180. **α)** Αφού η συνάρτηση $\frac{1}{1+t^4}$ είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$ τότε η συνάρτηση $f(x)=\int_0^x \frac{1}{1+t^4}dt$ είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με $f'(x)=\frac{1}{1+x^4}>0$ οπότε η $f\uparrow$ στο $\mathbb{R}$.

Επίσης $f''(x)=\frac{-4x^3}{\left(1+x^4\right)^2}$ οπότε $f''(x)>0 \Leftrightarrow x<0$.

x		0	
f′	+		+
f″	+		−
f			

Άρα η f είναι κυρτή στο $(-\infty,0]$ και κοίλη στο $[0,+\infty)$ και παρουσιάζει σημείο καμπής το $(0,0)$.

β) Εφαρμόζουμε Θ.Μ.Τ. για την f στο $[1,2]$ οπότε υπάρχει $\xi\in(1,2)$ τέτοιο ώστε

$$f'(\xi)=\frac{f(2)-f(1)}{2-1} \Leftrightarrow \frac{1}{1+\xi^4}=\int_0^2\frac{1}{1+t^4}dt-\int_0^1\frac{1}{1+t^4}dt \Leftrightarrow \frac{1}{1+\xi^4}=\int_1^2\frac{1}{1+t^4}dt \quad (1).$$

Είναι $1<\xi<2 \Leftrightarrow 1<\xi^4<16 \Leftrightarrow 2<1+\xi^4<17 \Leftrightarrow \frac{1}{2}>\frac{1}{1+\xi^4}>\frac{1}{17}$,

άρα από $(1) \Rightarrow \frac{1}{17}<\int_1^2\frac{1}{1+t^4}dt<\frac{1}{2}$.

γ) Είναι $f(0)=0$ και $f'(0)=1$ οπότε η εφαπτομένη της C_f στο $x_0=0$ είναι

$$y-f(0)=f'(0)(x-0) \Leftrightarrow y-0=1(x-0) \Leftrightarrow y=x$$

δ) Αφού η $f\uparrow$ στο $\mathbb{R}$ τότε για $x>0$ θα είναι $f(x)>f(0) \Leftrightarrow f(x)>0$. Οπότε $f(x)>0$ για κάθε $x\in[2,4]$. Επίσης αφού η f είναι κοίλη στο $(0,+\infty)$ τότε σε κάθε σημείο η εφαπτομένη θα είναι πάνω από τη C_f με εξαίρεση το σημείο επαφής. Άρα για $x\geq 0$ θα είναι $f(x)\leq x$ και η ισότητα ισχύει μόνο για $x=0$. Άρα για $x>0$ θα είναι $f(x)<x$ (2). Το ζητούμε εμβαδό

$E=\int_2^4 f(x)dx$. Από τη (2) έχουμε $\int_2^4 f(x)dx<\int_2^4 xdx \Leftrightarrow E<\left[\frac{x^2}{2}\right]_2^4 \Leftrightarrow E<6$.

181. **α)** Για $x=y=1$, $f(1)=f(1)+f(1) \Leftrightarrow f(1)=0$.

β) $$\lim_{y\to 1}\frac{f(xy)-f(x)}{xy-x}=\lim_{y\to 1}\frac{x^2f(y)+y^2f(x)-f(x)}{x(y-1)}=\lim_{y\to 1}\left[x\frac{f(y)}{y-1}+\frac{f(x)\left(y^2-1\right)}{x(y-1)}\right]=$$

$$=xf'(1)+2\frac{f(x)}{x}=\frac{2f(x)}{x}+x.$$

γ) $$f'(x_0)=\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\overset{x=x_0h}{\underset{h\to 1}{=}}\lim_{h\to 1}\frac{f(x_0h)-f(x_0)}{x_0h-x_0}\overset{(\beta)}{=}\frac{2f(x_0)}{x_0}+x_0$$

άρα $f'(x)=\frac{2f(x)}{x}+x \Leftrightarrow xf'(x)=2f(x)+x^2$ και για $x>0$ $x^2f'(x)=2xf(x)+x^3$.

δ) $$\frac{x^2f'(x)-2xf(x)}{x^4}=\frac{1}{x} \Rightarrow \left(\frac{f(x)}{x^2}\right)'=(\ln x)' \Leftrightarrow \frac{f(x)}{x^2}=\ln x+c \overset{f(1)=0}{\Rightarrow} c=0 \text{ άρα } f(x)=x^2\ln x.$$

ε) Για $\lambda>1$ το ζητούμενο εμβαδό είναι:

$$E(\lambda)=\int_1^{\lambda} f(x)dx=\int_1^{\lambda}\ln x\left(\frac{x^3}{3}\right)' dx=\left[\frac{x^3}{3}\ln x\right]_1^{\lambda}-\int_1^{\lambda}\frac{1}{\cancel{x}}\frac{x^{\cancel{3}2}}{3}dx=\frac{\lambda^3\ln\lambda}{3}-\left[\frac{x^3}{3}\right]_1^{\lambda}\Leftrightarrow$$

$$E(\lambda)=\frac{\lambda^3\ln\lambda-\lambda^3+1}{3}=\frac{\lambda^3(\ln\lambda-1)+1}{3}.\ \text{Άρα}\ \lim_{\lambda\to+\infty}E(\lambda)=\lim_{\lambda\to+\infty}\frac{\lambda^3(\ln\lambda-1)+1}{3}=+\infty.$$

182. **α)** Είναι $f(g(x))\ge g(x)\Leftrightarrow f(g(x))-g(x)\ge 0\quad(1)$

Εστω $h(x)=f(g(x))-g(x)$, $x\in\mathbb{R}$. Παρατηρούμε ότι $h(3)=f(g(3))-g(3)=f(0)=0$, οπότε η (1) γίνεται: $h(x)\ge h(3)$. Δηλαδή η συνάρτηση h παρουσιάζει ελάχιστο στο $x_0=3$. Επειδή το $x_0=3$ είναι στο εσωτερικό του πεδίου ορισμού της h και η h είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με $h'(x)=f'(g(x))g'(x)-g'(x)$, λόγω του θεωρήματος Fermat είναι:

$h'(3)=0\Leftrightarrow f'(g(3))g'(3)-g'(3)=0\Leftrightarrow g'(3)\left[f'(0)-1\right]=0\quad(2)$.

Επειδή $f'(x)g'(x)>0$ τα $f'(x)$ και $g'(x)$ είναι ομόσημοι, άρα $g'(3)\neq 0$ και η (2) γίνεται: $f'(0)-1=0\Leftrightarrow f'(0)=1$.

β) Για κάθε $x\in(1,2)$ είναι $\dfrac{f(1821)}{x-1}+\dfrac{1}{x-2}=0\Leftrightarrow f(1821)(x-2)+x-1=0$.

Εστω $g(x)=f(1821)(x-2)+x-1,\ x\in[1,2]$.

Είναι $g(1)=f(1821)(1-2)+1-1=-f(1821)$ και $g(2)=f(1821)(2-2)+2-1=1>0$.

Επειδή $f'(x)g'(x)>0$, είναι $f'(x)\neq 0$ και επειδή η f' είναι συνεχής, θα διατηρεί σταθερό πρόσημο. Επειδή $f'(0)=1>0$, είναι $f'(x)>0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$, άρα η f είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$. Επειδή $1821>0$, είναι $f(1821)>f(0)=0$, άρα $g(1)<0$ και $g(1)g(2)<0$. Επειδή η g είναι συνεχής στο $[1,2]$, λόγω του θεωρήματος Bolzano, η εξίσωση $g(x)=0\Leftrightarrow f(1821)(x-2)+x-1=0$, έχει τουλάχιστον μία ρίζα στο $(1,2)$, οπότε και η εξίσωση $\dfrac{f(1821)}{x-1}+\dfrac{1}{x-2}=0$ έχει τουλάχιστον μια ρίζα στο $(1,2)$.

γ) Για κάθε $x\ge 0 \overset{f\uparrow}{\Leftrightarrow} f(x)\ge f(0)=0$. Το εμβαδόν του χωρίου που ορίζεται από τη γραφική παράσταση της f, τους άξονες και την ευθεία $x=1$ είναι $E=\int_0^1 f(x)dx$, άρα $\int_0^1 f(x)dx=1821$. Εστω $F(x)=\int_0^x f(t)dt$, $x\in[0,1]$. Επειδή η f είναι συνεχής στο $[0,1]$, η F είναι παραγωγίσιμη στο $[0,1]$ με $F'(x)=f(x)$, οπότε είναι και συνεχής στο διάστημα αυτό. Από το θεώρημα μέσης τιμής υπάρχει $\xi\in(0,1)$ τέτοιο ώστε:

$$F'(\xi)=\frac{F(1)-F(0)}{1-0}\Leftrightarrow f(\xi)=\int_0^1 f(t)dt\Leftrightarrow f(\xi)=1821.$$

Είναι $0<\xi<1$ και f γνησίως αύξουσα, άρα $f(\xi)<f(1)\Leftrightarrow 1821<f(1)$.

δ) Επειδή η f είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$, για κάθε $x>0$ είναι $f(x)>f(0)=0$ ενώ για κάθε $x<0$ είναι $f(x)<f(0)=0$. Επειδή $f'(x)g'(x)>0$ και $f'(x)>0$, είναι και $g'(x)>0$, άρα g γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$. Για κάθε $x>3$ είναι $g(x)>g(3)=0$, ενώ για κάθε $x<3$ είναι $g(x)<g(3)=0$.

ε) Εστω $\int_0^3 2xg(x)dx=\lambda\in\mathbb{R}$ (3), τότε από τη σχέση $\int_0^3 2xg(x)dx+x+6=g(x)$, έχουμε: $\lambda+x+6=g(x)$. Η σχέση (3) γίνεται:

$$\int_0^3 2x(\lambda+x+6)dx=\lambda \Leftrightarrow \int_0^3\left(2\lambda x+2x^2+12x\right)dx=\lambda \Leftrightarrow$$

$$\left[\lambda x^2+\frac{2}{3}x^3+6x^2\right]_0^3=\lambda \Leftrightarrow 9\lambda+18+54=\lambda \Leftrightarrow 8\lambda=-72 \Leftrightarrow \lambda=-9.$$

Τότε $g(x)=-9+x+6=x-3$.

183. α) Εστω $xt=u$, τότε $xdt=du$. Για $t=0$ είναι $u=0$ και για $t=1$ είναι $u=x$.

Είναι $f(x)=x^2\int_0^1\frac{2t}{3f^2(xt)}dt+1=\int_0^1\frac{2xt}{3f^2(xt)}xdt+1=\int_0^x\frac{2u}{3f^2(u)}du+1.$

Επειδή η f είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$ με $f(x)\neq 0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$, η f διατηρεί σταθερό πρόσημο.

Επειδή $f(0)=\int_0^0\frac{2u}{3f^2(u)}du+1=1>0$, είναι $f(x)>0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

β) Επειδή η f είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$, η συνάρτηση $\int_0^x\frac{2u}{3f^2(u)}du$ είναι παραγωγίσιμη, άρα η g είναι παραγωγίσιμη με $f'(x)=\frac{2x}{3f^2(x)} \Leftrightarrow 3f^2(x)f'(x)=2x$ ή $\left(f^3(x)\right)'=\left(x^2\right)' \Leftrightarrow f^3(x)=x^2+c$, $c\in\mathbb{R}$. Επειδή $f(0)=1$, είναι $c=1$, άρα $f^3(x)=x^2+1 \Leftrightarrow f(x)=\sqrt[3]{x^2+1}$, $x\in\mathbb{R}$.

γ) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)-\sqrt{x^2+1}}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt[3]{x^2+1}-\sqrt{x^2+1}}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{\sqrt[3]{x^2+1}-1}{x}-\frac{\sqrt{x^2+1}-1}{x}\right)=$

$$=\lim_{x\to 0}\left(\frac{\left(\sqrt[3]{x^2+1}-1\right)\left[\left(\sqrt[3]{x^2+1}\right)^2+\sqrt[3]{x^2+1}+1\right]}{x\left[\left(\sqrt[3]{x^2+1}\right)^2+\sqrt[3]{x^2+1}+1\right]}-\frac{\left(\sqrt{x^2+1}-1\right)\left(\sqrt{x^2+1}+1\right)}{x\left(\sqrt{x^2+1}+1\right)}\right)=$$

$$=\lim_{x\to 0}\left(\frac{\left(\sqrt[3]{x^2+1}\right)^3-1}{x\left[\left(\sqrt[3]{x^2+1}\right)^2+\sqrt[3]{x^2+1}+1\right]}-\frac{\left(\sqrt{x^2+1}\right)^2-1}{x\left(\sqrt{x^2+1}+1\right)}\right)=$$

$$=\lim_{x\to 0}\left(\frac{x^2+1-1}{x\left[\left(\sqrt[3]{x^2+1}\right)^2+\sqrt[3]{x^2+1}+1\right]}-\frac{x^2+1-1}{x\left(\sqrt{x^2+1}+1\right)}\right)=$$

$$=\lim_{x\to 0}\left(\frac{x}{\left[\left(\sqrt[3]{x^2+1}\right)^2+\sqrt[3]{x^2+1}+1\right]}-\frac{x}{\left(\sqrt{x^2+1}+1\right)}\right)=0$$

δ) Εστω $F(u)=\int_0^u f(t)dt$, $u\in[0,x]$, $x>0$. Επειδή η F είναι συνεχής στο $[0,x]$, η F είναι παραγωγίσιμη με $F'(u)=f(u)$, οπότε είναι και συνεχής στο διάστημα αυτό. Από το θεώρημα μέσης τιμής, υπάρχει $\xi\in(0,x)$ τέτοιο ώστε

$$F'(\xi)=\frac{F(x)-F(0)}{x-0}\Leftrightarrow f(\xi)=\frac{1}{x}\int_0^x f(t)dt\Leftrightarrow \sqrt[3]{\xi^2+1}=\frac{1}{x}\int_0^x f(t)dt.$$

Είναι $0<\xi<x\Leftrightarrow 0<\xi^2<x^2\Leftrightarrow 1<\xi^2+1<x^2+1\Leftrightarrow 1<\sqrt[3]{\xi^2+1}<\sqrt[3]{x^2+1}\Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow 1<\frac{1}{x}\int_0^x f(t)dt<\sqrt[3]{x^2+1}\Leftrightarrow x<\int_0^x f(t)dt<x\sqrt[3]{x^2+1}.$$

Επειδή $\lim\limits_{x\to+\infty}x=+\infty$, είναι και $\lim\limits_{x\to+\infty}\int_0^x f(t)dt=+\infty$.

ε) Είναι $g(x)=\int_{-x}^{x}\frac{\eta\mu t}{f(t)}dt=\int_{-x}^{0}\frac{\eta\mu t}{f(t)}dt+\int_0^x\frac{\eta\mu t}{f(t)}dt=\int_0^x\frac{\eta\mu t}{f(t)}dt-\int_0^{-x}\frac{\eta\mu t}{f(t)}dt$.

Επειδή η συνάρτηση $\frac{\eta\mu t}{f(t)}$ είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$, οι συναρτήσεις $\int_0^x\frac{\eta\mu t}{f(t)}dt$ και $\int_0^{-x}\frac{\eta\mu t}{f(t)}dt$ είναι παραγωγίσιμες στο $\mathbb{R}$, άρα η g είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με

$$g'(x)=\frac{\eta\mu x}{f(x)}-\frac{\eta\mu(-x)}{f(-x)}(-x)'=\frac{\eta\mu x}{\sqrt[3]{x^2+1}}+\frac{-\eta\mu x}{\sqrt[3]{(-x)^2+1}}=\frac{\eta\mu x}{\sqrt[3]{x^2+1}}-\frac{\eta\mu x}{\sqrt[3]{x^2+1}}=0\Leftrightarrow g(x)=c_1,$$

$c_1\in\mathbb{R}$. Επειδή $g(0)=\int_0^0\frac{\eta\mu t}{f(t)}dt=0$, είναι $g(x)=0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

184. **α)** Είναι $f(0)=\int_0^0\frac{t}{f(t)}dt+1=1$.

β) Επειδή $f(x)\neq 0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$ και η f είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$, η f διατηρεί σταθερό πρόσημο. Επειδή επιπλέον $f(0)=1>0$ είναι $f(x)>0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

γ) Η συνάρτηση $\frac{t}{f(t)}$ είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$ ως πηλίκο συνεχών συναρτήσεων, οπότε η f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με $f'(x)=\left(\int_0^x\frac{t}{f(t)}dt+1\right)'=\frac{x}{f(x)}\Leftrightarrow f'(x)f(x)=x\Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow 2f'(x)f(x)=2x\Leftrightarrow\left(f^2(x)\right)'=\left(x^2\right)'\Leftrightarrow f^2(x)=x^2+c,\ c\in\mathbb{R}.$$

Για $x=0$ είναι $f^2(0)=c\Leftrightarrow c=1$. Άρα $f^2(x)=x^2+1$ και επειδή $f(x)>0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$ είναι $f(x)=\sqrt{x^2+1}$, $x\in\mathbb{R}$.

δ) Για κάθε $x\in\mathbb{R}$ είναι $f(-x)=\sqrt{(-x)^2+1}=\sqrt{x^2+1}=f(x)$, οπότε η f είναι άρτια. Είναι $\int_{-\alpha}^0 f(x)dx=\int_{-\alpha}^0 f(-x)dx$. Θέτουμε $-x=u$, τότε $dx=-du$. Για $x=0$ είναι $u=0$, ενώ για $x=-\alpha$ είναι $u=\alpha$. Οπότε $\int_{-\alpha}^0 f(x)dx=\int_{-\alpha}^0 f(-x)dx=-\int_\alpha^0 f(u)du=\int_0^\alpha f(u)du=\int_0^\alpha f(x)dx$.

185. **α)** Εστω ότι η ευθεία ε έχει συντελεστή διεύθυνσης λ. Τότε επειδή εφάπτεται της C_f στο A είναι $f'(x_1)=\lambda$ και επειδή εφάπτεται της C_f στο B είναι $f'(x_2)=\lambda$, άρα $f'(x_1)=f'(x_2)$.

Επειδή η ευθεία ε ταυτίζεται με την AB, είναι: $\lambda_{AB}=\dfrac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}=\lambda$.

Άρα $f'(x_1)=f'(x_2)=\dfrac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}$ (3).

β) Η f είναι συνεχής στο $[x_1,x_2]$ και παραγωγίσιμη στο (x_1,x_2) με $f'(x)=4x^3+6\alpha x^2+6\beta x+1$, άρα λόγω του θεωρήματος μέσης τιμής, υπάρχει $\xi\in(x_1,x_2)$ τέτοιο ώστε: $f'(\xi)=\dfrac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}$.

Άρα $f'(x_1)=f'(x_2)=f'(\xi)$. Η f' είναι συνεχής σε καθένα από τα διαστήματα $[x_1,\xi]$, $[\xi,x_2]$ και παραγωγίσιμη στα (x_1,ξ) και (ξ,x_2) με $f''(x)=12x^2+12\alpha x+6\beta=6(2x^2+2\alpha x+\beta)$.

Λόγω του θεωρήματος Rolle υπάρχουν $\xi_1\in(x_1,\xi)$ και $\xi_2\in(\xi,x_2)$ τέτοια ώστε $f''(\xi_1)=0$ και $f''(\xi_2)=0$. Δηλαδή η f'' έχει τουλάχιστον 2 ρίζες. Όμως η f'' είναι 2ου βαθμού και έχει το πολύ 2 ρίζες, άρα η f'' έχει ακριβώς 2 ρίζες οπότε έχει $\Delta>0\Leftrightarrow 4\alpha^2-8\beta>0\Leftrightarrow 4\alpha^2>8\beta\Leftrightarrow\alpha^2>2\beta$.

γ) $\int_{x_1}^{x_2}xf''(x)dx=\int_{x_1}^{x_2}x(f'(x))'dx=[xf'(x)]_{x_1}^{x_2}-\int_{x_1}^{x_2}f'(x)dx\Leftrightarrow$

$\int_{x_1}^{x_2}xf''(x)dx=x_2f'(x_2)-x_1f'(x_1)-[f(x)]_{x_1}^{x_2}=x_2f'(x_2)-x_1f'(x_1)-f(x_2)+f(x_1)\overset{(3)}{=}0$.

186. **α)** Είναι $f(x)=\int_1^x e^{t+x}\ln t\,dt=\int_1^x e^xe^t\ln t\,dt=e^x\int_1^x e^t\ln t\,dt$.

$f'(x)=\left(e^x\int_1^x e^t\ln t\,dt\right)'=e^x\int_1^x e^t\ln t\,dt+e^xe^x\ln x=f(x)+e^{2x}\ln x\Leftrightarrow f'(x)-f(x)=e^{2x}\ln x$.

β) $(f'(x)-f(x))'=(e^{2x}\ln x)'\Leftrightarrow f''(x)-f'(x)=2e^{2x}\ln x+e^{2x}\dfrac{1}{x}\Leftrightarrow$

$f''(x)-(f(x)+e^{2x}\ln x)=2e^{2x}\ln x+e^{2x}\dfrac{1}{x}\Leftrightarrow$

$f''(x)-f(x)-e^{2x}\ln x=2e^{2x}\ln x+e^{2x}\dfrac{1}{x}\Leftrightarrow$

$f''(x)-f(x)=3e^{2x}\ln x+e^{2x}\dfrac{1}{x}=e^{2x}\left(3\ln x+\dfrac{1}{x}\right)$.

