ΜΙΓΑΔΙΚΟΙ ΑΡΙΘΜΟΙ

1. Να βρεθούν οι τετραγωνικές ρίζες του μιγαδικού $z=3-4i$.

2. Δίνονται οι μιγαδικοί z,w για τους οποίους ισχύει: $z^{2009}=\sqrt{3}+i$ και $w^{2009}=x+2xi$, $x\in\mathbb{R}$. Να αποδείξετε ότι ο μιγαδικός $\dfrac{z}{w}$ δεν είναι πραγματικός.

3. Δίνονται οι μιγαδικοί $f(\nu)=i^{\nu}\cdot(2\alpha+\alpha i), \alpha\in\mathbb{R}, \nu\in N^*$.

i. Να αποδείξετε ότι $f(2006)+f(2007)+f(2008)+f(2009)=0$.

ii. Αν ο ν διαιρούμενος με το 4 αφήνει υπόλοιπο 2, να αποδείξετε ότι η εικόνα του $f(\nu)$ ανήκει στην ευθεία $y=\dfrac{1}{2}x$

4. Να γράψετε τον μιγαδικό $z=\left(\dfrac{4+5i}{5-4i}\right)^{\nu}+\left(\dfrac{5-4i}{4+5i}\right)^{\nu}$, $\nu\in\mathbb{N}$ στη μορφή $\alpha+\beta i$.

5. Να βρείτε τον μεγαλύτερο φυσικό αριθμό ν, με ν<2008, για τον οποίο ισχύει:
$(5+4i)^{\nu}+(-4+5i)^{\nu}=0$.

6. Δίνεται ο μιγαδικός $z=\alpha+\beta i$, $\alpha,\beta\in\mathbb{R}^*$. Αν υπάρχει $\nu\in\mathbb{N}$ ώστε $(\alpha+\beta i)^{\nu}+(\beta-\alpha i)^{\nu}=0$, να δείξετε ότι ο $(1+i)^{\nu}$ είναι φανταστικός.

7. Δίνονται οι μιγαδικοί $z=-\dfrac{1}{2}+i\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ και $w=1+z$. Α) Να αποδείξετε ότι:

i. $1+z+z^2=0$ ii. $z^3=1$ iii. $w^{2\nu+1}=-z^{\nu+2}$ iv. $w^{2\nu}=z^{\nu}$

Β) Να βρείτε τους μιγαδικούς w^{48} και w^{25}.

8. Δίνονται οι μιγαδικοί z,w για τους οποίους ισχύει ότι: $w=\dfrac{z+i}{z-2i}$, $z\neq 2i$. Να αποδείξετε ότι ο w είναι πραγματικός αριθμός αν και μόνο αν ο z είναι φανταστικός.

9. Αν οι εικόνες των μιγαδικών z_1, z_2 είναι εσωτερικά σημεία του μοναδιαίου κύκλου, να αποδείξετε ότι $|z_1-z_2|<|1-\bar{z}_1 z_2|$.

10. Δίνονται οι μιγαδικοί z_1, z_2, z_3 με $|z_1|=|z_2|=|z_3|=3$.

Α. Δείξτε ότι $\overline{z_1}=\dfrac{9}{z_1}$

Β. Δείξτε ότι ο αριθμός $\dfrac{z_1}{z_2}+\dfrac{z_2}{z_1}$ είναι πραγματικός.

Γ. Δείξτε ότι $|z_1+z_2+z_3|=\dfrac{1}{3}|z_1\cdot z_2+z_2\cdot z_3+z_3\cdot z_1|$

11. Εστω $z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{C}^*$ με $|z_1| = |z_2| = |z_3|$ και $z_1^\nu + z_2^\nu + z_3^\nu = 0,\ \nu \in \mathbb{N}^*$, να δείξετε ότι $\frac{1}{z_1^\nu} + \frac{1}{z_2^\nu} + \frac{1}{z_3^\nu} = 0$.

12. Εστω $z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{C}^*$ με $|z_1| = |z_2| = |z_3| = 1$ και $w = \frac{z_1 + z_2 + z_3}{z_1 z_2 + z_2 z_3 + z_3 z_1}$, να δείξετε ότι $|w| = 1$.

13. Εστω $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ με $|z_1| = |z_2| = \sqrt{2}$.

α) Να αποδείξετε ότι $\bar{z}_1 = \frac{2}{z_1}$.

β) Να αποδείξετε ότι $|z_1 + z_2 + z_1 z_2 - 2| = |z_1 + z_2 - z_1 z_2 + 2|$

γ) Να αποδείξετε ότι $z_1 + z_2 + z_1 z_2 - 2 = 0 \Leftrightarrow z_1 + z_2 - z_1 z_2 + 2 = 0$.

δ) Αν $z_1 + z_2 + z_1 z_2 = 2$, να βρείτε τα z_1, z_2.

14. Εστω $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ με $|z_1| = |z_2| = 2$. Αν για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ισχύει $|z_1 + x z_2| > 1$, να δείξετε ότι $|\operatorname{Re}(z_1 \bar{z}_2)| < 2\sqrt{3}$.

