<u>ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑ ΣΤΟΥΣ ΜΙΓΑΔΙΚΟΥΣ</u>
<u>Οκτώβριος 2013</u>

ΘΕΜΑ Α

Έστω οι μιγαδικοί αριθμοί z, w και u με $z \neq i$, οι οποίοι ικανοποιούν τις σχέσεις:

$$|z-i|+|\bar{z}+i|=4\ ,\ w=z+i-\frac{4}{z-i}$$

Α1 Να βρείτε τον γεωμετρικό τόπο των εικόνων των μιγαδικών αριθμών z

Μονάδες 10

Α2 Να αποδείξετε ότι $\bar{z}+i=\frac{4}{z-i}$

Μονάδες 6

Α3 Να δείξετε ο w είναι φανταστικός και ότι $-2 \leq \mathrm{Im}(w) \leq 6$

Μονάδες 8

Α4 Να αποδείξετε ότι : |z-w| = |z|

Μονάδες 6

ΘΕΜΑ Β

Θεωρούμε τους μιγαδικούς αριθμούς z, με $z \neq -3i$ για τους οποίους ο αριθμός $w=\frac{z-3i}{z+3i}$ είναι φανταστικός .Να αποδείξετε ότι:

Β1 $|z|=3$

Μονάδες 7

Β2 Ο αριθμός $\left(\frac{z}{3}-\frac{3}{z}\right)^4$ είναι πραγματικός.

Μονάδες 8

Β3 $\left(\frac{1}{z_1}+\frac{1}{z_2}\right)(z_1+z_2) \leq 4$,όπου z_1, z_2 δύο από τους παραπάνω μιγαδικούς αριθμούς z

Μονάδες 7

Β4 Οι εικόνες των μιγαδικών αριθμών v, για τους οποίους ισχύει $v+vi=8w+\frac{2i}{w}$, $w \neq 0$ ανήκουν στην υπερβολή $x^2-y^2=16$

Μονάδες 8

Β5 Να βρείτε την ελάχιστη τιμή του |z-v|

Μονάδες 6

ΘΕΜΑ Γ

Έστω οι μιγαδικοί αριθμοί w_1, w_2, w_3, οι οποίοι ικανοποιούν τις σχέσεις: $w_1 + w_2 + w_3 = 0$ και $|w_1| = |w_2| = |w_3| = 1$. Αν Α,Β, Γ οι εικόνες των w_1, w_2, w_3 αντίστοιχα ,να αποδείξετε ότι:

Γ1 $|w_1 + w_2 + w_3| = |w_1 \cdot w_2 + w_2 \cdot w_3 + w_3 \cdot w_1|$

Μονάδες 8

Γ2 $|w_1 - w_2| = \sqrt{3}$

Μονάδες 8

Γ3 το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ισόπλευρο

Μονάδες 6

Γ4 $w_1 \cdot w_2 + w_2 \cdot w_3 + w_3 \cdot w_1 = 0$

Μονάδες 6

Γ5 $w_1^3 = w_2^3 = w_3^3 = w_1 \cdot w_2 \cdot w_3$

Μονάδες 6

Καλή Τύχη!

Σ.Μιχαήλογλου – Δ. Πατσιμάς

Λύσεις

Α1 $|z-i|+|\bar{z}+i|=4\Leftrightarrow |z-i|+|\overline{z-i}|=4 \overset{|\overline{z-i}|=|z-i|}{\Leftrightarrow} 2|z-i|=4\Leftrightarrow |z-i|=2$ οπότε ο γεωμετρικός τόπος των εικόνων

του μιγαδικού αριθμού z είναι κύκλος με κέντρο $K(0,1)$ (την εικόνα του i) και ακτίνα $\rho=2$

Α2 $|z-i|=1\Leftrightarrow |z-i|^2=4\Leftrightarrow (z-i)\overline{(z-i)}=4\Leftrightarrow (z-i)(\bar{z}+i)=4 \overset{z\neq i\Leftrightarrow z-i\neq 0}{\Leftrightarrow} \bar{z}+i=\dfrac{4}{z-i}$ (1)

Α3 Είναι $w=z-i-\dfrac{4}{z-i}\overset{(1)}{\Rightarrow} w=z+i-\bar{z}-i\Leftrightarrow w=z-\bar{z} \overset{z=x+yi}{\Leftrightarrow} w=2yi$