γ) Για κάθε $t>1$ είναι $\ln t>0\Leftrightarrow e^t\ln t>0$, άρα $\int_1^x e^t\ln t\,dt>0\Leftrightarrow e^x\int_1^x e^t\ln t\,dt>0\Leftrightarrow f(x)>0$.

Επειδή $f'(x)=f(x)+e^{2x}\ln x$, είναι $f'(x)>0$ για κάθε $x>1$, άρα η f είναι γνησίως αύξουσα στο $[1,+\infty)$.

δ) Είναι $g(x)=(f''(x)-f'(x))e^{-2x}=\left(f'(x)+2e^{2x}\ln x+\dfrac{e^{2x}}{x}-f'(x)\right)e^{-2x}=\ln x+\dfrac{1}{x}$. Επειδή $g(x)\ge 0$ για κάθε $x\in[1,e]$ και η g είναι συνεχής στο $[1,e]$, το ζητούμενο εμβαδόν, είναι:

$$E(\Omega)=\int_1^e g(x)dx=\int_1^e\left(2\ln x+\frac{1}{x}\right)dx=2\int_1^e \ln xdx+\int_1^e\frac{1}{x}dx \Leftrightarrow$$

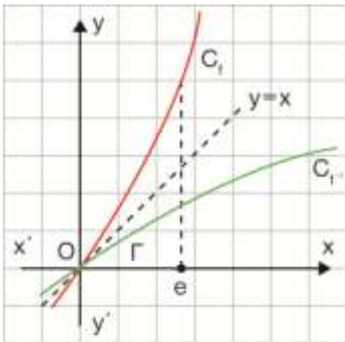
$$E(\Omega)=2\int_1^e \ln x(x)'dx+\left[\ln x\right]_1^e=2\left[x\ln x\right]_1^e-2\int_1^e\frac{1}{x}xdx+\ln e-\ln 1\Leftrightarrow$$

$$E(\Omega)=2e-2\left[x\right]_1^e+1=2e-2e+2+1=3$$

187. **α)** Η $f(x)=x+e^x-1,\ x\in\mathbb{R}$ είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με $f'(x)=1+e^x>0$ άρα η $f\uparrow$ στο $\mathbb{R}$. Επίσης $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\left(x-e^x-1\right)=-\infty$ και $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(x+e^x-1\right)=+\infty$ και αφού η $f\uparrow$ τότε το σύνολο τιμών $f(A)=\left(\lim\limits_{x\to-\infty},\lim\limits_{x\to+\infty}\right)=\mathbb{R}$.

β) Αφού η f είναι γνησίως αύξουσα θα είναι και $1-1$ συνεπώς ορίζεται η f^{-1}.

γ) Επειδή η f είναι $\uparrow$ τότε η εξίσωση $f(x)=f^{-1}(x)$ είναι ισοδύναμη με την $f(x)=x\Leftrightarrow x+e^x-1=x\Leftrightarrow e^x=1\Leftrightarrow x=0$. Οπότε η $C_f, C_{f^{-1}}$ τέμνονται στο $(0,0)$. Επίσης $f(x)-x=e^x-1>0$ όταν $x>0$. Αφού οι C_f, $C_{f^{-1}}$ είναι συμμετρικές ως προς την $y=x$ και η C_f είναι πάνω από την $y=x$ στο $[0,e]$ τότε η $C_{f^{-1}}$ θα είναι κάτω από την $y=x$. Οπότε το ζητούμενο εμβαδό είναι:



$$E(\Omega)=\int_0^e f(x)-f^{-1}(x)dx=\int_0^e f(x)dx-\int_0^e f^{-1}(x)dx.$$

Θέτω $f^{-1}(x)=u\Leftrightarrow x=f(u)$ και $dx=f'(u)du$ για $x=0$ είναι $f(u)=f(0)$ άρα $u=0$ ενώ για $x=e$ είναι $f(u)=e=f(1)$ άρα $u=1$ οπότε:

$$E(\Omega)=\int_0^e f(x)dx-\int_0^1 uf'(u)du=\int_0^e\left(x+e^x-1\right)dx-\left[uf(u)\right]_0^1+\int_0^1 f(u)du=$$

$$=\left[\frac{x^2}{2}\right]_0^e+\left[e^x\right]_0^e-\left[x\right]_0^e-f(1)+\int_0^e\left(u+e^4-1\right)du=$$

$$=\frac{e^2}{2}+e^e-1-e-\cancel{e}+\frac{1}{2}+\cancel{e}-1-1=\frac{e^2}{2}+e^e-e-\frac{5}{2}.$$

δ) Είναι $e^{g(x)}+g(x)=x+\ln x\Leftrightarrow e^{g(x)}+g(x)-1=e^{\ln x}+\ln x-1$.

$f\left(g(x)\right)=f(\ln x)$ και αφού η f είναι $1-1$ τότε $g(x)=\ln x$, $x>0$.

ε) Εστω $G(x)=\int_\alpha^x\frac{1}{g(t)}dt$ αρχική της $\frac{1}{g(x)}$ τότε $G'(x)=\frac{1}{g(x)}=\frac{1}{\ln x}$.

Εφαρμόζουμε Θ.Μ.Τ για την G στο $[x,x+1]$ οπότε υπάρχει $\xi\in[x,x+1]$ τέτοιο ώστε

$$G'(\xi)=\frac{G(x+1)-G(x)}{x+1-x}\Leftrightarrow\frac{1}{\ln\xi}=\int_\alpha^{x+1}\frac{1}{g(t)}dt-\int_\alpha^x\frac{1}{g(t)}dt\Leftrightarrow\frac{1}{\ln\xi}=\int_x^{x+1}\frac{1}{g(t)}dt$$

Είναι $x<\xi<x+1\Leftrightarrow\ln x<\ln\xi<\ln(x+1)\Leftrightarrow\frac{1}{\ln x}>\frac{1}{\ln\xi}>\frac{1}{\ln(x+1)}\Leftrightarrow$

$$\frac{1}{g(x+1)}<\int_x^{x+1}\frac{1}{g(t)}dt<\frac{1}{g(x)}.$$

στ) Εφαρμόζουμε Θ.Μ.Τ. για την g στο $[e,\pi]$ οπότε υπάρχει $x_0 \in (e,\pi)$ τέτοιο ώστε

$g'(x_0)=\dfrac{g(\pi)-g(e)}{\pi-e} \Leftrightarrow \dfrac{1}{x_0}=\dfrac{g(\pi)-1}{\pi-e}$ είναι $0<e<x_0<\pi \Leftrightarrow \dfrac{1}{e}>\dfrac{1}{x_0}>\dfrac{1}{\pi}$

οπότε $\dfrac{\pi}{e}-1>g(\pi)-1>1-\dfrac{e}{\pi} \Leftrightarrow \dfrac{\pi}{e}>g(\pi)>2-\dfrac{e}{\pi}$.

188. **α) i.** Για $x=0$ είναι $f'(0)\cdot f(0)=0 \Leftrightarrow f'(0)\cdot 1=0 \Leftrightarrow f'(0)=0$

ii. Εστω ότι υπάρχει $x_0 \in \mathbb{R}$ όπου $f(x_0)=0$ τότε στην (1) για $x=x_0$ είναι

$f'(-x_0)f(x_0)=-x_0 \Rightarrow f'(-x_0)\cdot 0=x_0 \Rightarrow x_0=0$ δηλαδή $f(0)=0$ που είναι άτοπο.

Άρα $f(x)\neq 0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$ και επειδή η f είναι συνεχής, διατηρεί πρόσημο.

Αφού $f(0)=1>0$ είναι $f(x)>0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

β) i. $h'(x)=\dfrac{-f'(-x)f(x)-f'(x)f(-x)}{f^2(x)}$.

Αν στη σχέση $f'(-x)f(x)=x$ αντικαταστήσουμε όπου x το $-x$ προκύπτει

$f'(x)f(-x)=x$ (1). Άρα $h'(x)=\dfrac{-(-x)-x}{f^2(x)}=0 \Leftrightarrow h(x)=c$.

ii. $h(0)=\dfrac{f(0)}{f(0)}=1$ άρα $h(x)=1 \Leftrightarrow f(-x)=f(x)$ (2). Από τις $(1),(2)$ είναι

$f(x)f'(x)=x \Leftrightarrow 2f(x)f'(x)=2x \Rightarrow \left(f^2(x)\right)'=\left(x^2\right)' \Leftrightarrow f^2(x)=x^2+c$.

Για $x=0$, είναι $c=1$ και επειδή $f(x)>0$, είναι $f(x)=\sqrt{x^2+1}$, $x\in\mathbb{R}$.

γ) $E(\Omega)=\int_0^{\sqrt{3}}\dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}}dx=\int_0^{\sqrt{3}}\left(\sqrt{x^2+1}\right)'dx=\left[\sqrt{x^2+1}\right]_0^{\sqrt{3}}=2-1=1.$

δ) Από τη σχέση (2) έχουμε ότι η f είναι άρτια. Είναι $\int_{-\alpha}^{0} f(-x)dx=\int_{-\alpha}^{0} f(x)dx$.

Θέτουμε $-x=u$, τότε $dx=-du$. Για $x=0 \Rightarrow u=0$ και για $x=-\alpha \Rightarrow u=\alpha$.

Άρα $-\int_{\alpha}^{0} f(u)du=\int_{-\alpha}^{0} f(x)dx \Leftrightarrow \int_0^{\alpha} f(x)dx=\int_{-\alpha}^{0} f(x)dx$.

ε) Εστω $g(x)=\int_0^x f(t)dt$, $x\in\mathbb{R}$. Είναι $g'(x)=f(x)>0 \Rightarrow g\uparrow\mathbb{R}$. Εστω $h(x)=e^x-x-1$, $x\in\mathbb{R}$.

Είναι $h'(x)=e^x-1$ και για $x>0$ είναι $h'(x)>0 \Rightarrow h\uparrow[0,+\infty)$, ενώ για $x<0$ είναι

$h'(x)<0 \Rightarrow h\downarrow(-\infty,0]$. Η h έχει ελάχιστο στο $x=0$, άρα

$h(x)\geq h(0) \Leftrightarrow e^x-x-1\geq 0 \Leftrightarrow e^x\geq x+1 \overset{g\uparrow}{\Leftrightarrow} g(e^x)\geq g(x+1) \Leftrightarrow \int_0^{e^x} f(t)dt \geq \int_0^{x+1} f(t)dt$.

189. **α)** $f'(x)=3x^2+1>0 \Rightarrow f\uparrow\mathbb{R} \Rightarrow f$ 1–1.

β) $f(A)=\left(\lim\limits_{x\to-\infty} f(x), \lim\limits_{x\to+\infty} f(x)\right)=(-\infty,+\infty)=\mathbb{R}$.

γ) Για $x=y$ είναι $|x-y|=|f(x)-f(y)|=0$. Για $x<y$ από το ΘΜΤ στο $[x,y]$, υπάρχει
$\xi\in(x,y):\ f'(\xi)=\dfrac{f(x)-f(y)}{x-y}\Leftrightarrow 3\xi^2+1=\dfrac{f(x)-f(y)}{x-y}$.

Όμως $\left|\dfrac{f(x)-f(y)}{x-y}\right|=|3\xi^2+1|=3\xi^2+1\geq 1\Rightarrow |f(x)-f(y)|\geq|x-y|$ (1)

Όμοια για $x>y$. Τώρα θέτουμε όπου x το $f^{-1}(x)$ και όπου y το
$f^{-1}(y)$: $\left|f\left(f^{-1}(x)\right)-f\left(f^{-1}(y)\right)\right|\geq f(x)-f(y)\Leftrightarrow|x-y|\geq\left|f^{-1}(x)-f^{-1}(y)\right|$ (2).

Άρα από (1), (2) είναι $\left|f^{-1}(x)-f^{-1}(y)\right|\leq|x-y|\leq|f(x)-f(y)|$. Όμοια για $x>y$.

δ) Αντικαθιστούμε $y=x_0$ και έχουμε: $\left|f^{-1}(x)-f^{-1}(x_0)\right|\leq|x-x_0|\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow -|x-x_0|\leq f^{-1}(x)-f^{-1}(x_0)\leq|x-x_0|\Leftrightarrow f^{-1}(x_0)-|x-x_0|\leq f^{-1}(x)\leq f^{-1}(x_0)+|x-x_0|$.

Από το Κ.Π είναι $\lim\limits_{x\to x_0}f^{-1}(x)=f^{-1}(x_0)$.

ε) $\lim\limits_{x\to 2}f^{-1}(x)\overset{f^{-1}\text{ συνεχής}}{=}f^{-1}(2)=0$ γιατί $f(0)=2$ άρα $f^{-1}(2)=0$

$$\lim_{x\to 2}\frac{\eta\mu f^{-1}(x)}{x-2}=\lim_{x\to 2}\left[\frac{\eta\mu f^{-1}(x)}{f^{-1}(x)}\cdot\frac{f^{-1}(x)}{x-2}\right]=\lim_{x\to 2}\left[\frac{\eta\mu f^{-1}(x)}{f^{-1}(x)}\cdot\frac{f^{-1}(x)}{f\left(f^{-1}(x)\right)-2}\right]$$

Θέτουμε $f^{-1}(x)=\omega$. Είναι $\lim\limits_{x\to 2}f^{-1}(x)=0$ άρα $\omega\to 0$. Τότε

$$\lim_{x\to 2}\frac{\eta\mu f^{-1}(x)}{x-2}=\lim_{\omega\to 0}\left(\frac{\eta\mu\omega}{\omega}\cdot\frac{\omega}{f(\omega)-2}\right)=\lim_{\omega\to 0}\left(\frac{\eta\mu\omega}{\omega}\cdot\frac{\omega}{\omega^3+\omega}\right)=\lim_{\omega\to 0}\left(\frac{\eta\mu\omega}{\omega}\cdot\frac{\cancel{\omega}}{\cancel{\omega}\left(\omega^2+1\right)}\right)=1\cdot 1=1.$$

στ) $f^{-1}(\xi)+2\xi=0\Leftrightarrow f^{-1}(\xi)=-2\xi\Leftrightarrow f\left(f^{-1}(\xi)\right)=f(-2\xi)\Leftrightarrow\xi=f(-2\xi)$.

Εστω $h(x)=f(-2x)-x$, $x\in[0,2]$. Η h είναι συνεχής στο $[0,2]$ ως σύνθεση και πράξεις συνεχών συναρτήσεων. Είναι $h(2)=f(-4)-2=-68<0$, $h(0)=f(0)=2>0$, άρα από το Θ. Β υπάρχει $\xi\in(0,2)$ τέτοιο, ώστε $h(\xi)=0\Leftrightarrow f^{-1}(\xi)+2\xi=0$.

Είναι $h(x)=f(-2x)-x=-8x^3-2x+2-x=-8x^3-3x+2$ και

$h'(x)=-24x^2-3<0\Rightarrow h\downarrow[0,2]$, οπότε το ξ είναι μοναδικό.

ζ) Είναι $f(x)-x=x^3+2>0$ για κάθε $x\in[2,4]$, άρα $f(x)>x>f^{-1}(x)$ για κάθε $x\in[2,4]$.

$E(\Omega)=\int_2^4\left(f(x)-f^{-1}(x)\right)dx=\int_2^4 f(x)dx-\int_2^4 f^{-1}(x)dx$.

Θέτουμε $f^{-1}(x)=u\Leftrightarrow x=f(u)$ και $dx=f'(u)du$.

Για $x=2\Rightarrow f(u)=2=f(0)\Leftrightarrow u=0$ και για $x=4\Rightarrow f(u)=4=f(1)\Leftrightarrow u=1$.

Οπότε $E(\Omega)=\int_2^4\left(x^3+x+2\right)dx-\int_0^1 uf'(u)du=\left[\dfrac{x^4}{4}+\dfrac{x^2}{2}+2x\right]_2^4-\int_0^1 u\left(3u^2+1\right)du=\ldots=\dfrac{273}{4}$.

190. **α)** Είναι $\left[f'(x)\right]^2+f(x)\cdot f''(x)=-1$ (1). Έστω ότι η f δεν διατηρεί σταθερό πρόσημο στο $(0,8)$ τότε αφού η f είναι συνεχής στο $(0,8)$, θα έχει ρίζα $\rho \in (0,8)$ δηλαδή $f(\rho)=0$.

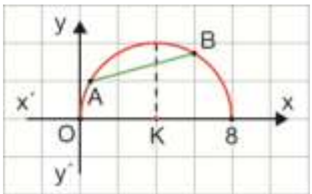
Στην (1) για $x=\rho$ προκύπτει $\left[f'(\rho)\right]^2=-1$ άτοπο. Άρα η f διατηρεί σταθερό πρόσημο και αφού είναι συνεχής και $f(4)=4>0$ τότε $f(x)>0$ για κάθε $x\in(0,8)$.

β) $(1)\Rightarrow\left[f(x)f'(x)\right]'=(-x)'\Leftrightarrow f(x)f'(x)=-x+c_1$. Για $x=4$ προκύπτει $c=4$ άρα

$$f(x)f'(x)=4-x\Leftrightarrow 2f(x)f'(x)=8-2x\Leftrightarrow\left(f^2(x)\right)'=\left(8x-x^2\right)'\Leftrightarrow f^2(x)=8x-x^2+c_2$$

και για $x=4$ είναι $16=32-16+c_2\Leftrightarrow c_2=0$, άρα $f^2(x)=8x-x^2$ και αφού $f(x)>0$ τότε $f(x)=\sqrt{8x-x^2}$.

γ) Εστω $f(x)=y\Leftrightarrow\sqrt{8x-x^2}=y\Leftrightarrow 8x-x^2=y^2\Leftrightarrow x^2+y^2-8x+16=16\Leftrightarrow(x-4)^2+y^2=16$, οπότε αφού $y\ge0$ τότε η γραφική παράσταση της f είναι το ημικύκλιο που βρίσκεται πάνω από τον άξονα $x'x$ του κυκλικού δίσκου που έχει κέντρο $K(4,0)$ και $\rho=4$. Αν Α, Β δύο τυχαία σημεία της C_f τότε $AB\le2\rho\Leftrightarrow(AB)\le8$.



δ) Είναι $I=\int_0^4\sqrt{8x-x^2}dx$ με βάση το προηγούμενο ερώτημα το ζητούμενο ολοκλήρωμα εκφράζει το εμβαδό του τεταρτοκυκλίου οπότε $I=\frac{\pi\cdot4^2}{4}=4\pi$.

ε) Αφού $f(x)>0$ και $4-x\ge0$ για $x\in[0,4]$ τότε $g(x)\ge0$ όταν $x\in[0,4]$.

Συνεπώς $E(\Omega)=\int_0^4 g(x)dx=\int_0^4(4-x)\sqrt{8x-x^2}dx=\frac{1}{2}\int_0^4(8-2x)\sqrt{8x-x^2}dx$.

Θέτω $u=8x-x^2$ άρα $du=(8-2x)dx$ και

x	0	4
u	0	16

$$\text{Άρα } E(\Omega)=\frac{1}{2}\int_0^{16}\sqrt{u}du=\frac{1}{2}\left[\frac{u^{3/2}}{\frac{3}{2}}\right]_0^{16}=\frac{1}{3}\left[\sqrt{u^3}\right]_0^{16}=\frac{1}{3}16\sqrt{16}=\frac{64}{3}\text{ τ.μ.}$$

191. α) Θεωρούμε την $g(x)=f(x)-3$, συνεχής στο $[0,9]$ με $g(0)=f(0)-3=-3<0$ και $g(9)=f(9)-3=9-3=6>0$ άρα $g(0)\cdot g(9)<0$ και από Θ. Bolzano υπάρχει $x_0\in(0,9)$ τέτοιο ώστε $g(x_0)=0\Leftrightarrow f(x_0)=3$.

