t}{1+e^t} dt + \int_0^x \frac{\sigma\upsilon\nu t}{1+e^t} dt = \int_0^x \frac{(e^t + 1) \sigma\upsilon\nu t}{1+e^t} dt = \int_0^x \sigma\upsilon\nu t dt = [\eta\mu t]_0^x = \eta\mu x.$$

Οπότε η δοσμένη σχέση γίνεται:

$$(f''(x)+1)\sigma\upsilon\nu x = f'(x)\eta\mu x \Leftrightarrow f''(x)\sigma\upsilon\nu x - f'(x)\eta\mu x = -\sigma\upsilon\nu x \Leftrightarrow (f'(x)\sigma\upsilon\nu x)' = (-\eta\mu x)',$$

$$\text{άρα } f'(x)\sigma\upsilon\nu x = -\eta\mu x + c_1.$$

$$\text{Για } x=0 \text{ είναι } c_1 = 0. \text{ Οπότε } f'(x)\sigma\upsilon\nu x = -\eta\mu x \Leftrightarrow f'(x) = -\frac{\eta\mu x}{\sigma\upsilon\nu x} \Leftrightarrow f'(x) = (\ln(\sigma\upsilon\nu x))',$$

$$\text{άρα } f(x) = \ln(\sigma\upsilon\nu x) + c_2.$$

$$\text{Για } x=0 \text{ προκύπτει ότι } c_2 = 0 \text{ άρα } f(x) = \ln(\sigma\upsilon\nu x).$$

$$\text{β) Είναι } f'(x) = \frac{-\eta\mu x}{\sigma\upsilon\nu x} = -\epsilon\phi x, \quad f''(x) = -\frac{1}{\sigma\upsilon\nu^2 x} < 0$$

Η f έχει ολικό μέγιστο

$$\text{για } x=0 \text{ το } f(0) = \ln(\sigma\upsilon\nu 0) = 0.$$

γ) • Αν $x = y$ ισχύει η ισότητα.

• Αν $x < y$ εφαρμόζουμε Θ.Μ.Τ. για την

$$f(t) = \ln(\sigma\upsilon\nu t) \text{ στα διαστήματα } \left[x, \frac{x+y}{2} \right], \left[\frac{x+y}{2}, y \right],$$

$$\text{οπότε υπάρχει } \xi_1 \in \left(x, \frac{x+y}{2} \right) \text{ τέτοιο ώστε } f'(\xi_1) = \frac{f\left(\frac{x+y}{2}\right) - f(x)}{\frac{y-x}{2}}$$

$$\text{και } \xi_2 \in \left(\frac{x+y}{2}, y \right) \text{ τέτοιο ώστε } f'(\xi_2) = \frac{f(y) - f\left(\frac{x+y}{2}\right)}{\frac{y-x}{2}}.$$

Επειδή $f''(x) < 0$ τότε $f' \downarrow$ άρα για $\xi_1 < \xi_2$. Θα είναι

$$f'(\xi_1) > f'(\xi_2) \Leftrightarrow f\left(\frac{x+y}{2}\right) - f(x) > f(y) - f\left(\frac{x+y}{2}\right) \Leftrightarrow 2f\left(\frac{x+y}{2}\right) > f(x) + f(y) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2\ln \sigma\upsilon\nu \frac{x+y}{2} > \ln(\sigma\upsilon\nu x) + \ln(\sigma\upsilon\nu y) \Leftrightarrow \ln \sigma\upsilon\nu^2 \frac{x+y}{2} > \ln(\sigma\upsilon\nu x \sigma\upsilon\nu y),$$

$$\text{άρα } \sigma\upsilon\nu^2 \frac{x+y}{2} > \sigma\upsilon\nu x \sigma\upsilon\nu y. \text{ Όμοια αν } x > y.$$

$$\text{Άρα για κάθε } x, y \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right) \text{ θα είναι } \sigma\upsilon\nu^2 \frac{x+y}{2} \geq \sigma\upsilon\nu x \sigma\upsilon\nu y.$$

	$-\frac{\pi}{2}$	0	$\frac{\pi}{2}$	
f'	+		-	
f''	-		-	
f	↗		↘	

$$\delta) \text{ Είναι } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{\eta \mu^2 x} \stackrel{\left(\frac{0}{0}\right)}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f'(x)}{2\eta \mu x \sigma \upsilon \nu x} = \lim_{x \rightarrow 0} \left[\frac{-\eta \mu x}{2\eta \mu x \sigma \upsilon \nu x} \right] = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{2\sigma \upsilon \nu^2 x} = \frac{1}{2}$$

206. α) Επειδή $f'(x) < 0$ τότε η $f \downarrow$ στο $[2, 5]$ άρα και 1-1 οπότε η f είναι αντιστρέψιμη με πεδίο ορισμού το σύνολο τιμών της f . Είναι $f(A) = [f(5), f(2)] = [f(5), 5]$ αφού η $f \downarrow$ άρα $D_{f^{-1}} = [f(5), 5]$.

β) i. Είναι $\int_{f(2)}^{f(5)} f^{-1}(t) dt + \int_2^5 f(t) dt = 0$ (1)

Θέτω $f^{-1}(t) = u \Leftrightarrow t = f(u)$ και $dt = f'(u) du$. Επίσης $\begin{array}{c|c|c} t & f(2) & f(5) \\ \hline u & 2 & 5 \end{array}$

Άρα η (1) γίνεται: $\int_2^5 u f'(u) du + \int_2^5 f(t) dt = 0 \Leftrightarrow [u f(u)]_2^5 - \int_2^5 f(u) du + \int_2^5 f(t) dt = 0 \Leftrightarrow 5f(5) - 2f(2) = 0 \Leftrightarrow 5f(5) = 10 \Leftrightarrow f(5) = 2$.

ii. Θεωρούμε την $h(x) = f(x) + x$ η οποία είναι παραγωγίσιμη στο $[2, 5]$ άρα και συνεχής. Επίσης $h(2) = f(2) + 2 = 5 + 2 = 7$, $h(5) = f(5) + 5 = 2 + 5 = 7$, άρα $h(2) = h(5)$.

Επίσης $h'(x) = f'(x) + 1$. Άρα από Θ. Rolle υπάρχει $\xi \in (2, 5)$ τέτοιο ώστε

$$h'(\xi) = 0 \Leftrightarrow f'(\xi) = -1. \text{ Η ευθεία } \eta: x - y + 1821 = 0 \text{ έχει συντελεστή διεύθυνσης } \lambda_\eta = 1.$$

Η εφαπτόμενη της C_f στο σημείο $M(\xi, f(\xi))$ έχει συντελεστή διεύθυνσης

$$\lambda_{\text{εφ}} = f'(\xi) = -1. \text{ Επειδή } \lambda_\eta \cdot \lambda_{\text{εφ}} = -1 \text{ τότε η εφαπτομένη της } C_f \text{ στο σημείο } M(\xi, f(\xi))$$

είναι κάθετη στην ευθεία (η).

iii. Θεωρούμε την $\varphi(x) = f(x) - x$ η οποία είναι συνεχής στο $[2, 5]$

με $\varphi(2) = f(2) - 2 = 5 - 2 = 3 > 0$ και $\varphi(5) = f(5) - 5 = -3 < 0$. Οπότε $\varphi(2) \cdot \varphi(5) < 0$, άρα από Θ. Bolzano υπάρχει $\rho \in (2, 5)$ τέτοιο ώστε $\varphi(\rho) = 0 \Leftrightarrow f(\rho) = \rho$. Επίσης

$\varphi'(x) = f'(x) - 1 < 0$ αφού $f'(x) < 0$ άρα η φ είναι \downarrow οπότε το ρ που βρήκαμε προηγουμένως είναι μοναδικό.

iv. Εφαρμόζουμε Θ.Μ.Τ. για την f στα διαστήματα $[2, \rho]$ και $[\rho, 5]$ οπότε υπάρχουν

$\xi_1 \in (2, \rho)$ και $\xi_2 \in (\rho, 5)$ τέτοια ώστε:

$$f'(\xi_1) = \frac{f(\rho) - f(2)}{\rho - 2} = \frac{\rho - 5}{\rho - 2} \text{ και } f'(\xi_2) = \frac{f(5) - f(\rho)}{5 - \rho} = \frac{2 - \rho}{5 - \rho}.$$

$$\text{Άρα } f'(\xi_1) \cdot f'(\xi_2) = \frac{\rho - 5}{\rho - 2} \cdot \frac{2 - \rho}{5 - \rho} = 1.$$

207. **α)** Αφού $f(x) > 0$ τότε η σχέση $f(x)\ln f(x) + xf'(x) = 0$ γίνεται:

$$\ln f(x) + x \frac{f'(x)}{f(x)} = 0 \Leftrightarrow [x \ln f(x)]' = 0 \Leftrightarrow x \ln f(x) = c.$$

Για $x=1$ προκύπτει $c=1$ άρα $x \ln f(x) = 1 \Leftrightarrow \ln f(x) = \frac{1}{x} \Leftrightarrow f(x) = e^{\frac{1}{x}}, x > 0.$

β) Η f είναι παραγωγίσιμη στο $(0, +\infty)$ με $f'(x) = -\frac{1}{x^2} e^{\frac{1}{x}} < 0$ οπότε η f είναι \downarrow στο $(0, +\infty)$ άρα είναι και 1-1, οπότε η f αντιστρέφεται. Έστω $f(x) = y$ τότε

$$\left. \begin{array}{l} e^{\frac{1}{x}} = y \\ x > 0 \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left. \begin{array}{l} \frac{1}{x} = \ln y \\ y > 0 \\ \ln y > 0 \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left. \begin{array}{l} x = \frac{1}{\ln y} \\ y > 1 \end{array} \right\} \text{ άρα } f^{-1}(x) = \frac{1}{\ln x}, x \in (1, +\infty).$$