15. Εστω ο μιγαδικός αριθμός z και η συνάρτηση $f(z) = \frac{z^3 - i}{z + i},\ z \neq -i$.

α) Να αποδείξετε ότι $f(z) = z^2 - iz - 1$.

β) Αν η εξίσωση $f(z) = (\alpha - i)z - \beta,\ \alpha, \beta \in \mathbb{R}$ έχει ρίζα τον μιγαδικό $2 - 3i$, να βρείτε τα α,β.

γ) Αν $|z| = 1$, να αποδείξετε ότι η εικόνα του μιγαδικού $f(z)$ στο μιγαδικό επίπεδο, δεν είναι εξωτερικό σημείο του κύκλου που έχει κέντρο Ο και ακτίνα $\rho = 3$.

16. Να δειχθεί ότι αν $\nu \in \mathbb{N}^*$ τότε η εξίσωση $(1 + iz)^\nu = \frac{\alpha + \beta i}{\beta + \alpha i}, \alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $\alpha \neq \beta$ δεν έχει πραγματικές λύσεις.

17. Δίνεται μιγαδικός z για τον οποίο ισχύει: $(z - 2i)^{100} + (2i)^{51} \cdot (\bar{z} + 2i)^{49} = 0$

Να αποδείξετε ότι: Α) $|z - 2i| = 2$ Β) $w = (z - 2i)^{149} \in I$

18. Να λυθεί στο $\mathbb{C}$ η εξίσωση $\bar{z}^2 + |z| = 0$.

19. Να βρεθούν οι μιγαδικοί αριθμοί z που ικανοποιούν τη σχέση $|z^2| = |1 - z| = |z|$.

Γεωμετρικοί τόποι

20. Αν $0 < \alpha < 1$ και $z_1 = \frac{z - \alpha}{\alpha z - 1}$, $z_1, z \in \mathbb{C}$, να βρείτε τον γεωμετρικό τόπο της εικόνας του z_1, αν είναι γνωστό ότι $|z| < 1$.

21. Να βρείτε τον γεωμετρικό τόπο των εικόνων Μ του μιγαδικού z για τον οποίο ισχύει $(2z-1)^{2006}=(z-i)^{2006}$.

22. Αν η εικόνα Μ του μιγαδικού z ανήκει σε κύκλο με κέντρο Ο(0,0) και ακτίνα ρ=2, να βρεθεί ο γ.τ. της εικόνας Ν του μιγαδικού w, για τον οποίο ισχύει $w=z+\frac{8i}{\overline{z}}$.

23. Αν $z=2x+3yi$, $x, y\in\mathbb{R}$ και η εικόνα του $w=\frac{z-6}{z+6}$, $z\neq -6$ στο μιγαδικό επίπεδο βρίσκεται στον άξονα y΄y, να δείξετε ότι:
i) Το σημείο (x, y) ανήκει σε έλλειψη ii) Ο γεωμετρικός τόπος του M(z) είναι κύκλος.

24. Αν $z=2\lambda+(3\lambda-1)i,\ \lambda\in\mathbb{R}$, να βρείτε τον γεωμετρικό τόπο της εικόνας Μ του μιγαδικού z.

25. Αν $z=2\eta\mu\theta+3\sigma\upsilon\nu\theta\cdot i,\ \theta\in\mathbb{R}$ να βρείτε τον γεωμετρικό τόπο της εικόνας Μ του μιγαδικού .

26. Αν για τους μιγαδικούς z,w ισχύουν οι σχέσεις $z\overline{z}+i(z-\overline{z})=1$ και $(w-3)^7=\frac{1-2i}{2-i}$, τότε:
α) Να βρείτε τον γεωμετρικό τόπο C_1 των εικόνων του z.
β) Να βρείτε τον γεωμετρικό τόπο C_2 των εικόνων του w.
γ) Αν $M(z_1)\in C_1$ και $M'(z_2)\in C_2$, να βρείτε την ελάχιστη και τη μέγιστη τιμή του $|z_1-z_2|$.

27. Αν z_1, z_2 είναι οι ρίζες της εξίσωσης $z^2-\alpha z+9=0$, $\alpha\in\mathbb{R}$ και $z_1, z_2\notin\mathbb{R}$, τότε:
α) Να βρείτε τα $|z_1|, |z_2|$ και τις δυνατές τιμές του α.
β) Αν $\frac{z_1}{z_2}+\frac{z_2}{z_1}=-2$, να βρείτε το α.
γ) Για $\alpha=0$ να βρείτε τον γεωμετρικό τόπο των εικόνων του z για τον οποίο ισχύει: $|z-z_1|+|z-z_2|=10$.

