Γ Λυκείου

4 ΓΛΧ

2013 - 2014

Μ.Ι.Παπαγρηγοράκης
Χανιά

[Μαθηματικά]

Θετικής – Τεχνολογικής Κατεύθυνσης
13.09

15 ΑΡΧΙΚΕΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ

15.01 Μια συνάρτηση $f:R\to R$ με $f(2+e)=2$ έχει την ιδιότητα $f'(2x+e^x)=x$ για κάθε $x\in R$. Να αποδείξετε ότι $f(1)=0$.

15.02 Έστω μια συνεχής συνάρτηση $f:R\to R$ και F μια αρχική της f στο R. Αν $f(1)=1$ και $f(x)\cdot F(2-x)=1$ για κάθε $x\in R$, τότε

Α) Να βρείτε το $F(1)$

Β) Να αποδείξετε ότι $f(2-x)\cdot F(x)=1$

Γ) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $g(x)=F(x)\cdot F(2-x)$ είναι σταθερή.

Δ) Να βρείτε τον τύπο της f

15.03 Στη δεκαετία του 1980 ο παγκόσμιος ρυθμός κατανάλωσης πετρελαίου σε εκατομμύρια βαρέλια ετησίως δινόταν από τον τύπο $R(t) = ke^{(\ln 2)t}$, όπου t είναι ο αριθμός των ετών μετά το 1980. Στις αρχές του 1980 ο ρυθμός ήταν 14 εκατ. βαρέλια τον χρόνο. Να βρείτε:

Α) την παγκόσμια κατανάλωση πετρελαίου t χρόνια μετά το 1980,

Β) σε πόσα εκατομμύρια βαρέλια ανερχόταν η παγκόσμια κατανάλωση πετρελαίου κατά τη δεκαετία του 1980, δηλαδή την περίοδο 1980-1990. ($\ln 2\approx 0{,}7$)

15.04 Μια εταιρεία έχει διαπιστώσει ότι το οριακό κόστος λειτουργίας της είναι $0{,}015x^2-2x+80$ δολάρια την ημέρα, όπου x είναι ο αριθμός των μονάδων προϊόντος που παράγονται ημερησίως. Αν η εταιρεία έχει πάγια έξοδα 1000 δολάρια την ημέρα, να βρείτε:

Α) το ημερήσιο κόστος παραγωγής x μονάδων προϊόντος,

Β) την αύξηση του κόστους, αν αντί 30 μονάδων παραχθούν 60 μονάδες προϊόντος σε μια ημέρα.

15.05 Ένα κινητό κινείται πάνω σε άξονα και η ταχύτητά του σε cm/sec τη χρονική στιγμή t δίνεται από τον τύπο $\upsilon(t)=t(t+2)$. Αν τη χρονική στιγμή $t=0$ το κινητό βρίσκεται σε απόσταση 2cm από την αρχή των αξόνων, να βρεθεί η θέση του τη στιγμή $t=3$

15.06 *Έστω F μια αρχική της συνεχούς συνάρτησης $f:R\to R$, με την ιδιότητα: $F^2(x)\le F(x)F(\alpha-x)$ για κάθε $x\in R$, όπου $\alpha\ne 0$. Να αποδειχθεί ότι:

Α) $F(0)=F(\alpha)$,

Β) η εξίσωση $f(x)=0$ έχει μια τουλάχιστον ρίζα στο R.

15.07 Να βρείτε συνάρτηση $f:R\to R$ ώστε να ισχύει $f'(x)-f(x)=e^{-2x}\sigma\upsilon\nu x$, $\forall x\in R$ και $f(0)=0$

15.08 Η συνάρτηση f είναι δύο φορές παραγωγίσιμη στο R και ισχύουν: $f(0)=1$, $f'(0)=0$ και

$$[f'(x)]^2+f(x)f''(x)=\frac{e^x}{2},\ \forall x\in R$$

Α) Αποδείξτε ότι $f^2(x)=e^x+c_1x+c_2$, $c_1, c_2\in R$

Β) Αποδείξτε ότι $f(x)=\sqrt{e^x-x}$, $x\in R$

15.09 Έστω η συνάρτηση $f(x)=\begin{cases}x^2+x+1 & ,\ x\ge 0\\ \sigma\upsilon\nu 2x & ,\ x<0\end{cases}$.

Α) Να αποδείξετε ότι η f είναι συνεχής στο R

Β) Να βρείτε το $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{1} f(x)dx$

15.10 Θεωρούμε τις συναρτήσεις $f(x)=xe^{x-1996}$ και $g(x)=\alpha xe^{x-1996}-\beta e^{x-1996}$.

Να προσδιοριστούν οι $\alpha,\beta\in R$ ώστε η συνάρτηση g να είναι παράγουσα της f.

15.11 Έστω $f:R\to R$ συνεχής συνάρτηση και F μια παράγουσά της στο R. Αν $F''(x)\ne 0$, $x\in R$ και $F(x)=F(2-x)$, $\forall x\in R$, να λύσετε την εξίσωση $f(x)=0$

15.12 Να βρείτε τις αρχικές συναρτήσεις της συνάρτησης $f(x)=2|x|+1$ με $x\in R$

16 ΤΟ ΟΡΙΣΜΕΝΟ ΟΛΟΚΛΗΡΩΜΑ - ΜΕΘΟΔΟΙ ΟΛΟΚΛΗΡΩΣΗΣ

Α ΣΤΟΙΧΕΙΩΔΗ $\int_\alpha^\beta f(x)dx = \int_\alpha^\beta F'(x)dx = F(\beta) - F(\alpha)$

Να υπολογίσετε τα ολοκληρώματα:

16.01 Α) $\int_0^1 (1-\sqrt{x})^2 dx$ Β) $\int_1^2 \frac{1}{\sqrt{x+5}+\sqrt{x+2}}dx$ Γ) $\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{\eta\mu^3 x + \sigma\upsilon\nu^2 x - 2}{\eta\mu^2 x}dx$ Δ) $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt[5]{6-x}}dx$

16.02 Α) $\int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{1+\sigma\upsilon\nu^2 x}{\sigma\upsilon\nu^2 x}dx$ Β) $\int_1^2 \frac{x^2\sqrt{x}-x+1}{x^2}dx$ Γ) $\int_1^2 \frac{x^3-2x+5}{x}dx$ Δ) $\int_1^2 \frac{x-1}{\sqrt{x}}dx$

16.03 Α) $\int_1^2 \frac{\sqrt{x}+\sqrt{x-2}}{\sqrt{x^2-2x}}dx$ Β) $\int_0^1 (2x-1)^2\,dx$ Γ) $\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{\eta\mu^3 x+4}{\eta\mu^2 x}dx$ Δ) $\int_2^3 \frac{x^3-1}{x-1}dx$

Γ-Π

16.04 Α) $\int_1^e \frac{1-\ln x}{x^2}dx$ Β) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\eta\mu x + x\sigma\upsilon\nu x)dx$ Γ) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(2x\eta\mu x + x^2\sigma\upsilon\nu x\right)dx$

16.05 Α) $\int_1^e \frac{1-x}{e^x}dx$ Β) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-x}(\sigma\upsilon\nu x + \eta\mu x)dx$ Γ) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\eta\mu x - x\sigma\upsilon\nu x}{\eta\mu^2 x}dx$

16.06 Α) $\int_1^4 \left(\frac{2^{x-1}}{\sqrt{x}} + 2^x\sqrt{x}\ln 2\right)$ Β) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^x(\sigma\upsilon\nu x - \eta\mu x)dx$

ΣΥΝΘΕΣΗ $\int_\alpha^\beta f(g(x))g'(x)dx = \int_{g(\alpha)}^{g(\beta)} f(u)du$ - με ΑΛΛΑΓΗ ΜΕΤΑΒΛΗΤΗΣ: $u = g(x)$ ή

16.07 Α) $\int_0^1 x(x^2+1)^3 dx$ Β) $\int_0^1 \sqrt{2x+3}dx$ Γ) $\int_0^1 x^2(x^3+1)^{10}dx$

16.08 Α) $\int_0^1 \sqrt[3]{3x+1}dx$ Β) $\int_0^{\frac{\pi}{3}} \sqrt[3]{\eta\mu x}\sigma\upsilon\nu x dx$ Γ) $\int_e^{e^2} \frac{\ln(\ln x)}{x\ln x}dx$

16.09 Α) $\int_1^{\pi^2} \frac{3}{\sqrt{x}\,\sigma\upsilon\nu^2\sqrt{x}}dx$ Β) $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt[4]{(1+2x)^3}}dx$ Γ) $\int_0^1 \frac{2x+1}{x^2+x+2}dx$

16.10 A) $\int_{-1}^{-4}\sqrt{-x}\,dx$ B) $\int_{0}^{1}(3x^2+1)(x^3+x)^{10}dx$ Γ) $\int_{0}^{1}4x\left(2x^2+3\right)^{12}dx$

16.11 A) $\int_{e^2}^{e^5}\frac{1}{x\ln x\ln(\ln x)}dx$ B) $\int_{0}^{1}\frac{e^{2x}+7e^x+6}{e^x+3}dx$ Γ) $\int_{0}^{1}\frac{1+\varepsilon\varphi x}{\sigma\upsilon\nu^2 x}dx$ Δ) $\int_{0}^{1}e^{2^x+x\ln 2}dx$

16.12 A) $\int_{0}^{1}\frac{x-1}{\sqrt{x^2-2x+3}}dx$ B) $\int_{0}^{1}\frac{1}{e^x\sqrt{1+e^{-x}}}dx$ Γ) $\int_{0}^{1}\frac{\varepsilon\varphi x}{\ln(\sigma\upsilon\nu x)}dx$ Δ) $\int_{0}^{1}\sigma\varphi x\,dx$

16.13 A) $\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}}\frac{\ln(\varepsilon\varphi x)}{\eta\mu x\sigma\upsilon\nu x}dx$ B) $\int_{e}^{2e}\frac{1}{x\ln^3 x}dx$ Γ) $\int_{0}^{1}xe^{3-x^2}dx$ Δ) $\int_{0}^{1}\frac{\varepsilon\varphi x}{\sigma\upsilon\nu^2 x}dx$

16.14 A) $\int_{0}^{1}\frac{4x-5}{(x+2)^4}dx$ B) $\int_{0}^{1}\frac{3^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}dx$ Γ) $\int_{1}^{e}\frac{\sigma\upsilon\nu(\ln x)}{x}dx$ Δ) $\int_{0}^{1}e^{x+e^x}dx$

16.15 A) $\int_{0}^{1}\frac{\eta\mu x\sigma\upsilon\nu x}{e^{\eta\mu^2 x}}dx$ B) $\int_{1}^{\pi}\frac{\eta\mu\frac{1}{x}}{x^2}dx$ Γ) $\int_{1}^{\pi}\left(\frac{1}{x\eta\mu\frac{1}{x}}\right)^2dx$ Δ) $\int_{e}^{e^2}\frac{1}{x\ln x}dx$

ΜΟΡΦΗ: $\int_{\alpha}^{\beta}f(x,\ln x)dx$ Τότε θέτω: $u=\ln x$

16.16 A) $\int_{1}^{e}\frac{\sqrt{\ln x}}{x}dx$ B) $\int_{e}^{2e}\frac{1}{x\ln x}dx$ Γ) $\int_{1}^{e}\frac{\ln x+1}{x}dx$ Δ) $\int_{1}^{e}\frac{(1-\ln x)^2}{x}dx$ E) $\int_{1}^{e}\frac{\sqrt[3]{1+\ln x}}{x}dx$

