Μιγαδικοί αριθμοί

1. Έστω μιγαδικός z, για τον οποίο ισχύει ότι: $|z-3-6i|=2|z|$.

α) Να αποδείξετε ότι: $|z+1+2i|=2\sqrt{5}$.

β) Αν z_1, z_2 δύο από τους προηγούμενους μιγαδικούς, να αποδείξετε ότι: $|z_1-z_2|\le 4\sqrt{5}$.

γ) Αν για τους z_1, z_2 ισχύει επιπλέον ότι: $|z_1-z_2|=4\sqrt{5}$, να αποδείξετε ότι: $|z_1+z_2|^k=2^k\cdot 5^{\frac{k}{2}}$, $k\in\mathbb{N}^*$

2. Δίνονται οι μιγαδικοί z,w, για τους οποίους ισχύει ότι: $|w|=1$ και $z=\dfrac{1+2w}{w-2}$.

α) Να αποδείξετε ότι η εικόνα του z βρίσκεται σε κύκλο με κέντρο $K\left(-\dfrac{4}{3},0\right)$ και ακτίνα $\rho=\dfrac{5}{3}$.

β) Αν z_1, z_2 με $z_1\ne z_2$ δύο από τους μιγαδικούς που έχουν την εικόνα τους στον προηγούμενο κύκλο, να αποδείξετε ότι ο μιγαδικός $u=\dfrac{3z_1+3z_2+8}{3z_1-3z_2}$ είναι φανταστικός.

γ) Να βρείτε τη γραμμή πάνω στην οποία κινείται η εικόνα του μιγαδικού $\dfrac{1}{z}$.

δ) Να αποδείξετε ότι: $3|12z^2+7z-12|=100|z|$.

3. Δίνονται οι μιγαδικοί z_1, z_2, z_3, για τους οποίους ισχύει ότι:
$z_1+z_2+z_3=0$ και $|z_1|=|z_2|=|z_3|=1$. Να αποδειχθεί ότι:

α) $|z_1+z_2|^2=2+2\mathrm{Re}(z_1\bar{z}_2)$

β) $|z_1+z_2|=|z_2+z_3|=|z_3+z_1|=1$

γ) $\mathrm{Re}(z_1\bar{z}_2)=\mathrm{Re}(z_2\bar{z}_3)=\mathrm{Re}(z_3\bar{z}_1)=-\dfrac{1}{2}$

δ) $|z_1-z_2|=|z_2-z_3|=|z_3-z_1|=\sqrt{3}$.

ε) $|z_1z_2-z_2z_3|=|z_2z_3-z_3z_1|=|z_3z_1-z_1z_2|=\sqrt{3}$

στ) $z_1z_2+z_2z_3+z_3z_1=0$

ζ) $z_1^2+z_2^2+z_3^2=0$

η) $z_1^3=z_2^3=z_3^3=z_1z_2z_3$.

θ) $z_1^{2013}+z_2^{2013}-2z_3^{2013}=0$.

4. Δίνεται η συνάρτηση $f(z)=\dfrac{z+3i}{\bar{z}-3i}$, $z\ne -3i$ και ο μιγαδικός $z_1=3i^3-3f(i)$.

α) Να αποδείξετε ότι: $|f(z)|=1$ για κάθε $z\in\mathbb{C}$ με $z\ne 3i$.

β) Αν ισχύει $\overline{f(z)}=f(\bar{z})$, να αποδείξετε ότι ο z είναι φανταστικός.

γ) Να βρείτε τον μιγαδικό z_1.

δ) Να βρείτε το γεωμετρικό τόπο των εικόνων του μιγαδικού w, για τον οποίο ισχύει: $|w+z_1|=\left|\dfrac{if(z_1)z_1}{2+i\sqrt{5}}\right|$

ε) Από τους μιγαδικούς w του προηγούμενου γεωμετρικού τόπου, να βρείτε αυτόν που έχει το μικρότερο και αυτόν που έχει το μεγαλύτερο μέτρο.

5. Έστω οι μιγαδικοί w_1, w_2, με $|w_1| = |w_2| = \sqrt{2}$ και $\text{Re}(\bar{w}_1 w_2) > 0$. Έστω z_1, z_2 οι ρίζες της εξίσωσης: $z^2 - |w_1 - w_2| z + 1 = 0$.