β) Εφαρμόζουμε Θ.Μ.Τ. για την f στα διαστήματα $[0,x_0]$ και $[x_0,9]$ οπότε υπάρχουν $x_1\in(0,x_0)$ και $x_2\in(x_0,9)$ τέτοια ώστε:

$$f'(x_1)=\frac{f(x_0)-f(0)}{x_0}=\frac{3}{x_0}\Leftrightarrow\frac{1}{f'(x_1)}=\frac{x_0}{3}\quad(1)\text{ και}$$

$$f'(x_2)=\frac{f(9)-f(x_0)}{9-x_0}=\frac{9-3}{9-x_0}\Leftrightarrow\frac{1}{f'(x_2)}=\frac{9-x_0}{6}\Leftrightarrow\frac{2}{f'(x_2)}=\frac{18-2x_0}{6}\quad(2).$$

Οπότε προσθέτοντας (1) και (2) έχουμε:

$$\frac{1}{f'(x_1)}+\frac{2}{f'(x_2)}=\frac{x_0}{3}+\frac{18-2x_0}{6}=\frac{2x_0+18-2x_0}{6}=3.$$

γ) i. Αφού η f είναι κοίλη τότε η $f'\downarrow$. Εφαρμόζουμε Θ.Μ.Τ. για την f στα διαστήματα $[0,3]$ και $[3,9]$ οπότε υπάρχουν $\xi_1 \in (0,3)$ και $\xi_2 \in (3,9)$ τέτοια ώστε

$$f'(\xi_1) = \frac{f(3)-f(0)}{3} = \frac{f(3)}{3} \text{ και } f'(\xi_2) = \frac{f(9)-f(3)}{9-3} = \frac{9-f(3)}{6}$$

αφού $\xi_1 < \xi_2$ τότε $f'(\xi_1) > f'(\xi_2)$ δηλαδή $\dfrac{f(3)}{3} > \dfrac{9-f(3)}{6} \Leftrightarrow 2f(3) > 9 - f(3) \Leftrightarrow f(3) > 3$.

ii. Εφαρμόζουμε Θ.Μ.Τ. για την f στο $[0,x]$ οπότε υπάρχει $\xi \in (0,x)$ τέτοιο ώστε

$f'(\xi) = \dfrac{f(x)-f(0)}{x} \Leftrightarrow f'(\xi) = \dfrac{f(x)}{x}$. Όμως $\xi < x$ και $f'\downarrow$ άρα $f'(\xi) > f'(x)$

δηλαδή $\dfrac{f(x)}{x} > f'(x) \overset{x>0}{\Rightarrow} f(x) > xf'(x) \Leftrightarrow f(x) - xf'(x) > 0$.

iii. Αφού $f(x) - xf'(x) > 0$ τότε $\int_0^9 (f(x) - xf'(x))dx > 0 \Leftrightarrow \int_0^9 f(x)dx - \int_0^9 xf'(x)dx > 0 \Leftrightarrow$

$$\int_0^9 f(x)dx - [xf(x)]_0^9 + \int_0^9 f(x)dx > 0 \Leftrightarrow 2\int_0^9 f(x)dx - 9f(9) > 0 \Leftrightarrow$$

$$2\int_0^9 f(x)dx > 81 \Leftrightarrow \int_0^9 f(x)dx > \frac{81}{2}.$$

192. α) $f'(x) - e^x = f(x) + \lambda x e^x \dfrac{1}{x^2} \cdot \displaystyle\int_x^{2x} \dfrac{1}{1+\left(\frac{t}{x}\right)^2} dt \Leftrightarrow f'(x) - f(x) = e^x + \lambda e^x \cdot \displaystyle\int_x^{2x} \dfrac{1}{1+\left(\frac{t}{x}\right)^2} \cdot \dfrac{1}{x} dt$

Θέτουμε $\dfrac{t}{x} = u$ τότε $\dfrac{dt}{x} = du$. Για $t = x$ είναι $u = 1$ και για $t = 2x$ είναι $u = 2$.

Τότε $f'(x) - f(x) = e^x + \lambda e^x \cdot \displaystyle\int_1^2 \dfrac{1}{1+u^2} du \quad (1)$.

Για $x = 1$ είναι $f'(1) - f(1) = e + \lambda e \displaystyle\int_1^2 \dfrac{1}{1+u^2} du \Leftrightarrow 3e - e = e + \lambda e \displaystyle\int_1^2 \dfrac{1}{1+u^2} du \Leftrightarrow$

$e = \lambda e \displaystyle\int_1^2 \dfrac{1}{1+u^2} du \Leftrightarrow \lambda \cdot \displaystyle\int_1^2 \dfrac{1}{1+u^2} du = 1$. Η σχέση (1) γίνεται:

$$f'(x) - f(x) = e^x + e^x = 2e^x \Leftrightarrow e^{-x} f'(x) - e^{-x} f(x) = 2 \Leftrightarrow \left(e^{-x} f(x)\right)' = (2x)' \Leftrightarrow$$

$$e^{-x} f(x) = 2x + c \Leftrightarrow f(x) = (2x + c)e^x,\ x > 0.$$

Για $x = 1$ είναι $f(1) = (2 + c)e = e \Leftrightarrow c = -1$, άρα $f(x) = (2x - 1)e^x$, $x > 0$.

β) $\displaystyle\int_x^{x^2} \dfrac{x \cdot e^x}{x^2\left(1+\left(\frac{t}{x}\right)^2\right)} dt = e^x \displaystyle\int_x^{x^2} \dfrac{1}{1+\left(\frac{t}{x}\right)^2} \cdot \dfrac{1}{x} dt$. Θέτουμε $\dfrac{t}{x} = u$ τότε $\dfrac{dt}{x} = du$.

Για $t = x$ είναι $u = 1$ και για $t = x^2$ είναι $u = x$. Τότε $e^x \displaystyle\int_x^{x^2} \dfrac{1}{1+\left(\frac{t}{x}\right)^2} \cdot \dfrac{1}{x} dt = e^x \displaystyle\int_1^x \dfrac{1}{1+u^2} du$.

Εστω $h(y) = \displaystyle\int_1^y \dfrac{1}{1+u^2} du$, $y \in [1,x]$, $x > 1$. Από το Θ.Μ.Τ. υπάρχει $\xi \in (1,x)$ τέτοιο ώστε

$h'(\xi)=\dfrac{h(x)-h(1)}{x-1}\Leftrightarrow h'(\xi)(x-1)=\int_1^x\dfrac{1}{1+u^2}du$. $h'(x)=\dfrac{1}{1+x^2}$, $h''(x)=-\dfrac{2x}{(1+x^2)^2}<0$

για κάθε $x>0$ άρα $h'\downarrow[0,+\infty)$.

Είναι $0<\xi<x\overset{h'\downarrow}{\Rightarrow}h'(x)<h'(\xi)<h'(0)\Leftrightarrow\dfrac{1}{1+x^2}<h'(\xi)<1\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow\dfrac{x-1}{1+x^2}<(x-1)h'(\xi)<x-1\Leftrightarrow\dfrac{e^x(x-1)}{1+x^2}<e^x\int_1^x\dfrac{1}{1+u^2}du<e^x(x-1)$.

Είναι $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{e^x(x-1)}{1+x^2}\underset{DLH}{\overset{\left(\frac{\infty}{\infty}\right)}{=}}\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{e^x(x-1)+e^x}{2x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\cancel{x}\cdot e^x}{2\cancel{x}}=+\infty$

άρα και $\lim\limits_{x\to+\infty}e^x\int_1^x\dfrac{1}{1+u^2}du=+\infty$.

γ) $g(x)=\dfrac{f(x)}{2x-1}=e^x$. Επειδή $\lim\limits_{x\to-\infty}e^x=0$, η $y=0$ είναι οριζόντια ασύμπτωτη της C_g στο $-\infty$.

Είναι $E=\int_0^1 e^x dx=e-1$.

δ) $y-f(1)=f'(1)(x-1)\Leftrightarrow y-e=3ex-3e\Leftrightarrow y=3ex-2e$

ε) $f'(x)=2e^x+(2x-1)e^x=(2x+1)e^x$, $f''(x)=2e^x+(2x+1)e^x=(2x+3)e^x>0$,

άρα f κυρτή στο $(0,+\infty)$, οπότε βρίσκεται πάνω από κάθε εφαπτομένη της στο διάστημα αυτό, εκτός βέβαια από το σημείο επαφής. Δηλαδή $f(x)\geq 3ex-2e$.

στ) $E(\Omega)=\int_1^2(f(x)-3ex+2e)dx=\int_1^2(2x-1)e^x dx-\left[\dfrac{3e}{2}x^2\right]_1^2+2e=$

$=\left[(2x-1)e^x\right]_1^2-\int_1^2 2e^x dx-\dfrac{9e}{2}+2e=3e^2-e-2e^2+2e-\dfrac{9e}{2}+2e=e^2-\dfrac{3e}{2}$.

193. **α)** Είναι (1) $f(x)f'(x)=f'(x)-x$ για κάθε $x\in(-3,3)$ και παραγωγίζοντας την (1) έχουμε: $[f'(x)]^2+f(x)f''(x)=f''(x)-1$ (2). Αν η f παρουσιάζει σημείο καμπής στο $x=x_0\in(-3,3)$ τότε αφού η f είναι συνεχής στο $[-3,3]$ πρέπει $f''(x_0)=0$. Στην (2) για $x=x_0$ προκύπτει $[f'(x_0)]^2+0=0-1\Leftrightarrow[f'(x_0)]^2=-1$ (άτοπο). Άρα η C_f δεν έχει σημεία καμπής.

β) $(1)\Leftrightarrow 2f(x)f'(x)=2f'(x)-2x\Leftrightarrow(f^2(x))'=(2f(x)-x^2)'\Leftrightarrow f^2(x)=2f(x)-x^2+c$.

Για $x=0$ είναι $16=8+c\Leftrightarrow c=8$ άρα (3) $f^2(x)-2f(x)+x^2-8=0$, $x\in(-3,3)$

γ) Από $(3)\Leftrightarrow f^2(x)-2f(x)+1=9-x^2\Leftrightarrow(f(x)-1)^2=9-x^2$.

Εστω $h(x)=f(x)-1$ τότε (4) $h^2(x)=9-x^2$. Αν η $h(x)$ δεν διατηρεί σταθερό πρόσημο στο $(-3,3)$ τότε υπάρχουν $x_1,x_2\in(-3,3)$ με $x_1<x_2$ τέτοια ώστε $f(x_1)f(x_2)<0$. Τότε από το Θ. Bolzano υπάρχει $\rho\in(x_1,x_2)\subseteq(-3,3)$ τέτοιο ώστε $h(\rho)=0$ άρα η (4) για $x=\rho$ γίνεται $0=9-\rho^2\Leftrightarrow\rho^2=9\Leftrightarrow\rho=3$ ή $\rho=-3$ (άτοπο) αφού $\rho\in(-3,3)$.

δ) Αφού η $h(x)=f(x)-1$ διατηρεί σταθερό πρόσημο, είναι συνεχής και $h(0)=f(0)-1=4-1=3>0$ τότε $h(x)>0$. Οπότε από $(4)\Leftrightarrow f(x)=\sqrt{9-x^2}$ δηλαδή $f(x)-1=\sqrt{9-x^2}\Leftrightarrow f(x)=1+\sqrt{9-x^2}$, $x\in[-3,3]$.

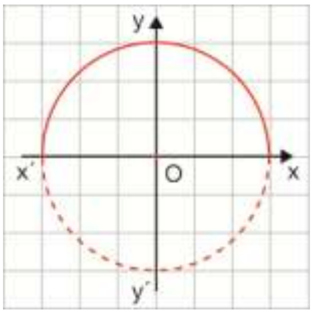
Είναι $f(-x)=1+\sqrt{9-(-x)^2}=1+\sqrt{9-x^2}=f(x)$ οπότε η f είναι άρτια.

Επίσης $I=\int_{-\alpha}^{0}f(t)dt$. Θέτω $t=-u$ οπότε $dt=-du$ και

t	$-\alpha$	0
u	α	0

Οπότε $I=\int_{\alpha}^{0}f(-u)(-du)=\int_{0}^{\alpha}f(-u)du\overset{f_{\alpha\rho\tau}}{=}\int_{0}^{\alpha}f(u)dx=\int_{0}^{\alpha}f(t)dt$.

ε) Είναι $f(x)-1=\sqrt{9-x^2}\ge 0$ όταν $x\in[-3,3]$.



Άρα $E(\Omega)=\int_{-3}^{3}\sqrt{9-x^2}dx$.

Εστω $\sqrt{9-x^2}=y\Leftrightarrow 9-x^2=y^2\Leftrightarrow x^2+y^2=9$, οπότε το ζητούμενο εμβαδό του ημικυκλίου με κέντρο $O(0,0)$ και $\rho=3$.

$E(\Omega)=\dfrac{\pi\cdot 3^2}{2}=\dfrac{9\pi}{2}$.

194. **α)** Αφού η f είναι συνεχής ισχύει $\lim\limits_{x\to\alpha^-}f(x)=\lim\limits_{x\to\alpha^+}f(x)=f(\alpha)\Leftrightarrow\dfrac{\alpha}{e}=\ln\alpha$.

Αρκεί να αποδείξουμε ότι η εξίσωση $\dfrac{\alpha}{e}=\ln\alpha$ έχει μοναδική ρίζα τη $\alpha=e$.

Εστω $g(x)=\ln x-\dfrac{x}{e}$, $x>0$ με $g'(x)=\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{e}=\dfrac{e-x}{ex}\ge 0\Leftrightarrow x\le e$. Για κάθε $x\in(0,e)$ είναι $g'(x)>0\Rightarrow g\uparrow(0,e]$ και για κάθε $x>e$ είναι $g'(x)<0\Rightarrow g\downarrow[e,+\infty)$. Μέγιστο της g το $g(e)=0$. Άρα $g(x)\le 0$ για κάθε $x>0$ και το $=$ ισχύει μόνο για $x=e$.

Συνεπώς $\alpha=e$ και $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x}{e}, & x\le e\\ \ln x, & x>e\end{cases}$

β) Για $x<e$ είναι $f'(x)=\dfrac{1}{e}$ και για $x>e$ είναι $f'(x)=\dfrac{1}{x}$. Στο $x_0=e$ έχουμε

$$\lim_{x\to e^-}\frac{f(x)-f(e)}{x-e}=\lim_{x\to e^-}\frac{\frac{x}{e}-1}{x-e}=\lim_{x\to e^-}\frac{x-e}{e(x-e)}=\frac{1}{e},\ \lim_{x\to e^+}\frac{f(x)-f(e)}{x-e}=\lim_{x\to e^+}\frac{\ln x-1}{x-e}\overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=}\lim_{x\to e^+}\frac{\frac{1}{x}}{1}=\frac{1}{e}.$$

Άρα $f'(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{e}, & x\le e\\ \dfrac{1}{x}, & x>e\end{cases}$

γ) Από τον προηγούμενο τύπο διαπιστώνουμε ότι $f'(x)>0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$ άρα $f\uparrow$ οπότε και 1–1 οπότε η f αντιστρέφεται. Για $x\le e$ είναι: $\dfrac{x}{e}=y\Leftrightarrow x=ey$ με $ey\le e\Leftrightarrow y\le 1$ και για $x>e$ είναι $\ln x=y\Leftrightarrow x=e^y$ με $e^y>e\Leftrightarrow y>1$. Άρα $f^{-1}(x)=\begin{cases}ex, & x\le 1\\ e^x, & x>1\end{cases}$

δ) Η f είναι συνεχής και το πρόσημό της δίνεται στον παρακάτω πίνακα

x	$-e^2$		0		e		e^2
f		$-$		$+$		$+$	

Οπότε το ζητούμενο εμβαδό είναι

$$E=-\int_{-e^2}^{0}\frac{x}{e}dx+\int_{0}^{e}\frac{x}{e}dx+\int_{e}^{e^2}\ln x dx=-\frac{1}{e}\left[\frac{x^2}{2}\right]_{-e^2}^{0}+\frac{1}{e}\left[\frac{x^2}{2}\right]_{0}^{e}+\int_{e}^{e^2}(x)'\ln x dx=$$

$$=\frac{e^4}{2e}+\frac{e^2}{2e}+\left[x\ln x\right]_{e}^{e^2}-\int_{e}^{e^2}1dx=...=\frac{e^3+2e^2+e}{2}.$$

195. **α)** Για κάθε $x\in\mathbb{R}-\{\pm1\}$ έχουμε $f'(x)=\dfrac{2(x^2-1)-2x\cdot 2x}{(x^2-1)^2}=\dfrac{-2(x^2+1)}{(x^2-1)^2}<0$.

Άρα η f είναι γνησίως φθίνουσα σε καθένα από τα διαστήματα $(-\infty,-1)$, $(-1,1)$ και $(1,+\infty)$ και δεν έχει ακρότατα.

β) Είναι $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{2x}{x^2}=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{2}{x}=0$

$\lim\limits_{x\to-1^-}f(x)=\lim\limits_{x\to-1^-}\left[\dfrac{1}{x+1}\cdot\dfrac{2x}{x-1}\right]=-\infty$, $\lim\limits_{x\to-1^+}f(x)=\lim\limits_{x\to-1^+}\left(\dfrac{1}{x+1}\cdot\dfrac{2x}{x-1}\right)=+\infty$,

$\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2}{x}=0$ οπότε $f(A)=(-\infty,+\infty)=\mathbb{R}$.

γ) Αφού $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=0$ και $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=0$ τότε η $y=0$ είναι οριζόντια ασύμπτωτη στο $-\infty$ και στο $+\infty$ ενώ από το προηγούμενο ερώτημα η $x=1$ και $x=-1$ είναι κατακόρυφες ασύμπτωτες.

δ) Η f είναι συνεχής και $f(x)>0$ στο $\left[e,e^2\right]$ οπότε

$$E(\Omega)=\int_{e}^{e^2}f(x)dx=\int_{e}^{e^2}\frac{2x}{x^2-1}dx=\left[\ln\left|x^2-1\right|\right]_{e}^{e^2}=\ln(e^4-1)-\ln(e^2-1)=\ln\frac{e^4-1}{e^2-1}=\ln(e^2+1).$$

ε) Εστω $\varphi(x)=f(x)\sigma\upsilon\nu 2x$, $x\in(-1,1)$. Είναι

$$\varphi(-x)=f(-x)\sigma\upsilon\nu(-2x)=\frac{2(-x)}{(-x)^2-1}\cdot\sigma\upsilon\nu 2x=-\frac{2x}{x^2-1}\sigma\upsilon\nu 2x=-f(x)\sigma\upsilon\nu 2x=-\varphi(x).$$

Άρα η h είναι περιττή οπότε $\int_{-p}^{p}\varphi(x)d(x)=\int_{-p}^{0}\varphi(x)d(x)+\int_{0}^{p}\varphi(x)d(x)=I_1-I_2$,

όμως $I_1=\int_{-p}^{0}\varphi(x)dx=\int_{p}^{0}\varphi(-u)(-du)=\int_{0}^{p}\varphi(-u)du=-\int_{0}^{p}\varphi(u)du=-I_2$.

Άρα $\int_{-p}^{p}\varphi(x)dx=-I_2+I_2=0$.

στ) Είναι $h(t)=\int_{3}^{t}\dfrac{x^3-3x}{x^2-1}+\int_{3}^{t}f(x)dx=\int_{3}^{t}\dfrac{x^3-3x+2x}{x^2-1}dx=\int_{3}^{t}\dfrac{x^3-x}{x^2-1}dx$.

Η συνάρτηση $\dfrac{x^3-x}{x^2-1}$ ορίζεται στο $(-\infty,-1)\cup(-1,1)\cup(1,+\infty)$ και αφού $3\in(1,+\infty)$

τότε $A_h=(3,+\infty)$ και $h(t)=\int_{3}^{t}\dfrac{x(x^2-1)}{x^2-1}dx=\int_{3}^{t}xdx=\left[\dfrac{x^2}{2}\right]_{3}^{t}=\dfrac{t^2-9}{2}$.

Άρα $\dfrac{t^2-9}{2}=8\Leftrightarrow t^2=25\Leftrightarrow t=5$ ή $t=-5$ που απορρίπτεται. Άρα $t=5$.

196. α) Για κάθε $x \in \mathbb{R}$ έχουμε

$$f'(x) = f(x) + 4xe^x \Leftrightarrow f'(x) - f(x) = 4xe^x \Leftrightarrow f'(x)e^{-x} - f(x)e^{-x} = 4x \Leftrightarrow$$

$$\left(f(x)e^{-x}\right)' = \left(2x^2\right)' \Leftrightarrow f(x)e^{-x} = 2x^2 + c \Leftrightarrow f(x) = \left(2x^2 + c\right)e^x.$$

Για $x = 0$ είναι $c = 0$ άρα $f(x) = 2x^2e^x$

β) Η f είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$ οπότε δεν έχει κατακόρυφες ασύμπτωτες.

Για $x \in (0, +\infty)$ είναι $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x \to +\infty} \left(2xe^x\right) = +\infty$ άρα η C_f δεν έχει πλάγια ή οριζόντια ασύμπτωτη στο $+\infty$. Για $x \in (-\infty, 0)$ είναι:

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{x \to -\infty} \left(2x^2e^x\right) = \lim_{x \to -\infty} \frac{2x^2}{e^{-x}} \overset{\frac{+\infty}{+\infty}}{=} \lim_{x \to -\infty} \frac{4x}{-e^{-x}} \overset{\left(\frac{-\infty}{-\infty}\right)}{=} \lim_{x \to -\infty} \frac{4}{e^{-x}} = \lim_{x \to -\infty} \left(4e^x\right) = 0.$$

Άρα η $y = 0$ είναι οριζόντια στο $-\infty$.

γ) Είναι $f'(x) = 2e^x \cdot x(x+2)$

Για κάθε $x < -2$ ή $x > 0$ είναι $f'(x) > 0 \Rightarrow f \uparrow (-\infty, -2]$ και $\uparrow [0, +\infty)$.

Για κάθε $x \in (-2, 0)$ είναι $f'(x) < 0 \Rightarrow f \downarrow [-2, 0]$.

Η f έχει τοπικό μέγιστο για $x = -2$ το $f(-2) = 8e^{-2}$ και τοπικό ελάχιστο για $x = 0$ το $f(0) = 0$.

δ) ΘΜΤ για την f' στα διαστήματα $[-1, 0]$ και $[0, 1]$ οπότε υπάρχουν

$$x_1 \in (-1, 0) : f''(x_1) = \frac{f'(0) - f'(-1)}{0 - (-1)} = 2e^{-1} \text{ και } x_2 \in (0, 1) : \ f''(x_1) = \frac{f(1) - f(0)}{1 - 0} = 6e.$$

Άρα $f''(x_1)f''(x_2) = 2e^{-1}6e = 12$.