ΜΟΡΦΗ: $\int_{\alpha}^{\beta}f(\eta\mu x)\sigma\upsilon\nu x\,dx$ ή $\int_{\alpha}^{\beta}f(\sigma\upsilon\nu x)\eta\mu x\,dx$ Τότε θέτω $u=\eta\mu x$ ή $u=\sigma\upsilon\nu x$ αντίστοιχα

16.17 A) $\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}}\frac{\eta\mu x}{1-\sigma\upsilon\nu^2 x}dx$ B) $\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}}\eta\mu x\sqrt{1-\sigma\upsilon\nu x}\,dx$ Γ) $\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}}\frac{(1+\eta\mu x)\sigma\upsilon\nu x}{2+\eta\mu x}dx$

ΜΟΡΦΗ: $\int_{\kappa}^{\lambda}f\left(P(x),(\alpha x+\beta)^{\nu}\right)dx$ όπου ν Ρητός. $P(x)$ πολυώνυμο Τότε θέτω $u=\alpha x+\beta$,

16.18 A) $\int_{0}^{1}x^2(2x-1)^{\frac{7}{3}}dx$ B) $\int_{0}^{1}\frac{2x^2+3}{(3x+1)^2}dx$ Γ) $\int_{0}^{1}(x-2)\sqrt{3x+1}\,dx$ Δ) $\int_{0}^{1}(x-2)^2(2x+1)^3dx$

ΡΗΤΕΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ

Α Περίπτωση: βαθμός $P(x)<$ βαθμός $Q(x)$. Ελέγχω πρώτα μήπως ο αριθμητής είναι η παράγωγος του παρονομαστή δηλαδή αν $Q'(x)=P(x)$ τότε $\int_{\alpha}^{\beta}\frac{P(x)}{Q(x)}dx=\int_{\alpha}^{\beta}\frac{Q'(x)}{Q(x)}dx=\left[\ln(Q(x))\right]_{\alpha}^{\beta}=\ln(Q(\beta))-\ln(Q(\alpha))=\int\frac{Q'(x)}{Q(x)}dx=\ln|Q(x)|+c$

ΜΟΡΦΗ: $\int_{\mu}^{\nu}\frac{\kappa x+\lambda}{\alpha x^2+\beta x+\gamma}dx$, με $\beta^2-4\alpha\gamma>0$. Τότε εργάζομαι όπως στο παράδειγμα:

16.19 Να υπολογισθεί το ολοκλήρωμα $\int_{1}^{2}\frac{2x+1}{x^2-5x+6}dx$.

ΛΥΣΗ

Η συνάρτηση $f(x)=\frac{2x+1}{x^2-5x+6}$ έχει $A_f=R-\{2,3\}$ και είναι $f(x)=\frac{2x+1}{(x-2)(x-3)}$. Αναζητούμε τους $A,B\in R$, ώστε να ισχύει $\frac{2x+1}{(x-2)(x-3)}=\frac{A}{x-2}+\frac{B}{x-3}$, για κάθε $x\in R-\{2,3\}$. Από όπου έχουμε $(A+B-2)x=3A+2B+1$, $\forall x\in R-\{2,3\}$.

Η τελευταία ισότητα ισχύει για κάθε $x\in R-\{2,3\}$, αν και μόνο αν $\begin{cases} A+B-2 &= 0\\ 3A+2B+1 &= 0\end{cases}$ ή, $\begin{cases} A &= -5\\ B &= 7\end{cases}$.

Επομένως, $\int_{1}^{2}\frac{2x+1}{x^2-5x+6}dx=\int_{1}^{2}\frac{-5}{x-2}dx+\int_{1}^{2}\frac{7}{x-3}dx=\ldots=-5\left[\ln|x-2|\right]_1^2-7\left[\ln|x-3|\right]_1^2=\ldots$

Όμοια, αν ο παρονομαστής είναι της μορφής $Q(x)=(x-\rho_1)(x-\rho_2)\ldots(x-\rho_\nu)$, τότε: $\frac{P(x)}{Q(x)}=\frac{A_1}{x-\rho_1}+\frac{A_2}{x-\rho_2}+\ldots+\frac{A_\nu}{x-\rho_\nu}$.

ΠΡΟΣΟΧΗ: Αν μια ρίζα ρ, του παρονομαστή είναι πολλαπλότητας κ τότε στον όρο $(x-\rho)^{\kappa}$ αντιστοιχούν τα κλάσματα: $\frac{A_1}{x-\rho}$, $\frac{A_2}{(x-\rho)^2}$, …, $\frac{A_\nu}{(x-\rho)^k}$

16.20 Α) $\int_{0}^{1}\frac{x+1}{x^2+2x+7}dx$ Β) Γ) $\int_{3}^{4}\frac{x+1}{x^2+x-2}dx$ Ύ) $\int_{2}^{3}\frac{x+2}{x^2-6x-7}dx$ Δ) $\int_{2}^{3}\frac{x^2-2x-1}{x^3-x}dx$

ΜΟΡΦΗ: $\int_{\kappa}^{\lambda}\frac{P(x)}{\alpha x^2+\beta x+\gamma}dx$ με $P(x)$ πολυώνυμο βαθμού ≥ 2 και $\beta^2-4\alpha\gamma>0$, τότε κάνουμε τη διαίρεση κλπ

16.21 Α) $\int_{0}^{1}\frac{x^2}{x^2-4}dx$ Β) $\int_{0}^{1}\frac{x^2-x+2}{x+3}dx$ Γ) $\int_{0}^{1}\frac{x^2-2x+1}{x^2+4x+3}dx$ Δ) $\int_{2}^{3}\frac{x^3+x^2-2x-1}{x^2-x}dx$

ΕΚΘΕΤΙΚΕΣ

ΜΟΡΦΗ: $\int_{\kappa}^{\lambda}f\left(e^{\alpha x},e^{\beta x}\right)dx$ Τότε: $u=e^x$, $x=\ln u$, $du=e^x dx$ (συνήθως καταλήγω σε ρητή)

16.22 Α) $\int_{0}^{1}\frac{e^x-1}{e^x+2}dx$ Β) $\int_{0}^{1}\frac{e^x}{e^{2x}-1}dx$ Γ) $\int_{0}^{1}\frac{1}{e^x+1}dx$ Δ) $\int_{0}^{1}\frac{e^{2x}-1}{e^x}dx$

16.23 Α) $\int_{0}^{1}\frac{e^x+1}{e^{2x}-4}dx$ Β) $\int_{0}^{1}\frac{2}{1+e^{-2x}}dx$ Γ) $\int_{0}^{1}\frac{e^x}{(e^x+1)\ln(e^x+1)}dx$ Δ) $\int_{0}^{1}\frac{e^x}{e^x-e^{-x}}dx$

ΠΑΡΑΓΟΝΤΙΚΗ $\int_{\alpha}^{\beta} f(x)g'(x)dx = [f(x)g(x)]_{\alpha}^{\beta} - \int_{\alpha}^{\beta} f'(x)g(x)dx$

ΜΟΡΦΗ 1 $\int_{\kappa}^{\nu} P(x)\alpha^{\lambda x+\beta}dx$ όπου $P(x)$ πολυώνυμο του x. Τότε χρησιμοποιώ παράγουσα της $\alpha^{\lambda x+\beta}$ την $\frac{\alpha^{\lambda x+\beta}}{\lambda \ln \alpha}$. Συνήθως ως βάση έχουμε το e

16.24 Α) $\int_0^1 x^2e^{-2x}dx$ Β) $\int_0^1 (x^2+3x)e^{-x}dx$

ΜΟΡΦΗ 2 $\int_{\alpha}^{\beta} P(x)\eta\mu(\lambda x+\beta)dx$ ή $\int_{\alpha}^{\beta} P(x)\sigma\upsilon\nu(\lambda x+\beta)dx$ Τότε χρησιμοποιώ αρχική της $\eta\mu(\lambda x+\beta)$ ($\sigma\upsilon\nu(\lambda x+\beta)$)

16.25 Α) $\int_0^1 (3x^2-x)\sigma\upsilon\nu(-2x)dx$ Β) $\int_0^1 2x\eta\mu(3x-1)dx$ Γ) $\int_0^1 (x^2+2x)\sigma\upsilon\nu(4x)dx$

ΜΟΡΦΗ 3 $I=\int_{\alpha}^{\beta} \alpha^{\lambda x+\beta}\sigma\upsilon\nu(\gamma x+\delta)dx$, $I=\int_{\alpha}^{\beta} \alpha^{\lambda x+\beta}\eta\mu(\gamma x+\delta)dx$. Χρησιμοποιούμε αρχική για την $\alpha^{\lambda x+\beta}$ οπότε κάνοντας παραγοντική ολοκλήρωση δυο φορές, εμφανίζεται πάλι το I. Προκύπτει έτσι εξίσωση με «άγνωστο» το I.

16.26 Α) $\int_0^1 e^{-x}\sigma\upsilon\nu(3x-1)dx$ Β) $\int_0^1 e^{x}\eta\mu x dx$ Γ) $\int_0^1 e^{-x}\sigma\upsilon\nu 2x dx$ Δ) $\int_0^1 2^{x}\sigma\upsilon\nu x dx$

ΜΟΡΦΗ 4 $\int_{\alpha}^{\beta} f(x)\ln(\alpha x+\beta)dx$. Τότε χρησιμοποιώ παράγουσα της $f(x)$ και αποφεύγουμε τον παράγοντα $\ln(\alpha x+\beta)$. Μπορεί ο λογάριθμος να είναι υψωμένος σε δύναμη και η να έχουμε συνάρτηση πιο σύνθετη από την $\alpha x+\beta$.

16.27 Α) $\int_1^e \ln x dx$ Β) $\int_1^e \ln(2x+3)dx$ Γ) $\int_1^e \ln^2(2x+1)dx$ Δ) $\int_1^e \frac{\ln x}{\sqrt{x}}dx$

Ε) $\int_1^e x\ln(3x+4)dx$ Στ) $\int_1^e x\ln(x+1)dx$ Ζ) $\int_4^5 \ln(-x+\sqrt{x^2-9})dx$

Π – Γ

16.28 Α) $\int_1^e \ln^2 x dx$ Β) $\int_1^e \ln\sqrt{x+1}dx$ Γ) $\int_0^1 (x^2-x)e^{-2x}dx$

16.29 Α) $\int_0^1 e^{-2x}\sigma\upsilon\nu 2x dx$ Β) $\int_1^e \frac{\ln^2 x}{\sqrt{x}}dx$ Γ) $\int_0^1 \ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)dx$ Δ) $\int_0^1 \frac{x+\eta\mu x}{e^x}dx$

16.30 Α) $\int_0^1 x\sigma\upsilon\nu^2 x dx$ Β) $\int_0^1 x^2\ln(3x)dx$ Γ) $\int_0^1 xe^{x+\ln x}dx$

16.31 Α) $\int_0^1 e^{2x}(2x+\eta\mu 3x)dx$ Β) $\int_0^1 \frac{x-1}{e^x}dx$ Γ) $\int_0^1 x^2\sigma\upsilon\nu(3x)dx$ Δ) $\int_1^e \frac{\ln x}{x^2}dx$

ΡΙΖΕΣ

ΜΟΡΦΗ: $\int_{\kappa}^{\lambda} f\left(x,\sqrt[\nu]{\alpha x+\beta}\right)dx$ Τότε: $u=\sqrt[\nu]{\alpha x+\beta}$, $(u\geq 0)$, $u^{\nu}=\alpha x+\beta$, $\nu u^{\nu-1}du=\alpha dx$ δηλαδή $dx=\frac{\nu u^{\nu-1}}{\alpha}du$