γ) Η f είναι \downarrow στο $(0, +\infty)$ και επίσης $f''(x) = -\frac{e^{\frac{1}{x}} \left(-\frac{1}{x^2} \right) x^2 - 2x e^{\frac{1}{x}}}{x^4} = \frac{e^{\frac{1}{x}} (1+2x)}{x^4} > 0$, αφού $x > 0$. Επομένως η f είναι κυρτή στο $(0, +\infty)$. Η εφαπτομένη της C_f στο $x_0 = 1$ είναι $y - f(1) = f'(1)(x - 1) \Leftrightarrow y - e = -e(x - 1) \Leftrightarrow y = -ex + 2e$. Αφού η f είναι κυρτή σε κάθε σημείο η C_f θα είναι πάνω από την εφαπτομένη με εξαίρεση το σημείο επαφής.

$$\text{Άρα } f(x) \geq -ex + 2e \Leftrightarrow e^{\frac{1}{x}} \geq e(2-x) \Leftrightarrow \frac{e^{\frac{1}{x}}}{e} \geq 2-x \Leftrightarrow e^{\frac{1}{x}-1} \geq 2-x.$$

$$\begin{aligned} \delta) \text{ Είναι } I &= \int_e^{e^2} f^{-1}(x) \left(1 - \frac{1}{\ln x} \right) dx = \int_e^{e^2} \frac{1}{\ln x} \left(1 - \frac{1}{\ln x} \right) dx = \int_e^{e^2} \frac{1}{\ln x} dx - \int_e^{e^2} \frac{1}{\ln^2 x} dx = \\ &= \int_e^{e^2} (x)' \frac{1}{\ln x} dx - \int_e^{e^2} \frac{1}{\ln^2 x} dx = \left[x \frac{1}{\ln x} \right]_e^{e^2} - \int_e^{e^2} x \frac{(-\ln x)'}{\ln^2 x} dx - \int_e^{e^2} \frac{1}{\ln^2 x} dx = \\ &= \frac{e^2}{2} - e + \int_e^{e^2} \frac{1}{\ln^2 x} dx - \int_e^{e^2} \frac{1}{\ln^2 x} dx = \frac{e^2}{2} - e. \end{aligned}$$

ε) Εφαρμόζουμε Θ.Μ.Τ. για την f στα διαστήματα $[1, 5]$ και $[5, 9]$ οπότε υπάρχουν $\xi_1 \in (1, 5)$

$$\text{και } \xi_2 \in (5, 9) \text{ τέτοια ώστε } f'(\xi_1) = \frac{f(5) - f(1)}{4} = \frac{e^{\frac{1}{5}} - e}{4} \text{ και } f'(\xi_2) = \frac{f(9) - f(5)}{4} = \frac{e^{\frac{1}{9}} - e^{\frac{1}{5}}}{4}.$$

Αφού η f είναι κυρτή τότε η $f' \uparrow$ άρα $\xi_1 < \xi_2$ οπότε

$$f'(\xi_1) < f'(\xi_2) \Leftrightarrow e^{\frac{1}{5}} - e < e^{\frac{1}{9}} - e^{\frac{1}{5}} \Leftrightarrow 2e^{\frac{1}{5}} < e^{\frac{1}{9}} + e \Leftrightarrow 2\sqrt[5]{e} < \sqrt[9]{e} + e.$$

208. **α)** Στη σχέση (1) $f(x) + g(x) = \int_2^p f(u)g(u)du$ το ορισμένο ολοκλήρωμα $\int_2^p f(u)g(u)du$ είναι πραγματικός αριθμός. Αν στην (1) θέσουμε όπου $x=2$ τότε

$$f(2) + g(2) = \int_2^p f(u)g(u)du \Leftrightarrow 4 = \int_2^p f(u)g(u)du, \text{ οπότε η σχέση (1) γίνεται}$$

$$f(x) + g(x) = 4 \Leftrightarrow g(x) = 4 - f(x).$$

β) Εστω $F(x)$ αρχική της $f(x)g(x)$ τότε $F'(x) = f(x)g(x)$ (2) και

$$\int_2^{\rho} f(u)g(u)du = [F(u)]_2^{\rho} = F(\rho) - F(2) \text{ και επειδή } \rho - 2 > 0 \text{ τότε διαιρώντας με } \rho - 2$$

$$\text{προκύπτει } \frac{\int_2^{\rho} f(u)g(u)du}{\rho - 2} = \frac{F(\rho) - F(2)}{\rho - 2} \stackrel{(α)}{\Leftrightarrow} \frac{4}{\rho - 2} = \frac{F(\rho) - F(2)}{\rho - 2} \quad (3).$$

Εφαρμόζουμε Θ.Μ.Τ. για την F στο $[2, \rho]$ οπότε υπάρχει $x_0 \in (2, \rho)$ τέτοιο ώστε

$$F'(x_0) = \frac{F(\rho) - F(2)}{\rho - 2} \stackrel{(2)}{\Leftrightarrow} \stackrel{(3)}{f(x_0)g(x_0)} = \frac{4}{\rho - 2}.$$

γ) Εφαρμόζουμε Rolle για την $H(x) = (f(x) - g(x))(x - \rho)$ στο $[2, \rho]$ γιατί είναι

$$H(2) = H(\rho) = 0 \text{ και } H'(x) = (f'(x) - g'(x))(x - \rho) + f(x) - g(x).$$

Άρα υπάρχει $\xi \in (2, \rho)$ τέτοιο ώστε

$$H'(\xi) = 0 \Leftrightarrow (f'(\xi) - g'(\xi))(\xi - \rho) + f(\xi) - g(\xi) = 0 \Leftrightarrow \stackrel{\xi \neq \rho}{f'(\xi) - g'(\xi)} = \frac{f(\xi) - g(\xi)}{\rho - \xi}.$$

Άρα η εξίσωση $f'(x) - g'(x) = \frac{f(x) - g(x)}{\rho - x}$ έχει μία τουλάχιστον λύση στο $(2, \rho)$.

$$\delta) \text{ Είναι } \left. \begin{array}{l} f(x_0)g(x_0) = \frac{4}{\rho - 2} \\ g(x_0) = 4 - f(x_0) \end{array} \right\} \Leftrightarrow f(x_0)(4 - f(x_0)) = \frac{4}{\rho - 2} \Leftrightarrow 4f(x_0) - f^2(x_0) = \frac{4}{\rho - 2} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow f^2(x_0) - 4f(x_0) + 4 = 4 - \frac{4}{\rho - 2} \Leftrightarrow (f(x_0) - 2)^2 = \frac{4(\rho - 3)}{\rho - 2} \quad (4).$$

Άρα η εξίσωση $(f(x_0) - 2)^2 = \frac{4(\rho - 3)}{\rho - 2}$ έχει λύση το $x_0 \in (2, \rho)$.

ε) Επειδή $(f(x_0) - 2)^2 \geq 0$ τότε (4) $\frac{4(\rho - 3)}{\rho - 2} \geq 0$, άρα $\rho \geq 3$.

στ) Είναι $f(x) + g(x) = 4$ οπότε $\int_2^{\rho} (f(x) + g(x))dx = \int_2^{\rho} 4dx \Leftrightarrow \int_2^{\rho} (f(x) + g(x))dx = 4(\rho - 2)$.

Αφού $\rho \geq 3$ τότε $\rho - 2 \geq 1$ άρα $4(\rho - 2) \geq 4$. Συνεπώς $\int_2^{\rho} (f(x) + g(x))dx \geq 4$.

209. **α)** Είναι $f'(x) = 3x^2 + 2 > 0$ οπότε η $f \uparrow$ άρα και $1-1$. Οπότε η f αντιστρέφεται.

β) Είναι $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (x^3 + 2x) = -\infty$ και $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$. Αφού η $f \uparrow$ στο \mathbb{R} τότε το σύνολο τιμών της f είναι $f(A) = \left(\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x), \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) \right) = (-\infty, +\infty) = \mathbb{R}$. Οπότε το πεδίο ορισμού της f^{-1} είναι $D_{f^{-1}} = f(A) = \mathbb{R}$ και η $f^{-1} \uparrow$ στο \mathbb{R} αφού έχει ίδιο είδος μονοτονίας με την f .

γ) Αφού $f(x) = x^3 + 2x$ τότε $f(g(x)) = g^3(x) + 2g(x) \geq x$ οπότε $f(g(x)) \geq x$ άρα $f^{-1}(f(g(x))) \geq f^{-1}(x) \Leftrightarrow g(x) \geq f^{-1}(x)$.

δ) Είναι $g(x) - f^{-1}(x) \geq 0$ οπότε $\int_0^3 [g(x) - f^{-1}(x)]dx \geq 0 \Leftrightarrow \int_0^3 g(x)dx \geq \int_0^3 f^{-1}(x)dx$.

