

ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑ ΣΤΑ ΟΡΙΑ ΚΑΙ ΣΤΗ ΣΥΝΕΧΕΙΑ

ΘΕΜΑ 1ο

A. Να αποδείξετε ότι, αν μία συνάρτηση f είναι συνεχής στο κλειστό διάστημα $[α, β]$ και $f(α) \neq f(β)$, τότε για κάθε αριθμό ξ μεταξύ των $f(α)$ και $f(β)$ υπάρχει τουλάχιστον ένας $x_0 \in (α, β)$ τέτοιος ώστε να ισχύει $f(x_0) = \xi$.

Μονάδες 2

B. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας τη λέξη Σωστό ή Λάθος δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση.

α. Αν $\lim_{x \rightarrow α} f(x) = \beta$, $\lim_{x \rightarrow \beta} g(x) = \gamma$ και $f(x) \neq \beta$ κοντά στο α , τότε $\lim_{x \rightarrow \alpha} g(f(x)) = \gamma$.

Μονάδες 12

β. Αν $\lim_{x \rightarrow x_0} (f(x) + g(x)) = \ell$, τότε οι συναρτήσεις f, g έχουν πάντοτε όριο στο x_0 .

Μονάδες 2

γ. Αν η συνάρτηση $f : [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ είναι γνησίως αύξουσα, τότε πάντοτε ισχύει $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$.

Μονάδες 2

δ. Αν μια συνάρτηση f είναι συνεχής στο $[α, β]$, η εξίσωση $f(x) = 0$ δεν έχει ρίζα στο $(α, β)$ και υπάρχει $\xi \in (α, β)$ ώστε $f(\xi) < 0$, τότε θα ισχύει $f(x) < 0$ για κάθε $x \in (α, β)$.

Μονάδες 2

Γ. Πότε λέμε ότι μία συνάρτηση f είναι συνεχής σε ένα κλειστό διάστημα $[α, β]$

Μονάδες 5

ΘΕΜΑ 2ο

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{\sqrt{x^2 - x + 2} - x}{x}$. Να βρείτε τα όρια :

α) $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$

Μονάδες 4

β) $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$

Μονάδες 4

γ) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x)}{x-2}$

Μονάδες 4

$$\delta) \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{x}{f(x)}$$

Μονάδες 4

$$\epsilon) \lim_{x \rightarrow +\infty} (\ln(f(x) + x))$$

Μονάδες 4

$$\sigma\tau) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{f(x)} \cdot \sigma\upsilon\nu x$$

Μονάδες 5

ΘΕΜΑ 3ο

Δίνονται οι μιγαδικοί z, w για τους οποίους ισχύουν οι σχέσεις :

$$(z - 2 - 2i)^6 = 4 + 4\sqrt{3}i \quad \text{και} \quad w = \alpha + \alpha i, \alpha \in \mathbb{R} \quad \text{και} \quad \eta \text{ συνεχής συνάρτηση } f(x)$$

α) Να βρείτε την γραμμή πάνω στην οποία κινείται ο z

Μονάδες 6

β) Να βρείτε τον γεωμετρικό τόπο του w

Μονάδες 6

γ) Να βρείτε τους μιγαδικούς για τους οποίους ισχύει $z = w$.

Μονάδες 6

δ) Αν οι εικόνες των μιγαδικών του προηγούμενου ερωτήματος είναι

$M(\gamma, \delta)$ και $N(\epsilon, \zeta)$ να δείξετε ότι η ευθεία $y = 2x$ τέμνει την γραφική

παράσταση της συνάρτησης $f(x)$ σ' ένα τουλάχιστον σημείο αν

$$f(1) = \gamma \quad \text{και} \quad f(2) = \epsilon$$

Μονάδες 7

ΘΕΜΑ 4ο

Δίνεται η συνεχής συνάρτηση $f(x)$ για την οποία ισχύει

$$f^2(x) + 2 \ln x = 2 \ln x \cdot f(x) + 1, x > e. \quad \text{Αν} \quad \lim_{x \rightarrow e^2} \frac{f(x) - 3}{x - e^2} = 2$$

A) Να βρείτε το $f(e^2)$

Μονάδες 5

B) Να δείξετε ότι η $f(x)$ διατηρεί σταθερό πρόσημο

Μονάδες 5

Γ) Να δείξετε ότι ο τύπος της $f(x)$ είναι $f(x) = 2 \ln x - 1$

Μονάδες 5

Δ) Να βρείτε το σύνολο τιμών της $f(x)$

Μονάδες 5

E) Να βρείτε το πλήθος των ριζών της εξίσωσης $f(x) = \alpha$, με $0 < \alpha < 5$

Μονάδες 5