16.32 Α) $\int_0^1 \frac{x+1}{\sqrt[3]{3x+2}}dx$ Β) $\int_0^1 \frac{x^3}{\sqrt{2x+1}}dx$ Γ) $\int_0^1 x\sqrt{x+4}dx$ Δ) $\int_0^1 \frac{x^3}{\sqrt{x^2+4}}dx$

16.33 Α) $\int_0^1 \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}dx$ Β) $\int_0^1 \frac{x}{\sqrt{2x+3}}dx$ Γ) $\int_0^1 \frac{x}{\sqrt[4]{x^2+3}}dx$ Δ) $\int_0^1 \frac{x^2}{\sqrt{2x+1}}dx$

ΕΙΔ. ΜΟΡΦΗ: Α $\int f\left(x,\sqrt[\nu]{\alpha x+\beta},\sqrt[\mu]{\alpha x+\beta}\right)dx$ Τότε θέτω $u=\sqrt[\lambda]{\alpha x+\beta}$ όπου $\lambda=\text{ΕΚΠ}(\nu,\mu)$

16.34 Α) $\int_0^1 \frac{x}{\sqrt[3]{x+1}+\sqrt{x+1}}dx$ Β) $\int_0^1 \frac{8\sqrt{x}}{3\sqrt[3]{x}+6\sqrt{x}}dx$

16.35 Α) $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{2x-1}-\sqrt[3]{2x-1}}dx$ Β) $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{2x-1}-\sqrt[4]{2x-1}}dx$

ΕΙΔ. ΜΟΡΦΗ: Β $\int f\left(x,\sqrt{x^2+\alpha^2}\right)dx$ ή $\int f\left(x,x^2+\alpha^2\right)dx$ $\alpha>0$ Τότε $x=\alpha\cdot\varepsilon\varphi u$ με $u\in\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$ τότε $dx=\frac{1}{\sigma\upsilon\nu^2 u}du$

16.36 Α) $\int_0^1 \frac{x^3}{x^2+1}dx$ Β) $\int_0^1 \frac{1}{x^2+1}dx$ Γ) $\int_0^2 \frac{2x+3}{x^2+4}dx$

ΕΙΔ. ΜΟΡΦΗ: Γ $\int f\left(x,\sqrt{\alpha^2-x^2}\right)dx$ $\alpha>0$. Τότε: $x=\alpha\cdot\eta\mu u$ με $u\in\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$ τότε $dx=\alpha\cdot\sigma\upsilon\nu u du$

16.37 Α) $\int_0^1 \frac{x^3}{\sqrt{4-x^2}}dx$ Β) $\int_0^1 \sqrt{1-x^2}dx$ Γ) $\int_{-1}^1 \frac{x^2+x+1}{\sqrt{4-x^2}}dx$

ΕΙΔ. ΜΟΡΦΗ: Δ $\int f\left(x,\sqrt{x^2-\alpha^2}\right)dx$, $\alpha>0$ $x\leq-\alpha$ ή $x\geq\alpha$ Τότε: $x=\frac{\alpha}{\sigma\upsilon\nu u}$ με $u\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right)$ ή $u\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right]$,
$dx=\frac{\alpha\cdot\eta\mu u}{\sigma\upsilon\nu^2 u}du$

16.38 Α) $\int_1^2 \frac{\sqrt{x^2-1}}{x}dx$

ΓΕΝΙΚΕΣ

16.39 Α) $\int_0^1 \frac{(2x-1)^2}{x}dx$ Β) $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x+3}-\sqrt{x}}dx$ Γ) $\int_1^2 \frac{x\eta\mu x+\sigma\upsilon\nu x}{x^2}dx$ Δ) $\int \frac{2x+3}{\sqrt{x^2+3x+5}}$

16.40 Α) $\int_0^1 x\sigma\upsilon\nu^2(x^2)dx$ Β) $\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \sigma\varphi x\cdot\ln(\eta\mu x)dx$ Γ) $\int_0^1\left(\frac{\eta\mu^2x}{\sigma\upsilon\nu^4x}+\varepsilon\varphi^2x\right)dx$

16.41 Α) $\int_0^1 \frac{2\eta\mu x\sigma\upsilon\nu x}{1+\eta\mu^2x}dx$ Β) $\int_0^1 x^2\eta\mu 2xdx$ Γ) $\int_0^1 x\eta\mu^2xdx$ Δ) $\int_1^2 \frac{x^3}{x^2-4x+3}dx$

16.42 Α) $\int_0^1 \sigma\upsilon\nu^3xdx$ Β) $\int_0^1 (2\eta\mu x+3)^2dx$ Γ) $\int_0^1 \frac{x^3}{\sqrt{1+x^2}}dx$ Δ) $\int_1^2 \frac{\ln(\varepsilon\varphi x)}{\eta\mu x\sigma\upsilon\nu x}dx$

16.43 Α) $\int_1^2 \frac{4(x^4-1)}{x(x^4+1)}dx$ Β) $\int_1^2 \frac{dx}{x(x^\nu+1)}$ Γ) $\int_1^0 \frac{1}{(x+1)\sqrt{x+2}}dx$ Δ) $\int_1^0 \frac{e^x}{e^{2x}+2e^x+1}dx$

16.44 Α) $\int_e^{2e} \frac{1}{x\sqrt{\ln x}}dx$ Β) $\int_1^0 \frac{x}{\sqrt{x}+1}dx$ Γ) $\int_1^0 \frac{x+1}{\sqrt{x}+2}dx$ Δ) $\int_1^2 \frac{\sqrt{1+x^2}}{x}dx$

16.45 Α) $\int_1^e x^2\ln x^2dx$ Β) $\int_1^0 e^{2x}\eta\mu e^xdx$ Γ) $\int_1^0 \frac{x}{\sigma\upsilon\nu^2x}dx$ Δ) $\int_1^e \frac{\eta\mu x}{e^x}dx$

16.46 Α) $\int_1^e (\ln t)^2dx$ Β) $\int_0^1 e^{2x}\sigma\upsilon\nu e^xdx$ Γ) $\int_1^e \sigma\upsilon\nu(\ln x)dx$ Δ) $\int_1^0 \frac{3e^{2x}-5e^x}{2+9e^x}dx$

16.47 Α) $\int_1^e x^3\ln xdx$ Β) $\int_1^2 \frac{x}{\eta\mu^2x}dx$ Γ) $\int_1^0 e^x\eta\mu e^xdx$ Δ) $\int_1^0\left(\varepsilon\varphi 2x+\frac{2x}{\sigma\upsilon\nu^2 2x}\right)dx$

16.48 Α) $\int_0^1 \frac{e^{2x}-2}{e^{2x}-4x}dx$ Β). $\int_0^1 \frac{e^x}{e^x+1}dx$ Γ) $\int_0^1 \frac{e^x}{e^{2x}-e^x-12}dx$ Δ) $\int_0^1 \frac{e^{-x}-e^x}{e^{-x}+e^x}dx$

16.49 Α) $\int_0^1 \frac{\eta\mu^3x}{\sigma\upsilon\nu x}dx$ Β) $\int_1^2 \frac{\sigma\upsilon\nu^2x}{\eta\mu x}dx$ Γ) $\int_0^1 \frac{\varepsilon\varphi^4x}{\sigma\upsilon\nu^2x}dx$ Δ) $\int_0^1 \frac{\eta\mu^3x}{\sqrt{\sigma\upsilon\nu x}}dx$

16.50 Α) $\int_0^1 \frac{\eta\mu^4x}{\sigma\upsilon\nu^6x}dx$ Β) $\int_0^1 \eta\mu^5xdx$ Γ) $\int_1^2 \frac{\varepsilon\varphi^4x}{\eta\mu^6x}dx$ Δ) $\int_0^1 \eta\mu^3x\sigma\upsilon\nu^2xdx$

16.51 Α) $\int_1^0 \frac{\sqrt{x}}{1+x\sqrt{x}}dx$ Β) $\int_1^2 \frac{1}{\sqrt{x}\varepsilon\varphi\sqrt{x}}dx$ Γ) $\int_1^2 \frac{x}{2+\sqrt{x-1}}dx$ Δ) $\int_1^0 (\eta\mu 2x)e^{\eta\mu x}dx$

17 ΤΟ ΟΡΙΣΜΕΝΟ ΟΛΟΚΛΗΡΩΜΑ

17.01 Η συνάρτηση f είναι συνεχής στο R. Για κάθε $\alpha,\beta,\gamma,\delta \in R$ να αποδείξετε ότι:

$$\int_\alpha^\beta f(x)dx=\int_\gamma^\delta f(x)dx \Rightarrow \int_\alpha^\gamma f(x)dx=\int_\beta^\delta f(x)dx$$

17.02 Η συνάρτηση f είναι συνεχής στο R. Για κάθε $\alpha,\beta,\gamma,\delta \in R$ να αποδείξετε ότι:

$$\int_\alpha^\beta\left(\int_\gamma^\delta f(t)e^{x^2}dx\right)dt=\int_\gamma^\delta\left(\int_\alpha^\beta f(t)e^{x^2}dt\right)dx$$

17.03 Να υπολογίσετε τα ολοκληρώματα:

Α) $\int_0^5 \frac{x}{1+x^2}dx$ Β) $\int_0^{\ln 2}\frac{e^x+1}{e^x+x}dx$

Γ) $\int_3^4 \frac{x}{x^3+x^2-2x}dx$ Δ) $\int_{\ln 2}^{\ln 3}\frac{e^{2x}}{e^x+1}dx$

17.04 Να υπολογίσετε τα ολοκληρώματα:

Α) $\int_0^3 \frac{x}{\sqrt{x+1}}dx$ Β) $\int_1^{e^\pi} \eta\mu(\ln x)dx$

Γ) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} x^2\sigma\upsilon\nu 2x dx$ Δ) $\int_0^1 (x+1)\cdot e^{x^2+2x}dx$

17.05 Να υπολογίσετε τα ολοκληρώματα:

Α) $\int_0^1 (x^2+2)e^{-x}dx$ Β) $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sigma\upsilon\nu x}{4-\eta\mu^2 x}dx$

17.06 Να υπολογίσετε τα ολοκληρώματα:

Α) $\int_1^2 \frac{2-3x}{x^3}e^{-\frac{2}{x}}dx$ Β) $\int_0^\pi (x\eta\mu x)^2 dx$

17.07 Να υπολογίσετε τα ολοκληρώματα:

Α) $\int_1^{\pi^2}\eta\mu\sqrt{x}dx$ Β) $\int_0^1 e^{\sqrt{x}}dx$

17.08 Να υπολογίσετε τα ολοκληρώματα:

Α) $\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}}\eta\mu x\cdot\eta\mu^{12}(\sigma\upsilon\nu x)dx$ Β) $\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}}\frac{2x+1}{\eta\mu^2 x}dx$

17.09 Να υπολογισθούν τα ολοκληρώματα

Β) $\int_0^2\left(x-1+\frac{1}{x+2}\right)dx$ Β) $\int_{\pi^2}^{4\pi^2}\frac{\sigma\upsilon\nu\sqrt{x}}{\sqrt{x}}dx$

17.10 Να υπολογίσετε τα ολοκληρώματα

Α) $\int_0^1 xe^{x^2}dx$ Β) $\int_0^1 \frac{x^2+1}{x^3+3x+2}dx$

17.11 Να υπολογίσετε τα ολοκληρώματα:

Α) $\int_1^e \frac{\ln x}{\sqrt{x}}dx$ Β) $\int_0^1 x\cdot 2^{3x}dx$

Γ) $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\eta\mu^2 x}{e^x}dx$ Δ) $\int_1^e \ln^2 x dx$