Θέτω $f^{-1}(x) = u$ οπότε $x = f(u)$ και $dx = f'(u)du$. Επίσης $\begin{array}{c|c|c} x & 0 & 3 \\ \hline u & 0 & 1 \end{array}$

γιατί $f(0)=0$ και $f(1)=3$.

$$\text{Οπότε } \int_0^3 f^{-1}(x) dx = \int_0^1 u f'(u) du = \int_0^1 (3u^3 + 2u) du = 3 \left[\frac{u^4}{4} \right]_0^1 + \left[\frac{u^2}{2} \right]_0^1 = \frac{7}{4}.$$

$$\text{Άρα } \int_0^3 g(x) dx \geq \frac{7}{4}.$$

210. α) Αφού η f είναι παραγωγίσιμη στο \mathbb{R} τότε παραγωγίζοντας την σχέση

$$(1) \quad 2f^3(x) + 3f(x) = x + 4 \quad \text{έχουμε} \quad 6f^2(x)f'(x) + 3f'(x) = 1 \Leftrightarrow f'(x)(6f^2(x) + 3) = 1 \Leftrightarrow$$

$$f'(x) = \frac{1}{6f^2(x) + 3} > 0, \quad \text{οπότε η } f \text{ είναι γνησίως αύξουσα στο } \mathbb{R}.$$

β) Αφού η f είναι \uparrow θα είναι και $1-1$ οπότε η f αντιστρέφεται. Αν $f(x) = y \Leftrightarrow x = f^{-1}(y)$ και η

$$(1) \quad \text{γίνεται} \quad 2y^3 + 3y = f^{-1}(y) + y \Leftrightarrow f^{-1}(y) = 2y^3 + 3y - 4, \quad \text{άρα } f^{-1}(x) = 2x^3 + 3x - 4, \quad x \in \mathbb{R}.$$

γ) Αφού η f είναι \uparrow τότε η εξίσωση $f(x) = f^{-1}(x)$ είναι ισοδύναμη με την $f(x) = x$ οπότε

$$2f^3(x) = 2x^3 \quad \text{και} \quad 3f(x) = 3x \quad \text{και με πρόσθεση κατά μέλη έχουμε:}$$

$$2f^3(x) + 3f(x) = 2x^3 + 3x \stackrel{(1)}{\Leftrightarrow} x + 4 = 2x^3 + 3x \Leftrightarrow 2x^3 + 2x - 4 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (x-1)(2x^2 + 2x + 4) = 0 \Leftrightarrow x = 1, \quad \text{αφού } 2x^2 + 2x + 4 > 0 \quad (\Delta < 0), \quad \text{άρα το κοινό σημείο}$$

των C_f, C_f^{-1} είναι το $(1,1)$.

δ) Στην (1) για $x=0$ έχουμε $27^3(0) + 3f(0) = 4 \Leftrightarrow f(0) = \frac{4}{27^2(0) + 3} > 0$ ενώ για $x=-5$

$$\text{έχουμε: } 27^3(-5) + 3f(-5) = -1 \Leftrightarrow f(-5) = \frac{-1}{27^2(-5) + 3} < 0. \quad \text{Η } f \text{ είναι συνεχής στο } [-5, 0]$$

αφού είναι παραγωγίσιμη στο \mathbb{R} και $f(0) \cdot f(-5) < 0$ οπότε από Θ. Bolzano υπάρχει

$\xi \in (-5, 0)$ τέτοιο ώστε $f(\xi) = 0$.

ε) Είναι $I = \int_{-4}^1 f(x) dx$. Θέτω $u = f(x) \Leftrightarrow x = f^{-1}(u)$ οπότε $dx = (f^{-1}(u))' du \Leftrightarrow$

$$dx = (6u^2 + 3) du. \quad \text{Επίσης για } x = -4 \text{ θα είναι } f^{-1}(u) = -4 = f^{-1}(0) \text{ άρα } u = 0 \text{ και για } x = 1 \text{ είναι } u = 1.$$

$$\text{Συνεπώς } I = \int_0^1 u(6u^2 + 3) du = \int_0^1 u(6u^3 + 3u) du = 6 \left[\frac{u^4}{4} \right]_0^1 + 3 \left[\frac{u^2}{2} \right]_0^1 = \frac{6}{4} + \frac{3}{2} = 3.$$

211. α) Είναι $[f'(x)]^2 + f(x)f''(x) = \frac{1}{2}e^x \Leftrightarrow [f'(x)f(x)]' = \left(\frac{e^x}{2}\right)' \Leftrightarrow f'(x)f(x) = \frac{e^x}{2} + c_1,$

για $x=0$ τότε $c_1 = -\frac{1}{2}$, οπότε

$$f'(x)f(x) = \frac{e^x - 1}{2} \Leftrightarrow 2f'(x)f(x) = e^x - 1 \Leftrightarrow (f^2(x))' = (e^x - x)' \Leftrightarrow f^2(x) = e^x - x + c_2.$$

Για $x=0$ προκύπτει $c_2 = 0$. Άρα $f^2(x) = e^x - x$.

β) Εστω $h(x) = e^x - x$ είναι $h'(x) = e^x - 1$

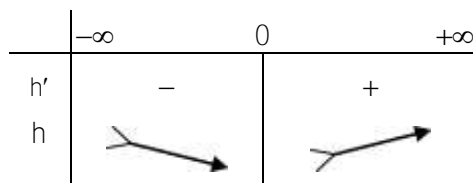
Για κάθε $x \in \mathbb{R}$ είναι $h(x) \geq h(0) = 1$, άρα

$h(x) > 0$. Οπότε $f^2(x) = e^x - x \neq 0$ και αφού n

f είναι συνεχής τότε $n \cdot f$ θα διατηρεί πρόσημο.

Είναι $f(0) = 1 > 0$ άρα $f(x) > 0$,

οπότε $f(x) = \sqrt{e^x - x}$.



γ) Είναι $I = \int_{\ln 3}^2 \frac{f(x)f''(x)}{e^x - 1} dx$, $x > 0$ όμως $f(x)f''(x) = \frac{1}{2}e^x - [f'(x)]^2$ όπου $f'(x) = \frac{e^x - 1}{2\sqrt{e^x - x}}$.

$$\begin{aligned} \text{Άρα } I &= \int_{\ln 3}^2 \frac{\frac{1}{2}e^x - [f'(x)]^2}{e^x - 1} dx = \int_{\ln 3}^2 \frac{\frac{1}{2}e^x - \frac{(e^x - 1)^2}{4(e^x - x)}}{e^x - 1} dx = \frac{1}{2} \int_{\ln 3}^2 \frac{e^x}{e^x - 1} dx - \frac{1}{4} \int_{\ln 3}^2 \frac{e^x - 1}{e^x - x} dx = \\ &= \frac{1}{2} [\ln|e^x - 1|]_{\ln 3}^2 - \frac{1}{4} [\ln|e^x - x|]_{\ln 3}^2 = \\ &= \frac{1}{2} \ln(e^2 - 1) - \frac{1}{2} \ln 2 - \frac{1}{4} \ln(e^2 - 2) + \frac{1}{4} \ln(3 - \ln 3). \end{aligned}$$

212. **α)** Αφού n $f(t)$ είναι συνεχής στο \mathbb{R} τότε η συνάρτηση $F(x) = \int_0^x f(t) dt$ είναι παραγωγίσιμη με $F'(x) = f(x)$ και αφού n $f \uparrow$ στο \mathbb{R} τότε θα είναι $F'(x) \uparrow$ στο \mathbb{R} οπότε n F κυρτή στο \mathbb{R} . Αντίστοιχα n $G(x) = \int_0^x g(t) dt$ είναι παραγωγίσιμη στο \mathbb{R} με $G'(x) = g(x)$ και επειδή n $g(x)$ είναι \downarrow στο \mathbb{R} οπότε $G'(x) \downarrow$ στο \mathbb{R} τότε n G κοίλη στο \mathbb{R} .

β) Θεωρούμε την $h(x) = F(x) - G(x)$ η οποία είναι παραγωγίσιμη στο $[0, \theta]$

με $h'(x) = F'(x) - G'(x) = f(x) - g(x)$ και επιπλέον $h(0) = F(0) - G(0) = 0$,

$h(\theta) = F(\theta) - G(\theta) = 0$, οπότε από Θ . Rolle υπάρχει $\xi \in (0, \theta)$ για το οποίο ισχύει

$h'(\xi) = 0 \Leftrightarrow f(\xi) = g(\xi)$.

γ) Η συνάρτηση $\varphi(x) = \frac{F(x)}{x}$ είναι παραγωγίσιμη στο $(0, +\infty)$ με

$$\varphi'(x) = \frac{F'(x) \cdot x - F(x)}{x^2} = \frac{xf(x) - F(x)}{x^2}.$$

Εφαρμόζουμε $\Theta.M.T.$ για την F στο $[0, x]$ οπότε υπάρχει $\xi_1 \in (0, x)$ τέτοιο ώστε

$$F'(\xi_1) = \frac{F(x) - F(0)}{x} \Leftrightarrow f(\xi_1) = \frac{F(x)}{x}.$$

Επειδή $\xi_1 < x$ και n $f \uparrow$ θα είναι

$$f(\xi_1) < f(x) \Leftrightarrow \frac{F(x)}{x} < f(x) \Leftrightarrow xf(x) > F(x) \Leftrightarrow xf(x) - F(x) > 0$$

οπότε $\varphi'(x) > 0$ άρα n $\varphi \uparrow$ στο $(0, +\infty)$.

δ) • Αν $\alpha = \beta$ ισχύει $G = \left(\frac{\alpha + \beta}{2}\right) = \frac{G(\alpha) + G(\beta)}{2}$.

• Αν $\alpha < \beta$ τότε εφαρμόζουμε Θ.Μ.Τ. για τη συνάρτηση G στα διαστήματα $\left[\alpha, \frac{\alpha+\beta}{2}\right]$ και

$\left[\frac{\alpha+\beta}{2}, \beta\right]$ οπότε υπάρχουν $x_1 \in \left(\alpha, \frac{\alpha+\beta}{2}\right)$ και $x_2 \in \left(\frac{\alpha+\beta}{2}, \beta\right)$ τέτοια ώστε

$$G'(x_1) = \frac{G\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right) - G(\alpha)}{\frac{\beta-\alpha}{2}} \quad \text{και} \quad G'(x_2) = \frac{G(\beta) - G\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)}{\frac{\beta-\alpha}{2}}$$

Όμως $x_1 < x_2$ και η G' \downarrow οπότε

$$G'(x_1) > G'(x_2) \Leftrightarrow G\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right) - G(\alpha) > G(\beta) - G\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right) \Leftrightarrow G\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right) > \frac{G(\alpha) + G(\beta)}{2}.$$

Όμοια δείχνουμε αν $\alpha > \beta$ οπότε σε κάθε περίπτωση $G\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right) \geq \frac{G(\alpha) + G(\beta)}{2}$.