ε) Για $t \in [x-2, x]$ με $x < -2$ είναι $x - 2 \le t \le x \overset{f\uparrow}{\Leftrightarrow} f(x-2) \le f(t) \le f(x)$ άρα

$$\int_{x-2}^{x} f(x-2)dt \le \int_{x-2}^{x} f(t)dt \le \int_{x-2}^{x} f(x)dt \Leftrightarrow f(x-2)\int_{x-2}^{x} dt \le \int_{x-2}^{x} f(t)dt \le f(x)\int_{x-2}^{x} dt \Leftrightarrow$$

$\Leftrightarrow 2f(x-2) \le \int_{x-2}^{x} f(t)dt \le 2f(x)$. Είναι $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = 0$ οπότε $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x-2) \overset{x-2=u}{=} \lim\limits_{u \to -\infty} f(u) = 0$

άρα από Κ.Π είναι και $\lim\limits_{x \to -\infty} \int_{x-2}^{x} f(t)dt$.

197. α) $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$ και $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{f(x)}{x} = +\infty$, $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x + 2\alpha}{2\alpha e^{2\alpha + x}} \underset{DLH}{\overset{\left(\frac{\infty}{\infty}\right)}{=}} \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{1}{2\alpha e^{2\alpha + x}} = 0$

οπότε η $y = 0$ οριζόντια ασύμπτωτη στο $+\infty$. Η f είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$ οπότε δεν έχει κατακόρυφες ασύμπτωτες.

β) $f'(x) = e^{2\alpha - x}\left(\dfrac{1}{2\alpha} - \dfrac{x}{2\alpha} - 1\right)$ και $f''(x) = e^{2\alpha - x}\left(\dfrac{x}{2\alpha} + 1 - \dfrac{2}{2\alpha}\right)$

Ο.Μ. για $x = 1 - 2\alpha$ και Σ.Κ για $x = 2 - 2\alpha$.

γ) $f(x) = f'(x) \Leftrightarrow \dfrac{1}{2\alpha} - \dfrac{x}{2\alpha} - 1 = \dfrac{x}{2\alpha} + 1 \Leftrightarrow x = \dfrac{1 - 4\alpha}{2}$ που είναι μοναδική.

δ) $d(\alpha)=\left|f(1)-f'(1)\right|=e^{2\alpha-1}\left(\dfrac{1}{2\alpha}+2\right)$,

$$d'(\alpha)=e^{2\alpha-1}\left(\frac{8\alpha^2+2\alpha-1}{2\alpha^2}\right)=e^{2\alpha-1}\frac{8\left(\alpha-\frac{1}{4}\right)\left(\alpha+\frac{1}{2}\right)}{2\alpha^2}\geq 0\overset{\alpha>0}{\Leftrightarrow}\alpha\geq\frac{1}{4}.$$

Για $\alpha>\dfrac{1}{4}$, είναι $d'(\alpha)>0\Rightarrow d\uparrow\left[\dfrac{1}{4},+\infty\right)$ και για $\alpha\in\left(0,\dfrac{1}{4}\right)$ είναι $d'(\alpha)<0\Rightarrow d\downarrow\left(0,\dfrac{1}{4}\right]$.

Το τμήμα έχει το μικρότερο δυνατό μήκος για $\alpha=\dfrac{1}{4}$.

ε) Είναι $f(x)=(2x+1)e^{\frac{1}{2}-x}$.

$$E(\lambda)=\int_{-\frac{1}{2}}^{\lambda}f(x)dx=\int_{-\frac{1}{2}}^{\lambda}(2x+1)e^{\frac{1}{2}-x}dx=-2(\lambda+1)e^{\frac{1}{2}-\lambda}+2e \text{ και}$$

$$\lim_{\lambda\to+\infty}E(\lambda)=\lim_{\lambda\to+\infty}\left(-2(\lambda+1)e^{\frac{1}{2}-\lambda}+2e\right)=2e$$

γιατί $\displaystyle\lim_{\lambda\to+\infty}(\lambda+1)e^{\frac{1}{2}-\lambda}=\lim_{\lambda\to+\infty}\frac{\lambda+1}{e^{\lambda-\frac{1}{2}}}\overset{\left(\frac{\infty}{\infty}\right)}{\underset{DLH}{=}}\lim_{\lambda\to+\infty}\frac{1}{e^{\lambda-\frac{1}{2}}}=0$.

198. **α)** Είναι $f'(x)=\dfrac{4\left(4-x^2\right)}{\left(x^2+4\right)^2}$.

x	$-\infty$	-2	2	$+\infty$
f″	$-$	$+$	$-$	
f	0 ↘	$f(-2)=-1$ ↗	$f(2)=1$ ↘	0

$\displaystyle\lim_{x\to-\infty}f(x)=\lim_{x\to-\infty}\frac{4x}{x^2+4}=0$ και $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}f(x)=0$.

Η f έχει Ο.Ε. το $f(-2)=-1$ και Ο.Μ. το $f(2)=1$.

β) Είναι $f(A)=[-1,1]$

γ) Η f συνεχής στο $\mathbb{R}$ οπότε δεν έχει κατακόρυφες ασύμπτωτες και αφού $\displaystyle\lim_{x\to-\infty}f(x)=0$,

$\displaystyle\lim_{x\to+\infty}f(x)=0$ τότε η $y=0$ είναι οριζόντια ασύμπτωτη της C_f.

δ) i. $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)\eta\mu x}{2x}=\lim_{x\to+\infty}\left[\frac{4x}{x^2+1}\frac{\eta\mu x}{2x}\right]=\lim_{x\to+\infty}\left[\frac{2}{x^2+1}\cdot\eta\mu x\right]$.

Είναι $\left|\dfrac{2}{x^2+1}\eta\mu x\right|\leq\dfrac{2}{x^2+1}$ και από κριτήριο παρεμβολής $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)\eta\mu x}{2x}=0$.

ii. $\displaystyle\int_0^{\frac{1}{x}}f(t)dt=\int_0^{\frac{1}{x}}\frac{4t}{t^2+4}dt=2\left[\ln\left|t^2+4\right|\right]_0^{\frac{1}{x}}=2\left[\ln\left(\frac{1}{x^2}+4\right)-\ln4\right]=2\ln\frac{4x^2+1}{4x^2}$.

Οπότε $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}2x^2\int_0^{\frac{1}{x}}f(t)dt=\lim_{x\to+\infty}\left[4x^2\ln\frac{4x^2+1}{4x^2}\right]=\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln\left(1+\frac{1}{4x^2}\right)}{\frac{1}{4x^2}}=\lim_{u\to0}\frac{\ln(1+u)}{u}\overset{\frac{0}{0}}{=}1$.

ε) Για κάθε $t\in\mathbb{R}$ $-1\leq f(t)\leq1$ άρα $\displaystyle\int_x^y-1dt\leq x\int_x^y\frac{4t}{t^2+1}dt\leq\int_x^y dt\Leftrightarrow$

$$-(y-x)\leq2\left[\ln\left(x^2+4\right)\right]_x^y\leq y-x\Leftrightarrow-\left(\frac{y-x}{2}\right)\leq\ln\frac{y^2+4}{x^2+4}\leq\frac{y-x}{2}\Leftrightarrow\left|\ln\frac{y^2+4}{x^2+4}\right|\leq\frac{y-x}{2}.$$

στ) είναι $-1\le f(x)\le 1$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$ και $f(-2)=-1$ άρα η εξίσωση $f(x)=-1$ έχει μοναδική λύση $x=-1$.

ζ) Είναι $f(x)\ge -1\ \ \forall x\in\mathbb{R}$ άρα $f(x_1)+1\ge 0$, $f(x_2)+1\ge 0$ και είναι $f(x)=-1$ μόνο για $x=-2$. Άρα $\left[f(x_1)+1\right]+\left[f(x_2)+1\right]=0\Leftrightarrow x_1=x_2=-2$.

η) Είναι $f(-2)=1\ne 1=f(2)$ και f συνεχής στο $\left[-2,2\right]$.

Αφού για παράδειγμα $-1<\dfrac{\sqrt{12}}{5}<1$, $-1<\dfrac{\sqrt{13}}{5}<1$ τότε από ΘΕΤ υπάρχουν $\alpha,\beta\in(-2,2)$ τέτοια ώστε $f(\alpha)=\dfrac{\sqrt{12}}{5}$ και $f(\beta)=\dfrac{\sqrt{13}}{5}$. Τότε $f^2(\alpha)+f^2(\beta)=\dfrac{12}{25}+\dfrac{13}{25}=1$.

199. **α) i.** Είναι $f'(x)=2f^2(x)-6f(x)+9\Leftrightarrow f'(x)=f^2(x)+f^2(x)-6f(x)+9\Leftrightarrow$

$(1)\Rightarrow\ f'(x)=f^2(x)+\left(f(x)-3\right)^2>0$ για κάθε $x\in\left[\alpha,\beta\right]$ οπότε η f είναι $\uparrow$ στο $\left[\alpha,\beta\right]$.

ii. Αφού $\alpha<\beta$ και η $f\uparrow$ τότε $f(\alpha)<f(\beta)\Leftrightarrow f(\alpha)<3f(\alpha)\Leftrightarrow 2f(\alpha)>0\Leftrightarrow f(\alpha)>0$ και για $x\ge\alpha$ θα είναι $f(x)\ge f(\alpha)>0$ άρα $f(x)>0$.

iii. Από την (1) προκύπτει ότι $f'(x)>f^2(x)$

και αφού $f(x)>0$ τότε $\dfrac{f'(x)}{f(x)}>f(x)\Leftrightarrow\dfrac{f'(x)}{f(x)}-f(x)>0$

οπότε και $\displaystyle\int_\alpha^\beta\left(\frac{f'(x)}{f(x)}-f(x)\right)dx>0\Leftrightarrow\int_\alpha^\beta\frac{f'(x)}{f(x)}dx-\int_\alpha^\beta f(x)dx>0\Leftrightarrow$

$\displaystyle\Leftrightarrow\left[\ln f(x)\right]_\alpha^\beta>\int_\alpha^\beta f(x)dx\Leftrightarrow\int_\alpha^\beta f(x)dx<\ln\frac{f(\beta)}{f(\alpha)}=\ln 3$.

β) Αφού η f είναι παραγωγίσιμη τότε από την (1) θα είναι και η f' παραγωγίσιμη με $f''(x)=2f(x)f'(x)+2\left[f(x)-3\right]f'(x)=2f'(x)\left[2f(x)-3\right]$.

Αν $f(\alpha)>2$ τότε $f(x)\ge f(\alpha)>2\Leftrightarrow 2f(x)>4\Leftrightarrow 2f(x)-3>1>0$ οπότε η $f''(x)=2f'(x)\left[2f(x)-3\right]>0$ αφού και $f'(x)>0$, συνεπώς η f κυρτή.

γ) Εστω ότι υπάρχουν 3 σημεία $A(x_1,f(x_1))$, $B(x_2,f(x_2))$ και $\Gamma(x_3,f(x_3))$ με $x_1<x_2<x_3$ τα οποία είναι συνευθειακά. Τότε $AB//B\Gamma$ δηλαδή $\dfrac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}=\dfrac{f(x_3)-f(x_2)}{x_3-x_2}\quad(2)$.

Εφαρμόζουμε Θ.Μ.Τ. για την f στα διαστήματα $\left[x_1,x_2\right],\left[x_2,x_3\right]$. Τότε υπάρχουν $\xi_1\in(x_1,x_2)$ και $\xi_2\in(x_2,x_3)$ τέτοια ώστε $f'(\xi_1)=\dfrac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_2}$ και $f'(\xi_2)=\dfrac{f(x_3)-f(x_2)}{x_3-x_2}$.

Από (2) θα είναι $f'(\xi_1)=f'(\xi_2)$ (άτοπο) αφού $\xi_1<\xi_2$ και η $f'\uparrow$.

200. **α)** Είναι $f'(x)f(x)=x\Leftrightarrow 2f'(x)f(x)=2x$ ή $\left(f^2(x)\right)'=\left(x^2\right)'\Leftrightarrow f^2(x)=x^2+c$.

Για $x=0$ προκύπτει $c=1$ άρα $f^2(x)=x^2+1\ne 0$. Άρα $f(x)\ne 0$ και αφού η f συνεχής τότε διατηρεί πρόσημο και αφού $f(0)=1>0$ τότε $f(x)>0$ άρα $f(x)=\sqrt{x^2+1}$.

β) i. Είναι $\left|\frac{\eta\mu x}{f(x)}\right| = \left|\frac{\eta\mu x}{\sqrt{x^2+1}}\right| \le \frac{1}{\sqrt{x^2+1}} \Leftrightarrow -\frac{1}{\sqrt{x^2+1}} \le \frac{\eta\mu x}{\sqrt{x^2+1}} \le \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$.

Όμως $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{\sqrt{x^2+1}} = 0$ άρα από κριτήριο παρεμβολής $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\eta\mu x}{f(x)} = 0$.

ii. $\lim\limits_{x\to0}\frac{\eta\mu x}{f(x)-1} = \lim\limits_{x\to0}\frac{\eta\mu x}{\sqrt{x^2+1}-1} = \lim\limits_{x\to0}\frac{\eta\mu x\left(\sqrt{x^2+1}+1\right)}{x^2} = \lim\limits_{x\to0}\left[\frac{\eta\mu x}{x}\cdot\frac{\sqrt{x^2+1}+1}{x}\right]$.

Όμως $\lim\limits_{x\to0^-}\frac{\sqrt{x^2+1}+1}{x} = \lim\limits_{x\to0^-}\left[\frac{1}{x}\left(\sqrt{x^2+1}+1\right)\right] = -\infty$ και

$\lim\limits_{x\to0^+}\frac{\sqrt{x^2+1}+1}{x} = \lim\limits_{x\to0^+}\left[\frac{1}{x}\left(\sqrt{x^2+1}+1\right)\right] = +\infty$. Οπότε δεν υπάρχει το $\lim\limits_{x\to0}\frac{\eta\mu x}{f(x)-1}$.

γ) Είναι $f'(x) = \frac{2x}{2\sqrt{x^2+1}} = \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$. Η f είναι $\downarrow$ στο $(-\infty,0]$ και $\uparrow$ στο $[0,+\infty)$ και έχει ελάχιστο για $x=0$ το $f(0)=1$.

x	$-\infty$	0	$+\infty$
f'	$-$		$+$
f	$\searrow$		$\nearrow$

δ) i. $I_0 = \int_0^1\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}dx = \int_0^1\left(\sqrt{x^2+1}\right)'dx = \left[\sqrt{x^2+1}\right]_0^1 = \sqrt{2}-1$

$I_1 = \int_0^1\frac{x^3}{\sqrt{x^2+1}}dx = \int_0^1 x^2\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}dx = \int_0^1 x^2\left(\sqrt{x^2+1}\right)'dx = \left[x^2\sqrt{x^2+1}\right]_0^1 - \int_0^1 2x\sqrt{x^2+1}dx =$

$= \sqrt{2} - \int_0^1\left(x^2+1\right)'\sqrt{x^2+1}dx = \sqrt{2} - \left[\frac{\left(x^2+1\right)^{3/2}}{\frac{3}{2}}\right]_0^1 = \sqrt{2} - \frac{2}{3}\left[\left(\sqrt{x^2+1}\right)^3\right]_0^1 = \frac{2-\sqrt{2}}{3}$.

ii. Είναι $I_\nu = \int_0^1\frac{x^{2\nu+1}}{f(x)}dx = \int_0^1 x^{2\nu}\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}dx = \int_0^1 x^{2\nu}\left(\sqrt{x^2+1}\right)'dx =$

$= \left[x^{2\nu}\sqrt{x^2+1}\right]_0^1 - \int_0^1 2\nu x^{2\nu-1}\sqrt{x^2+1}dx = \sqrt{2} - 2\nu\int_0^1 x^{2\nu-1}f(x)dx$.

iii. Για $\nu=2$ $\quad I_2 = \sqrt{2} - 4\int_0^1 x^3\sqrt{x^2+1}dx$.

Θέτω $x^2+1=u \Leftrightarrow x^2 = u-1$ και $2xdx = du$ για

x	0	1
u	1	2

Άρα $I_2 = \sqrt{2} - 2\int_0^1 x^2\sqrt{x^2+1}\cdot 2xdx = \sqrt{2} - 2\int_1^2(u-1)\sqrt{u}\,du = \sqrt{2} - 2\int_1^2 u^{3/2}du + 2\int_1^2 u^{1/2}du =$

$= \sqrt{2} - 2\left[\frac{4^{\frac{5}{2}}}{\frac{5}{2}}\right]_1^2 + 2\left[\frac{4^{\frac{5}{2}}}{\frac{3}{2}}\right]_1^2 = \sqrt{2} - \frac{4}{5}\left[\sqrt{4^5}\right]_1^2 + \frac{4}{3}\left[\sqrt{4^3}\right]_1^2 =$

$= \sqrt{2} - \frac{4}{5}\left(4\sqrt{2}-1\right) + \frac{4}{3}\left(2\sqrt{2}-1\right) = \frac{7\sqrt{2}-8}{15}$.

201. α) Είναι $\frac{xf(x)+9}{2+f^2(x)} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow 2xf(x)+18 = 2+f^2(x) \Leftrightarrow f^2(x) - 2xf(x) = 16 \Leftrightarrow$

$f^2(x) - 2xf(x) + x^2 = x^2+16 \Leftrightarrow \left(f(x)-x\right)^2 = x^2+16$.

Εστω $\varphi(x)=f(x)-x$ τότε αφού $\varphi^2(x)=x^2+16\neq 0$ θα είναι $\varphi(x)\neq 0$ και αφού η φ είναι συνεχής τότε θα διατηρεί σταθερό πρόσημο. Όμως $\varphi(0)=f(0)=4>0$ άρα $\varphi(x)>0$ οπότε $\varphi(x)=\sqrt{x^2+16}\Leftrightarrow f(x)=x+\sqrt{x^2+16}$

β) i. Είναι $h(x)=\ln f(x)=\ln\left(x+\sqrt{x^2+16}\right)$.

Για κάθε $x\in\mathbb{R}$, $x+\sqrt{x^2+16}>x+\sqrt{x^2}=x+|x|\geq 0$ άρα $A_h=\mathbb{R}$.

ii. $h'(x)=\dfrac{f'(x)}{f(x)}=\dfrac{1}{x+\sqrt{x^2+16}}\left(1+\dfrac{2x}{2\sqrt{x^2+16}}\right)=\dfrac{1}{\sqrt{x^2+16}}>0$ άρα η h' είναι $\uparrow$ οπότε αντιστρέφεται.

Εστω $y=h(x)=\ln\left(x+\sqrt{x^2+16}\right)\Leftrightarrow e^y=x+\sqrt{x^2+16}\Leftrightarrow\sqrt{x^2+16}=e^y-x\overset{e^y-x>0}{\Leftrightarrow}$,

οπότε $x^2+16=e^{2y}-2xe^y+x^2\Leftrightarrow 2xe^y=e^{2y}-16\Leftrightarrow x=\dfrac{e^{2y}-16}{2e^y}$ άρα $h^{-1}(x)=\dfrac{e^{2x}-16}{2e^x}$.

Πρέπει $e^x-x>0\Leftrightarrow e^y>\dfrac{e^{2y}-16}{2e^y}\Leftrightarrow e^{2y}>-16$ που αληθεύει πάντα,

άρα $h^{-1}(x)=\dfrac{e^{2x}-16}{2e^x}$, $x\in\mathbb{R}$.

γ) $I_1=\displaystyle\int_0^3\frac{1}{\sqrt{x^2+16}}dx=\int_0^3\left[h(x)\right]'dx=\left[h(x)\right]_0^3=h(3)-h(0)=\ln f(3)-\ln f(0)=\ln 8-\ln 4=\ln 2$.

δ) $I_2+16I_1=\displaystyle\int_0^3\frac{x^2}{\sqrt{x^2+16}}dx+16\int_0^3\frac{1}{\sqrt{x^2+16}}dx=\int_0^3\frac{x^2+16}{\sqrt{x^2+16}}dx=\int_0^3\sqrt{x^2+16}\,dx=I_3$.

ε) $I_3=\displaystyle\int_0^3\sqrt{x^2+16}\,dx=\int_0^3(x)'\sqrt{x^2+16}\,dx=\left[x\sqrt{x^2+16}\right]_0^3-\int_0^3\frac{x}{\sqrt{x^2+16}}dx=$

$=15-\displaystyle\int_0^3\frac{x^2}{\sqrt{x^2+16}}dx\Leftrightarrow I_3=15-I_2\Leftrightarrow I_3+I_2=15$.

στ) Είναι $\left.\begin{aligned}I_2+I_3&=15\\ I_2-I_3&=-16I_1\end{aligned}\right\}\Leftrightarrow\begin{aligned}I_2+I_3&=15\\ I_2-I_3&=-16\ln 2\end{aligned}$, οπότε $I_2=\dfrac{15}{2}-8\ln 2$ και $I_3=\dfrac{15}{2}+8\ln 2$.