17.12 Να υπολογίσετε τα ολοκληρώματα:

Α) $\int_0^1 \ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)dx$ Β) $\int_0^1 \ln\frac{2+x}{2-x}dx$

Γ) $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\sigma\upsilon\nu(3x)\sigma\upsilon\nu(2x)dx$ Δ) $\int_0^1 \frac{\sqrt{x+1}}{x}dx$

17.13 Να υπολογίσετε τα I, J όταν

$I=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sigma\upsilon\nu x}{1+2\eta\mu x}dx$ $J=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{2\eta\mu x\sigma\upsilon\nu x}{1+2\eta\mu x}dx$

17.14 Να υπολογίσετε τα ολοκληρώματα:

Α) $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-x}+\sqrt{1+x}}$ Β) $\int_0^1 \frac{x}{\sqrt{x+1}}dx$

Γ) $\int_0^e\left(\int_1^x (1-t)e^{-t}dt\right)dx$ Δ) $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x+1}}dx$

17.15 Να υπολογίσετε τα ολοκληρώματα:

Α) $\int_{-2}^{2}(|x|-|x^2-1|)dx$ Β) $\int_{\frac{1}{e}}^{e}\frac{|\ln x|}{x}dx$

17.16 Να υπολογίσετε τα ολοκληρώματα:

Α) $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}}\frac{\sigma\upsilon\nu^2x-\eta\mu^2x}{\eta\mu^2x\sigma\upsilon\nu^2x}dx$ Β) $\int_{-2}^{2}|x^2-1|dx$

17.17 Να υπολογίσετε τα ολοκληρώματα:

Α) $\int_{0}^{\ln\frac{\sqrt{2}}{2}}e^x\sqrt{1-e^{2x}}dx$ Β) $\int_{\frac{1}{3}}^{\frac{2}{3}}xe^{\sqrt{x^2+2x}}dx$

Γ) $\int_{0}^{1}\frac{x+2}{1+x^2}dx$ Δ) $\int_{0}^{1}\sqrt{1-x^2}dx$

17.18 Εστω η $f(x)=\begin{cases}-2x & \alpha\nu\quad -1\le x<0\\ 4x^2 & \alpha\nu\quad 0\le x\le 1\end{cases}$

Α) Να αποδείξετε ότι η f είναι συνεχής στο 0

Β) Να βρείτε το $\int_{-1}^{1}f(x)dx$

17.19 Να βρείτε μια αρχική της συνάρτησης $f(x)=\begin{cases}\ln x+e\ ,\ x\ge 1\\ e^x\ ,\ x<1\end{cases}$

17.20 Έστω η συνάρτηση g παραγωγίσιμη με συνεχή παράγωγο στο $[0,\pi]$. Αν $\int_{0}^{\pi}[g(x)+g'(x)]e^xdx=2$ και $g(\pi)=e^{-\pi}$, να βρείτε την $g(0)$

17.21 Έστω ότι $\int_{0}^{1}f(x)dx=2$ και $\int_{2}^{3}g(x)dx=5$.

Να υπολογίσετε το $\int_{0}^{1}\left(\int_{2}^{3}f(x)g(t)dt\right)dx$

17.22 Η συνάρτηση $f:[\alpha,\beta]\to R$ είναι παραγωγίσιμη με $f(x)>0$, $f'(x)=f^2(x)$ και $f(\beta)=3f(\alpha)$. Να βρείτε το $I=\int_{\alpha}^{\beta}f(x)dx$

17.23 Να αποδείξετε ότι $\int_{0}^{\alpha}\frac{f(x)}{f(x)+f(\alpha-x)}dx=\frac{\alpha}{2}$

17.24 Αν η συνάρτηση f έχει συνεχή δεύτερη παράγωγο να αποδείξετε ότι

$$\int_{\alpha}^{\beta}xf''(x)dx=(\beta f'(\beta))-f(\beta)-(\alpha f'(\alpha)-f(\alpha))$$

17.25 Αν η συνάρτηση f έχει συνεχή δεύτερη παράγωγο να αποδείξετε ότι

$$f(x+1)-2f(x)+f(x-1)=\int_{x-1}^{x}\left(\int_{y}^{y+1}f''(t)dt\right)dy$$

17.26 Δίνεται η συνεχής συνάρτηση f για την οποία ισχύει $f(x)+f(x-1002)=0$, για κάθε $x\in R$. Να αποδείξετε ότι

Α) $f(x+2004)=f(x)$, για κάθε $x\in R$.

Β) $\int_{1}^{2005}f(x+2005)dx=\int_{2}^{2006}f(x)dx$.

17.27 Η συνάρτηση f είναι συνεχής στο $[\alpha,\beta]$. Να δείξετε ότι $\int_{\alpha}^{\beta}f(x)dx=\int_{\alpha}^{\beta}f(\alpha+\beta-x)dx$ και να βρείτε τα $\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}}\sqrt{\eta\mu x}-\sqrt{\sigma\upsilon\nu x}dx$ και $\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sigma\upsilon\nu x}{\sigma\upsilon\nu x+\eta\mu x}dx$

17.28 Έστω η συνάρτηση $f(x)=\begin{cases}x^2\ln x, & x>0\\ \alpha-1\ , & x=0\end{cases}$

Α) Να βρείτε για ποια τιμή του $\alpha\in R$ ορίζεται το ολοκλήρωμα $I=\int_{0}^{1}f(x)dx$.

Β) Για την τιμή του α που βρήκατε να υπολογίστε το I

17.29 Αν η συνάρτηση f είναι συνεχής στο $[\alpha,\beta]$ και $f(x)=f(\alpha+\beta-x)$, $\forall x\in[\alpha,\beta]$, να αποδείξετε ότι:

$$\int_{\alpha}^{\beta}xf(x)dx=\frac{\alpha+\beta}{2}\int_{\alpha}^{\beta}f(x)dx=(\alpha+\beta)\int_{\alpha}^{\frac{\alpha+\beta}{2}}f(x)dx$$

17.30 Η συνάρτηση f έχει θετική παράγωγο στο R. Έστω η συνάρτηση $F(x)=\int_{\alpha}^{\beta} f(x-t)\,dt$ με $x\in R$ για την οποία υπάρχει x_o ώστε $F'(x_o)=0$. Να αποδείξετε ότι $F(x)=0$ στο R

17.31 Έστω μια συνάρτηση f με f'' συνεχή και για την οποία ισχύει $\int_0^{\pi}\left(f(x)+f''(x)\right)\eta\mu x\,dx=2$. Αν $f(\pi)=1$, να υπολογίσετε το $f(0)$.

17.32 Αν η συνάρτηση f είναι συνεχής στο $[0,1]$ να αποδείξετε ότι $\int_0^{\pi} xf(\eta\mu x)dx=\frac{\pi}{2}\int_0^{\pi} f(\eta\mu x)dx$ και να υπολογίσετε το $I=\int_0^{\pi} x\eta\mu^2 x\,dx$

17.33 Έστω συνάρτηση f η οποία είναι παραγωγίσιμη στο $[1000,1002]$ και για την οποία ισχύει ότι:

$\int_0^2 f'(x)dx=4-2f(0)$ και $f(x)=c-f(2-x)$

Α. Να υπολογίσετε την τιμή του c.

Β. Να δείξετε ότι $\int_0^2 f(2-x)dx=\int_0^2 f(x)dx$

Γ. Να υπολογίσετε το $\int_0^2 f(x)dx$

17.34 * Αν $f(x)=\begin{cases}\dfrac{e^{\frac{1}{x}}}{x^2} & x<0\\ 0 & x=0\end{cases}$, να αποδείξετε ότι η f είναι συνεχής και ότι $\int_{-1}^{0} f(x)\,dx=\frac{1}{e}$

17.35 * Αν f συνεχής και g παραγωγίσιμη στο R, και υπάρχουν $\alpha,\beta\in R$ ώστε $\beta f(\beta\cdot x)-\alpha f(\alpha\cdot x)=g'(x)$ για κάθε $x\in R$, να δείξετε ότι: $\int_{\alpha}^{\beta} f(t)dt=g(1)-g(0)$

17.36 Αν η συνάρτηση f είναι συνεχής στο $[0,\alpha]$, $\alpha>0$ να αποδείξετε ότι $\int_0^{\alpha} x^3 f\left(x^2\right)dx=\frac{1}{2}\int_0^{\alpha^2} xf(x)dx$

17.37 Έστω f παραγωγίσιμη στο R με $f'(x)=e^{x^2}$, $\forall x\in R$ και $f(1)=e$. Να υπολογίσετε το $\int_0^1 f(x)\,dx$

ΑΡΤΙΑ ΠΕΡΙΤΤΗ

17.38 Έστω η συνεχής συνάρτηση $f:R\to R$ με την ιδιότητα $f(1-x)+f(1+x)=f(x)$ για κάθε $x\in R$. Να αποδειχθούν τα εξής:

Α) Η συνάρτηση f, είναι άρτια,

Β) $\int_{1995}^{1996} f(x)dx=\int_0^{1997} f(x)dx$.

17.39 Η συνάρτηση $f:R\to R$ είναι συνεχής, άρτια και έχει περίοδο T. Να αποδείξετε ότι:

$\int_0^T xf(x)dx=\frac{T}{2}\int_0^T f(x)dx$

17.40 Η συνάρτηση f είναι συνεχής στο $[-1,1]$ και άρτια. Να αποδείξετε ότι:

Α) $\int_0^{2\pi} xf(\eta\mu x)dx=2\pi\int_0^{\pi} f(\eta\mu x)dx$

Β) $\int_0^{\pi} xf(\sigma\upsilon\nu x)dx=\pi\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\sigma\upsilon\nu x)dx$

17.41 Να αποδείξετε ότι $\int_{-1}^{1}\frac{x}{4+\sigma\upsilon\nu 4x}dx=0$

18 *Η ΣΥΝΑΡΤΗΣΗ* $F(x)=\int_{\alpha}^{x} f(t)dt$

18.01 Να βρείτε το πεδίο ορισμού και την παράγωγο της συνάρτησης $G(x)=\int_{1}^{x} x\ln t dt$

18.02 Να βρείτε το πεδίο ορισμού και την παράγωγο της $K(x)=\int_{1}^{x^2+3x} t^2\ln t dt$

18.03 Να βρείτε το πεδίο ορισμού και την παράγωγο της $F(x)=\int_{1}^{\sqrt{x-1}} \frac{t^2}{\ln t - t}dt$

18.04 Να βρείτε το πεδίο ορισμού και την παράγωγο της συνάρτησης $G(x)=\int_{-\pi}^{\pi} |t-x|dt$, $-\pi \le x \le \pi$

18.05 Να βρείτε το πεδίο ορισμού και την παράγωγο της $G(x)=\int_{\sqrt{x}}^{4x} \frac{\ln(t+1)}{2t-1}dt$

18.06 Να βρείτε το πεδίο ορισμού και την παράγωγο της συνάρτησης $M(x)=\int_{|x|}^{x^2} \frac{1}{\ln t}dt$

18.07 Να βρείτε το πεδίο ορισμού και την παράγωγο της $H(x)=\int_{2x}^{x+1} \sqrt[5]{t^2-4t}\,dt$

18.08 Να βρείτε το πεδίο ορισμού και την παράγωγο της $G(x)=\int_{x}^{x^2} \frac{1}{\ln t}dt$

18.09 Αν η συνάρτηση f είναι συνεχής στο R, να βρείτε όπου υπάρχει την παράγωγο της συνάρτησης $F(x)=\int_{0}^{1} xf(x+t)dt$

18.10 Αν η συνάρτηση f είναι συνεχής στο R, να βρείτε όπου υπάρχει την παράγωγο της συνάρτησης $G(x)=\int_{0}^{1} x^2 tf(xt)dt$