ε) Θεωρούμε την $\omega(x) = \frac{G(x)}{x}$, $x \in (0, +\infty)$ η οποία είναι παραγωγίσιμη με

$$\omega'(x) = \frac{xG'(x) - G(x)}{x^2} = \frac{xg(x) - G(x)}{x^2}. \text{ Εφαρμόζοντας Θ.Μ.Τ. για την } G \text{ στο } [0, x] \text{ θα}$$

$$\text{υπάρχει } \xi_2 \in (0, x): G'(\xi_2) = \frac{G(x) - G(0)}{x} \Leftrightarrow g(\xi_2) = \frac{G(x)}{x}.$$

Όμως $\xi_2 < x$ και η g \downarrow άρα $g(\xi_2) > g(x)$ οπότε $\frac{G(x)}{x} > g(x) \Leftrightarrow xg(x) - G(x) < 0$,

οπότε $\omega'(x) < 0$ άρα $\omega(x)$ \downarrow στο $(0, +\infty)$.

Για $x < \theta$ επειδή η φ \uparrow είναι $\varphi(x) < \varphi(\theta)$ και

για $y < \theta$ επειδή η ω \downarrow θα είναι $\omega(y) > \omega(\theta)$.

$$\text{Όμως } \varphi(\theta) = \frac{F(\theta)}{\theta} = \frac{G(\theta)}{\theta} = \omega(\theta) \text{ οπότε } \varphi(x) < \omega(y) \Leftrightarrow \frac{1}{x} \int_0^x f(t) dt < \frac{1}{y} \int_0^y g(t) dt.$$

213. α) Η συνάρτηση $\frac{5}{1+3f^2(t)}$ είναι συνεχής στο \mathbb{R} οπότε και η συνάρτηση $f(x) = \int_0^x \frac{5}{1+3f^2(t)} dt$

ορίζεται και είναι παραγωγίσιμη στο \mathbb{R} με $f'(x) = \frac{5}{1+3f^2(x)}$. Άρα για κάθε $x \in \mathbb{R}$

$$f'(x) + 3f^2(x)f'(x) = 5 \Leftrightarrow (f(x) + f^3(x))' = (5x)' \Leftrightarrow f^3(x) + f(x) = 5x + c.$$

Επειδή $f(0) = \int_0^0 \frac{5}{1+3f^2(t)} dt = 0$ τότε για $x=0$ θα είναι $f^2(0) + f(0) = 5 \cdot 0 + c \Leftrightarrow c = 0$

άρα $f^3(x) + f(x) = 5x$ (1).

β) Αφού $f'(x) = \frac{5}{1+3f^2(x)} > 0$ τότε η f \uparrow στο \mathbb{R} άρα και 1-1 οπότε η f αντιστρέφεται.

Αν $f(x) = y \Leftrightarrow x = f^{-1}(y)$ και η (1) γίνεται $y^3 + y = 5f^{-1}(y)$, άρα $f^{-1}(x) = \frac{x^3 + x}{5}$.

γ) Το ζητούμενο ολοκλήρωμα $I = \int_0^2 \frac{5}{1+3f^2(t)} dt = f(2)$. Στην (1) για $x=2$ έχουμε $f^3(2)+f(2)=10$, $(f(2)-2)(f^2(2)+2f(2)+5)=0 \Leftrightarrow f(2)=2$. Άρα $\int_0^2 \frac{5}{1+3f^2(x)} dx = 2$.

δ) Θεωρούμε την $h(x) = \int_0^x f(t) dt - \frac{5}{2}x^2$, $x \in \mathbb{R}$, η οποία είναι παραγωγίσιμη στο \mathbb{R} με

$$h'(x) = f(x) - 5x = -f^3(x).$$

Για κάθε $x > 0 \Leftrightarrow f(x) > f(0) = 0 \Rightarrow h'(x) < 0 \Rightarrow h \downarrow [0, +\infty)$ και για κάθε

$x < 0 \Leftrightarrow f(x) < f(0) = 0 \Rightarrow h'(x) > 0 \Rightarrow h \uparrow (-\infty, 0]$.

Για κάθε $x \in \mathbb{R}$ είναι $h(x) \leq h(0) \Leftrightarrow \int_0^x f(t) dt - \frac{5}{2}x^2 \leq 0 \Leftrightarrow \int_0^x f(t) dt \leq \frac{5}{2}x^2$.

ε) i. Για $x \in (-\infty, 0)$ (1) $\Leftrightarrow f(x)(f^2(x)+1) = 5x \Leftrightarrow \frac{f(x)}{x} = \frac{5}{f^2(x)+1}$.

Εστω $f(x) = y \Leftrightarrow x = f^{-1}(y) = \frac{y^3+y}{5}$. Όταν $x \rightarrow +\infty$, τότε $f^{-1}(y) \rightarrow +\infty$ και $y \rightarrow +\infty$, άρα

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} (f^2(x)+1) = +\infty \text{ και } \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{5}{f^2(x)+1} = 0, \text{ οπότε } \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = 0.$$

ii. Για $x \in (-\infty, 0)$ $x \in (-\infty, 0)$ (1) $\Leftrightarrow f^3(x) = 5x - f(x)$ και $\frac{f^3(x)}{x} = 5 - \frac{f(x)}{x}$

$$\text{οπότε } \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f^3(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(5 - \frac{f(x)}{x} \right) = 5 - 0 = 5.$$

214. **α)** Για κάθε $x \in \mathbb{R}$ έχουμε: $\int_0^{f(x)} (e^t + 2) dt = x - 2 \Leftrightarrow [e^t + 2t]_0^{f(x)} = x - 2 \Leftrightarrow$
 $\Leftrightarrow e^{f(x)} + 2f(x) - 1 = x - 2 \Leftrightarrow e^{f(x)} + 2f(x) = x - 1$ (1).

β) Αφού η f είναι παραγωγίσιμη τότε παραγωγίζοντας την (1) έχουμε:

$$e^{f(x)} f'(x) + 2f'(x) = 1 \Leftrightarrow f'(x)(e^{f(x)} + 2) = 1 \Leftrightarrow f'(x) = \frac{1}{e^{f(x)} + 2} > 0$$
 (2), οπότε η f είναι \uparrow

άρα και 1-1 και συνεπώς αντιστρέφεται. Αν $f(x) = y \Leftrightarrow x = f^{-1}(y)$ και η (1) γίνεται

$$e^y + 2y = f^{-1}(y) - 1 \Leftrightarrow f^{-1}(y) = e^y + 2y + 1, \text{ άρα } f^{-1}(x) = e^x + 2x + 1, x \in \mathbb{R}$$
 (3).

γ) Από την (2) προκύπτει ότι η f είναι δύο φορές παραγωγίσιμη με $f''(x) = -\frac{e^{f(x)} f'(x)}{(e^{f(x)} + 2)^2} < 0$

οπότε η f είναι κοίλη στο \mathbb{R} . Επίσης στην (3) για $x=0$ είναι $f^{-1}(0) = 2 \Leftrightarrow f(2) = 0$ και αφού η $f \uparrow$ στο \mathbb{R} τότε για $x < 2$ θα είναι $f(x) < f(2) \Leftrightarrow f(x) < 0$ ενώ για $x > 2$ θα είναι $f(x) > f(2) \Leftrightarrow f(x) > 0$.

δ) Η f είναι συνεχής στο $[2, e+3]$ και για κάθε $x \in [2, e+3]$ είναι $f(x) \geq 0$.

$$\text{Επομένως } E(\Omega) = \int_2^{e+3} f(x) dx.$$

Θέτω $f(x) = 4 \Leftrightarrow x = f^{-1}(u) \Leftrightarrow x = e^u + 2u + 1$ οπότε $dx = (e^u + 2)du$ και $\frac{x}{u} \Big|_0^2 = \frac{e+3}{1}$
γιατί $f(2) = 0$ και $f^{-1}(1) = e + 3$.

$$\text{Άρα } E(\Omega) = \int_0^1 u(e^u + 2)du = \int_0^1 ue^u du + \int_0^1 2u du = [ue^u]_0^1 - \int_0^1 e^u du + [u^2]_0^1 = \\ = e - (e - 1) + 1 = 2.$$

ε) Εφαρμόζουμε Θ.Μ.Τ. για την f στο $[2, x]$ οπότε υπάρχει $\xi \in (2, x)$ τέτοιο ώστε

$$f'(\xi) = \frac{f(x) - f(2)}{x - 2} = \frac{f(x)}{x - 2}. \text{ Αφού η } f \text{ είναι κοίλη τότε η } f' \downarrow \text{ άρα}$$

$$2 < \xi < x \Leftrightarrow f'(2) > f'(\xi) > f'(x) \Leftrightarrow \frac{1}{3} > \frac{f(x)}{x - 2} > f'(x) \stackrel{(x-2) > 0}{\Leftrightarrow} \frac{x - 2}{3} > f(x) > f'(x)(x - 2).$$

215. α) Η $f(x)$ είναι συνεχής στο $(0, +\infty)$ οπότε η συνάρτηση $\int_1^x f(t)dt$ είναι παραγωγίσιμη. Επίσης

η συνάρτηση $\frac{f(t)}{t+1}$ είναι συνεχής στο $(0, +\infty)$ άρα και η συνάρτηση $g(u) = \int_1^u \frac{f(t)}{t+1} dt, u > 0$

είναι παραγωγίσιμη με $g'(u) = \frac{f(u)}{u+1}$ οπότε και η συνάρτηση $\int_1^x g(u)du$ είναι παραγωγίσιμη.