202. α) Είναι $(f(x)+x)(f'(x)+1)=x\Leftrightarrow 2(f(x)+x)(f'(x)+1)=2x\Leftrightarrow\left[(f(x)+x)^2\right]'=(x^2)'$

$(f(x)+x)^2=x^2+c$. Για $x=0$ προκύπτει $c=1$ οπότε $(f(x)+x)^2=x^2+1$.

Εστω $\varphi(x)=f(x)+x$, τότε έχουμε $\varphi^2(x)=x^2+1\neq 0$. Άρα $\varphi(x)\neq 0$ και αφού η φ είναι συνεχής θα διατηρεί σταθερό πρόσημο. Είναι $\varphi(0)=f(0)=1>0$ άρα $\varphi(x)>0$ οπότε $\varphi(x)=\sqrt{x^2+1}\Leftrightarrow f(x)+x=\sqrt{x^2+1}\Leftrightarrow f(x)=\sqrt{x^2+1}-x$, $x\in\mathbb{R}$.

β) Για κάθε $x\in\mathbb{R}$ είναι $f(x)=\sqrt{x^2+1}-x>\sqrt{x^2}-x=|x|-x\geq 0$ άρα $f(x)>0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

γ) Για κάθε $x\in(0,+\infty)$ είναι $|\eta\mu f(x)|\leq|f(x)|=f(x)\Leftrightarrow -f(x)\leq\eta\mu(f(x))\leq f(x)$.

Είναι $f(x)=\sqrt{x^2+1}-x=\dfrac{x^2+1-x^2}{\sqrt{x^2+1}+x}=\dfrac{1}{\sqrt{x^2+1}+x}$ και

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{\sqrt{x^2+1}+x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{x\left(\sqrt{1+\dfrac{1}{x^2}}+1\right)}=0$,

άρα από κριτήριο παρεμβολής προκύπτει ότι $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\eta\mu\left(f(x)\right)\right)=0$.

δ) Η f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με $f'(x)=\dfrac{2x}{2\sqrt{x^2+1}}-1=\dfrac{x-\sqrt{x^2+1}}{\sqrt{1+x^2}}=\dfrac{-f(x)}{\sqrt{x^2+1}}<0 \quad (3)$.

Επομένως η f είναι $\downarrow$ στο $\mathbb{R}$ άρα και 1−1, συνεπώς αντιστρέφεται. Εστω

$f(x)=y\overset{y>0}{\Leftrightarrow} y=\sqrt{x^2+1}-x\Leftrightarrow y+x=\sqrt{x^2+1}\overset{y+x\geq 0}{\Rightarrow} y^2+2xy+x^2=x^2+1\Leftrightarrow 2xy=1-y^2\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x=\dfrac{1-y^2}{2y}$. Είναι $y+x\geq 0\Leftrightarrow y+\dfrac{1-y^2}{2y}\geq 0\Leftrightarrow \dfrac{y^2+1}{y}\geq 0$ που ισχύει αφού $y=f(x)>0$.

Άρα $f^{-1}(y)=\dfrac{1-y^2}{2y}$, $y>0$ δηλαδή $f^{-1}(x)=\dfrac{1-x^2}{2x}$, $x>0$.

ε) Από τη σχέση $(3)\Leftrightarrow -\dfrac{f'(x)}{f(x)}=\dfrac{1}{\sqrt{x^2+1}}$.

Άρα $I=\displaystyle\int_{2\sqrt{2}}^{0}\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}dx=-\int_{2\sqrt{2}}^{0}\frac{f'(x)}{f(x)}dx=\int_{0}^{2\sqrt{2}}\frac{f'(x)}{f(x)}dx=\left[\ln f(x)\right]_0^{2\sqrt{2}}=$

$=\ln f\left(2\sqrt{2}\right)-\ln 1=\ln\left(3-2\sqrt{2}\right)$.

203. α) Εστω $I=\displaystyle\int_0^2 f^2(x)dx+\int_0^2\left(f'(x)\right)^2dx=f^2(0)-f^2(2) \quad (1)$,

τότε $I=\displaystyle\int_0^2 f^2(x)dx+\int_0^2\left(f'(x)\right)^2dx+\int_0^2 2f(x)f'(x)dx-\int_0^2 2f(x)f'(x)dx=$

$=\displaystyle\int_0^2\left[f^2(x)+\left(f'(x)\right)^2+2f(x)f'(x)\right]dx-\int_0^2\left[f^2(x)\right]'dx=$

$=\displaystyle\int_0^2\left(f(x)+f'(x)\right)^2dx-\left[f^2(x)\right]_0^2=\int_0^2\left(f(x)+f'(x)\right)^2dx-\left(f^2(2)-f^2(0)\right)\Leftrightarrow$

$I=\displaystyle\int_0^2\left(f(x)+f'(x)\right)^2dx+I\Leftrightarrow\int_0^2\left(f(x)+f'(x)\right)^2dx=0$.

Είναι $\left(f(x)+f'(x)\right)^2\geq 0$ για κάθε $x\in[0,2]$ αν υπάρχει $x_0\in[0,2]$ τέτοιο ώστε

$f(x_0)+f'(x_0)\neq 0$ τότε $\displaystyle\int_0^2\left(f(x)+f'(x)\right)^2dx>0$ άτοπο.

Άρα $f(x)+f'(x)=0 \quad (2)$ για κάθε $x\in[0,2]$

β) Είναι $\displaystyle\int_0^2\left(f'(x)\right)^2dx=\int_0^2 f'(x)\cdot f'(x)dx\overset{(2)}{=}\int_0^2 f'(x)\left(-f(x)\right)dx=$

$=\displaystyle -\int_0^2 f'(x)f(x)dx=-\left[\frac{f^2(x)}{2}\right]_0^2=\frac{1}{2}\left(f^2(0)-f^2(2)\right) \quad (3)$.

Άρα η σχέση (1) με βάση την (3) γίνεται

$\displaystyle\int_0^2 f^2(x)dx+\frac{1}{2}\left(f^2(0)-f^2(2)\right)=f^2(0)-f^2(2)\Leftrightarrow\int_0^2 f^2(x)dx=\frac{1}{2}\left(f^2(0)-f^2(2)\right) \quad (4)$.

Από (3) και (4) προκύπτει ότι $\int_0^2 f^2(x)dx = \int_0^2 (f'(x))^2 dx = \frac{1}{2}(f^2(0)-f^2(2))$

γ) Είναι $f(x)+f'(x)=0 \overset{e^x}{\Leftrightarrow} e^x f'(x)+e^x f(x)=0 \Leftrightarrow (e^x f(x))'=0 \Leftrightarrow e^x f(x)=c$.

Για $x=1$ προκύπτει $c=e^2$, άρα $e^x f(x)=e^2 \Leftrightarrow f(x)=e^{2-x}$, $x\in[0,2]$.

204. **α)** Εστω $I=\int_0^\lambda \frac{f(x)}{f(\lambda-x)+f(x)}dx$. Θέτω $u=\lambda-x$ οπότε $dx=-du$ και

x	0	λ
u	λ	0

οπότε $I=\int_\lambda^0 \frac{f(\lambda-u)}{f(u)+f(\lambda-u)}(-du)=\int_0^\lambda \frac{f(\lambda-u)}{f(u)+f(\lambda-u)}du=\int_0^\lambda \frac{f(\lambda-x)}{f(x)+f(\lambda-x)}dx$.

β) i. Είναι $f\left(\frac{\pi}{2}-x\right)+f(x)=\sigma\upsilon\nu\left(\frac{\pi}{2}-x\right)+\sigma\upsilon\nu x=\eta\mu x+\sigma\upsilon\nu x\neq 0$ για κάθε $x\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ οπότε

$$I_1=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\eta\mu x}{\eta\mu x+\sigma\upsilon\nu x}dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{f\left(\frac{\pi}{2}-x\right)}{f\left(\frac{\pi}{2}-x\right)+f(x)}dx\overset{(\alpha)}{=}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{f(x)}{f(x)+f\left(\frac{\pi}{2}-x\right)}dx=$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sigma\upsilon\nu x}{\eta\mu x+\sigma\upsilon\nu x}dx=I_3,\text{ άρα } I_1=I_3$$

και $I_1+I_3=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\eta\mu x}{\eta\mu x+\sigma\upsilon\nu x}dx+\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sigma\upsilon\nu x}{\eta\mu x+\sigma\upsilon\nu x}dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\eta\mu x+\sigma\upsilon\nu x}{\eta\mu x+\sigma\upsilon\nu x}dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}1dx=\frac{\pi}{2}$,

άρα $2I_1=\frac{\pi}{2}\Leftrightarrow I_1=\frac{\pi}{4}$.

ii. Είναι $f'(x)h'(x)=f'(x)h(x)+f(x)h'(x)$, δηλαδή

$-\eta\mu x\cdot h'(x)=-\eta\mu x\cdot h(x)+\sigma\upsilon\nu x\cdot h'(x)\Leftrightarrow$

$\eta\mu x\cdot h(x)=(\eta\mu x+\sigma\upsilon\nu x)h'(x)\Leftrightarrow\frac{h'(x)}{h(x)}=\frac{\eta\mu x}{\eta\mu x+\sigma\upsilon\nu x}$.

Οπότε $I_2=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{h'(x)}{h(x)}dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\eta\mu x}{\eta\mu x+\sigma\upsilon\nu x}dx=I_1=\frac{\pi}{4}$.

iii. Από το προηγούμενο ερώτημα έχουμε

$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{h'(x)}{h(x)}dx=\frac{\pi}{4}\Leftrightarrow\int_0^{\frac{\pi}{2}}[\ln h(x)]'dx=\frac{\pi}{4}\Leftrightarrow[\ln h(x)]_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{\pi}{4}\Leftrightarrow\ln h\left(\frac{\pi}{2}\right)-\ln h(0)=\frac{\pi}{4}\quad(1)$.

Θεωρούμε τη συνάρτηση $\varphi(x)=\ln h(x)$ η οποία είναι παραγωγίσιμη στο $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ με

$\varphi'(x)=\frac{h'(x)}{h(x)}$ οπότε από Θ.Μ.Τ. υπάρχει $\rho\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ τέτοιο ώστε

$$\varphi'(\rho)=\frac{\varphi\left(\frac{\pi}{2}\right)-\varphi(0)}{\frac{\pi}{2}-0}\Leftrightarrow\frac{h'(\rho)}{h(\rho)}=\frac{\ln\left(\frac{\pi}{2}\right)-h(0)}{\frac{\pi}{2}}\overset{(1)}{\Leftrightarrow}\frac{h'(\rho)}{h(\rho)}=\frac{\frac{\pi}{4}}{\frac{\pi}{2}}=\frac{1}{2}\Leftrightarrow h'(\rho)=\frac{1}{2}h(\rho).$$

205. **α)** Εστω $I=\int_{-x}^{x}\frac{\sigma\upsilon\nu t}{1+e^t}dt=\int_{-x}^{0}\frac{\sigma\upsilon\nu t}{1+e^t}dt+\int_{0}^{x}\frac{\sigma\upsilon\nu t}{1+e^t}dt$.

Αν $I_1=\int_{-x}^{0}\frac{\sigma\upsilon\nu t}{1+e^t}dt$ τότε θέτω $t=-u$ οπότε $dt=-du$ και

t	$-x$	0
u	x	0

άρα $I_1=\int_{x}^{0}\frac{\sigma\upsilon\nu(-u)}{1+e^{-u}}(-du)=\int_{0}^{x}\frac{\sigma\upsilon\nu u}{1+\frac{1}{e^u}}du=\int_{0}^{x}\frac{e^u\sigma\upsilon\nu u}{1+e^u}du=\int_{0}^{x}\frac{e^t\sigma\upsilon\nu t}{1+e^t}dt$.

Άρα $I=\int_{0}^{x}\frac{e^t\sigma\upsilon\nu t}{1+e^t}dt+\int_{0}^{x}\frac{\sigma\upsilon\nu t}{1+e^t}dt=\int_{0}^{x}\frac{\left(e^t+1\right)\sigma\upsilon\nu t}{1+e^t}dt=\int_{0}^{x}\sigma\upsilon\nu t\,dt=\left[\eta\mu t\right]_0^x=\eta\mu x$.

Οπότε η δοσμένη σχέση γίνεται:

$\left(f''(x)+1\right)\sigma\upsilon\nu x=f'(x)\eta\mu x\Leftrightarrow f''(x)\sigma\upsilon\nu x-f'(x)\eta\mu x=-\sigma\upsilon\nu x\Leftrightarrow\left(f'(x)\sigma\upsilon\nu x\right)'=\left(-\eta\mu x\right)'$,

άρα $f'(x)\sigma\upsilon\nu x=-\eta\mu x+c_1$.

Για $x=0$ είναι $c_1=0$. Οπότε $f'(x)\sigma\upsilon\nu x=-\eta\mu x\Leftrightarrow f'(x)=-\frac{\eta\mu x}{\sigma\upsilon\nu x}\Leftrightarrow f'(x)=\left(\ln(\sigma\upsilon\nu x)\right)'$,

άρα $f(x)=\ln(\sigma\upsilon\nu x)+c_2$.

Για $x=0$ προκύπτει ότι $c_2=0$ άρα $f(x)=\ln(\sigma\upsilon\nu x)$.

β) Είναι $f'(x)=\frac{-\eta\mu x}{\sigma\upsilon\nu x}=-\varepsilon\varphi x$, $f''(x)=-\frac{1}{\sigma\upsilon\nu^2 x}<0$

	$-\frac{\pi}{2}$	0	$\frac{\pi}{2}$
f'	+		−
f''	−		−
f	↗		↘

Η f έχει ολικό μέγιστο για $x=0$ το $f(0)=\ln(\sigma\upsilon\nu 0)=0$.

γ) • Αν $x=y$ ισχύει η ισότητα.

• Αν $x<y$ εφαρμόζουμε Θ.Μ.Τ. για την $f(t)=\ln(\sigma\upsilon\nu t)$ στα διαστήματα $\left[x,\frac{x+y}{2}\right],\left[\frac{x+y}{2},y\right]$,

οπότε υπάρχει $\xi_1\in\left(x,\frac{x+y}{2}\right)$ τέτοιο ώστε $f'(\xi_1)=\frac{f\left(\frac{x+y}{2}\right)-f(x)}{\frac{y-x}{2}}$

και $\xi_2\in\left(\frac{x+y}{2},y\right)$ τέτοιο ώστε $f'(\xi_2)=\frac{f(y)-f\left(\frac{x+y}{2}\right)}{\frac{y-x}{2}}$.

Επειδή $f''(x)<0$ τότε $f'\downarrow$ άρα για $\xi_1<\xi_2$. Θα είναι

$f'(\xi_1)>f'(\xi_2)\Leftrightarrow f\left(\frac{x+y}{2}\right)-f(x)>f(y)-\frac{f(x+y)}{2}\Leftrightarrow 2f\left(\frac{x+y}{2}\right)>f(x)+f(y)\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 2\ln\sigma\upsilon\nu\frac{x+y}{2}>\ln(\sigma\upsilon\nu x)+\ln(\sigma\upsilon\nu y)\Leftrightarrow \ln\sigma\upsilon\nu^2\frac{x+y}{2}>\ln(\sigma\upsilon\nu x\,\sigma\upsilon\nu y)$,

άρα $\sigma\upsilon\nu^2\frac{x+y}{2}>\sigma\upsilon\nu x\,\sigma\upsilon\nu y$. Όμοια αν $x>y$.

Άρα για κάθε $x,y\in\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$ θα είναι $\sigma\upsilon\nu^2\frac{x+y}{2}\geq\sigma\upsilon\nu x\,\sigma\upsilon\nu y$.

δ) Είναι $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{\eta\mu^2 x}\overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=}\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f'(x)}{2\eta\mu x\sigma\upsilon\nu x}=\lim\limits_{x\to 0}\left[\dfrac{-\dfrac{\eta\mu x}{\sigma\upsilon\nu x}}{2\eta\mu x\sigma\upsilon\nu x}\right]=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{2\sigma\upsilon\nu^2 x}=\dfrac{1}{2}$

206. **α)** Επειδή $f'(x)<0$ τότε η $f\downarrow$ στο $[2,5]$ άρα και 1–1 οπότε η f είναι αντιστρέψιμη με πεδίο ορισμού το σύνολο τιμών της f. Είναι $f(A)=[f(5),f(2)]=[f(5),5]$ αφού η $f\downarrow$ άρα $D_{f^{-1}}=[f(5),5]$.

β) i. Είναι $\int_{f(2)}^{f(5)} f^{-1}(t)dt+\int_2^5 f(t)dt=0\quad(1)$

Θέτω $f^{-1}(t)=u\Leftrightarrow t=f(u)$ και $dt=f'(u)du$. Επίσης

t	f(2)	f(5)
u	2	5

Άρα η (1) γίνεται: $\int_2^5 uf'(u)du+\int_2^5 f(t)dt=0\Leftrightarrow [uf(u)]_2^5-\int_2^5 f(u)du+\int_2^5 f(t)dt=0\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 5f(5)-2f(2)=0\Leftrightarrow 5f(5)=10\Leftrightarrow f(5)=2$.

ii. Θεωρούμε την $h(x)=f(x)+x$ η οποία είναι παραγωγίσιμη στο $[2,5]$ άρα και συνεχής. Επίσης $h(2)=f(2)+2=5+2=7$, $h(5)=f(5)+5=2+5=7$, άρα $h(2)=h(5)$. Επίσης $h'(x)=f'(x)+1$. Άρα από Θ. Rolle υπάρχει $\xi\in(2,5)$ τέτοιο ώστε $h'(\xi)=0\Leftrightarrow f'(\xi)=-1$. Η ευθεία $\eta: x-y+1821=0$ έχει συντελεστή διεύθυνσης $\lambda_\eta=1$. Η εφαπτόμενη της C_f στο σημείο $M(\xi,f(\xi))$ έχει συντελεστή διεύθυνσης $\lambda_{\varepsilon\varphi}=f'(\xi)=-1$. Επειδή $\lambda_\eta\cdot\lambda_{\varepsilon\varphi}=-1$ τότε η εφαπτομένη της C_f στο σημείο $M(\xi,f(\xi))$ είναι κάθετη στην ευθεία (η).

iii. Θεωρούμε την $\varphi(x)=f(x)-x$ η οποία είναι συνεχής στο $[2,5]$ με $\varphi(2)=f(2)-2=5-2=3>0$ και $\varphi(5)=f(5)-5=-3<0$. Οπότε $\varphi(2)\cdot\varphi(5)<0$, άρα από Θ. Bolzano υπάρχει $\rho\in(2,5)$ τέτοιο ώστε $\varphi(\rho)=0\Leftrightarrow f(\rho)=\rho$. Επίσης $\varphi'(x)=f'(x)-1<0$ αφού $f'(x)<0$ άρα η φ είναι $\downarrow$ οπότε το ρ που βρήκαμε προηγουμένως είναι μοναδικό.

iv. Εφαρμόζουμε Θ.Μ.Τ. για την f στα διαστήματα $[2,\rho]$ και $[\rho,5]$ οπότε υπάρχουν $\xi_1\in(2,\rho)$ και $\xi_2\in(\rho,5)$ τέτοια ώστε:

$f'(\xi_1)=\dfrac{f(\rho)-f(2)}{\rho-2}=\dfrac{\rho-5}{\rho-2}$ και $f'(\xi_2)=\dfrac{f(5)-f(\rho)}{5-\rho}=\dfrac{2-\rho}{5-\rho}$.

Άρα $f'(\xi_1)\cdot f'(\xi_2)=\dfrac{\rho-5}{\rho-2}\cdot\dfrac{2-\rho}{5-\rho}=1$.

207. **α)** Αφού $f(x)>0$ τότε η σχέση $f(x)\ln f(x)+xf'(x)=0$ γίνεται:

$$\ln f(x)+x\frac{f'(x)}{f(x)}=0\Leftrightarrow\left[x\ln f(x)\right]'=0\Leftrightarrow x\ln f(x)=c.$$

Για $x=1$ προκύπτει $c=1$ άρα $x\ln f(x)=1\Leftrightarrow \ln f(x)=\frac{1}{x}\Leftrightarrow f(x)=e^{\frac{1}{x}}$, $x>0$.

β) Η f είναι παραγωγίσιμη στο $(0,+\infty)$ με $f'(x)=-\frac{1}{x^2}e^{\frac{1}{x}}<0$ οπότε η f είναι $\downarrow$ στο $(0,+\infty)$ άρα είναι και 1–1, οπότε η f αντιστρέφεται. Έστω $f(x)=y$ τότε

$$\left.\begin{array}{l} e^{\frac{1}{x}}=y \\ x>0 \end{array}\right\}\Leftrightarrow\left.\begin{array}{l} \frac{1}{x}=\ln y \\ y>0 \\ \ln y>0 \end{array}\right\}\Leftrightarrow \begin{array}{l} x=\frac{1}{\ln y} \\ y>1 \end{array} \text{ άρα } f^{-1}(x)=\frac{1}{\ln x},\ x\in(1,+\infty).$$

γ) Η f είναι $\downarrow$ στο $(0,+\infty)$ και επίσης $f''(x)=-\frac{e^{\frac{1}{x}}\left(-\frac{1}{x^2}\right)x^2-2xe^{\frac{1}{x}}}{x^4}=\frac{e^{\frac{1}{x}}(1+2x)}{x^4}>0$, αφού $x>0$. Επομένως η f είναι κυρτή στο $(0,+\infty)$. Η εφαπτομένη της C_f στο $x_0=1$ είναι $y-f(1)=f'(1)(x-1)\Leftrightarrow y-e=-e(x-1)\Leftrightarrow y=-ex+2e$. Αφού η f είναι κυρτή σε κάθε σημείο η C_f θα είναι πάνω από την εφαπτομένη με εξαίρεση το σημείο επαφής.