18.11 Να βρείτε το πεδίο ορισμού και την παράγωγο της συνάρτησης $G(x)=\int_{\alpha}^{\beta} xe^{t^2}dt$

18.12 Να βρείτε το πεδίο ορισμού και την παράγωγο της συνάρτησης $G(x)=\int_{0}^{\frac{1}{x}} x^2e^t du$

18.13 Να βρείτε την παράγωγο της συνάρτησης $G(\omega)=\int_{\alpha}^{\beta} xe^t dt$

18.14 Η συνάρτηση f είναι συνεχής στο R. Να βρείτε όπου υπάρχει την παράγωγο της συνάρτησης $H(x)=\int_{1}^{2} f\left(\frac{x}{t}\right)dt$ με $x\in(0,+\infty)$

18.15 Η συνάρτηση f είναι συνεχής στο R. Να βρείτε όπου υπάρχει την παράγωγο της συνάρτησης $K(x)=x^2\int_{0}^{1} t\cdot \eta\mu^2(xt)dt$

18.16 Να βρείτε τη δεύτερη παράγωγο της $F(x)=\int_{1}^{x}\left(\int_{2}^{y}\left(\frac{1}{1+t^2+\eta\mu^2 t}\right)dt\right)dy$

18.17 Να βρεθεί η $F'(x)$ αν $F(x)=\left(\int_{e}^{\sqrt{x}} \ln t dt\right)\left(\int_{1}^{\ln x} e^t dt\right)$

18.18 Να βρεθεί η $F'(x)$ αν

$$F(x)=\int_{19}^{\int_6^x e^u du}\sigma\upsilon\nu^2 t\,dt+\int_{61}^{\int_6^x e^y dy}\eta\mu^2 t\,dt$$

18.19 Αν f συνεχής στο R, να δείξετε ότι:

$$\int_0^x\left(t\int_0^t f(u)du\right)dt=\frac{1}{2}\int_0^x\left(x^2-u^2\right)f(u)du$$

18.20 Να αποδείξετε ότι:

$$\int_0^x f(u)(\eta\mu x-\eta\mu u)du=\int_0^x\left(\sigma\upsilon\nu u\int_0^u f(t)dt\right)du$$

18.21 Να αποδείξετε ότι:

$$\int_\alpha^\beta e^{\sigma\upsilon\nu(2\pi t)}dt=\int_{\alpha+1}^{\beta+1}e^{\sigma\upsilon\nu(2\pi t)}dt,\ \ \alpha,\beta\in R$$

18.22 Να βρείτε το $\displaystyle\int_0^1\left(\int_1^x\frac{e^t-1}{t}dt\right)dx$

18.23 Έστω f μια συνάρτηση, συνεχής στο R με $F(x)=\displaystyle\int_0^1 f(xt)dt$ και παραγωγίσιμη στο $x=0$.

Α Να αποδείξετε ότι η $F(x)$ είναι παραγωγίσιμη στο R και να βρείτε την $F'(x)$

Β Αν $f(1)=0$, να αποδείξετε ότι $F(x)=0$ για κάθε $x\in R$

ΣΤΑΘΕΡΗ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗ

18.28 Να αποδείξετε ότι:

Α) Η $f(x)=\displaystyle\int_x^{x+1}e^{\sigma\upsilon\nu(2\pi t)}dt$ είναι σταθερή

Β) Ισχύει $\displaystyle\int_\alpha^\beta e^{\sigma\upsilon\nu(2\pi t)}dt=\int_{\alpha+1}^{\beta+1}e^{\sigma\upsilon\nu(2\pi t)}dt$, $\forall\alpha,\beta\in R$

18.29 Να βρείτε την παράγωγο της συνάρτησης

$f(x)=\displaystyle\int_{-1}^x\frac{t^2}{1+t^4}dt+\int_{-1}^{\frac{1}{x}}\frac{1}{1+t^4}dt$. Είναι η f σταθερή;

18.24 Δίνεται ότι η συνάρτηση f είναι συνεχής στο $[0,+\infty)$ και η συνάρτηση

$$g(x)=\begin{cases}\displaystyle\int_0^1 f(xt)dt & \alpha\nu\ \ x>0\\ f(0) & \alpha\nu\ \ x=0\end{cases}$$

Να αποδείξετε ότι

Α Η συνάρτηση g είναι συνεχής στο $x_o=0$

Β Αν η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο $x_o=0$ τότε η g είναι παραγωγίσιμη στο $[0,+\infty)$.

18.25 Να αποδειχτεί ότι αντιστρέφονται οι συναρτήσεις:

$$F(x)=\int_0^x\sqrt{1+t^2}dt\ \ \text{και}\ \ G(x)=\int_0^x\eta\mu^4t^2dt$$

18.26 Να αποδείξετε ότι δεν υπάρχει συνάρτηση f, συνεχής στο R για την οποία να ισχύει ότι

$$\int_x^y f(t)dt=\frac{f(x)}{f(y)},\ \forall x,y\in R$$

18.27 Αν $G(x)=\displaystyle\int_0^x f(t)dt,\ \ x\in R$ και

$f(t)=\displaystyle\int_{2t}^t\sqrt{1+u^2}du,\ \ t\in R$, να αποδείξετε ότι:

Α) $G''(0)=-1$

Β) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\frac{G''(x)-\sqrt{1+x^2}}{x+1}=-4$

18.30 Έστω συνάρτηση f με $A_f=\Delta$, είναι αντιστρέψιμη και παραγωγίσιμη. Να αποδείξετε ότι είναι σταθερή η συνάρτηση G με

$$G(x)=\int_\alpha^x f(t)dt+\int_\alpha^{f(x)}f^{-1}(t)dt-xf(x)\ \ \text{με}\ \ \alpha\in\Delta$$

18.31 Έστω η συνεχής συνάρτηση $f:R\to R$ με την ιδιότητα $\displaystyle\int_x^{x+y}f(t)dt=\int_{x-y}^x f(t)dt$, $\forall x,y\in R$. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f είναι σταθερή .

ΜΟΝΟΤΟΝΙΑ - ΑΚΡΟΤΑΤΑ - ΚΟΙΛΑ – ΣΗΜΕΙΑ ΚΑΜΠΗΣ Κ.Λ.Π.

18.32 Έστω $F(x)=\int_5^x\left(\int_2^t\sqrt{u^2-u}\,du\right)dt$.

Να μελετήσετε την F ως προς την μονοτονία και την κυρτότητα

18.33 Έστω η συνεχής συνάρτηση $g:R\to R$ με $g(x)>0$ για κάθε $x\in R$. Να αποδειχθεί ότι η συνάρτηση $F(x)=\int_0^x(x-t)g(t)dt$, με $x\in R$, είναι κυρτή στο R.

18.34 Αν η συνάρτηση f είναι συνεχής στο R και $f(x)<-2$ για κάθε $x\in R$, να αποδείξετε ότι η εξίσωση $\int_0^x f(t)dt+1=x^3+x^2+x$ έχει μοναδική ρίζα στο $[0,3]$

18.35 Να βρεθεί το x_0 που είναι θέση μεγίστου της συνάρτησης $f(x)=\int_0^1 e^{-(x+t)^2}dt$

18.36 Η συνάρτηση f είναι συνεχής στο $[\alpha,\beta]$ με $f(x)>0$ για κάθε $x\in[\alpha,\beta]$, να μελετήσετε τα κοίλα της συνάρτησης $g(x)=\int_\alpha^\beta f(t)|x-t|dt$, $x\in[\alpha,\beta]$

18.37 Να εξετάσετε ως προς τη μονοτονία την

$$f(x)=\int_1^x\left(\int_{t^2}^{t^3}\frac{du}{1+u^4}\right)dt,\quad x\in R$$

18.38 Να βρείτε το πεδίο ορισμού και τη μονοτονία της συνάρτησης $f(x)=\int_0^1\frac{1}{t^2-x}dt$

18.39* Δίνεται ότι η συνάρτηση f συνεχής και γνησίως αύξουσα στο R και η συνάρτηση g είναι συνεχής και θετική στο R. Να μελετήσετε τη μονοτονία της συνάρτησης $h(x)=\frac{1}{\int_0^x g(t)dt}\int_0^x f(t)g(t)dt$, $x>0$

ΔΙΝΕΤΑΙ ΑΝΙΣΟΤΗΤΑ

18.40 Έστω f, συνεχής συνάρτηση στο R. Αν $\int_\alpha^\beta f(x+t)dt\ge\int_\alpha^\beta f(t)dt$, να δείξετε ότι $f(\alpha)=f(\beta)$

18.41 Η συνάρτηση f είναι συνεχής στο $[0,+\infty)$ και ισχύει ότι $\int_0^x f(t)dt<f(x)$ για κάθε $x\ge 0$. Να δείξετε ότι $f(x)>0$ στο $[0,+\infty)$

18.42 Μια συνάρτηση f είναι συνεχής στο R. Να βρείτε το α με $0<\alpha\ne 1$ αν ισχύει ότι:

$$x+\int_0^{x^2}f(t)dt\ge\alpha^{\eta\mu x}+\alpha^{\sigma\upsilon\nu x}-\alpha-1,\quad x\in R$$

18.43 Έστω η συνάρτηση f συνεχής στο R και ισχύει $\int_0^x e^{t-x}f(x-t)dt\ge -e^{-\alpha x}+\sigma\upsilon\nu x$ για κάθε $x\in R$ ($\alpha,t\in R$). Να δείξετε ότι $f(0)=\alpha$

18.44** Αν η συνάρτηση f είναι συνεχής στο διάστημα $[3,4]$ με $1\le f(x)\le 2$ για κάθε $x\in[3,4]$ και ισχύει $\int_3^4 f^2(x)dx\ge 4$ να αποδείξετε ότι $\int_3^4 f(x)dx=2$.

18.45 Αν για τις συνεχείς συναρτήσεις f, g ισχύει $\int_{1/x}^1 f(xt)dt+g(x)<f(x)+\int_1^x\frac{g(t)}{x}dt$ για κάθε $x\in[1,+\infty)$, να αποδείξετε ότι:

Α) $\int_{1/x}^1 f(xt)dt=\frac{1}{x}\int_1^x f(t)dt$

Β) $f(x)>g(x)$ για κάθε $x\in[1,+\infty)$

ΝΑ ΒΡΕΘΕΙ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗ

18.46 Να βρείτε τις συνεχείς συναρτήσεις $f:R\to R$ για τις οποίες για κάθε $x\in R$ ισχύει ότι:

$$3\int_0^x f(t)dt-\int_1^{-x} f(t)dt=2x^2+2x+1$$

18.47 Να βρείτε τον τύπο συνάρτησης f, συνεχούς στο $[0,1]$, αν ισχύει ότι $\int_0^1 f(x)(x-f(x))dx=\frac{1}{12}$

18.48 Δίνεται η συνάρτηση f συνεχή στο διάστημα $[0,1]$ για την οποία ισχύουν: $\int_0^1 f(x)dx=1$ και $\int_0^1 f^2(x)dx=1$. Να δείξετε ότι: $f(x)=1$

18.49 Να βρείτε τη συνάρτηση $f:R\to R$ αν $f(0)=1$ και $f'(x)=\int_0^1 f(x)dx$ για κάθε $x\in R$

18.50 Να βρείτε τον τύπο της συνάρτησης $f:R\to R$ για την οποία ισχύει ότι $f'(x)=f(x)+\int_0^1 f(t)dt$ για κάθε $x\in R$ και $f(0)=1$.