Επειδή όμως ο z κινείται στον κύκλο του Α1 ερωτήματος θα ισχύει:

$$x^2+(y-1)^2=4\Leftrightarrow 4-(y-1)^2=x^2\geq 0\Rightarrow (y-1)^2\leq 4\Leftrightarrow |y-1|\leq 2\Leftrightarrow$$

$$-2\leq y-1\leq 2\Leftrightarrow -1\leq y\leq 3\Leftrightarrow -2\leq 2y\leq 6\Leftrightarrow -2\leq \mathrm{Im}(w)\leq 6$$

Α4 $z=x+yi \overset{w=2x}{\Rightarrow} z-w=x+yi-2x=-x+yi$, άρα $|z-w|=\sqrt{(-x)^2+y^2}=\sqrt{x^2+y^2}=|z|$

ή

$|z-w|=|\cancel{z}-\cancel{z}+\bar{z}|=|\bar{z}|=|z|$

ΘΕΜΑ Β

Β.1 Επειδή ο w είναι φανταστικός ισχύει ότι:

$$\bar{w}=-w\Leftrightarrow \frac{\bar{z}+3i}{\bar{z}-3i}=-\frac{z-3i}{z+3i}\Leftrightarrow (\bar{z}+3i)(z+3i)=-(\bar{z}-3i)(z-3i)\Leftrightarrow$$

$$\bar{z}z+\cancel{3i\bar{z}}+\cancel{3iz}-9=-\bar{z}z+\cancel{3i\bar{z}}+\cancel{3iz}+9\Leftrightarrow 2|z|^2=18\Leftrightarrow |z|^2=9\Leftrightarrow |z|=3$$

Β2 $|z|=3\Leftrightarrow |z|^2=9\Leftrightarrow \bar{z}z=9\Leftrightarrow \bar{z}=\dfrac{9}{z}$. Τότε:

$$\overline{\left(\frac{z}{3}-\frac{3}{z}\right)^4}=\left(\frac{\bar{z}}{3}-\frac{3}{\bar{z}}\right)^4=\left(\frac{\frac{9}{z}}{3}-\frac{3}{\frac{9}{z}}\right)^4=\left(\frac{3}{z}-\frac{z}{3}\right)^4=\left[-\left(\frac{z}{3}-\frac{3}{z}\right)\right]^4=\left(\frac{z}{3}-\frac{3}{z}\right)^4\Leftrightarrow \left(z-\frac{1}{z}\right)^4\in\mathbb{R}$$

Β3 $\left(\dfrac{1}{z_1}+\dfrac{1}{z_2}\right)(z_1+z_2)\leq 4\Leftrightarrow \left(\dfrac{\bar{z}_1}{9}+\dfrac{\bar{z}_2}{9}\right)(z_1+z_2)\leq 4\Leftrightarrow |z_1+z_2|^2\leq 36\Leftrightarrow |z_1+z_2|\leq 6$.

Ισχύει αφού $|z_1+z_2|\leq |z_1|+|z_2|\leq 3+3=6$

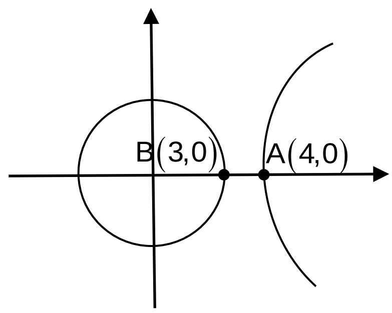
Β4 Επειδή ο w είναι φανταστικός αριθμός, ισχύει ότι $w=ki,\ k\in\mathbb{R}^*$. Τότε, $v+vi=8ki+\dfrac{2i}{ki}=\dfrac{2}{k}+8i$. Αν $v=x+yi,\ x,y\in\mathbb{R}$, τότε

$$x+yi+(x+yi)i=\frac{2}{k}+8ki\Leftrightarrow x+yi+xi-y=\frac{2}{k}+8ki\Leftrightarrow (x-y)+(x+y)i=\frac{2}{k}+8ki\Leftrightarrow \begin{cases} x-y=\dfrac{2}{k} \\ x+y=8k \end{cases}$$

Με πολλαπλασιασμό κατά μέλη προκύπτει: $(x+y)(x-y)=16\Leftrightarrow x^2-y^2=16$

Άρα οι εικόνες των μιγαδικών αριθμών u ανήκουν στην υπερβολή $x^2-y^2=16$.