α) Να αποδείξετε ότι οι z_1, z_2 δεν είναι πραγματικοί αριθμοί.

β) $|z_1| = |z_2| = 1$ γ) $(z_1 - z_2)^2 = |w_1 - w_2|^2 - 4$.

6. Δίνεται μιγαδικός z για τον οποίο ισχύει ότι: $|z - 3 + 4i| = 1$.

α) Να βρείτε το γεωμετρικό τόπο των εικόνων του μιγαδικού z.

β) Να αποδείξετε ότι: $4 \le |z| \le 6$.

γ) Αν z_1, z_2 δύο από τους προηγούμενους μιγαδικούς με $|z_1 - z_2| = 2$, να αποδείξετε ότι $|z_1 + z_2| = 10$.

δ) Να βρείτε τη μέγιστη και την ελάχιστη τιμή του $|z - 2|$.

7. Δίνονται οι μιγαδικοί $z = \sigma\upsilon\nu\theta + i\eta\mu\theta$, $\theta \in [0, 2\pi)$ και $w = 3z + 10 + \frac{4i}{\bar{z}}$.

α) Να βρείτε το γεωμετρικό τόπο της εικόνας Μ του μιγαδικού z.

β) Να βρείτε το γεωμετρικό τόπο της εικόνας Ν του μιγαδικού w.

γ) Να αποδείξετε ότι: $5 \le \text{Re}(w) \le 15$ και $-5 \le \text{Im}(w) \le 5$.

δ) Να βρείτε τη μέγιστη και την ελάχιστη τιμή του $|z - w|$.

8. Δίνονται οι μη μηδενικοί μιγαδικοί z_1, z_2, z_3, για τους οποίους ισχύουν οι σχέσεις: $z_1 + z_2 + z_3 = 0$ και $z_1^2 + z_2^2 + z_3^2 = 0$. Να αποδείξετε ότι:

α) $z_1^2 + z_1 z_2 + z_2^2 = 0$, $z_2^2 + z_2 z_3 + z_3^2 = 0$ και $z_3^2 + z_3 z_1 + z_1^2 = 0$ β) $|z_1| = |z_2| = |z_3|$

9. Έστω ο θετικός αριθμός θ και οι μιγαδικοί z_1, z_2 και z_3, για τους οποίους ισχύουν οι σχέσεις: $|z_1| = |z_2| = |z_3| = \theta$, $|z_1 + z_2 + z_3| = \theta^2$ και $z_1^2 + z_2^2 + z_3^2 = 0$. Να αποδείξετε ότι:

α) $|z_1 + z_2 + z_3|^2 = 2|z_1 z_2 + z_2 z_3 + z_3 z_1|$ β) $\theta = 2$ γ) $|z_1 z_2 + z_2 z_3 + z_3 z_1| = 8$.

10. Δίνονται οι μιγαδικοί z,w, για τους οποίους ισχύουν οι σχέσεις:
$|3iz + 12| = 3$ και $|w - 5 + 5i| = |w + 3 - i|$.

α) Να βρείτε το γεωμετρικό τόπο των εικόνων των μιγαδικών z,w.

β) Να αποδείξετε ότι: $3 \le |z| \le 5$.

γ) Να βρείτε την ελάχιστη τιμή του $|w|$.

δ) Να βρείτε την ελάχιστη τιμή του $|z - w|$.

ε) Να βρείτε την ελάχιστη τιμή του $|z + w|$.

11. Δίνεται μιγαδικός z, για τον οποίο ισχύει ότι: $|z - i|^2 + |z + i|^2 = 4$.

α) Να ερμηνευσετε γεωμετρικά την προηγούμενη σχέση.

β) Να βρείτε το γεωμετρικό τόπο της εικόνας Μ του μιγαδικού z.

γ) Αν $w = z(4+4i)$, τότε:

i. να βρείτε το γεωμετρικό τόπο της εικόνας N του μιγαδικού w.

ii. να αποδείξετε ότι το σύνολο τιμών του $|z-w|$, αποτελείται από ένα μόνο στοιχείο.