18.51 Να βρεθεί η συνάρτησης f με συνεχή 2^{η} παράγωγο στο $\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$ για την οποία ισχύουν $f(0)=1995$, $f'(0)=1$ και

$$1+\int_0^x f''(t)\sigma\upsilon\nu t dt=\sigma\upsilon\nu^2 x+\int_0^x f'(t)\eta\mu t dt$$

18.52 Να βρεθεί η συνεχής συνάρτηση $f:R\to R$, αν ισχύει ότι $f(x)=(1+e^x)\left(1+\int_0^x \frac{f(t)}{1+e^t}dt\right)$, $\forall x\in R$.

18.53 Να βρεθεί ο τύπος της συνάρτησης f που είναι συνεχής στο R και ισχύει ότι

$$\int_0^1 2e^x f(x)dx\ge\int_0^1 f^2(x)dx+\int_0^1 e^{2x}dx \text{ για κάθε } x\in R$$

18.54 Έστω συνάρτηση f συνεχής στο $[0,1]$, ώστε $\int_0^1 \ln^2 f(x)dx+\frac{1}{5}=2\int_0^1 x^2\ln f(x)dx$ και $f(x)>0$, $x\in[0,1]$. Να αποδείξετε ότι $f(x)=e^{x^2}$, $x\in[0,1]$ και να υπολογίσετε το $\int_0^1 \frac{f(x)}{f(1-x)+f(x)}dx$

18.55 Να βρεθεί συνεχής συνάρτηση $f:R\to R$ αν ισχύει ότι $x\int_0^1 f(xt)dt=f(x)-1$ για κάθε $x\in R$.

18.56 Έστω η παραγωγίσιμη συνάρτηση $f:[0,1]\to R$ για την οποία ισχύει ότι

$f'(x)\ge\frac{f^2(1)+f^2(0)+2f(0)+5}{2}$ για κάθε $x\in[0,1]$. Να αποδείξετε ότι $f(x)=3x-2$

18.57 Να βρείτε τη συνάρτηση f, συνεχής στο R αν ισχύει ότι $f(x)=x^2+\int_0^x e^{-t}f(x-t)dt$, $\forall x\in R$

18.58 Να βρείτε τη συνάρτηση F αν

$F(x)=\int_1^e |t-x|\ln t dt$ με $x\ge 1$

18.59 Δίνεται η συνάρτηση f που είναι συνεχής στο R και για κάθε $x\in R$ ισχύει ότι

$\int_0^x f(t)dt=\int_x^1 t^2 f(t)dt+\frac{x^4}{2}+\frac{x^6}{3}+c$ με $c\in R$. Να βρείτε την f και να υπολογίσετε τη σταθερά c.

18.60 Να βρείτε τις συνεχείς συναρτήσεις $f:[0,+\infty)\to R$ αν ισχύει $f(1)=e$ και

$\int_0^1 f(tx)dt=\frac{1}{x}f(x)$ για κάθε $x>0$

ΕΦΑΠΤΟΜΕΝΗ

18.61 Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\int_{1}^{2x^2-x}\sqrt{1+t^2}dt$

Να βρεθεί η εξίσωση της εφαπτομένης (ε) της C_f στο σημείο $x_o=1$, καθώς και ο $\lambda\in R$ ώστε η ευθεία (δ) $y=\sqrt{2}\left(\lambda^2-\frac{7}{6}\right)x+3$, να είναι κάθετη στην (ε)

18.62 Έστω συνάρτηση f παραγωγίσιμη στο R με $f'(0)=1$, ώστε να ισχύει: $\int_{0}^{x}f(t)dt\geq xe^{-x}$, για κάθε $x\in R$. Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της f στο σημείο $A(0,f(0))$.

18.63 Αν για την παραγωγίσιμη συνάρτηση $f:R\to R$ ισχύει ότι $\int_{0}^{1}f(t)dt=1$ και $f\left(\int_{0}^{x}f(t)dt\right)=2x^2$ για κάθε $x\in R$, να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της C_f στο σημείο της με $x_o=1$

18.64 Να βρεθούν οι εξισώσεις των εφαπτομένων του διαγράμματος της συνάρτησης $f(x)=\int_{2}^{x}(t-1)dt$ στα σημεία τομής του με τον άξονα $x'x$

ΥΠΑΡΧΕΙ - - - ΠΡΟΣΟΧΗ!!! $f(x)=\left(\int_{0}^{x}f(t)dt\right)'$ (*)

18.65 Η συνάρτηση f είναι συνεχής στο $[0,1]$. Να αποδείξετε ότι υπάρχει $x_o\in(0,1)$ ώστε

$$x_o f(x_o)=2\int_{x_o}^{1}f(t)dt$$

18.66 Η συνάρτηση f είναι συνεχής στο $[0,1]$. Να αποδείξετε ότι υπάρχει $\gamma\in(0,1)$ ώστε

$$f(\gamma)\cdot\eta\mu\gamma\cdot\sigma\upsilon\nu\gamma=\int_{\gamma}^{1}f(t)dt$$

18.67 Η συνάρτηση f είναι συνεχής στο διάστημα $\left[0,\frac{\pi}{3}\right]$ και ισχύει: $\int_{0}^{\frac{\pi}{3}}f(t)dt=0$. Να αποδείξετε ότι υπάρχει $\xi\in\left(0,\frac{\pi}{3}\right)$ ώστε $\frac{f(\xi)}{\varepsilon\varphi\xi}=\int_{\xi}^{0}f(t)dt$

18.68 Η συνάρτηση $f:R\to R$ είναι συνεχής και ισχύει $\int_{0}^{x}\left(\int_{1}^{t}f(u)du\right)dt\geq 1-e^x$, $x\in R$. Να δείξετε ότι η εξίσωση $f(x)=1$, έχει (τμ) ρίζα στο $(0,1)$.

18.69 Η συνάρτηση f είναι συνεχής στο $[\alpha,\beta]$ και ισχύει ότι $\int_{\alpha}^{\beta}f(x)dx=0$. Να αποδείξετε ότι υπάρχουν:

A) $x_o\in(\alpha,\beta)$ ώστε $\int_{\alpha}^{x_o}f(t)dt=f(x_o)$

B) $\gamma\in(\alpha,\beta)$ ώστε $\int_{\alpha}^{\gamma}f(t)dt=\gamma f(\gamma)$ αν $0\notin[\alpha,\beta]$

18.70 Η συνάρτηση f είναι συνεχής στο R. Να δείξετε ότι υπάρχει $\xi\in(0,1)$ ώστε $\int_{1}^{\xi}f(t)dt=-2\xi f(\xi)$

18.71 Η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο R και ισχύει $f(0)=0$ και $\int_0^1 f(x)dx=f(1)$. Να αποδείξετε ότι υπάρχει $\xi\in(0,1)$ ώστε $f'(\xi)=f(\xi)$

18.72 Η συνάρτηση f είναι συνεχής στο $[1,2]$. Να δείξετε ότι υπάρχει $\xi\in(1,2)$ ώστε

$$\int_{\xi}^{2}f(t)dt=\xi\cdot\ln\xi\cdot f(\xi)$$

ΑΝΙΣΟΤΗΤΕΣ

18.73 Να αποδείξετε τις ανισότητες:

Α) $\sqrt{3}+\frac{3}{2}\le \int_0^{\sqrt{3}} \frac{2+x}{\sqrt{1+x^2}}dx \le \sqrt{15}$

Β) $\ln\frac{\alpha}{\beta} \le \int_\alpha^\beta \frac{\eta\mu x}{x} \le \ln\frac{\beta}{\alpha}$ για κάθε $0<\alpha\le\beta$

Γ) $1\le \int_0^1 \frac{e^x}{1+x^2}dx \le \frac{e}{2}$

18.74 Αν η συνάρτηση f είναι συνεχής στο διάστημα $[3,4]$ με $1\le f(x)\le 2$ για κάθε $x\in[3,4]$ και ισχύει $\int_3^4 f^2(x)dx \ge 4$ να αποδείξετε ότι $\int_3^4 f(x)dx = 2$.

18.75 Η συνάρτηση f είναι συνεχής στο $[0,+\infty)$ με $f(x)>0$ για κάθε $x\in[0,+\infty)$. Να αποδείξετε ότι

$$x^2\int_0^x f(t)dt > \int_0^x t^2 f(t)dt \text{ για κάθε } x\in(0,+\infty)$$

18.76 Η συναρτήσεις f και g είναι συνεχείς στο $[0,+\infty)$ με $f(x)>0$ για κάθε $x\in[0,+\infty)$ η g είναι γνησίως αύξουσα $[0,+\infty)$. Να αποδείξετε ότι

$$g(x)\int_0^x f(t)dt > \int_0^x g(t)f(t)dt \text{ για κάθε } x\in(0,+\infty)$$

18.77 Η συνάρτηση f είναι συνεχής στο $[0,1]$ με $f(x)>0$ για κάθε $x\in[0,1]$. Να αποδείξετε ότι

$$\frac{\int_0^1 xf^2(x)dx}{\int_0^1 f(x)dx} < \frac{\int_0^1 f^2(x)dx}{\int_0^1 xf(x)dx}$$

18.78 Δίνεται ότι η συνάρτηση f είναι συνεχής στο $[0,1]$. Να αποδείξετε ότι

$$\int_0^1 xf(x)dx \le \frac{1}{12}+\int_0^1 f^2(x)dx$$

18.79 Έστω οι συνεχείς συναρτήσεις $f,g:[\alpha,\beta]\to[0,+\infty)$ για τις οποίες ισχύει ότι $g(\alpha)=2$, και η g είναι φθίνουσα στο $[\alpha,\beta]$. Να αποδείξετε ότι:

Α) $0\le \int_\alpha^\beta f(x)g(x)dx \le 2\int_\alpha^\beta f(x)dx$

Β) Αν $\int_\alpha^\beta f(x)g(x)dx = 2$ τότε υπάρχει $\xi(\alpha,\beta)$ ώστε $\int_\alpha^\xi f(x)dx = 1$

18.80 Δίνεται η συνάρτηση f παραγωγίσιμη στο R με $f(0)=0$ για την οποία ισχύει ότι $0<f'(x)<1$ για κάθε $x>0$. Να αποδείξετε ότι: $\int_0^x f^3(t)dt \le \left(\int_0^x f(t)dt\right)^2$ για κάθε $x\ge 0$.

ΑΝΑΓΩΓΙΚΟΙ ΤΥΠΟΙ

18.81 Α. Αν $I_\nu = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \varepsilon\varphi^\nu x dx,\ \nu\in N^*$ τότε να αποδείξετε ότι για κάθε $\nu>2$ ισχύει $I_\nu = \frac{1}{\nu-1} - I_{\nu-2}$ και να να υπολογίσετε το I_5.

18.82 Αν $I_\nu = \int_0^1 \frac{e^{\nu x}}{1+e^x}dx,\ \nu\in N$ να αποδείξετε ότι $I_{\nu+1} = \frac{e^\nu-1}{\nu} - I_\nu,\ \nu\in N^*$

ΑΝΤΙΣΤΡΟΦΗ

18.83 Α) Η συνάρτηση f είναι ορισμένη στο $[\alpha,\beta]$, αντιστρέψιμη με συνεχή πρώτη παράγωγο στο $[\alpha,\beta]$, να δείξετε ότι $\int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx + \int_{f(\alpha)}^{f(\beta)} f^{-1}(x)dx = \beta f(\beta) - \alpha f(\alpha)$

Β) Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = e^x + x^5$.

Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα: $\int_{1}^{e+1} f^{-1}(x)dx$.

18.84 Έστω η συνάρτηση $f(x) = \sqrt{2x + \eta\mu x}$, $x \geq 0$.