Άρα παραγωγίζοντας στη σχέση $\int_1^x f(t)dt + x \ln \frac{x}{4} = \int_1^x \left(\int_1^u \frac{f(t)}{t+1} dt \right) du + x - 1 - \ln 4$ έχουμε:

$$f(x) + \ln \frac{x}{4} + x \cdot \frac{1}{x} \cdot \frac{1}{4} = \int_1^x \frac{f(t)}{t+1} dt + 1 \Leftrightarrow (1) \quad f(x) + \ln \frac{x}{4} = \int_1^x \frac{f(t)}{t+1} dt$$

και παραγωγίζοντας πάλι έχουμε

$$f'(x) + \frac{1}{x} = \frac{f(x)}{x+1} \Leftrightarrow f'(x) - \frac{f(x)}{x+1} = -\frac{1}{x} \Leftrightarrow \frac{(x+1)f'(x) - f(x)}{(x+1)^2} = -\frac{1}{x(x+1)} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{f(x)}{x+1} \right)' = \frac{1}{x+1} - \frac{1}{x}, \quad x > 0 \Leftrightarrow \left(\frac{f(x)}{x+1} \right)' = (\ln(x+1) - \ln x)' \Leftrightarrow \frac{f(x)}{x+1} = \ln(x+1) - \ln x + c \quad (2).$$

Στη σχέση (1) για $x = 1$ προκύπτει $f(1) = -\ln \frac{1}{4} = \ln 4$ η (2) για $x = 1$ γίνεται

$$\frac{f(1)}{2} = \ln 2 + c \Leftrightarrow \frac{\ln 4}{2} = \ln 2 + c \Leftrightarrow c = 0. \text{ Άρα } \frac{f(x)}{x+1} = \ln(x+1) - \ln x \Leftrightarrow f(x) = (x+1) \ln \frac{x+1}{x}.$$

β) Η f είναι παραγωγίσιμη στο $(0, +\infty)$ με

$$f'(x) = \ln \frac{x+1}{x} + (x+1) \frac{1}{x+1} \left(\frac{x+1}{x} \right)' = \ln \frac{x+1}{x} + \frac{x}{x+1} \cdot \frac{x - x - 1}{x^2} = \ln \frac{x+1}{x} - \frac{1}{x}.$$

Θεωρούμε τη συνάρτηση $\varphi(t) = \ln t$ στο $[x, x+1], x > 0$ η οποία ικανοποιεί τις

προϋποθέσεις του Θ.Μ.Τ. οπότε υπάρχει $\xi \in (x, x+1) : \varphi'(\xi) = \frac{\varphi(x+1) - \varphi(x)}{x+1 - x} \Leftrightarrow$

$$\frac{1}{\xi} = \ln(x+1) - \ln x \Leftrightarrow \frac{1}{\xi} = \ln \frac{x+1}{x}. \text{ Είναι } 0 < x < \xi < x+1 \Leftrightarrow \frac{1}{x} > \frac{1}{\xi} \text{ οπότε}$$

$$\frac{1}{x} > \ln \frac{x+1}{x} \Leftrightarrow \ln \frac{x+1}{x} - \frac{1}{x} < 0 \text{ οπότε } f'(x) < 0 \text{ άρα η } f \downarrow \text{ στο } (0, +\infty). \text{ Είναι}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \left[(x+1) \ln \frac{x+1}{x} \right] = +\infty \text{ γιατί } \lim_{x \rightarrow 0^+} \left[\ln \frac{x+1}{x} \right] = \lim_{x \rightarrow 0^+} \left[\ln \left(1 + \frac{1}{x} \right) \right] = +\infty \text{ και}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[(x+1) \cdot \ln \frac{x+1}{x} \right] \stackrel{0 \cdot (+\infty)}{=} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln \frac{x+1}{x} \stackrel{\left(\frac{0}{0}\right)}{=} \frac{\frac{x}{x+1} \left(-\frac{1}{x^2}\right)}{\frac{1}{x+1}}}{\frac{1}{x+1}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{x+1} = 1, \text{ οπότε}$$

αφού η $f \downarrow$ στο $(0, +\infty)$ το σύνολο τιμών $f(A) = \left(\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x), \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) \right) = (1, +\infty)$.

γ) Η εξίσωση $x+1 = xe^{\frac{2014}{x+1}}$, $x > 0$ γίνεται

$$\frac{x+1}{x} = e^{\frac{2014}{x+1}} \Leftrightarrow \ln \frac{x+1}{x} = \frac{2014}{x+1} \Leftrightarrow (x+1) \ln \frac{x+1}{x} = 2014 \Leftrightarrow f(x) = 2014.$$

Η f είναι \downarrow και $2014 \in f(A)$ οπότε η εξίσωση έχει μοναδική λύση στο $(0, +\infty)$.

δ) Θεωρούμε τη συνάρτηση $h(x) = f(x) - 2f\left(\frac{x+1}{2}\right) + \ln 4$, $x > 0$ η οποία είναι παραγωγίσιμη

στο $(0, +\infty)$ με $h'(x) = f'(x) - 2f'\left(\frac{x+1}{2}\right) \frac{1}{2} = f'(x) - f'\left(\frac{x+1}{2}\right)$. Όμως

$$f''(x) = \left(\ln \frac{x+1}{x} - \frac{1}{x} \right)' = \frac{1}{x+1} \left(\frac{x+1}{x} \right)' + \frac{1}{x^2} = \frac{x}{x+1} \frac{-1}{x^2} + \frac{1}{x^2} = \frac{1}{x^2(x+1)} > 0, \text{ οπότε το πρόσημο}$$

της h' και η μονοτονία της h δίνεται στο διπλανό πίνακα.

Για κάθε $x > 0$ είναι $h(x) \geq h(1) \Leftrightarrow h(x) \geq -f(1) + \ln 4 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow h(x) \geq 0 \Leftrightarrow f(x) + \ln 4 \geq 2f\left(\frac{x+1}{2}\right).$$

	0	1	$+\infty$
h'		-	+
h			

ε) Θεωρούμε τη συνάρτηση

$$\sigma(x) = \int_x^{2014} tf(t)dt - x \int_x^{2014} f(t)dt = x \int_{2014}^x f(t)dt - \int_{2014}^x tf(t)dt \text{ η οποία είναι παραγωγίσιμη}$$

με $\sigma'(x) = \int_{2014}^x f(t)dt + xf(x) - xf(x) = \int_{2014}^x f(t)dt$ και $\sigma''(x) = f(x) > 0$, οπότε η $\sigma'(x)$ είναι \uparrow στο $(0, 2014)$.

Για $0 < x < 2014$ θα είναι $\sigma'(x) < \sigma'(2014) \Leftrightarrow \sigma'(x) < 0$, οπότε $\sigma(x) \downarrow$ στο $(0, 2014]$, ενώ

για $x < 2014$ θα είναι $\sigma(x) > \sigma(2014) \Leftrightarrow \sigma(x) > 0 \Leftrightarrow \int_x^{2014} tf(t)dt > x \int_x^{2014} f(t)dt$.

216. **α)** Επειδή η f είναι συνεχής στο $[0, 2]$ και $2 \in [0, 2]$ η συνάρτηση $\int_2^x f(t)dt$ είναι

παραγωγίσιμη στο $[0,2]$ και αφού $x, f(x)$ είναι παραγωγίσιμες στο $[0,2]$ τότε και η συνάρτηση $f'(x) = xf(x) + \int_2^x f(t)dt$ (1) είναι παραγωγίσιμη στο $[0,2]$ με $f''(x) = f(x) + xf'(x) + f(x) \Leftrightarrow f''(x) = 2f(x) + xf'(x)$.

β) Στην (1) για $x=0$ προκύπτει ότι $f'(0) = \int_2^0 f(t)dt = -\int_0^2 f(t)dt$ επίσης στην (1) για $x=2$ προκύπτει $f'(2) = 2f(2)$. Επειδή η f' είναι παραγωγίσιμη στο $[0,2]$ εφαρμόζοντας Θ.Μ.Τ θα υπάρχει τουλάχιστον ένα $\rho \in (0,2)$ τέτοιο ώστε

$$f''(\rho) = \frac{f'(2) - f'(0)}{2} \Leftrightarrow f''(\rho) = \frac{2f(2) + \int_0^2 f(t)dt}{2} \Leftrightarrow f''(\rho) = f(2) + \frac{1}{2} \int_0^2 f(t)dt.$$

γ) Είναι $f'(x) = xf(x) + \int_2^x f(t)dt \Leftrightarrow f'(x) = \left(x \int_2^x f(t)dt\right)'$, άρα $f(x) = x \int_2^x f(t)dt + c$ (2).

Για $x=0$ είναι $f(0) = c$, ενώ για $x=2$ είναι $f(2) = c$. Άρα $f(0) = f(2)$.