Άρα $f(x)\geq -ex+2e\Leftrightarrow e^{\frac{1}{x}}\geq e(2-x)\Leftrightarrow\frac{e^{\frac{1}{x}}}{e}\geq 2-x\Leftrightarrow e^{\frac{1}{x}-1}\geq 2-x$.

δ) Είναι $I=\int_e^{e^2}f^{-1}(x)\left(1-\frac{1}{\ln x}\right)dx=\int_e^{e^2}\frac{1}{\ln x}\left(1-\frac{1}{\ln x}\right)dx=\int_e^{e^2}\frac{1}{\ln x}dx-\int_e^{e^2}\frac{1}{\ln^2 x}dx=$

$$=\int_e^{e^2}(x)'\frac{1}{\ln x}dx-\int_e^{e^2}\frac{1}{\ln^2 x}dx=\left[x\frac{1}{\ln x}\right]_e^{e^2}-\int_e^{e^2}x\frac{(-\ln x)'}{\ln^2 x}dx-\int_e^{e^2}\frac{1}{\ln^2 x}dx=$$

$$=\frac{e^2}{2}-e+\int_e^{e^2}\frac{1}{\ln^2 x}dx-\int_e^{e^2}\frac{1}{\ln^2 x}dx=\frac{e^2}{2}-e.$$

ε) Εφαρμόζουμε Θ.Μ.Τ. για την f στα διαστήματα $[1,5]$ και $[5,9]$ οπότε υπάρχουν $\xi_1\in(1,5)$ και $\xi_2\in(5,9)$ τέτοια ώστε $f'(\xi_1)=\frac{f(5)-f(1)}{4}=\frac{e^{\frac{1}{5}}-e}{4}$ και $f'(\xi_2)=\frac{f(9)-f(5)}{4}=\frac{e^{\frac{1}{9}}-e^{\frac{1}{5}}}{4}$.

Αφού η f είναι κυρτή τότε η $f'\uparrow$ άρα $\xi_1<\xi_2$ οπότε

$$f'(\xi_1)<f'(\xi_2)\Leftrightarrow e^{\frac{1}{5}}-e<e^{\frac{1}{9}}-e^{\frac{1}{5}}\Leftrightarrow 2e^{\frac{1}{5}}<e^{\frac{1}{9}}+e\Leftrightarrow 2\sqrt[5]{e}<\sqrt[9]{e}+e.$$

208. **α)** Στη σχέση (1) $f(x)+g(x)=\int_2^{\rho}f(u)g(u)du$ το ορισμένο ολοκλήρωμα $\int_2^{\rho}f(u)g(u)du$ είναι πραγματικός αριθμός. Αν στην (1) θέσουμε όπου $x=2$ τότε

$f(2)+g(2)=\int_2^{\rho}f(u)g(u)du\Leftrightarrow 4=\int_2^{\rho}f(u)g(u)du$, οπότε η σχέση (1) γίνεται

$f(x)+g(x)=4\Leftrightarrow g(x)=4-f(x)$.

β) Εστω $F(x)$ αρχική της $f(x)g(x)$ τότε $F'(x)=f(x)g(x)$ (2) και

$\int_2^\rho f(u)g(u)du=[F(u)]_2^\rho=F(\rho)-F(2)$ και επειδή $\rho-2>0$ τότε διαιρώντας με $\rho-2$

προκύπτει $\dfrac{\int_2^\rho f(u)g(u)du}{\rho-2}=\dfrac{F(\rho)-F(2)}{\rho-2}\overset{(\alpha)}{\Leftrightarrow}\dfrac{4}{\rho-2}=\dfrac{F(\rho)-F(2)}{\rho-2}$ (3).

Εφαρμόζουμε Θ.Μ.Τ. για την F στο $[2,\rho]$ οπότε υπάρχει $x_0\in(2,\rho)$ τέτοιο ώστε

$F'(x_0)=\dfrac{F(\rho)-F(2)}{\rho-2}\underset{(3)}{\overset{(2)}{\Leftrightarrow}}f(x_0)g(x_0)=\dfrac{4}{\rho-2}$.

γ) Εφαρμόζουμε Rolle για την $H(x)=(f(x)-g(x))(x-\rho)$ στο $[2,\rho]$ γιατί είναι

$H(2)=H(\rho)=0$ και $H'(x)=(f'(x)-g'(x))(x-\rho)+f(x)-g(x)$.

Άρα υπάρχει $\xi\in(2,\rho)$ τέτοιο ώστε

$$H'(\xi)=0\Leftrightarrow(f'(\xi)-g'(\xi))(\xi-\rho)+f(\xi)-g(\xi)=0\overset{\xi\neq\rho}{\Leftrightarrow}f'(\xi)-g'(\xi)=\frac{f(\xi)-g(\xi)}{\rho-\xi}.$$

Άρα η εξίσωση $f'(x)-g'(x)=\dfrac{f(x)-g(x)}{\rho-x}$ έχει μία τουλάχιστον λύση στο $(2,\rho)$.

δ) Είναι $\left.\begin{array}{r} f(x_0)g(x_0)=\dfrac{4}{\rho-2} \\ g(x_0)=4-f(x_0)\end{array}\right\}\Leftrightarrow f(x_0)(4-f(x_0))=\dfrac{4}{\rho-2}\Leftrightarrow 4f(x_0)-f^2(x_0)=\dfrac{4}{\rho-2}\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow f^2(x_0)-4f(x_0)+4=4-\dfrac{4}{\rho-2}\Leftrightarrow(f(x_0)-2)^2=\dfrac{4(\rho-3)}{\rho-2}$ (4).

Άρα η εξίσωση $(f(x_0)-2)^2=\dfrac{4(\rho-3)}{\rho-2}$ έχει λύση το $x_0\in(2,\rho)$.

ε) Επειδή $(f(x_0)-2)^2\geq 0$ τότε (4) $\dfrac{4(\rho-3)}{\rho-2}\geq 0$, άρα $\rho\geq 3$.

στ) Είναι $f(x)+g(x)=4$ οπότε $\int_2^\rho(f(x)+g(x))dx=\int_2^\rho 4dx\Leftrightarrow\int_2^\rho(f(x)+g(x))dx=4(\rho-2)$.

Αφού $\rho\geq 3$ τότε $\rho-2\geq 1$ άρα $4(\rho-2)\geq 4$. Συνεπώς $\int_2^\rho(f(x)+g(x))dx\geq 4$.

209. **α)** Είναι $f'(x)=3x^2+2>0$ οπότε η $f\uparrow$ άρα και 1–1. Οπότε η f αντιστρέφεται.

β) Είναι $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}(x^3+2x)=-\infty$ και $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$. Αφού η $f\uparrow$ στο $\mathbb{R}$ τότε το σύνολο τιμών της f είναι $f(A)=\left(\lim\limits_{x\to-\infty}f(x),\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)\right)=(-\infty,+\infty)=\mathbb{R}$. Οπότε το πεδίο ορισμού της f^{-1} είναι $D_{f^{-1}}=f(A)=\mathbb{R}$ και η $f^{-1}\uparrow$ στο $\mathbb{R}$ αφού έχει ίδιο είδος μονοτονίας με την f.

γ) Αφού $f(x)=x^3+2x$ τότε $f(g(x))=g^3(x)+2g(x)\geq x$ οπότε $f(g(x))\geq x$

άρα $f^{-1}(f(g(x)))\geq f^{-1}(x)\Leftrightarrow g(x)\geq f^{-1}(x)$.

δ) Είναι $g(x)-f^{-1}(x)\geq 0$ οπότε $\int_0^3[g(x)-f^{-1}(x)]dx\geq 0\Leftrightarrow\int_0^3 g(x)dx\geq\int_0^3 f^{-1}(x)dx$.

Θέτω $f^{-1}(x)=u$ οπότε $x=f(u)$ και $dx=f'(u)du$. Επίσης

x	0	3
u	0	1

γιατί $f(0)=0$ και $f(1)=3$.

Οπότε $\int_0^3 f^{-1}(x)dx=\int_0^1 uf'(u)du=\int_0^1(3u^3+2u)du=3\left[\frac{u^4}{4}\right]_0^1+\left[u^2\right]_0^1=\frac{7}{4}$.

Άρα $\int_0^3 g(x)dx\geq\frac{7}{4}$.

210. α) Αφού η f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ τότε παραγωγίζοντας την σχέση
(1) $2f^3(x)+3f(x)=x+4$ έχουμε $6f^2(x)f'(x)+3f'(x)=1\Leftrightarrow f'(x)\left(6f^2(x)+3\right)=1\Leftrightarrow$

$f'(x)=\frac{1}{6f^2(x)+3}>0$, οπότε η f είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$.

β) Αφού η f είναι $\uparrow$ θα είναι και 1–1 οπότε η f αντιστρέφεται. Αν $f(x)=y\Leftrightarrow x=f^{-1}(y)$ και η (1) γίνεται $2y^3+3y=f^{-1}(y)+y\Leftrightarrow f^{-1}(y)=2y^3+3y-4$, άρα $f^{-1}(x)=2x^3+3x-4$, $x\in\mathbb{R}$.

γ) Αφού η f είναι $\uparrow$ τότε η εξίσωση $f(x)=f^{-1}(x)$ είναι ισοδύναμη με την $f(x)=x$ οπότε $2f^3(x)=2x^3$ και $3f(x)=3x$ και με πρόσθεση κατά μέλη έχουμε:

$2f^3(x)+3f(x)=2x^3+3x\overset{(1)}{\Leftrightarrow}x+4=2x^3+3x\Leftrightarrow 2x^3+2x-4=0\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow(x-1)\left(2x^2+2x+4\right)=0\Leftrightarrow x=1$, αφού $2x^2+2x+4>0$ $(\Delta<0)$, άρα το κοινό σημείο των $C_f, C_{f^{-1}}$ είναι το $(1,1)$.

δ) Στην (1) για $x=0$ έχουμε $27^3(0)+3f(0)=4\Leftrightarrow f(0)=\frac{4}{27^2(0)+3}>0$ ενώ για $x=-5$

έχουμε: $27^3(-5)+3f(-5)=-1\Leftrightarrow f(-5)=\frac{-1}{2f^2(-5)+3}<0$. Η f είναι συνεχής στο $[-5,0]$ αφού είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ και $f(0)\cdot f(-5)<0$ οπότε από Θ. Bolzano υπάρχει $\xi\in(-5,0)$ τέτοιο ώστε $f(\xi)=0$.

ε) Είναι $I=\int_{-4}^1 f(x)dx$. Θέτω $u=f(x)\Leftrightarrow x=f^{-1}(u)$ οπότε $dx=\left(f^{-1}(u)\right)'du\Leftrightarrow$

$dx=\left(6u^2+3\right)du$. Επίσης για $x=-4$ θα είναι $f^{-1}(u)=-4=f^{-1}(0)$ άρα $u=1$.

Συνεπώς $I=\int_0^1 u\left(6u^2+3\right)du=\int_0^1 u\left(6u^3+3u\right)du=6\left[\frac{u^4}{4}\right]_0^1+3\left[\frac{u^2}{2}\right]_0^1=\frac{6}{4}+\frac{3}{2}=3$.

211. α) Είναι $\left[f'(x)\right]^2+f(x)f''(x)=\frac{1}{2}e^x\Leftrightarrow\left[f'(x)f(x)\right]'=\left(\frac{e^x}{2}\right)'\Leftrightarrow f'(x)f(x)=\frac{e^x}{2}+c_1$,

για $x=0$ τότε $c_1=-\frac{1}{2}$, οπότε

$f'(x)f(x)=\frac{e^x-1}{2}\Leftrightarrow 2f'(x)f(x)=e^x-1\Leftrightarrow\left(f^2(x)\right)'=\left(e^x-x\right)'\Leftrightarrow f^2(x)=e^x-x+c_2$.

Για $x=0$ προκύπτει $c_2=0$. Άρα $f^2(x)=e^x-x$.

β) Εστω $h(x)=e^x-x$ είναι $h'(x)=e^x-1$

x	$-\infty$	0	$+\infty$
h'	$-$		$+$
h	$\searrow$		$\nearrow$

Για κάθε $x\in\mathbb{R}$ είναι $h(x)\ge h(0)=1$, άρα $h(x)>0$. Οπότε $f^2(x)=e^x-x\neq 0$ και αφού η f είναι συνεχής τότε η f θα διατηρεί πρόσημο.
Είναι $f(0)=1>0$ άρα $f(x)>0$,
οπότε $f(x)=\sqrt{e^x-x}$.

γ) Είναι $I=\int_{\ln 3}^{2}\frac{f(x)f''(x)}{e^x-1}dx$, $x>0$ όμως $f(x)f''(x)=\frac{1}{2}e^x-\left[f'(x)\right]^2$ όπου $f'(x)=\frac{e^x-1}{2\sqrt{e^x-x}}$.

$$\text{Άρα } I=\int_{\ln 3}^{2}\frac{\frac{1}{2}e^x-\left[f'(x)\right]^2}{e^x-1}dx=\int_{\ln 3}^{2}\frac{\frac{1}{2}e^x-\frac{\left(e^x-1\right)^2}{4\left(e^x-x\right)}}{e^x-1}dx=\frac{1}{2}\int_{\ln 3}^{2}\frac{e^x}{e^x-1}dx-\frac{1}{4}\int\frac{e^x-1}{e^x-x}dx=$$

$$=\frac{1}{2}\left[\ln\left|e^x-1\right|\right]_{\ln 3}^{2}-\frac{1}{4}\left[\ln\left|e^x-x\right|\right]_{\ln 3}^{2}=$$

$$=\frac{1}{2}\ln\left(e^2-1\right)-\frac{1}{2}\ln 2-\frac{1}{4}\ln\left(e^2-2\right)+\frac{1}{4}\ln\left(3-\ln 3\right).$$

212. α) Αφού η $f(t)$ είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$ τότε η συνάρτηση $F(x)=\int_0^x f(t)dt$ είναι παραγωγίσιμη με $F'(x)=f(x)$ και αφού η $f\uparrow$ στο $\mathbb{R}$ τότε θα είναι $F'(x)\uparrow$ στο $\mathbb{R}$ οπότε η F κυρτή στο $\mathbb{R}$.

Αντίστοιχα η $G(x)\int_0^x g(t)dt$ είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με $G'(x)=g(x)$ και επειδή η $g(x)$ είναι $\downarrow$ στο $\mathbb{R}$ οπότε $G'(x)\downarrow$ στο $\mathbb{R}$ τότε η G κοίλη στο $\mathbb{R}$.

β) Θεωρούμε την $h(x)=F(x)-G(x)$ η οποία είναι παραγωγίσιμη στο $\left[0,\theta\right]$ με $h'(x)=F'(x)-G'(x)=f(x)-g(x)$ και επιπλέον $h(0)=F(0)-G(0)=0$, $h(\theta)=F(\theta)-G(\theta)=0$, οπότε από Θ. Rolle υπάρχει $\xi\in(0,\theta)$ για το οποίο ισχύει $h'(\xi)=0\Leftrightarrow f(\xi)=g(\xi)$.

γ) Η συνάρτηση $\varphi(x)=\frac{F(x)}{x}$ είναι παραγωγίσιμη στο $(0,+\infty)$ με

$$\varphi'(x)=\frac{F'(x)\cdot x-F(x)}{x^2}=\frac{xf(x)-F(x)}{x^2}.$$

Εφαρμόζουμε Θ.Μ.Τ. για την F στο $\left[0,x\right]$ οπότε υπάρχει $\xi_1\in(0,x)$ τέτοιο ώστε

$$F'(\xi_1)=\frac{F(x)-F(0)}{x}\Leftrightarrow f(\xi_1)=\frac{F(x)}{x}.$$

Επειδή $\xi_1<x$ και η $f\uparrow$ θα είναι

$$f(\xi_1)<f(x)\Leftrightarrow\frac{F(x)}{x}<f(x)\Leftrightarrow xf(x)>F(x)\Leftrightarrow xf(x)-F(x)>0$$

οπότε $\varphi'(x)>0$ άρα η $\varphi\uparrow$ στο $(0,+\infty)$.

δ) • Αν $\alpha=\beta$ ισχύει $G=\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)=\frac{G(\alpha)+G(\beta)}{2}$.

- Αν $\alpha<\beta$ τότε εφαρμόζουμε Θ.Μ.Τ. για τη συνάρτηση G στα διαστήματα $\left[\alpha,\frac{\alpha+\beta}{2}\right]$ και $\left[\frac{\alpha+\beta}{2},\beta\right]$ οπότε υπάρχουν $x_1\in\left(\alpha,\frac{\alpha+\beta}{2}\right)$ και $x_2\in\left(\frac{\alpha+\beta}{2},\beta\right)$ τέτοια ώστε

$$G'(x_1)=\frac{G\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)-G(\alpha)}{\frac{\beta-\alpha}{2}} \text{ και } G'(x_2)=\frac{G(\beta)-G\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)}{\frac{\beta-\alpha}{2}}$$

Όμως $x_1<x_2$ και η $G'\downarrow$ οπότε

$$G'(x_1)>G'(x_2)\Leftrightarrow G\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)-G(\alpha)>G(\beta)-G\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\Leftrightarrow G\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)>\frac{G(\alpha)+G(\beta)}{2}.$$

Όμοια δείχνουμε αν $\alpha>\beta$ οπότε σε κάθε περίπτωση $G\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\geq\frac{G(\alpha)+G(\beta)}{2}$.

ε) Θεωρούμε την $\omega(x)=\frac{G(x)}{x}$, $x\in(0,+\infty)$ η οποία είναι παραγωγίσιμη με

$\omega'(x)=\frac{xG'(x)-G(x)}{x^2}=\frac{xg(x)-G(x)}{x^2}$. Εφαρμόζοντας Θ.Μ.Τ. για την G στο $[0,x]$ θα υπάρχει $\xi_2\in(0,x):G'(\xi_2)=\frac{G(x)-G(0)}{x}\Leftrightarrow g(\xi_2)=\frac{G(x)}{x}$.

Όμως $\xi_2<x$ και η $g\downarrow$ άρα $g(\xi_2)>g(x)$ οπότε $\frac{G(x)}{x}>g(x)\Leftrightarrow xg(x)-G(x)<0$,

οπότε $\omega'(x)<0$ άρα $\omega(x)\downarrow$ στο $(0,+\infty)$.

Για $x<\theta$ επειδή η $\varphi\uparrow$ είναι $\varphi(x)<\varphi(\theta)$ και

για $y<\theta$ επειδή η $\omega\downarrow$ θα είναι $\omega(y)>\omega(\theta)$.

Όμως $\varphi(\theta)=\frac{F(\theta)}{\theta}=\frac{G(\theta)}{\theta}=\omega(\theta)$ οπότε $\varphi(x)<\omega(y)\Leftrightarrow\frac{1}{x}\int_0^x f(t)dt<\frac{1}{y}\int_0^y g(t)dt$.

213. α) Η συνάρτηση $\frac{5}{1+3f^2(t)}$ είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$ οπότε και η συνάρτηση $f(x)=\int_0^x\frac{5}{1+3f^2(t)}dt$ ορίζεται και είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με $f'(x)=\frac{5}{1+3f^2(t)}$. Άρα για κάθε $x\in\mathbb{R}$

$$f'(x)+3f^2(x)f'(x)=5\Leftrightarrow\left(f(x)+f^3(x)\right)'=(5x)\Leftrightarrow f^3(x)+f(x)=5x+c.$$

Επειδή $f(0)=\int_0^0\frac{5}{1+3f^2(t)}dt=0$ τότε για $x=0$ θα είναι $f^2(0)+f(0)=5\cdot0+c\Leftrightarrow c=0$

άρα $f^3(x)+f(x)=5x \quad (1)$.

β) Αφού $f'(x)=\frac{5}{1+3f^2(x)}>0$ τότε η $f\uparrow$ στο $\mathbb{R}$ άρα και 1–1 οπότε η f αντιστρέφεται.

Αν $f(x)=y\Leftrightarrow x=f^{-1}(y)$ και η (1) γίνεται $y^3+y=5f^{-1}(y)$, άρα $f^{-1}(x)=\frac{x^3+x}{5}$.

γ) Το ζητούμενο ολοκλήρωμα $I=\int_0^2 \frac{5}{1+3f^2(t)}dt=f(2)$. Στην (1) για $x=2$ έχουμε

$f^3(2)+f(2)=10$, $\left(f(2)-2\right)\left(f^2(2)+2f(2)+5\right)=0 \Leftrightarrow f(2)=2$. Άρα $\int_0^2 \frac{5}{1+3f^2(x)}dx=2$.

δ) Θεωρούμε την $h(x)=\int_0^x f(t)dt-\frac{5}{2}x^2$, $x\in\mathbb{R}$, η οποία είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με

$h'(x)=f(x)-5x\overset{(1)}{=}-f^3(x)$.