Α) Να βρείτε τη μονοτονία της f

Β) Να βρείτε το σύνολο τιμών της f

Γ) Να αποδείξετε ότι ορίζεται η $f^{-1}(x)$ και να βρείτε το πεδίο ορισμού της.

Δ) Να βρείτε το ολοκλήρωμα $I = \int_{0}^{2\sqrt{\pi}} x f^{-1}(x)dx$

18.85 Έστω η παραγωγίσιμη συνάρτηση $f: R \to R$ τέτοια ώστε $f^3(x) + f(x) + 2x = 0$ για κάθε $x \in R$.

Α) Να δείξετε ότι η f είναι γνησίως φθίνουσα και να βρείτε το f(1).

Β) Να δείξετε ότι υπάρχει ένα τουλάχιστον $x_o \in \left(\frac{1}{2}, 1\right)$ τέτοιο ώστε $f(x_o) = x_o 4^{x_o} - 3$.

Γ) Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα $\int_{-1}^{0} f(x)dx$

18.86 Αν $f(x) = x + \int_{2004}^{x} e^{-t^2} dt$, $x \in R$, να αποδείξετε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα και να λύσετε την εξίσωση: $f(x) = f^{-1}(x)$.

18.87 Να δείξετε ότι $\int_{1}^{e} \sqrt{\ln x}\,dx + \int_{0}^{1} e^{x^2} dx = e$

ΟΡΙΑ ΜΕ ΟΛΟΚΛΗΡΩΜΑΤΑ

18.88 Να αποδείξετε ότι:

Α) $$\lim_{x\to 0} \frac{e^x - \int_0^x t\sigma\upsilon\nu t\,dt - x - 1}{x^3} = \frac{1}{6}$$

Β) $$\lim_{x\to 0} \frac{\int_0^x (\eta\mu t - t)dt}{\int_0^x (\eta\mu t - \sigma\upsilon\nu t)dt} = -\frac{1}{2}$$

18.89 Να αποδείξετε ότι:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\int_0^x (\eta\mu t - t)dt \cdot \int_0^{\eta\mu x} e^{t^2} dt}{\int_0^x (\eta\mu t - \sigma\upsilon\nu t)dt \cdot \int_0^{\varepsilon\varphi x} e^{t^2} dt} = -\frac{1}{2}$$

18.90 Να δείξετε ότι $\frac{e^x}{t} \leq \frac{e^t}{t} \leq \frac{e^{2x}}{t}$ για κάθε $x \in (0,1)$, $t \in (x, 2x)$ και ότι $\lim_{x\to 0^+}\left(\int_x^{2x} \frac{e^t}{t} dt\right) = \ln 2$

18.91 Να αποδείξετε ότι:

Α) $$\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{x} \int_x^{x^2} \frac{1}{\ln t} dt = +\infty$$

Β) $$\lim_{x\to+\infty} \int_{x-1}^{x+1} \frac{1}{\sqrt{3+2t^2}} dt = 0$$

18.92 Να βρείτε την παράγωγο της συνάρτησης $G(x) = \int_0^1 x t f(xt) dt$

18.93 Δίνεται η συνεχής συνάρτηση $f: R \to (0, +\infty)$ και η $g(x) = \begin{cases} \dfrac{\int_0^x t f(t)dt}{\int_0^x f(t)dt} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$ Να αποδείξετε ότι

Α) η g παραγωγίσιμη στο R και ότι $g'(0) = \frac{1}{2}$

Γ) η g είναι γνήσια αύξουσα. Έχει ακρότατα;

19 ΕΜΒΑΔΑ

19.01 Να βρείτε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τις γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων $g(x)=\sqrt{x}$, $f(x)=2x-1$ και $h(x)=\frac{2}{x^2}$

19.02 Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\frac{x^2}{1+x}$. Να υπολογιστεί το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη C_f, την πλάγια ασύμπτωτη της C_f τις ευθείες $x=0$, $x=3$ και τον άξονα $x'x$

19.03 Δίνεται η συνάρτηση με τύπο $f(x)=\ln x$. Να βρείτε τις εξισώσεις των εφαπτομένων της γραφικής παράστασης της f στα σημεία με τετμημένες $x=1$ και $x=e$. Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου Ω, που περικλείεται από τη C_f και τις δύο εφαπτόμενες.

19.04 Έστω $E(\lambda)$ το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από την καμπύλη $y=\frac{1}{x^2}$, τον άξονα $x'x$ και τις ευθείες $x=1$, $x=\lambda$ $(\lambda>0)$. Να προσδιορίσετε την ευθεία $x=\alpha$ που χωρίζει το παραπάνω χωρίο σε δύο ισεμβαδικά χωρία.

19.05 Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=(x^2-3x+1)e^x$

Α) Να υπολογίσετε το εμβαδόν $E(t)$ του μέρους του επιπέδου, τα σημεία $M(x,y)$ του οποίου, ικανοποιούν τις σχέσεις: $t\le x\le 0$ με $t<0$ και $0\le y\le f(x)$

Β) Να υπολογίσετε το $\lim\limits_{t\to-\infty}E(t)$

19.06 Αν $f(x)=\frac{1}{1+x^2}$ να βρείτε το εμβαδο του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της $F(x)=\int_1^x f(t)dt$ και τους άξονες $x'x$, $y'y$

19.07 Έστω η συνεχής συνάρτηση f με $D_f=R$ ώστε $f(x)>0$ και $f(2-x)+f(x)=2$ για κάθε $x\in R$. Να βρείτε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη C_f τον $x'x$ και τις ευθείες $x=0$ και $x=2$

19.08 Έστω οι συναρτήσεις f,g με $A_f=A_g=R$ και ισχύει $f'(x)-g'(x)=\left(x^2+2x-1\right)e^x$ για κάθε $x\in R$. Αν γνωρίζουμε ότι η C_h της συνάρτησης $h(x)=f(x)-g(x)$ διέρχεται από το σημείο $A(0,-1)$

Α) Να βρείτε τη συνάρτηση h

Β) Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τις C_f, C_g

19.09 Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\begin{cases} xe^x & x\le 0 \\ x\ln x & x>0 \end{cases}$ Να υπολογίσετε τα εμβαδά E των χωρίων που περικλείονται από τη C_f τον άξονα $x'x$ και την ευθεία $x=-1$

19.10 Α. Αν f συνεχής στο $[0,\alpha]$, να αποδείξετε ότι $\int_0^\alpha f(x)dx = \int_0^\alpha f(\alpha - x)dx$.

Β Αν $f(x) = \ln(1+\varepsilon\varphi x)$, $x \in \left[0,\frac{\pi}{4}\right]$

α) Να αποδείξετε ότι $f(x) + f\left(\frac{\pi}{4} - x\right) = \ln 2$ για κάθε $x \in \left[0,\frac{\pi}{4}\right]$

β) Να υπολογίσετε το εμβαδόν του επίπεδου χωρίου που ορίζεται από την γραφική παράσταση της f και τις ευθείες $y=0$, $x=0$ και $x=\frac{\pi}{4}$

19.11 Έστω η συνάρτηση f, δύο φορές παραγωγίσιμη με $f''(x) > 0$ για κάθε $x \in R$. Αν η f παρουσιάζει τοπικό ακρότατο στο $x_o = 0$ με τιμή μηδέν και $f(1) + f(-1) = 3$ να βρείτε το εμβαδόν του χωρίου μεταξύ της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f', του άξονα $x'x$ και των ευθειών $x=-1$ και $x=1$

19.12 Η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη και ισχύει $f(x) = \int_0^2 f(x)dx - f'(x)$, $\forall x \in R$ και $f(0) = 2$

Α) Να βρείτε τον τύπο της f

Β) Να βρείτε την οριζόντια ασύμπτωτη της C_f στο $+\infty$

Γ) Να βρείτε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη C_f την παραπάνω ασύμπτωτη και τις ευθείες $x=0$ και $x=2$.

19.13 Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{1}{\eta\mu x}$, $x \in (0,\pi)$ Να αποδείξετε ότι το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από την C_f τον άξονα $x'x$ και τις ευθείες $x = \frac{\pi}{3}$ και $x = \frac{\pi}{2}$ είναι $E = \frac{1}{2}\ln 3$.

19.14 Αν οι συναρτήσεις f, g είναι δύο φορές παραγωγίσιμες στο R και ικανοποιούν τις σχέσεις $f''(x) - g''(x) = 4$ για κάθε $x \in R$, $f'(1) = g'(1)$ και $f(2) = g(2)$. Να βρείτε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τις γραφικές παραστάσεις των f και g.

19.15 Δίνεται η συνάρτηση f με τύπο $f(x) = \begin{cases} e^x - e, & x<1 \\ \frac{\sqrt{\ln x}}{x}, & x \geq 1 \end{cases}$. Να αποδείξετε ότι η f είναι συνεχής και να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου, το οποίο περικλείεται από τη γραφική παράσταση της f τον άξονα $x'x$ και τις ευθείες με εξισώσεις $x=0$ και $x=e$.

19.16 Να βρείτε το εμβαδόν του χωρίου που περιέχει τα σημεία $M(x,y)$ με $\sqrt{e} \leq x \leq e$ και $\frac{1}{2}x^2 \ln\frac{x^2}{e} \leq y \leq \frac{1}{2}x^2$

19.17 Να αποδείξετε ότι το εμβαδόν του χωρίου που περιέχεται ανάμεσα στην καμπύλη $y = |x^2 - 1|$ και την ευθεία $x + y = 1$ ισούται με $\frac{13}{6}$

20 ΓΕΝΙΚΕΣ -ΣΥΝΔΙΑΣΤΙΚΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΣΕ ΟΛΗ ΤΗΝ ΥΛΗ

20.01 Δίνεται η συνάρτηση: $f(x)=\int_{-x}^{x}\frac{e^t+\sigma\upsilon\nu t}{1+e^t}dt$, $x\in R$. Να αποδείξετε ότι:

Α) $f(x)=x+\eta\mu x$ για κάθε $x\in R$.

Β) ορίζεται η $f^{-1}:[0,\pi]\to[0,\pi]$.

Γ) το εμβαδόν του χωρίου μεταξύ των C_f και $C_{f^{-1}}$ και των ευθειών $x=0$ και $x=\pi$ είναι $E=4\tau\mu$.

20.02 Η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο R με $f(x)>0$ και ισχύει: $\ln(f(x))+e^{f(x)}=x$ για κάθε $x\in R$.

Α) Μελετήστε την f ως προς τη μονοτονία.

Β) Αποδείξτε ότι η f αντιστρέφεται.

Γ) Να λύσετε τις εξισώσεις $f(x)=1$ και $f(x)=e$.

Δ) Υπολογίστε το άθροισμα $I=\int_1^e f^{-1}(x)dx+\int_e^{e^e+1}f(x)dx$.

20.03 Έστω η συνεχής συνάρτηση $f:(0,+\infty)\to R$ για την οποία ισχύει ότι $f(xy)=xf(y)+yf(x)$ για κάθε $x,y\in(0,+\infty)$ με $f'(1)=1$.

Α) Να αποδείξετε ότι $f(x)=x\ln x$, $x\in(0,+\infty)$

Β) Να βρείτε το $\lim_{x\to 0}f(x)$

Γ) Να λύσετε την εξίσωση $2f(x)=x^2-1$

Δ) Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τις γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων $h(x)=2f(x)$, $g(x)=x^2-1$ και την ευθεία $x=e$.