12. Δίνονται οι μη μηδενικοί μιγαδικοί αριθμοί z_1, z_2, z_3, με $|z_1| = |z_2| = |z_3| = 3$ και $\mathrm{Re}\left(\frac{z_1}{z_2}\right) = \mathrm{Re}\left(\frac{z_2}{z_3}\right) = \mathrm{Re}\left(\frac{z_3}{z_1}\right) = -\frac{1}{2}$.

α) Να αποδείξετε ότι:

i. $\mathrm{Re}\left(z_1\bar{z}_2\right) = -\frac{9}{2}$ ii. $z_1 + z_2 + z_3 = 0$

iii. Το τρίγωνο με κορυφές τις εικόνες των μιγαδικών z_1, z_2, z_3 είναι ισόπλευρο.

β) Να βρείτε τον περιγεγραμμένο κύκλο του τριγώνου του προηγούμενου ερωτήματος.

13. Έστω $z, w \in \mathbb{C}^*$ τέτοιοι, ώστε $|\kappa z + \lambda w| = |\kappa z - \lambda w|$, $\kappa, \lambda \neq 0$. Αν Α, Β είναι αντίστοιχα οι εικόνες των z, w στο μιγαδικό επίπεδο, να αποδείξετε ότι:

α) $\mathrm{Re}(z\bar{w}) = 0$ β) ο μιγαδικός $u = \frac{z}{w}$ είναι φανταστικός.

γ) $|z-w|^2 = |z|^2 + |w|^2$ δ) $A\hat{O}B = 90°$, όπου Ο η αρχή των αξόνων.

14. Έστω z ένας μιγαδικός αριθμός, για τον οποίο ισχύει: $z + \frac{\theta^2}{z} = \theta$ με θ θετικό πραγματικό αριθμό. Να αποδείξετε ότι:

α) $|z| = 2\mathrm{Re}(z) = \theta$ β) $z^2 + |z|\bar{z} = 0$ γ) $\left(\frac{z}{\bar{z}}\right)^{2013} = 1$

15. Έστω οι μιγαδικοί z,w, για τους οποίους ισχύει ότι: $|w| = 2$ και $z = w + \frac{4i}{\bar{w}}$ (1).

α) Να βρείτε το γεωμετρικό τόπο της εικόνας M του μιγαδικού z.

β) Αν z_1, z_2, z_3 τρεις μιγαδικοί που ικανοποιούν την (1) με $z_1 + z_2 + z_3 \neq 0$, να αποδείξετε ότι:

i. $\frac{\bar{z}_1}{8} = \frac{1}{z_1}$, $\frac{\bar{z}_2}{8} = \frac{1}{z_2}$, $\frac{\bar{z}_3}{8} = \frac{1}{z_3}$. ii. $(z_1 + z_2)\left(\frac{1}{z_1} + \frac{1}{z_2}\right) \leq 4$.

iii. $\left|\frac{z_1z_2 + z_2z_3 + z_3z_1}{z_1 + z_2 + z_3}\right| = 2\sqrt{2}$. iv. Ο αριθμός $\frac{z_1 - z_2}{z_3} + \frac{z_2 - z_3}{z_1} + \frac{z_3 - z_1}{z_2}$ είναι φανταστικός.

16. Δίνονται οι μιγαδικοί z_1, z_2, για τους οποίους ισχύει ότι: $|z_1 + z_2| = |z_1| = |z_2| \neq 0$. Να αποδείξετε ότι:

α) $\left(\frac{z_1}{z_2}\right)^2 + \frac{z_1}{z_2} + 1 = 0$ β) $z_1^3 = z_2^3$ γ) $\left|\frac{z_1}{z_2} - 1\right| = \sqrt{3}$

17. Αν οι εικόνες των μιγαδικών z_1, z_2 και η αρχή των αξόνων σχηματίζουν ισόπλευρο τρίγωνο πλευράς 1, να αποδείξετε ότι:

α) $\frac{z_1}{z_2} + \frac{z_2}{z_1} = 1$ β) $z_1^3 = -z_2^3$ γ) $z_1^{2016} - z_2^{2016} = 0$