δ) Αφού η f παρουσιάζει ακρότατο στο $x_0 \in (0,2)$ τότε από Θ. Fermat ισχύει ότι

$$f'(x_0) \stackrel{(1)}{=} 0 \Leftrightarrow x_0 f(x_0) + \int_2^{x_0} f(t)dt = 0 \Leftrightarrow \int_2^{x_0} f(t)dt = -x_0 f(x_0) \quad (3).$$

Στην (2) για $x = x_0$ και $c = f(2)$ έχουμε

$$f(x_0) = x_0 \int_2^{x_0} f(t)dt + f(2) \Leftrightarrow f(x_0) - f(2) = x_0 \int_2^{x_0} f(t)dt \Leftrightarrow \frac{f(x_0) - f(2)}{x_0} = \int_2^{x_0} f(t)dt \quad (4).$$

Από (3), (4) έχουμε

$$\frac{f(x_0) - f(2)}{x_0} = -x_0 f(x_0) \Leftrightarrow f(x_0) - f(2) = -x_0^2 f(x_0) \Leftrightarrow f(x_0)(x_0^2 + 1) = f(2) \Leftrightarrow f(x_0) = \frac{f(2)}{x_0^2 + 1}.$$

217. **α)** Η συνάρτηση $\frac{e^t + e^{t^2}}{e^t + 1}$ είναι συνεχής στο \mathbb{R} , ως πράξεις συνεχών συναρτήσεων και οι

συναρτήσεις $-x$ και x ορίζονται στο \mathbb{R} οπότε και η συνάρτηση $f(x) = \int_{-x}^x \frac{e^t + e^{t^2}}{e^t + 1} dt$ έχει

πεδίο ορισμού το \mathbb{R} . Επίσης $f(-x) = \int_{-(-x)}^{-x} \frac{e^t + e^{t^2}}{e^t + 1} dt = -\int_{-x}^x \frac{e^t + e^{t^2}}{e^t + 1} dt = -f(x)$ οπότε η f είναι περιπτή στο \mathbb{R} .



β) Έχουμε $f(x) = \int_0^x \frac{e^t + e^{t^2}}{e^t + 1} dt - \int_0^{-x} \frac{e^t + e^{t^2}}{e^t + 1} dt$ η οποία είναι παραγωγίσιμη στο \mathbb{R} με

$$f'(x) = \frac{e^x + e^{x^2}}{e^x + 1} - \frac{e^{-x} + e^{x^2}}{e^{-x} + 1}(-x)' = \frac{e^x + e^{x^2}}{e^x + 1} + \frac{1}{e^x + 1} + \frac{e^{x^2}}{e^x + 1} = \frac{e^x + e^{x^2} + e^x e^{x^2} + 1}{e^x + 1} = \frac{(e^{x^2} + 1)(e^x + 1)}{e^x + 1} = e^{x^2} + 1,$$

γ) Είναι $f'(x) = e^{x^2} + 1 > 0$ οπότε η $f \uparrow$ στο \mathbb{R} και $f(0) = 0$.

Άρα για $x < 0 \Leftrightarrow f(x) < f(0) \Leftrightarrow f(x) < 0$ ενώ για $x > 0 \Leftrightarrow f(x) > f(0) \Leftrightarrow f(x) > 0$.

δ) Επίσης $f''(x) = (1 + e^{x^2})' = e^{x^2} \cdot 2x$ και η f είναι κοίλη στο $(-\infty, 0]$, κυρτή στο $[0, +\infty)$ και παρουσιάζει σημείο καμπής στο $(0, 0)$.

	0	
f''	-	+
f		

ε) i. Αφού η $f(t)$ είναι συνεχής στο \mathbb{R} και η x^2 είναι παραγωγίσιμη

στο \mathbb{R} τότε και η $g(x) = \int_1^{x^2} f(t) dt$ είναι παραγωγίσιμη στο \mathbb{R}

$$\text{με } g'(x) = f(x^2) \cdot 2x. \text{ Είναι } \int_0^1 g(x) dx = \int_0^1 (x') g(x) dx = [xg(x)]_0^1 - \int_0^1 xg'(x) dx = g(1) - \int_0^1 x2xf(x^2) dx = -\int_0^1 x2xf(x^2) dx.$$

$$\text{Θέτω } x^2 = u \text{ οπότε } x = \sqrt{u} \text{ και } du = 2x dx \text{ και } \begin{array}{c|c|c} x & 0 & 1 \\ \hline u & 0 & 1 \end{array}$$

$$\text{Οπότε } \int_0^1 g(x) dx = -\int_0^1 \sqrt{u} f(u) du \Leftrightarrow \int_0^1 g(x) dx + \int_0^1 \sqrt{x} f(x) dx = 0 \quad (1).$$

ii. Θεωρούμε τη συνάρτηση $\varphi(x) = \int_0^x g(t) dt + \int_0^x \sqrt{t} f(t) dt$ η οποία είναι παραγωγίσιμη στο

$$[0, 1] \text{ με } \varphi'(x) = g(x) + \sqrt{x} f(x) \text{ και } \varphi(0) = 0, \varphi(1) = \int_0^1 g(t) dt + \int_0^1 \sqrt{t} f(t) dt = 0.$$

Άρα $\varphi(0) = \varphi(1)$ και από Θ. Rolle υπάρχει $\xi \in (0, 1)$ τέτοιο ώστε

$$\varphi'(\xi) = 0 \Leftrightarrow g(\xi) + \sqrt{\xi} f(\xi) = 0 \Leftrightarrow f(\xi) = -\frac{g(\xi)}{\sqrt{\xi}}. \text{ Η } \varphi' \text{ είναι παραγωγίσιμη στο } (0, 1) \text{ με}$$

$$\varphi''(x) = g'(x) + \frac{1}{2\sqrt{x}} f(x) + \sqrt{x} f'(x) = 2xf(x^2) + \frac{1}{2\sqrt{x}} f(x) + \sqrt{x}(e^{x^2} + 1) > 0 \text{ στο } (0, 1) \text{ γιατί}$$

για $x > 0$ $f(x) > 0$. Άρα η φ' είναι \uparrow στο $(0, 1)$ οπότε το $\xi \in (0, 1)$ είναι μοναδικό.

218. α) Είναι $H(x) = \int_0^{\ln x} \frac{e^t}{e^t + 2x} dt$ και θέτουμε $u = e^t + 2x$ οπότε $du = e^t dt$ και $\begin{array}{c|c|c} x & 0 & \ln x \\ \hline u & 1+2x & 3x \end{array}$

$$\text{Άρα } H(x) = \int_{1+2x}^{3x} \frac{du}{u} = [\ln|u|]_{1+2x}^{3x} = \ln 3x - \ln(2x+1) = \ln \frac{3x}{2x+1}.$$

β) Η $H(x)$ είναι παραγωγίσιμη στο $(0, +\infty)$ με

$$H'(x) = \frac{1}{\frac{3x}{2x+1}} \left(\frac{3x}{2x+1} \right)' = \frac{2x+1}{3x} \frac{3(2x+1) - 2 \cdot 3x}{(2x+1)^2} = \frac{1}{x(2x+1)} > 0,$$

οπότε η $H(x) \uparrow$ στο $(0, +\infty)$.

γ) Παρατηρούμε ότι $H(1)=0$ και αφού η $H(x)$ είναι \uparrow τότε $0 < x < 1$ θα είναι

$$H(x) < H(1) \Leftrightarrow H(x) < 0, \text{ ενώ για } x > 1 \text{ θα είναι } H(x) > H(1) \Leftrightarrow H(x) > 0.$$

δ) Η $H(x)$ είναι συνεχής και $H(x) < 0$ για $x \in [\lambda, 1] \subseteq [0, 1]$ οπότε

$$\begin{aligned} E(\lambda) &= -\int_{\lambda}^1 H(x) dx = \int_1^{\lambda} (x)' H(x) dx = [xH(x)]_1^{\lambda} - \int_1^{\lambda} xH'(x) dx = \\ &= \lambda H(\lambda) - \int_1^{\lambda} x \frac{1}{x(2x+1)} dx = \lambda \ln \frac{3\lambda}{2\lambda+1} - [\ln(2x+1)]_1^{\lambda} = \\ &= \lambda \ln 3\lambda - \lambda \ln(2\lambda+1) - \ln(2\lambda+1) + \ln 3 = \lambda \ln 3\lambda - (\lambda+1) \ln(2\lambda+1) + \ln 3. \end{aligned}$$

ε) Για $e < t \leq x$ επειδή η $H(x) \uparrow$ θα έχουμε

$$\begin{aligned} 0 < H(t) \leq H(x) &\Leftrightarrow \frac{1}{H(t)} \geq \frac{1}{H(x)} \Leftrightarrow \frac{1}{H(t)} - \frac{1}{H(x)} \geq 0, \text{ οπότε } \int_e^x \left(\frac{1}{H(t)} - \frac{1}{H(x)} \right) dt > 0, \text{ αφού} \\ \frac{1}{H(t)} - \frac{1}{H(x)} &\text{ δεν είναι παντού } 0, \text{ άρα } \int_e^x \frac{1}{H(t)} dt - \frac{1}{H(x)} \int_e^x dt \Leftrightarrow \int_e^x \frac{1}{H(t)} dt - \frac{x-e}{H(x)} > 0. \end{aligned}$$

219. α) Για να ορίζεται η $\varphi(x) = \frac{\int_0^x th(t) dt}{\int_0^x h(t) dt}$ πρέπει $\int_0^x h(t) dt \neq 0$.

Για κάθε $t \in \mathbb{R}$ είναι $h(t) > 0$, οπότε και για $x > 0$ θα είναι $\int_0^x h(t) dt > 0$,

ενώ για $x < 0$ θα είναι $\int_x^0 h(t) dt > 0 \Leftrightarrow \int_0^x h(t) dt < 0$.