20.04 Θεωρούμε την συνάρτηση f συνεχή το $\Delta=[0,2]$ ώστε για κάθε $x\in\Delta$ να ισχύει: $\int_x^2 f(t)dt\geq\frac{2-x^3}{3}$. Αν F είναι μια παράγουσα της f στο Δ, να αποδείξετε ότι:

Α) $2F(2)\geq\int_0^2 F(x)dx$

Β) $\int_0^2[xF(x)]'dx=\int_0^2 F(x)dx+\int_0^2 xf(x)dx$

Γ) $\int_0^2 xf(x)dx\geq 0$

Δ) $\int_0^2 f^2(x)dx\geq-\frac{2}{3}$

20.05 Α) Ανισότητα **Bunyakovsky-Cauchy- Schwarz:** Αν f, g είναι συνεχείς συναρτήσεις στο $[\alpha,\beta]$, να δείξετε ότι $\left(\int_\alpha^\beta f(x)g(x)dx\right)^2\leq\int_\alpha^\beta (f(x))^2dx\cdot\int_\alpha^\beta (g(x))^2dx$.

Β) Να αποδείξετε ότι α) $\left(\int_\alpha^\beta f(x)dx\right)^2\leq(\beta-\alpha)\int_\alpha^\beta f^2(x)dx$ β) $\left(\int_\alpha^\beta xf(x)dx\right)^2\leq(\beta^2-\alpha^2)\int_\alpha^\beta f^2(x)dx$

20.06 Δίνεται η συνάρτηση f συνεχής στο διάστημα $[-2,2]$, παραγωγίσιμη δύο φορές στο διάστημα $(-2,2)$ για την οποία επίσης γνωρίζουμε ότι $f(0)=3$ και $f(x)f'(x)=f'(x)-x$ για κάθε $x\in(-2,2)$

Έστω και οι μιγαδικοί αριθμοί z για τους οποίους ισχύει $|z-i|=2$. Να αποδείξετε ότι :

Α) Η f δεν έχει σημεία καμπής

Β) $f^2(x)-2f(x)+x^2-3=0$

Γ) Η f είναι κοίλη

Δ) $f(x)=1+\sqrt{4-x^2}$, $x\in[-2,2]$

Ε) Η γραφική παράσταση της f είναι μέρος του γεωμετρικού τόπου των μιγαδικών z και ότι η εφαπτομένη της, στο σημείο που είναι η εικόνα του z για τον οποίο το μέτρο $|z|$ γίνεται μέγιστο, είναι παράλληλη στον άξονα $x'x$

Ζ) $\int_0^2 (f(x)-1)dx=\pi$

20.07 Δίνεται η συνάρτηση $f:R\to R$ με $f(x)=|z_1x+z_2|$ όπου z_1,z_2 μιγαδικοί διάφοροι του μηδενός .

Α) Να βρείτε το ελάχιστο της συνάρτησης $g(x)=f(x)+f(-x)$

Β) Η συνάρτηση f είναι άρτια αν και μόνον αν $\mathrm{Re}\left(z_1\overline{z_2}\right)=0$

Γ) Να μελετηθεί ως προς την μονοτονία και τα ακρότατα

Δ) Να βρείτε την πλάγια ασύμπτωτη της C_f στο $+\infty$

Ε) Αν η πλάγια ασύμπτωτη διέρχεται από το σημείο $M\left(0,|z_2|\right)$ να δείξετε ότι ο $w=z_1\overline{z_2}$ είναι θετικός αριθμός

Στ) Αν οι μιγαδικοί z_1,z_2 ανήκουν στο εσωτερικό του κύκλου $\left(O,\frac{1}{2}\right)$, να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f(x)=\eta\mu\left(\frac{\pi x}{2}\right)$, έχει λύση στο διάστημα $(0,1)$

Ζ) Αν οι μιγαδικοί z_1,z_2 ανήκουν στο κύκλο $\left(O,\frac{1}{2}\right)$, να αποδείξετε ότι $\frac{1}{4}\le\int_0^1 f(x)dx\le\frac{3}{4}$

Η) Αν $z_1=1$ και $z_2=i$ να αποδείξετε ότι $\int_0^x \frac{1}{f(t)}dt=\ln(x+\sqrt{x^2+1})$

20.08 Δίνεται η παραγωγίσιμη συνάρτηση $f:(0,+\infty)\to R$ τέτοια ώστε $f\left(\frac{1}{e}\right)=-\frac{1}{e}$ και ο μιγαδικός z η εικόνα του οποίου κινείται στη γραφική παράσταση της f. Το μέτρο του z, γίνεται ελάχιστο όταν η εικόνα του βρίσκεται στο σημείο $A\left(\frac{1}{e},-\frac{1}{e}\right)$. Να δείξετε ότι:

Α $g'(x)g(x)-f'(x)f(x)=x$ για κάθε $x>0$.

Β Η εφαπτομένη ευθεία (ε) της γραφικής παράστασης της f στο *Α* είναι κάθετη στην ευθεία ΟΑ, όπου Ο η αρχή των αξόνων.

Γ Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας (ε) του β ερωτήματος.

Δ Αν επιπλέον ισχύει $f'(x)\cdot e^{e\cdot f(x)+1}=c$, για κάθε $x>0$ και c σταθερός πραγματικός αριθμό τότε:

α) Να δείξετε ότι $f(x)=\frac{\ln x}{e}$.

β) Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της f την ευθεία (ε) του Β ερωτήματος και τον $x'x$

20.09 Η συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ είναι συνεχής και για κάθε $x\in\mathbb{R}$, ισχύει: $e^{f(x)}+f(x)-x-1=0$

A) α Να δείξετε ότι η συνάρτηση f αντιστρέφεται.

β Να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς τη μονοτονία.

γ Να λύσετε τις εξισώσεις: $f^{-1}(x)=0$ και $f^{-1}(x)=e$

δ Να αποδείξετε ότι $\int_0^e f(x)dx=\frac{3}{2}$

B) Θεωρούμε τη συνάρτηση $F(x)=\int_0^x e^t f(t)dt$ καθώς $x\in\mathbb{R}$. Να μελετηθεί η συνάρτηση $G(x)=\int_0^x F(t)dt$ $x\in\mathbb{R}$ ως προς τη καμπυλότητα και τα σημεία καμπής.

Γ) Έστω ο μιγαδικός αριθμός $z\in\mathbb{C}$ με $|z|=\frac{2}{3}\int_0^e f(x)dx$

α) Να αποδείξετε ότι $2\le|z+1|+|z-1|\le 4$.

β) Αν επιπλέον ισχύει ότι $\mathrm{Im}\left(z^2-z+1\right)=0$, να βρεθεί ο z

20.10 Θεωρούμε το μιγαδικό $z=\alpha+\beta i$, όπου $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$ και τη συνεχή και γνήσια αύξουσα συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, που είναι τέτοια, ώστε να ισχύει $|z-i|f(x)+|z+i|f(1-x)=|z-i|+|z+i|$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$

Να αποδείξετε ότι:

A) $z\neq i$ και $z\neq -i$.

B) $|z-i|=|z+i|$.

Γ) ο αριθμός z είναι πραγματικός.

Δ) η εξίσωση $f(x)=1$ έχει μοναδική πραγματική ρίζα.

E) $\int_0^1 f(x)dx=1$.

Στ) η εξίσωση $\int_0^{2x} f(t)dt=1-xf(x)$ έχει μια τουλάχιστον ρίζα στο διάστημα $\left(0,\frac{1}{2}\right)$.

20.11 **Έστω οι μιγαδικοί z,w με $|w|=1$, $z\notin\mathbb{R}$, $z+\frac{1}{z}\in\mathbb{R}$ και η συνάρτηση $f(x)=|z+xw|$, $x\in\mathbb{R}$.

A) Να αποδείξετε ότι $|z|=1$

B) Αν επιπλέον ισχύει ότι $\mathrm{Re}(z\overline{w})=0$ τότε:

α) Να αποδείξετε ότι $f(x)=\sqrt{1+x^2}$

β) Να βρείτε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της συνάρτησης $F(x)=\int_1^x f(t)dt$ και τους άξονες $x'x$ και $y'y$

20.12 Δίνεται ο μιγαδικός z με $|z|=1$ και η συνάρτηση $f(x)=|x\cdot z-\overline{z}|^2$, $x\in\mathbb{R}$, για την οποία ισχύει ότι $3\int_0^1 f(x)dx=7$. Να αποδείξετε ότι ο z είναι φανταστικός.

20.13 Για τους $z_1,\ z_2\in\mathbb{C}$ ισχύει ότι $\int_0^{3x}|z_1\cdot t+z_2|dt\ge 3x|z_1|$, $x\in\mathbb{R}$, να αποδείξετε ότι $|z_1|=|z_2|$

20.14 Να υπολογιστεί το $\int_{\alpha}^{\beta}\left(\eta\mu^2 x\sigma\upsilon\nu^5 x\right)dx$, όπου α,β $(\alpha<\beta)$ είναι οι τεταγμένες των κοινών σημείων της $x=1$ με τις ασύμπτωτες του γεωμετρικού τόπου των εικόνων των μιγαδικών z που ικανοποιούν την ισότητα $z\bar{z}-\left(z^2+\bar{z}^2\right)+1=0$

20.15 Έστω η συνεχής συνάρτηση $f:R\to R$ με $f(1)=1$. Αν $z\in C$ και για κάθε $x\in R$ ισχύει ότι $2\int_{1}^{x}|z+5i|f(t)dt\le\int_{1}^{x^2}|\bar{z}+5i|e^{t-1}dt+12(x-1)$.

Α) Να βρείτε το γεωμετρικό τόπο C των εικόνων του z στο μιγαδικό επίπεδο

Β) Να βρείτε τον τύπο της συνάρτησης h που έχει γραφική παράσταση την καμπύλη C

Γ) Να βρείτε το εμβαδόν E του χωρίου Ω που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της συνάρτησης $H(x)=\int_{1}^{x}h(t)dt$, τους άξονες $x'x$, $y'y$ και την ευθεία $x=1$.

20.16 Έστω $z_1,z_2\in C$ με $z_1,z_2\ne 0+0\cdot i$ και η συνάρτηση $f:R\to R$ με $f(x)=|z_1\cdot x+z_2|$.

Α) Να βρεθεί το ελάχιστο της συνάρτησης $g(x)=f(x)+f(-x),\ x\in R$

Β) Αν η πλάγια ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης της $f(x)$ στο $+\infty$ διέρχεται από το $A\left(0,|z_2|\right)$, να αποδείξετε ότι ο αριθμός $w=z_1\cdot\bar{z}_2$ είναι θετικός πραγματικός αριθμός.

Γ) Αν ισχύει $2+|z_2|\cdot|z_1+z_2|<2|z_2|+|z_1+z_2|$ τότε η εξίσωση $f(x)=2^x$ έχει μία τουλάχιστον λύση στο $(0,1)$.

Δ) Αν $z_1=1$ και $z_2=i$ τότε $\int_{0}^{x}\frac{1}{f(t)}dt=\ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)$.

20.17 *Έστω η συνάρτηση $f:R\to R$ και F μια αρχική της με την ιδιότητα $f(x)F(1-x)=1$ για κάθε $x\in R$. Αν $f\left(\frac{1}{2}\right)=1$, να αποδείξετε ότι:

Α) $f(1-x)F(x)=1$

Β) Η συνάρτηση $H(x)=F(1-x)F(x)$ είναι σταθερή

Γ) $F\left(\frac{1}{2}\right)=1$

Δ) $F(x)F(1-x)=1$

Ε) $f(x)=F(x),\ x\in R$

Στ) $f(x)=e^{x-\frac{1}{2}}$

20.18 Να βρείτε τον τύπο της συνάρτησης $F(x)=\int_{1}^{x}\left|t^2-t\right|dt$