Για κάθε $x>0 \overset{f\uparrow}{\Leftrightarrow} f(x)>f(0)=0 \Rightarrow h'(x)<0 \Rightarrow h\downarrow[0,+\infty)$ και για κάθε

$x<0 \overset{f\uparrow}{\Leftrightarrow} f(x)<f(0)=0 \Rightarrow h'(x)>0 \Rightarrow h\uparrow(-\infty,0]$.

Για κάθε $x\in\mathbb{R}$ είναι $h(x)\le h(0) \Leftrightarrow \int_0^x f(t)dt-\frac{5}{2}x^2\le 0 \Leftrightarrow \int_0^x f(t)dt\le\frac{5}{2}x^2$.

ε) i. Για $x\in(-\infty,0)$ $(1)\Leftrightarrow f(x)\left(f^2(x)+1\right)=5x \Leftrightarrow \frac{f(x)}{x}=\frac{5}{f^2(x)+1}$.

Εστω $f(x)=y \Leftrightarrow x=f^{-1}(y)=\frac{y^3+y}{5}$ Όταν $x\to+\infty$, τότε $f^{-1}(y)\to+\infty$ και $y\to+\infty$, άρα

$\lim\limits_{x\to-\infty}\left(f^2(x)+1\right)=+\infty$ και $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{5}{f^2(x)+1}=0$, οπότε $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x}=0$.

ii. Για $x\in(-\infty,0)$ $x\in(-\infty,0)$ $(1)\Leftrightarrow f^3(x)=5x-f(x)$ και $\frac{f^3(x)}{x}=5-\frac{f(x)}{x}$

οπότε $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{f^3(x)}{x}=\lim\limits_{x\to-\infty}\left(5-\frac{f(x)}{x}\right)=5-0=5$.

214. α) Για κάθε $x\in\mathbb{R}$ έχουμε: $\int_0^{f(x)}\left(e^t+2\right)dt=x-2 \Leftrightarrow \left[e^t+2t\right]_0^{f(x)}=x-2 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow e^{f(x)}+2f(x)-1=x-2 \Leftrightarrow e^{f(x)}+2f(x)=x-1$ (1).

β) Αφού η f είναι παραγωγίσιμη τότε παραγωγίζοντας την (1) έχουμε:

$e^{f(x)}f'(x)+2f'(x)=1 \Leftrightarrow f'(x)\left(e^{f(x)}+2\right)=1 \Leftrightarrow f'(x)=\frac{1}{e^{f(x)}+2}>0$ (2), οπότε η f είναι $\uparrow$

άρα και 1–1 και συνεπώς αντιστρέφεται. Αν $f(x)=y \Leftrightarrow x=f^{-1}(y)$ και η (1) γίνεται

$e^y+2y=f^{-1}(y)-1 \Leftrightarrow f^{-1}(y)=e^y+2y+1$, άρα $f^{-1}(x)=e^x+2x+1$, $x\in\mathbb{R}$ (3).

γ) Από την (2) προκύπτει ότι η f είναι δύο φορές παραγωγίσιμη με $f''(x)=-\frac{e^{f(x)}f'(x)}{\left(e^{f(x)}+2\right)^2}<0$

οπότε η f είναι κοίλη στο $\mathbb{R}$. Επίσης στην (3) για $x=0$ είναι $f^{-1}(0)=2 \Leftrightarrow f(2)=0$ και

αφού η $f\uparrow$ στο $\mathbb{R}$ τότε για $x<2$ θα είναι $f(x)<f(2) \Leftrightarrow f(x)<0$ ενώ για $x>2$ θα είναι

$f(x)>f(2) \Leftrightarrow f(x)>0$.

δ) Η f είναι συνεχής στο $[2,e+3]$ και για κάθε $x\in[2,e+3]$ είναι $f(x)\ge 0$.

Επομένως $E(\Omega)=\int_2^{e+3} f(x)dx$.

x	2	e+3
u	0	1

Θέτω $f(x)=4 \Leftrightarrow x=f^{-1}(u) \Leftrightarrow x=e^u+2u+1$ οπότε $dx=\left(e^u+2\right)du$ και γιατί $f(2)=0$ και $f^{-1}(1)=e+3$.

Άρα $E(\Omega)=\int_0^1 u\left(e^u+2\right)du=\int_0^1 ue^u du+\int_0^1 2u\,du=\left[ue^u\right]_0^1-\int_0^1 e^u du+\left[u^2\right]_0^1=$

$=e-(e-1)+1=2$.

ε) Εφαρμόζουμε Θ.Μ.Τ. για την f στο $[2,x]$ οπότε υπάρχει $\xi\in(2,x)$ τέτοιο ώστε

$f'(\xi)=\dfrac{f(x)-f(2)}{x-2}=\dfrac{f(x)}{x-2}$. Αφού η f είναι κοίλη τότε η $f'\downarrow$ άρα

$$2<\xi<x \Leftrightarrow f'(2)>f'(\xi)>f'(x) \Leftrightarrow \frac{1}{3}>\frac{f(x)}{x-2}>f'(x) \overset{(x-2)>0}{\Leftrightarrow} \frac{x-2}{3}>f(x)>f'(x)(x-2).$$

215. **α)** Η $f(x)$ είναι συνεχής στο $(0,+\infty)$ οπότε η συνάρτηση $\int_1^x f(t)dt$ είναι παραγωγίσιμη. Επίσης η συνάρτηση $\dfrac{f(t)}{t+1}$ είναι συνεχής στο $(0,+\infty)$ άρα και η συνάρτηση $g(u)=\int_1^u \dfrac{f(t)}{t+1}dt$, $u>0$ είναι παραγωγίσιμη με $g'(u)=\dfrac{f(u)}{u+1}$ οπότε και η συνάρτηση $\int_1^x g(u)du$ είναι παραγωγίσιμη.

Άρα παραγωγίζοντας στη σχέση $\int_1^x f(t)dt+x\ln\dfrac{x}{4}=\int_1^x\left(\int_1^u \dfrac{f(t)}{t+1}dt\right)du+x-1-\ln 4$ έχουμε:

$$f(x)+\ln\frac{x}{4}+x\frac{1}{\frac{x}{4}}\cdot\frac{1}{4}=\int_1^x \frac{f(t)}{t+1}dt+1 \Leftrightarrow \ (1)\ f(x)+\ln\frac{x}{4}=\int_1^x \frac{f(t)}{t+1}dt$$

και παραγωγίζοντας πάλι έχουμε

$$f'(x)+\frac{1}{x}=\frac{f(x)}{x+1} \Leftrightarrow f'(x)-\frac{f(x)}{x+1}=-\frac{1}{x} \Leftrightarrow \frac{(x+1)f'(x)-f(x)}{(x+1)^2}=-\frac{1}{x(x+1)} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{f(x)}{x+1}\right)'=\frac{1}{x+1}-\frac{1}{x},\ x>0 \Leftrightarrow \left(\frac{f(x)}{x+1}\right)'=\left(\ln(x+1)-\ln x\right)' \Leftrightarrow \frac{f(x)}{x+1}=\ln(x+1)-\ln x+c \ \ (2).$$

Στη σχέση (1) για $x=1$ προκύπτει $f(1)=-\ln\dfrac{1}{4}=\ln 4$ η (2) για $x=1$ γίνεται

$\dfrac{f(1)}{2}=\ln 2+c \Leftrightarrow \dfrac{\ln 4}{2}=\ln 2+c \Leftrightarrow c=0$. Άρα $\dfrac{f(x)}{x+1}=\ln(x+1)-\ln x \Leftrightarrow f(x)=(x+1)\ln\dfrac{x+1}{x}$.

β) Η f είναι παραγωγίσιμη στο $(0,+\infty)$ με

$$f'(x)=\ln\frac{x+1}{x}+(x+1)\frac{1}{\frac{x+1}{x}}\left(\frac{x+1}{x}\right)'=\ln\frac{x+1}{x}+\cancel{(x+1)}\,\frac{x}{\cancel{x+1}}\cdot\frac{\cancel{x}-\cancel{x}-1}{x^{\cancel{2}}}=\ln\frac{x+1}{x}-\frac{1}{x}.$$

Θεωρούμε τη συνάρτηση $\varphi(t)=\ln t$ στο $[x,x+1]$, $x>0$ η οποία ικανοποιεί τις προϋποθέσεις του Θ.Μ.Τ. οπότε υπάρχει $\xi\in(x,x+1):\varphi'(\xi)=\dfrac{\varphi(x+1)\varphi(x)}{x+1-x} \Leftrightarrow$

$\frac{1}{\xi}=\ln(x+1)-\ln x \Leftrightarrow \frac{1}{\xi}=\ln\frac{x+1}{x}$. Είναι $0<x<\xi<x+1 \Leftrightarrow \frac{1}{x}>\frac{1}{\xi}$ οπότε

$\frac{1}{x}>\ln\frac{x+1}{x} \Leftrightarrow \ln\frac{x+1}{x}-\frac{1}{x}<0$ οπότε $f'(x)<0$ άρα η $f\downarrow$ στο $(0,+\infty)$. Είναι

$\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}\left[(x+1)\ln\frac{x+1}{x}\right]=+\infty$ γιατί $\lim\limits_{x\to 0}\left[\ln\frac{x+1}{x}\right]=\lim\limits_{x\to 0}\left[\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)\right]=+\infty$ και

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty}\left[(x+1)\cdot\ln\frac{x+1}{x}\right]\overset{0\cdot(+\infty)}{=}\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln\frac{x+1}{x}}{\frac{1}{x+1}}\overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=}\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{x}{x+1}\left(-\frac{1}{x^2}\right)}{-\frac{1}{(x+1)^2}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x}{x+1}=1,$$ οπότε

αφού η $f\downarrow$ στο $(0,+\infty)$ το σύνολο τιμών $f(A)=\left(\lim\limits_{x\to+\infty} f(x),\lim\limits_{x\to 0^+}(x)\right)=(1,+\infty)$.

γ) Η εξίσωση $x+1=xe^{\frac{2014}{x+1}}$, $x>0$ γίνεται

$\frac{x+1}{x}=e^{\frac{2014}{x+1}} \Leftrightarrow \ln\frac{x+1}{x}=\frac{2014}{x+1} \Leftrightarrow (x+1)\ln\frac{x+1}{x}=2014 \Leftrightarrow f(x)=2014$.

Η f είναι $\downarrow$ και $2014\in f(A)$ οπότε η εξίσωση έχει μοναδική λύση στο $(0,+\infty)$.

δ) Θεωρούμε τη συνάρτηση $h(x)=f(x)-2f\left(\frac{x+1}{2}\right)+\ln 4$, $x>0$ η οποία είναι παραγωγίσιμη

στο $(0,+\infty)$ με $h'(x)=f'(x)-2f'\left(\frac{x+1}{2}\right)\frac{1}{2}=f'(x)-f'\left(\frac{x+1}{2}\right)$. Όμως

$f''(x)=\left(\ln\frac{x+1}{x}-\frac{1}{x}\right)'=\frac{1}{\frac{x+1}{x}}\left(\frac{x+1}{x}\right)'+\frac{1}{x^2}=\frac{x}{x+1}\frac{-1}{x^2}+\frac{1}{x^2}=\frac{1}{x^2(x+1)}>0$, οπότε το πρόσημο

της h' και η μονοτονία της h δίνεται στο διπλανό πίνακα.

Για κάθε $x>0$ είναι $h(x)\geq h(1) \Leftrightarrow h(x)\geq -f(1)+\ln 4 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow h(x)\geq 0 \Leftrightarrow f(x)+\ln 4\geq 2f\left(\frac{x+1}{2}\right)$.

	0		1		$+\infty$
h'		$-$		$+$	
h		$\searrow$		$\nearrow$	

ε) Θεωρούμε τη συνάρτηση

$\sigma(x)=\int_x^{2014} tf(t)dt-x\int_x^{2014} f(t)dt=x\int_{2014}^x f(t)dt-\int_{2014}^x tf(t)dt$ η οποία είναι παραγωγίσιμη

με $\sigma'(x)=\int_{2014}^x f(t)dt+xf(x)-xf(x)=x\int_{2014}^x f(t)dt$ και $\sigma''(x)=f(x)>0$, οπότε η $\sigma'(x)$

είναι $\uparrow$ στο $(0,2014)$.

Για $0<x<2014$ θα είναι $\sigma'(x)<\sigma'(2014) \Leftrightarrow \sigma'(x)<0$, οπότε $\sigma(x)\downarrow$ στο $(0,2014]$, ενώ

για $x<2014$ θα είναι $\sigma(x)>\sigma(2014) \Leftrightarrow \sigma(x)>0 \Leftrightarrow \int_x^{2014} tf(t)dt>x\int_x^{2014} f(t)dt$.

216. **α)** Επειδή η f είναι συνεχής στο $[0,2]$ και $2\in[0,2]$ η συνάρτηση $\int_2^x f(t)dt$ είναι παραγωγίσιμη στο $[0,2]$ και αφού $x, f(x)$ είναι παραγωγίσιμες στο $[0,2]$ τότε και η συνάρτηση $f'(x) = xf(x) + \int_2^x f(t)dt$ (1) είναι παραγωγίσιμη στο $[0,2]$ με $f''(x) = f(x) + xf'(x) + f(x) \Leftrightarrow f''(x) = 2(x) + xf'(x)$.

β) Στην (1) για $x=0$ προκύπτει ότι $f'(0) = \int_2^0 f(t)dt = -\int_0^2 f(t)dt$ επίσης στην (1) για $x=2$ προκύπτει $f'(2) = 2f(2)$. Επειδή η f' είναι παραγωγίσιμη στο $[0,2]$ εφαρμόζοντας Θ.Μ.Τ θα υπάρχει τουλάχιστον ένα $\rho \in (0,2)$ τέτοιο ώστε

$$f''(\rho) = \frac{f'(2) - f'(0)}{2} \Leftrightarrow f''(\rho) = \frac{2f(2) + \int_0^2 f(t)dt}{2} \Leftrightarrow f''(\rho) = f(2) + \frac{1}{2}\int_0^2 f(t)dt.$$

γ) Είναι $f'(x) = xf(x) + \int_2^x f(t)dt \Leftrightarrow f'(x) = \left(x\int_2^x f(t)dt\right)'$, άρα $f(x) = x\int_2^x f(t)dt + c$ (2).

Για $x=0$ είναι $f(0)=c$, ενώ για $x=2$ είναι $f(2)=c$. Άρα $f(0)=f(2)$.

δ) Αφού η f παρουσιάζει ακρότατο στο $x_0 \in (0,2)$ τότε από Θ. Fermat ισχύει ότι

$$f'(x_0) = 0 \overset{(1)}{\Leftrightarrow} x_0 f(x_0) + \int_2^{x_0} f(t)dt = 0 \Leftrightarrow \int_2^{x_0} f(t)dt = -x_0 f(x_0) \quad (3).$$

Στην (2) για $x = x_0$ και $c = f(2)$ έχουμε

$$f(x_0) = x_0\int_2^{x_0} f(t)dt + f(2) \Leftrightarrow f(x_0) - f(2) = x_0\int_2^{x_0} f(t)dt \Leftrightarrow \frac{f(x_0) - f(2)}{x_0} = \int_2^{x_0} f(t)dt \quad (4).$$

Από (3), (4) έχουμε

$$\frac{f(x_0) - f(2)}{x_0} = -x_0 f(x_0) \Leftrightarrow f(x_0) - f(2) = -x_0^2 f(x_0) \Leftrightarrow f(x_0)(x_0^2 + 1) = f(2) \Leftrightarrow f(x_0) = \frac{f(2)}{x_0^2 + 1}.$$

217. **α)** Η συνάρτηση $\frac{e^t + e^{t^2}}{e^t + 1}$ είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$, ως πράξεις συνεχών συναρτήσεων και οι συναρτήσεις $-x$ και x ορίζονται στο $\mathbb{R}$ οπότε και η συνάρτηση $f(x) = \int_{-x}^{x} \frac{e^t + e^{t^2}}{e^t + 1}dt$ έχει πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}$. Επίσης $f(-x) = \int_{x}^{-x} \frac{e^t + e^{t^2}}{e^t + 1}dt = -\int_{-x}^{x} \frac{e^t + e^{t^2}}{e^t + 1}dt = -f(x)$ οπότε η f είναι περιττή στο $\mathbb{R}$.

β) Εχουμε $f(x) = \int_0^x \frac{e^t + e^{t^2}}{e^t + 1}dt - \int_0^{-x} \frac{e^t + e^{t^2}}{e^t + 1}dt$ η ο ποία είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με

$$f'(x)=\frac{e^x+e^{x^2}}{e^x+1}-\frac{e^{-x}+e^{x^2}}{e^{-x}+1}(-x)'=\frac{e^x+e^{x^2}}{e^x+1}+\frac{\frac{1}{e^x}+e^{x^2}}{\frac{1}{e^x}+1}=\frac{e^x+e^{x^2}+e^xe^{x^2}+1}{e^x+1}=$$

$$=\frac{\left(e^{x^2}+1\right)\left(e^x+1\right)}{e^x+1}=e^{x^2}+1,$$

γ) Είναι $f'(x)=e^{x^2}+1>0$ οπότε η $f\uparrow$ στο $\mathbb{R}$ και $f(0)=0$.

Άρα για $x<0\Leftrightarrow f(x)<f(0)\Leftrightarrow f(x)<0$ ενώ για $x>0\Leftrightarrow f(x)>f(0)\Leftrightarrow f(x)>0$.

δ) Επίσης $f''(x)=\left(1+e^{x^2}\right)'=e^{x^2}2x$ και η f είναι κοίλη στο $(-\infty,0]$, κυρτή στο $[0,+\infty)$ και παρουσιάζει σημείο καμπής στο $(0,0)$.

		0	
f''	$-$		$+$
f	$\frown$		$\smile$

ε) i. Αφού η $f(t)$ είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$ και η x^2 είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ τότε και η $g(x)=\int_1^{x^2}f(t)dt$ είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$

με $g'(x)=f(x^2)\cdot 2x$. Είναι $\int_0^1 g(x)dx=\int_0^1(x)'g(x)dx=\left[xg(x)\right]_0^1-\int_0^1 xg'(x)dx=$

$$=g(1)-\int_0^1 x2xf(x^2)dx=-\int_0^1 x2xf(x^2)dx.$$

Θέτω $x^2=u$ οπότε $x=\sqrt{u}$ και $du=2xdx$ και

x	0	1
u	0	1

Οπότε $\int_0^1 g(x)dx=-\int_0^1\sqrt{u}f(u)du\Leftrightarrow\int_0^1 g(x)dx+\int_0^1\sqrt{x}f(x)dx=0\quad(1)$.

ii. Θεωρούμε τη συνάρτηση $\varphi(x)=\int_0^x g(t)dt+\int_0^x\sqrt{t}f(t)dt$ η οποία είναι παραγωγίσιμη στο $[0,1]$ με $\varphi'(x)=g(x)+\sqrt{x}f(x)$ και $\varphi(0)=0$, $\varphi(1)=\int_0^1 g(t)dt+\int_0^1\sqrt{t}f(t)dt\overset{(1)}{=}0$.

Άρα $\varphi(0)=\varphi(1)$ και από Θ. Rolle υπάρχει $\xi\in(0,1)$ τέτοιο ώστε

$\varphi'(\xi)=0\Leftrightarrow g(\xi)+\sqrt{\xi}f(\xi)=0\Leftrightarrow f(\xi)=-\dfrac{g(\xi)}{\sqrt{\xi}}$. Η φ' είναι παραγωγίσιμη στο $(0,1)$ με

$\varphi''(x)=g'(x)+\dfrac{1}{2\sqrt{x}}f(x)+\sqrt{x}f'(x)=2xf(x^2)+\dfrac{1}{2\sqrt{x}}f(x)+\sqrt{x}\left(e^{x^2}+1\right)>0$ στο $(0,1)$ γιατί για $x>0$ $f(x)>0$. Άρα η φ' είναι $\uparrow$ στο $(0,1)$ οπότε το $\xi\in(0,1)$ είναι μοναδικό.

218. α) Είναι $H(x)=\int_0^{\ln x}\dfrac{e^t}{e^t+2x}dt$ και θέτουμε $u=e^t+2x$ οπότε $du=e^tdt$ και

x	0	lnx
u	$1+2x$	$3x$

Άρα $H(x)=\int_{1+2x}^{3x}\dfrac{du}{u}=\left[\ln|u|\right]_{1+2x}^{3x}=\ln 3x-\ln(2x+1)=\ln\dfrac{3x}{2x+1}$.

β) Η $H(x)$ είναι παραγωγίσιμη στο $(0,+\infty)$ με

$$H'(x)=\frac{1}{\frac{3x}{2x+1}}\left(\frac{3x}{2x+1}\right)'=\frac{2x+1}{3x}\frac{3(2x+1)-2\cdot 3x}{(2x+1)^2}=\frac{1}{x(2x+1)}>0,$$

οπότε η $H(x)\uparrow$ στο $(0,+\infty)$.

γ) Παρατηρούμε ότι $H(1)=0$ και αφού η $H(x)$ είναι $\nearrow$ τότε $0<x<1$ θα είναι $H(x)<H(1)\Leftrightarrow H(x)<0$, ενώ για $x>1$ θα είναι $H(x)>H(1)\Leftrightarrow H(x)>0$.