Επίσης για $x = 0$ έχουμε $\int_0^0 h(t) dt = 0$. Άρα το πεδίο ορισμού της φ είναι

$$D_{\varphi} = (-\infty, 0) \cup (0, +\infty).$$

β) Αφού οι συναρτήσεις $h(t)$ και $th(t)$ είναι συνεχής τότε και οι συναρτήσεις $\int_0^x h(t) dt$ και

$\int_0^x th(t) dt$ είναι παραγωγίσιμες. Οπότε και $\varphi(x)$ είναι παραγωγίσιμη με

$$\varphi'(x) = \frac{xh(x) \int_0^x h(t) dt - h(x) \int_0^x th(t) dt}{\left(\int_0^x h(t) dt \right)^2} = \frac{h(x) \left[x \int_0^x h(t) dt - \int_0^x th(t) dt \right]}{\left(\int_0^x h(t) dt \right)^2} = \frac{h(x)w(x)}{\left(\int_0^x h(t) dt \right)^2}.$$

Όπου $w(x) = x \int_0^x h(t) dt - \int_0^x th(t) dt$ και $w'(x) = xh(x) + \int_0^x h(t) dt - xh(x) = \int_0^x h(t) dt$.

Άρα για $x < 0$ είναι $w'(x) < 0$, ενώ για $x > 0$ είναι $w'(x) > 0$.

Άρα για κάθε $x \in \mathbb{R}$ $w(x) \geq w(0) \Leftrightarrow w(x) \geq 0$ και αφού και

$h(x) > 0$ τότε $\varphi'(x) > 0$ άρα η φ είναι \uparrow , σε καθένα από τα

διαστήματα $(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$.

	$-\infty$	0	$+\infty$
w'		-	+
w			

γ) Για $x \neq 0$ η $\varphi(x) = \frac{\int_0^x th(t)dt}{\int_0^x h(t)dt}$ είναι συνεχής ως πηλίκο συνεχών. Επίσης

$$\lim_{x \rightarrow 0} \varphi(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\int_0^x th(t)dt}{\int_0^x h(t)dt} \stackrel{\left(\frac{0}{0}\right)}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{xh(x)}{h(x)} = 0 = \varphi(0) \text{ οπότε η } \varphi \text{ είναι συνεχής σ' όλο το } \mathbb{R}.$$

δ) Η συνάρτηση f είναι συνεχής στο \mathbb{R} και $f(x) \neq 0$ άρα η f διατηρεί σταθερό πρόσημο στο \mathbb{R} . Έστω $f(x) > 0$ αφού $\varphi \uparrow$ στο \mathbb{R} και $3 > 0 > -2$ τότε $\varphi(3) > 0 > \varphi(-2)$

άρα $\int_{\varphi(-2)}^{\varphi(3)} f(x)dx > 0 \Leftrightarrow \int_{\varphi(3)}^{\varphi(-2)} f(x)dx < 0$ (άτοπο). Οπότε $f(x) < 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

ε) Θεωρούμε τη συνάρτηση $K(x) = (\beta - x) \int_{\beta}^x g(e^t) dt - (x - \alpha) f(e^x) g(x)$ η οποία είναι συνεχής στο $[\alpha, \beta]$ και $K(\alpha) = (\beta - \alpha) \int_{\beta}^{\alpha} g(e^t) dt$, $K(\beta) = -(\beta - \alpha) f(e^{\beta}) g(\beta)$, οπότε

$$\begin{aligned} K(\alpha) \cdot K(\beta) &= -(\beta - \alpha)^2 \int_{\beta}^{\alpha} g(e^t) dt \cdot f(e^{\beta}) g(\beta) = (\beta - \alpha)^2 f(e^{\beta}) g(\beta) K(\alpha) = \\ &= (\beta - \alpha) \int_{\alpha}^{\beta} g(e^t) dt < 0 \text{ γιατί αφού } f(x) < 0 \text{ τότε } f(e^{\beta}) < 0. \end{aligned}$$

Επίσης η g είναι συνεχής και $g(x) \neq 0$ οπότε η g θα διατηρεί πρόσημο.

Άρα $g(\beta) \cdot \int_{\alpha}^{\beta} g(e^t) dt > 0$ αφού οι αριθμοί $g(\beta)$, $\int_{\alpha}^{\beta} g(e^t) dt$ είναι ομόσημοι. Οπότε από Θ.

Bolzano υπάρχει $\xi \in (\alpha, \beta) \subseteq \mathbb{R}$ τέτοιο ώστε $K(\xi) = 0 \Leftrightarrow \frac{\int_{\beta}^{\xi} g(e^t) dt}{\xi - \alpha} = \frac{f(e^{\xi}) g(\xi)}{\beta - \xi}$

$$\text{οπότε } \varphi \left(\frac{\int_{\beta}^{\xi} g(e^t) dt}{\xi - \alpha} \right) = \varphi \left(\frac{f(e^{\xi}) g(\xi)}{\beta - \xi} \right).$$

220. α) Επειδή η g είναι συνεχής στο $x_0 = 2$ τότε $\lim_{x \rightarrow 2} g(x) = g(2)$ (1).

Αφού η $f(t)$ είναι συνεχής τότε η συνάρτηση $\int_2^x f(t) dt$ είναι παραγωγίσιμη.

Οπότε $\lim_{x \rightarrow 2} g(x) = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\int_2^x f(t) dt}{x-2} \stackrel{\left(\frac{0}{0}\right)}{=} \lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x)}{1} = f(2) = 2$. Άρα από την (1) $g(2) = 2$,

δηλ. $\lim_{t \rightarrow 2} \left[\frac{f(t)-2}{t-2} + f(t) \right] = 2$. Έστω $h(t) = \frac{f(t)-2}{t-2} + f(t) \Leftrightarrow \frac{f(t)-2}{t-2} = h(t) - f(t)$

άρα $\lim_{t \rightarrow 2} \frac{f(t)-2}{t-2} = \lim_{t \rightarrow 2} [h(t) - f(t)] = 2 - 2 = 0$, άρα $f'(2) = 0$.

β) Έχουμε $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{g(x) - g(2)}{x-2} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\frac{\int_2^x f(t) dt}{x-2} - 2}{x-2} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\int_2^x f(t) dt - 2(x-2)}{(x-2)^2} \stackrel{\left(\frac{0}{0}\right)}{=} \\ = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x) - 2}{2(x-2)} = \frac{1}{2} f'(2) = 0$, οπότε $g'(2) = 0$.

γ) Επειδή η f είναι κυρτή, η f' είναι \uparrow στο $[2, +\infty)$ και αφού $f'(2) = 0$ τότε το 2 είναι μοναδική ρίζα της εξίσωσης $f'(x) = 0$. Για $x > 2$ θα είναι $f'(x) > f'(2) \Leftrightarrow f'(x) > 0$ άρα η f είναι \uparrow στο $[2, +\infty)$.

$$\delta) \text{ Για } x > 2 \text{ είναι } g'(x) = \left(\frac{\int_2^x f(t) dt}{x-2} \right)' = \frac{f(x)(x-2) - \int_2^x f(t) dt}{(x-2)^2}.$$


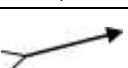
$$\text{Εστω } \varphi(x) = f(x)(x-2) - \int_2^x f(t) dt \text{ είναι } \varphi(2) = 0$$

και $\varphi'(x) = f'(x)(x-2) + f(x) - f(x) = f'(x)(x-2) > 0$ για $x > 2$ οπότε η φ \uparrow δηλαδή για $x > 2$ είναι $\varphi(x) > \varphi(2) \Leftrightarrow \varphi(x) > 0$ άρα $g'(x) > 0$ οπότε η g \uparrow στο $[2, +\infty)$.

ε) Για $x \geq 2$ έχουμε $(x+6) \int_2^{2x+5} f(t) dt < (2x+3) \int_2^{2x+8} f(t) dt \Leftrightarrow \frac{\int_2^{2x+5} f(t) dt}{2x+3} < \frac{\int_2^{x+8} f(t) dt}{x+6} \Leftrightarrow$
 $\Leftrightarrow \frac{\int_2^{2x+5} f(t) dt}{2x+5-2} < \frac{\int_2^{x+8} f(t) dt}{x+8-6} \Leftrightarrow g(2x+5) < g(x+8)$ και επειδή g \uparrow $2x+5 < x+8 \Leftrightarrow x < 3$.
 Τελικά $x \in [2, 3)$.

221. α) Η f είναι παραγωγίσιμη στο \mathbb{R} με $f'(x) = e^x - 4$.

Οπότε $f'(x) > 0 \Leftrightarrow e^x > 4 \Leftrightarrow x > \ln 4$. Το πρόσημο της f' και η μονοτονία της f δίνονται στο διπλανό πίνακα.
 Η f παρουσιάζει ελάχιστο για $x = \ln 4$
 το $f(\ln 4) = e^{\ln 4} - 4 \ln 4 = 4 - 4 \ln 4 = 4(1 - \ln 4) < 0$.

	$-\infty$	$\ln 4$	$+\infty$
f'	-		+
f			

β) Είναι $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (e^x - 4x) = +\infty$ αφού $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0$ και

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (e^x - 4x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[e^x \left(1 - \frac{4x}{e^x} \right) \right] = +\infty, \text{ αφού } \lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = +\infty \text{ και}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{4x}{e^x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{4}{e^x} = 0. \text{ Επίσης } f(0) = e^0 = 1 > 0, f\left(\frac{e}{4}\right) = e^{\frac{e}{4}} - e < 0 \text{ αφού } e < 4 \text{ και}$$

$$\frac{e}{4} > 1 \Leftrightarrow e^{\frac{e}{4}} < e^1 \text{ οπότε } f(0) \cdot f\left(\frac{e}{4}\right) < 0 \text{ άρα σύμφωνα με το } \Theta. \text{ Bolzano έχει μία ρίζα}$$

$\rho_1 \in \left(0, \frac{e}{4}\right] \subseteq (-\infty, \ln 4]$ η οποία αφού η f είναι \downarrow στο $(-\infty, \ln 4]$ η ρίζα ρ_1 είναι μοναδική σ' αυτό το διάστημα. Επίσης $f(\ln 4) = 4 - 4 \ln 4 = 4(1 - \ln 4) < 0$, $f(3) = e^3 - 12 > 0$ αφού

$e^3 \approx 19,6$ και η f \uparrow στο $[\ln 4, +\infty)$ άρα από $\Theta. \text{ Bolzano}$ υπάρχει ρίζα $\rho_2 \in (\ln 4, 3)$ είναι μοναδική. Άρα η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει ακριβώς 2 ρίζες.