Β5 $|z-v|_{min}=(AB)=1$



ΘΕΜΑ Γ

Γ1. *Έχουμε ότι* $|w_1| = |w_2| = |w_3| = 1$ *οπότε* $\bar{w}_1 = \frac{1}{w_1}$, $\bar{w}_2 = \frac{1}{w_2}$, $\bar{w}_3 = \frac{1}{w_3}$

$$|w_1 + w_2 + w_3| = |\bar{w}_1 + \bar{w}_2 + \bar{w}_3| = \left|\frac{1}{w_1} + \frac{1}{w_2} + \frac{1}{w_3}\right| = \left|\frac{w_2w_3 + w_1w_3 + w_1w_2}{w_1w_2w_3}\right| =$$

$$= \frac{|w_1w_2 + w_2w_3 + w_1w_3|}{|w_1|\cdot|w_2|\cdot|w_3|} = |w_1w_2 + w_2w_3 + w_1w_3|.$$

Γ2 $| w_1 + w_2 | = | w_3 | = 1 \Leftrightarrow | w_1 + w_2 |^2 = 1 \Leftrightarrow | w_1^2 | + | w_2^2 | + 2\,\mathrm{Re}(\bar{w}_1 w_2) = 1 \Leftrightarrow 2\,\mathrm{Re}(\bar{w}_1 w_2) = -1$

$$|w_1 - w_2|^2 = (w_1 - w_2)(\bar{w}_1 - \bar{w}_2) = w_1\bar{w}_1 - w_1\bar{w}_2 - \bar{w}_1w_2 + w_2\bar{w}_2 = |w_1|^2 - w_1\bar{w}_2 - \overline{w_1\bar{w}_2} + |w_1|^2 \Leftrightarrow$$

$$|w_1 - w_2|^2 = 1 - 2\,\mathrm{Re}(w_1\bar{w}_2) + 1 = 2 + 1 = 3 \Leftrightarrow |w_1 - w_2| = \sqrt{3}$$

Γ3 *Όμοια με το προηγούμενο* $|w_2 - w_3| = |w_3 - w_1| = \sqrt{3}$

Γ4 $w_1 + w_2 + w_3 = 0 \Leftrightarrow \overline{w_1 + w_2 + w_3} = 0 \Leftrightarrow \bar{w}_1 + \bar{w}_2 + \bar{w}_3 = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{w_1} + \frac{1}{w_2} + \frac{1}{w_3} = 0 \Leftrightarrow$

$$\cancel{w_1}w_2w_3\frac{1}{\cancel{w_1}} + w_1\cancel{w_2}w_3\frac{1}{\cancel{w_2}} + w_1w_2\cancel{w_3}\frac{1}{\cancel{w_3}} = 0 \Leftrightarrow w_1w_2 + w_2w_3 + w_3w_1 = 0.$$

Γ5 Είναι $w_1 + w_2 + w_3 = 0 \Leftrightarrow (w_1 + w_2 + w_3)^2 = 0 \Leftrightarrow w_1^2 + w_2^2 + w_3^2 + 2w_1w_2 + 2w_2w_3 + 2w_3w_1 = 0 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow w_1^2 + w_2^2 + w_3^2 + 2(w_1w_2 + w_2w_3 + w_3w_1) = 0 \Leftrightarrow w_1^2 + w_2^2 + w_3^2 + 2\cdot 0 = 0 \Leftrightarrow w_1^2 + w_2^2 + w_3^2 = 0.$$

$$w_1^2 + w_2^2 + w_3^2 = 0 \Leftrightarrow w_2^2 + w_3^2 = -w_1^2 \Leftrightarrow (w_2 + w_3)^2 - 2w_2w_3 = -w_1^2 \Leftrightarrow (-w_1)^2 - 2w_2w_3 = -w_1^2 \Leftrightarrow$$

$$w_1^2 - 2w_2w_3 = -w_1^2 \Leftrightarrow 2w_1^2 = 2w_2w_3 \Leftrightarrow w_1^2 = w_2w_3 \Leftrightarrow w_1w_1^2 = w_1w_2w_3 \Leftrightarrow w_1^3 = w_1w_2w_3$$

και όμοια $w_2^3 = w_3^3 = w_1w_2w_3$.

ή

$$w_1 \cdot w_2 + w_2 \cdot w_3 + w_1 \cdot w_3 = 0 \Leftrightarrow w_1 \cdot (w_2 + w_3) = -w_2 \cdot w_3 \Leftrightarrow -w_1^2 = -w_2 \cdot w_3$$

$$\Leftrightarrow w_1^2 = w_2 \cdot w_3 \Leftrightarrow w_1^3 = w_1 \cdot w_2 \cdot w_3$$

και όμοια $w_2^3 = w_3^3 = w_1w_2w_3$.