δ) Η $H(x)$ είναι συνεχής και $H(x)<0$ για $x\in[\lambda,1]\leq[0,1]$ οπότε

$$E(\lambda)=-\int_{\lambda}^{1}H(x)dx=\int_{1}^{\lambda}(x)'H(x)dx=\left[xH(x)\right]_{1}^{\lambda}-\int_{1}^{\lambda}xH'(x)dx=$$

$$=\lambda H(\lambda)-\int_{1}^{\lambda}x\frac{1}{x(2x+1)}dx=\lambda\ln\frac{3\lambda}{2\lambda+1}-\left[\ln(2x+1)\right]_{1}^{\lambda}=$$

$$=\lambda\ln3\lambda-\lambda\ln(2\lambda+1)-\ln(2\lambda+1)+\ln3=\lambda\ln3\lambda-(\lambda+1)\ln(2\lambda+1)+\ln3.$$

ε) Για $e<t\leq x$ επειδή η $H(x)\nearrow$ θα έχουμε

$0<H(t)\leq H(x)\Leftrightarrow \dfrac{1}{H(t)}\geq\dfrac{1}{H(x)}\Leftrightarrow\dfrac{1}{H(t)}-\dfrac{1}{H(x)}\geq0$, οπότε $\displaystyle\int_{e}^{x}\left(\frac{1}{H(t)}-\frac{1}{H(x)}\right)dt>0$, αφού $\dfrac{1}{H(t)}-\dfrac{1}{H(x)}$ δεν είναι παντού 0, άρα $\displaystyle\int_{e}^{x}\frac{1}{H(t)}dt-\frac{1}{H(x)}\int_{e}^{x}dt\Leftrightarrow\int_{e}^{x}\frac{1}{H(t)}dt-\frac{x-e}{H(x)}>0$.

219. **α)** Για να ορίζεται η $\varphi(x)=\dfrac{\int_0^x th(t)dt}{\int_0^x h(t)dt}$ πρέπει $\int_0^x h(t)dt\neq0$.

Για κάθε $t\in\mathbb{R}$ είναι $h(t)>0$, οπότε και για $x>0$ θα είναι $\int_0^x h(t)dt>0$,

ενώ για $x<0$ θα είναι $\int_x^0 h(t)dt>0\Leftrightarrow\int_0^x h(t)dt<0$.

Επίσης για $x=0$ έχουμε $\int_0^0 h(t)dt=0$. Άρα το πεδίο ορισμού της φ είναι $D_\varphi=(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$.

β) Αφού οι συναρτήσεις $h(t)$ και $th(t)$ είναι συνεχής τότε και οι συναρτήσεις $\int_0^x h(t)dt$ και $\int_0^x th(t)dt$ είναι παραγωγίσιμες. Οπότε και $\varphi(x)$ είναι παραγωγίσιμη με

$$\varphi'(x)=\frac{xh(x)\int_0^x h(t)dt-h(x)\int_0^x th(t)dt}{\left(\int_0^x h(t)dt\right)^2}=\frac{h(x)\left[x\int_0^x h(t)dt-\int_0^x th(t)dt\right]}{\left(\int_0^x h(t)dt\right)^2}=\frac{h(x)w(x)}{\left(\int_0^x h(t)dt\right)^2}.$$

Όπου $w(x)=x\int_0^x h(t)dt-\int_0^x th(t)dt$ και $w'(x)=xh(x)+\int_0^x h(t)dt-xh(x)=\int_0^x h(t)dt$.

Άρα για $x<0$ είναι $w'(x)<0$, ενώ για $x>0$ είναι $w'(x)>0$.

Άρα για κάθε $x\in\mathbb{R}$ $w(x)\geq w(0)\Leftrightarrow w(x)\geq0$ και αφού και $h(x)>0$ τότε $\varphi'(x)>0$ άρα η φ είναι $\nearrow$, σε καθένα από τα διαστήματα $(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$.

	$-\infty$	0	$+\infty$
w'	$-$		$+$
w	$\searrow$		$\nearrow$

γ) Για $x \neq 0$ η $\varphi(x)=\dfrac{\int_0^x th(t)dt}{\int_0^x h(t)dt}$ είναι συνεχής ως πηλίκο συνεχών. Επίσης

$$\lim_{x\to 0}\varphi(x)=\lim_{x\to 0}\frac{\int_0^x th(t)dt}{\int_0^x h(t)dt}\overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=}\lim_{x\to 0}\frac{xh(x)}{h(x)}=0=\varphi(0)$$ οπότε η φ είναι συνεχής σ' όλο το $\mathbb{R}$.

δ) Η συνάρτηση f είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$ και $f(x)\neq 0$ άρα η f διατηρεί σταθερό πρόσημο στο $\mathbb{R}$. Έστω $f(x)>0$ αφού $\varphi\uparrow$ στο $\mathbb{R}$ και $3>0>-2$ τότε $\varphi(3)>0>\varphi(-2)$

άρα $\int_{\varphi(-2)}^{\varphi(3)} f(x)dx>0 \Leftrightarrow \int_{\varphi(3)}^{\varphi(-2)} f(x)dx<0$ (άτοπο). Οπότε $f(x)<0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

ε) Θεωρούμε τη συνάρτηση $K(x)=(\beta-x)\int_\beta^x g(e^t)dt-(x-\alpha)f(e^x)g(x)$ η οποία είναι συνεχής στο $[\alpha,\beta]$ και $K(\alpha)=(\beta-\alpha)\int_\beta^\alpha g(e^t)dt$, $K(\beta)=-(\beta-\alpha)f(e^\beta)g(\beta)$, οπότε

$$K(\alpha)\cdot K(\beta)=-(\beta-\alpha)^2\int_\beta^\alpha g(e^t)dt\cdot f(e^\beta)g(\beta)=(\beta-\alpha)^2 f(e^\beta)g(\beta)K(\alpha)=$$

$$=(\beta-\alpha)\int_\alpha^\beta g(e^t)dt<0$$ γιατί αφού $f(x)<0$ τότε $f(e^\beta)<0$.

Επίσης η g είναι συνεχής και $g(x)\neq 0$ οπότε η g θα διατηρεί πρόσημο.

Άρα $g(\beta)\cdot\int_\alpha^\beta g(e^t)dt>0$ αφού οι αριθμοί $g(\beta)$, $\int_\alpha^\beta g(e^t)dt$ είναι ομόσημοι. Οπότε από Θ.

Bolzano υπάρχει $\xi\in(\alpha,\beta)\leq\mathbb{R}$ τέτοιο ώστε $K(\xi)=0 \Leftrightarrow \dfrac{\int_\beta^\xi g(e^t)dt}{\xi-\alpha}=\dfrac{f(e^\xi)g(\xi)}{\beta-\xi}$

οπότε $\varphi\left(\dfrac{\int_\beta^\xi g(e^t)dt}{\xi-\alpha}\right)=\varphi\left(\dfrac{f(e^\xi)g(\xi)}{\beta-\xi}\right)$.

220. **α)** Επειδή η g είναι συνεχής στο $x_0=2$ τότε $\lim_{x\to 2}g(x)=g(2)$ (1).

Αφού η $f(t)$ είναι συνεχής τότε η συνάρτηση $\int_2^x f(t)dt$ είναι παραγωγίσιμη.

Οπότε $\lim_{x\to 2}g(x)=\lim_{x\to 2}\dfrac{\int_2^x f(t)dt}{x-2}\overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=}\lim_{x\to 2}\dfrac{f(x)}{1}=f(2)=2$. Άρα από την (1) $g(2)=2$,

δηλ. $\lim_{t\to 2}\left[\dfrac{f(t)-2}{t-2}+f(t)\right]=2$. Εστω $h(t)=\dfrac{f(t)-2}{t-2}+f(t)\Leftrightarrow\dfrac{f(t)-2}{t-2}=h(t)-f(t)$

άρα $\lim_{t\to 2}\dfrac{f(t)-2}{t-2}=\lim_{t\to 2}\left[h(t)-f(t)\right]=2-2=0$, άρα $f'(2)=0$.

β) Εχουμε $$\lim_{x\to 2}\frac{g(x)-g(2)}{x-2}=\lim_{x\to 2}\frac{\frac{\int_2^x f(t)dt}{x-2}-2}{x-2}=\lim_{x\to 2}\frac{\int_2^x f(t)dt-2(x-2)}{(x-2)^2}\overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=}$$

$$=\lim_{x\to 2}\frac{f(x)-2}{2(x-2)}=\frac{1}{2}f'(2)=0$$, οπότε $g'(2)=0$.

γ) Επειδή η f είναι κυρτή, η f' είναι $\uparrow$ στο $[2,+\infty)$ και αφού $f'(2)=0$ τότε το 2 είναι μοναδική ρίζα της εξίσωσης $f'(x)=0$. Για $x>2$ θα είναι $f'(x)>f'(2)\Leftrightarrow f'(x)>0$ άρα η f είναι $\uparrow$ στο $[2,+\infty)$.

δ) Για $x>2$ είναι $g'(x)=\left(\dfrac{\int_2^x f(t)dt}{x-2}\right)'=\dfrac{f(x)(x-2)-\int_2^x f(t)dt}{(x-2)^2}$.

Εστω $\varphi(x)=f(x)(x-2)-\int_2^x f(t)dt$ είναι $\varphi(2)=0$

και $\varphi'(x)=f'(x)(x-2)+f(x)-f(x)=f'(x)(x-2)>0$ για $x>2$ οπότε η $\varphi\uparrow$ δηλαδή για $x>2$ είναι $\varphi(x)>\varphi(2)\Leftrightarrow\varphi(x)>0$ άρα $g'(x)>0$ οπότε η $g\uparrow$ στο $[2,+\infty]$.

ε) Για $x\geq 2$ έχουμε $(x+6)\int_2^{2x+5}f(t)dt<(2x+3)\int_2^{2x+8}f(t)dt\Leftrightarrow\dfrac{\int_2^{2x+5}f(t)dt}{2x+3}<\dfrac{\int_2^{x+8}f(t)dt}{x+6}\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow\dfrac{\int_2^{2x+5}f(t)dt}{2x+5-2}<\dfrac{\int_2^{x+8}f(t)dt}{x+8-6}\Leftrightarrow g(2x+5)<g(x+8)$ και επειδή $g\uparrow$ $2x+5<x+8\Leftrightarrow x<3$.

Τελικά $x\in[2,3)$.

221. α) Η f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με $f'(x)=e^x-4$.

Οπότε $f'(x)>0\Leftrightarrow e^x>4\Leftrightarrow x>\ln 4$. Το πρόσημο της f' και η μονοτονία της f δίνονται στο διπλανό πίνακα.

	$-\infty$ $\ln 4$	$+\infty$
f'	$-$	$+$
f	$\searrow$	$\nearrow$

Η f παρουσιάζει ελάχιστο για $x=\ln 4$ το $f(\ln 4)=e^{\ln 4}-4\ln 4=4-4\ln 4=4(1-\ln 4)<0$.

β) Είναι $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}(e^x-4x)=+\infty$ αφού $\lim\limits_{x\to-\infty}e^x=0$ και

$\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}(e^x-4x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left[e^x\left(1-\dfrac{4x}{e^x}\right)\right]=+\infty$, αφού $\lim\limits_{x\to+\infty}e^x=+\infty$ και

$\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{4x}{e^x}\overset{\left(\frac{+\infty}{+\infty}\right)}{=}\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{4}{e^x}=0$. Επίσης $f(0)=e^0=1>0$, $f\left(\dfrac{e}{4}\right)=e^{\frac{e}{4}}-e<0$ αφού $e<4$ και $\dfrac{e}{4}>1\Leftrightarrow e^{\frac{e}{4}}<e^1$ οπότε $f(0)\cdot f\left(\dfrac{e}{4}\right)<0$ άρα σύμφωνα με το Θ. Bolzano έχει μία ρίζα $\rho_1\in\left(0,\dfrac{e}{4}\right]\leq(-\infty,\ln 4]$ η οποία αφού η f είναι $\downarrow$ στο $(-\infty,\ln 4]$ η ρίζα ρ_1 είναι μοναδική σ' αυτό το διάστημα. Επίσης $f(\ln 4)=4-4\ln 4=4(1-\ln 4)<0$, $f(3)=e^3-12>0$ αφού $e^3\simeq 19{,}6$ και η $f\uparrow$ στο $[\ln 4,+\infty)$ άρα από Θ. Bolzano υπάρχει ρίζα $\rho_2\in(\ln 4,3)$ είναι μοναδική. Άρα η εξίσωση $f(x)=0$ έχει ακριβώς 2 ρίζες.

γ) Είναι $h(x)=\int_1^{\ln x}\dfrac{e^4(e^u+4u)}{e^u-4u}du$. Η συνάρτηση $\dfrac{e^4(e^u+4u)}{e^u-4u}$ ορίζεται στο $(-\infty,p_1)\cup(p_1,p_2)\cup(p_2,+\infty)$ όπου $0<p_1<\dfrac{e}{4}<1<\ln 4<p_2$.

Αφού $1 \in (p_1, p_2)$ πρέπει $p_1 < \ln x < p_2 \Leftrightarrow e^{p_1} < x < e^{p_2}$ (1). Όμως $f(p_1) = f(p_2) = 0 \Leftrightarrow e^{p_1} - 4p_1 = e^{p_2} - 4p_2 = 0 \Leftrightarrow e^{p_1} = 4p_1$ και $e^{p_2} = 4p_2$, άρα η (1) γίνεται $4p_1 < x < 4p_2$, οπότε το πεδίο ορισμού της h είναι $D_h = (4p_1, 4p_2)$.

δ) Η h είναι παραγωγίσιμη στο D_h με $h'(x) = \dfrac{e^{\ln x}\left(e^{\ln x} + 4\ln x\right)}{e^{\ln x} - 4\ln x} \cdot \dfrac{1}{x} = \dfrac{x + 4\ln x}{x - 4\ln x}$

Επίσης

$$h''(x) = \frac{\left(1 + \frac{4}{x}\right)(x - 4\ln x) - \left(1 - \frac{4}{x}\right)(x + 4\ln x)}{(x - 4\ln x)^2} = \frac{8(1 - \ln x)}{(x - 4\ln x)^2}$$

	$4p_1$ e	$4p_2$
h''	$+$	$-$
h'	↗	↘
h	∪	∩

Είναι $h''(x) > 0 \Leftrightarrow 1 - \ln x > 0 \Rightarrow x < e$. Οπότε η h έχει σημείο καμπής στο $x_0 = e$ το $h(e) = 0$

ε) Από τον προηγούμενο πίνακα διαπιστώνουμε ότι για κάθε $\kappa \in (4p_1, 4p_2)$ θα είναι $h'(x) \le h'(e) = \dfrac{e+4}{e-4} < 0$ άρα $h'(x) < 0$ οπότε η $h\downarrow$.

στ) Εφαρμόζουμε ΘΜΤ για την h στο $[\alpha, \beta]$ οπότε υπάρχει $\xi \in (\alpha, \beta)$ τέτοιο ώστε $h'(\xi) = \dfrac{h(\beta) - h(\alpha)}{\beta - \alpha}$, όμως $h'(\xi) \le h'(e) \Leftrightarrow \dfrac{h(\beta) - h(\alpha)}{\beta - \alpha} \le \dfrac{e+4}{e-4} \overset{e-4<0}{\Leftrightarrow}$

$$\Leftrightarrow (e-4)\left(h(\beta) - h(\alpha)\right) \ge (e+4)(\beta - \alpha) \Leftrightarrow (e-4)\int_{\ln\alpha}^{\ln\beta} \frac{e^u\left(e^4 + 4u\right)}{e^4 - 4u}\,du \ge (e+4)(\beta - \alpha).$$

222. **α)** Επειδή $f(\alpha) = f(\beta) = 0$ και η f είναι συνεχής στο $[\alpha, \beta]$ και παραγωγίσιμη στο (α, β), λόγω του θ. Rolle υπάρχει $\xi \in (\alpha, \beta)$ τέτοιο ώστε $f'(\xi) = 0$. Επειδή η f είναι κυρτή, η f' είναι γνησίως αύξουσα, οπότε $\alpha < \xi < \beta \Leftrightarrow f'(\alpha) < f'(\xi) < f'(\beta) \Leftrightarrow f'(\alpha) < 0 < f'(\beta)$, άρα $f'(\alpha) f'(\beta) < 0$.

β) Για κάθε $\alpha < x < \xi$, επειδή η f' είναι γνησίως αύξουσα, είναι:
$f'(\alpha) < f'(x) < f'(\xi) \Leftrightarrow f'(\alpha) < f'(x) < 0$, άρα η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $[\alpha, \xi]$.
Για κάθε $\alpha < x \le \xi$, είναι $f(\alpha) > f(x) \ge f(\xi)$, δηλαδή $f(x) < f(\alpha) = 0$.
Για κάθε $\xi < x < \beta$, επειδή η f' είναι γνησίως αύξουσα, είναι:
$f'(\xi) < f'(x) < f'(\beta) \Leftrightarrow 0 < f'(x) < f'(\beta)$, άρα η f είναι γνησίως αύξουσα στο $[\xi, \beta]$.
Για κάθε $\xi < x < \beta$ είναι $f(\xi) < f(x) < f(\beta) = 0$. Άρα $f(x) < 0$ για κάθε $x \in (\alpha, \beta)$.

γ) Εστω ότι $f(x) < f'(x)$ για κάθε $x \in (\alpha, \beta)$. Τότε $f'(x) - f(x) > 0 \Leftrightarrow e^{-x} f'(x) - e^{-x} f(x) > 0$, άρα $\left[e^{-x} f(x)\right]' > 0$. Εστω $g(x) = e^{-x} f(x)$, $x \in [\alpha, \beta]$. Είναι $g'(x) = \left[e^{-x} f(x)\right]' > 0$, άρα η g είναι γνησίως αύξουσα στο $[\alpha, \beta]$. Επειδή $\alpha < \beta$, είναι $g(\alpha) < g(\beta) \Leftrightarrow e^{-\alpha} f(\alpha) < e^{-\beta} f(\beta) \Leftrightarrow 0 < 0$ που είναι αδύνατο.
Άρα υπάρχει $x_0 \in (\alpha, \beta)$ τέτοιο ώστε $f(x_0) \ge f'(x_0)$.

δ) Αν $\int_\alpha^\beta f(x)dx=\lambda\in\mathbb{R}$, τότε: $\int_\alpha^\beta f(t)\left(\int_\alpha^\beta f(x)dx\right)dt+\int_\alpha^\beta f(x)dx-2=0\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow\int_\alpha^\beta f(t)\lambda dt+\lambda-2=0\Leftrightarrow\lambda\int_\alpha^\beta f(t)dt+\lambda-2=0\Leftrightarrow\lambda\cdot\lambda+\lambda-2=0\Leftrightarrow\lambda^2+\lambda-2=0\Leftrightarrow$

$\lambda=-2$ ή $\lambda=1$. Επειδή $f(x)<0$ για κάθε $x\in(\alpha,\beta)$ θα είναι και $\int_\alpha^\beta f(x)dx<0$,

άρα $\lambda=\int_\alpha^\beta f(x)dx=-2$. Το ζητούμενο εμβαδόν είναι: $E(\Omega)=-\int_\alpha^\beta f(x)dx=2$

ε) i. Έστω $F(x)=\int_\alpha^x f(t)dt$, $x\in[\alpha,\beta]$. Η f είναι συνεχής στο $[\alpha,\beta]$, άρα η F είναι παραγωγίσιμη, οπότε και συνεχής στο διάστημα αυτό. Από το θεώρημα μέσης τιμής, υπάρχει $\xi\in(\alpha,\beta)$ τέτοιο ώστε

$$F'(\xi)=\frac{F(\beta)-F(\alpha)}{\beta-\alpha}=\frac{\int_\alpha^\beta f(x)dx}{4}=\frac{-2}{4}=-\frac{1}{2}\Leftrightarrow 2f(\xi)+1=0.$$

ii. Εστω $g(u)=\int_\alpha^u F(t)dt$, $u\in[\alpha,\beta]$.

Λόγω του Θ.Μ.Τ υπάρχουν $\xi_1\in(x,x+1)$ και $\xi_2\in(x+1,x+2)$ τέτοια ώστε

$$g'(\xi_1)=\frac{g(x+1)-g(x)}{x+1-x}\Leftrightarrow F(\xi_1)=\int_\alpha^{x+1}F(t)dt-\int_\alpha^x F(t)dt=\int_\alpha^{x+1}F(t)dt \text{ και}$$

$$g'(\xi_2)=\frac{g(x+2)-g(x+1)}{x+2-x-1}\Leftrightarrow F(\xi_2)=\int_\alpha^{x+2}F(t)dt-\int_\alpha^{x+1}F(t)dt=\int_{x+1}^{x+2}F(t)dt$$

Είναι $g'(u)=F(u)$ και $g''(u)=F'(u)=f(u)<0$, άρα η g' είναι γνησίως φθίνουσα στο

$[x,x+2]$, $x\in[\alpha,\alpha+4]$, άρα: $\xi_1<\xi_2\overset{g'\downarrow}{\Leftrightarrow}g'(\xi_1)>g'(\xi_2)\Leftrightarrow\int_x^{x+1}F(t)dt>\int_{x+1}^{x+2}F(t)dt$.