γ) Είναι $h(x) = \int_1^{\ln x} \frac{e^u (e^u + 4u)}{e^u - 4u} du$. Η συνάρτηση $\frac{e^u (e^u + 4u)}{e^u - 4u}$ ορίζεται στο

$$(-\infty, \rho_1) \cup (\rho_1, \rho_2) \cup (\rho_2, +\infty) \text{ όπου } 0 < \rho_1 < \frac{e}{4} < 1 < \ln 4 < \rho_2.$$

Αφού $1 \in (p_1, p_2)$ πρέπει $p_1 < \ln x < p_2 \Leftrightarrow e^{p_1} < x < e^{p_2}$ (1). Όμως

$$f(p_1) = f(p_2) = 0 \Leftrightarrow e^{p_1} - 4p_1 = e^{p_2} - 4p_2 = 0 \Leftrightarrow e^{p_1} = 4p_1 \text{ και } e^{p_2} = 4p_2, \text{ άρα η (1) γίνεται}$$

$4p_1 < x < 4p_2$, οπότε το πεδίο ορισμού της h είναι $D_h = (4p_1, 4p_2)$.

δ) Η h είναι παραγωγίσιμη στο D_h με $h'(x) = \frac{e^{\ln x} (e^{\ln x} + 4 \ln x)}{e^{\ln x} - 4 \ln x} \cdot \frac{1}{x} = \frac{x + 4 \ln x}{x - 4 \ln x}$

Επίσης

$$h''(x) = \frac{\left(1 + \frac{4}{x}\right)(x - 4 \ln x) - \left(1 - \frac{4}{x}\right)(x + 4 \ln x)}{(x - 4 \ln x)^2} = \frac{8(1 - \ln x)}{(x - 4 \ln x)^2}$$

Είναι $h''(x) > 0 \Leftrightarrow 1 - \ln x > 0 \Rightarrow x < e$. Οπότε η h έχει

σημείο καμπής στο $x_0 = e$ το $h(e) = 0$

	$4p_1$	e	$4p_2$
h''	+		-
h'	↗		↘
h	⤵		⤵

ε) Από τον προηγούμενο πίνακα διαπιστώνουμε ότι για κάθε

$$x \in (4p_1, 4p_2) \text{ θα είναι } h'(x) \leq h'(e) = \frac{e+4}{e-4} < 0 \text{ άρα } h'(x) < 0 \text{ οπότε η } h \downarrow.$$

στ) Εφαρμόζουμε ΘΜΤ για την h στο $[\alpha, \beta]$ οπότε υπάρχει $\xi \in (\alpha, \beta)$ τέτοιο ώστε

$$h'(\xi) = \frac{h(\beta) - h(\alpha)}{\beta - \alpha}, \text{ όμως } h'(\xi) \leq h'(e) \Leftrightarrow \frac{h(\beta) - h(\alpha)}{\beta - \alpha} \leq \frac{e+4}{e-4} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (e-4)(h(\beta) - h(\alpha)) \geq (e+4)(\beta - \alpha) \Leftrightarrow (e-4) \int_{\ln \alpha}^{\ln \beta} \frac{e^u (e^u + 4u)}{e^4 - 4u} du \geq (e+4)(\beta - \alpha).$$

222. α) Επειδή $f(\alpha) = f(\beta) = 0$ και η f είναι συνεχής στο $[\alpha, \beta]$ και παραγωγίσιμη στο (α, β) , λόγω του θ. Rolle υπάρχει $\xi \in (\alpha, \beta)$ τέτοιο ώστε $f'(\xi) = 0$. Επειδή η f είναι κυρτή, η f' είναι γνησίως αύξουσα, οπότε $\alpha < \xi < \beta \Leftrightarrow f'(\alpha) < f'(\xi) < f'(\beta) \Leftrightarrow f'(\alpha) < 0 < f'(\beta)$, άρα $f'(\alpha)f'(\beta) < 0$.

β) Για κάθε $\alpha < x < \xi$, επειδή η f' είναι γνησίως αύξουσα, είναι:

$$f'(\alpha) < f'(x) < f'(\xi) \Leftrightarrow f'(\alpha) < f'(x) < 0, \text{ άρα η } f \text{ είναι γνησίως φθίνουσα στο } [\alpha, \xi].$$

Για κάθε $\alpha < x \leq \xi$, είναι $f(\alpha) > f(x) \geq f(\xi)$, δηλαδή $f(x) < f(\alpha) = 0$.

Για κάθε $\xi < x < \beta$, επειδή η f' είναι γνησίως αύξουσα, είναι:

$$f'(\xi) < f'(x) < f'(\beta) \Leftrightarrow 0 < f'(x) < f'(\beta), \text{ άρα η } f \text{ είναι γνησίως αύξουσα στο } [\xi, \beta].$$

Για κάθε $\xi < x < \beta$ είναι $f(\xi) < f(x) < f(\beta) = 0$. Άρα $f(x) < 0$ για κάθε $x \in (\alpha, \beta)$.

γ) Εστω ότι $f(x) < f'(x)$ για κάθε $x \in (\alpha, \beta)$. Τότε $f'(x) - f(x) > 0 \Leftrightarrow e^{-x}f'(x) - e^{-x}f(x) > 0$,

$$\text{άρα } [e^{-x}f(x)]' > 0. \text{ Εστω } g(x) = e^{-x}f(x), x \in [\alpha, \beta]. \text{ Είναι } g'(x) = [e^{-x}f(x)]' > 0,$$

άρα η g είναι γνησίως αύξουσα στο $[\alpha, \beta]$. Επειδή $\alpha < \beta$, είναι $g(\alpha) < g(\beta) \Leftrightarrow$

$$e^{-\alpha}f(\alpha) < e^{-\beta}f(\beta) \Leftrightarrow 0 < 0 \text{ που είναι αδύνατο.}$$

Άρα υπάρχει $x_0 \in (\alpha, \beta)$ τέτοιο ώστε $f(x_0) \geq f'(x_0)$.

δ) Αν $\int_{\alpha}^{\beta} f(x) dx = \lambda \in \mathbb{R}$, τότε: $\int_{\alpha}^{\beta} f(t) \left(\int_{\alpha}^{\beta} f(x) dx \right) dt + \int_{\alpha}^{\beta} f(x) dx - 2 = 0 \Leftrightarrow$
 $\Leftrightarrow \int_{\alpha}^{\beta} f(t) \lambda dt + \lambda - 2 = 0 \Leftrightarrow \lambda \int_{\alpha}^{\beta} f(t) dt + \lambda - 2 = 0 \Leftrightarrow \lambda \cdot \lambda + \lambda - 2 = 0 \Leftrightarrow \lambda^2 + \lambda - 2 = 0 \Leftrightarrow$
 $\lambda = -2$ ή $\lambda = 1$. Επειδή $f(x) < 0$ για κάθε $x \in (\alpha, \beta)$ θα είναι και $\int_{\alpha}^{\beta} f(x) dx < 0$,
 άρα $\lambda = \int_{\alpha}^{\beta} f(x) dx = -2$. Το ζητούμενο εμβαδόν είναι: $E(\Omega) = -\int_{\alpha}^{\beta} f(x) dx = 2$

ε) i. Έστω $F(x) = \int_{\alpha}^x f(t) dt$, $x \in [\alpha, \beta]$. Η f είναι συνεχής στο $[\alpha, \beta]$, άρα η F είναι

παραγωγίσιμη, οπότε και συνεχής στο διάστημα αυτό. Από το θεώρημα μέσης τιμής, υπάρχει $\xi \in (\alpha, \beta)$ τέτοιο ώστε

$$F'(\xi) = \frac{F(\beta) - F(\alpha)}{\beta - \alpha} = \frac{\int_{\alpha}^{\beta} f(x) dx}{4} = \frac{-2}{4} = -\frac{1}{2} \Leftrightarrow 2f(\xi) + 1 = 0.$$

ii. Έστω $g(u) = \int_{\alpha}^u F(t) dt$, $u \in [\alpha, \beta]$.

Λόγω του Θ.Μ.Τ υπάρχουν $\xi_1 \in (x, x+1)$ και $\xi_2 \in (x+1, x+2)$ τέτοια ώστε

$$g'(\xi_1) = \frac{g(x+1) - g(x)}{x+1-x} \Leftrightarrow F(\xi_1) = \int_{\alpha}^{x+1} F(t) dt - \int_{\alpha}^x F(t) dt = \int_x^{x+1} F(t) dt \text{ και}$$

$$g'(\xi_2) = \frac{g(x+2) - g(x+1)}{x+2-x-1} \Leftrightarrow F(\xi_2) = \int_{\alpha}^{x+2} F(t) dt - \int_{\alpha}^{x+1} F(t) dt = \int_{x+1}^{x+2} F(t) dt$$

Είναι $g'(u) = F(u)$ και $g''(u) = F'(u) = f(u) < 0$, άρα η g' είναι γνησίως φθίνουσα στο

$[x, x+2]$, $x \in [\alpha, \alpha+4]$, άρα: $\xi_1 < \xi_2 \stackrel{g' \downarrow}{\Leftrightarrow} g'(\xi_1) > g'(\xi_2) \Leftrightarrow \int_x^{x+1} F(t) dt > \int_{x+1}^{x+2} F(t) dt$.