28. α) Να αναλύσετε στο $\mathbb{C}$ την παράσταση z^2+16 σε γινόμενο παραγόντων.
β) Να βρείτε τον γεωμετρικό τόπο των εικόνων του μιγαδικού z για τον οποίο ισχύει η σχέση:
$$\frac{1}{|z-4i|}-\frac{1}{|z+4i|}=\frac{6}{|z^2+16|}.$$
γ) Από τους μιγαδικούς z του προηγούμενου τόπου, να βρείτε εκείνον που έχει το ελάχιστο μέτρο.
δ) Αν η εικόνα του z ανήκει στον προηγούμενο γ. τόπο και για τον μιγαδικό w ισχύει $w\overline{w}=1$, να βρείτε την ελάχιστη τιμή του $|z-w|$.

29. α) Να περιγράψετε γεωμετρικά το σύνολο Α των εικόνων των μιγαδικών z που ικανοποιούν τις σχέσεις: $|z-i|=1$ και $\mathrm{Im}(z)\geq 1$.
β) Να αποδείξετε ότι: αν η εικόνα του μιγαδικού z ανήκει στο σύνολο Α, τότε η εικόνα του μιγαδικού $w=\frac{1}{2}\left(z-i-\frac{1}{z-i}\right)$ κινείται σε ευθύγραμμο τμήμα το οποίο βρίσκεται στον άξονα y΄y.

30. Α. Να περιγράψετε γεωμετρικά το σύνολο (Σ) των εικόνων των μιγαδικών αριθμών z που ικανοποιούν τις σχέσεις: $|z|=2$ και $\mathrm{Im}(z)\geq 0$.
Β. Να αποδείξετε ότι, αν η εικόνα του μιγαδικού αριθμού z κινείται στο σύνολο (Σ), τότε

η εικόνα του μιγαδικού αριθμού $w=\frac{1}{2}\left(z+\frac{4}{z}\right)$ κινείται σε ευθύγραμμο τμήμα το οποίο βρίσκεται στον άξονα x΄x.

31. Εστω $f(z)=\frac{z-i}{z}$, $z\in\mathbb{C}^*$.

α) Αν $f(z)\in\mathbb{R}$, να δείξετε ότι $z\in I$.

β) Αν $f(z)\cdot\overline{f(z)}=5$, να βρείτε τον γεωμετρικό τόπο των εικόνων του z καθώς και τη μέγιστη τιμή του $|z|$.

32. Να βρεθεί ο γεωμετρικός τόπος των εικόνων των μιγαδικών αριθμών z για τους οποίους οι εικόνες των i, z και iz είναι διακεκριμένα συνευθειακά σημεία.

33. Δίνεται ότι ο μιγαδικός αριθμός $z_1=\frac{1+i\sqrt{3}}{2}$ είναι ρίζα της εξίσωσης $z^2+\beta z+\gamma=0$, όπου β,γ πραγματικοί αριθμοί.

α. Να αποδείξετε ότι $\beta=-1$ και $\gamma=1$.

β. Να αποδείξετε ότι $z_1^3=-1$.

γ. Να βρείτε το γεωμετρικό τόπο των εικόνων των μιγαδικών αριθμών w για τους οποίους ισχύει: $|w|=|z_1-\overline{z}_1|$.

Ιούλιος 2008

34. Εστω οι μιγαδικοί αριθμοί z και w με $z\neq 3i$, οι οποίοι ικανοποιούν τις σχέσεις:

$$|z-3i|+|\overline{z}+3i|=2 \text{ και } w=z-3i+\frac{1}{z-3i}.$$

Β1. Να βρείτε τον γεωμετρικό τόπο των εικόνων των μιγαδικών αριθμών z

Β2. Να αποδείξετε ότι $\overline{z}+3i=\frac{1}{z-3i}$

Β3. Να αποδείξετε ότι ο w είναι πραγματικός αριθμός και ότι $-2\leq w\leq 2$.

Β4. Να αποδείξετε ότι: $|z-w|=|z|$.

Μάιος 2011

Μέγιστο- Ελάχιστο μέτρο

35. Δίνονται οι μιγαδικοί αριθμοί $z=\alpha+\beta i$, όπου $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$ και $w=3z-i\cdot\overline{z}+4$,

α. Να αποδείξετε ότι $\mathrm{Re}(w)=3\alpha-\beta+4$ και $\mathrm{Im}(w)=3\beta-\alpha$.

β. Να αποδείξετε ότι, αν οι εικόνες του w στο μιγαδικό επίπεδο κινούνται στην ευθεία με εξίσωση $y=x-12$, τότε οι εικόνες του z κινούνται στην ευθεία με εξίσωση $y=x-2$.

γ. Να βρείτε ποιος από τους μιγαδικούς αριθμούς z, οι εικόνες των οποίων κινούνται στην ευθεία με εξίσωση y=x–2 έχει το ελάχιστο μέτρο. (2003)

36. Δίνεται μιγαδικός z , για τον οποίο ισχύει $|z-1-\sqrt{3}i|=2$.

i. Να βρείτε τον γεωμετρικό τόπο των εικόνων του z.

ii. Να αποδείξετε ότι $0\leq|z|\leq 4$.

37. Αν για τους μιγαδικούς z_1,z_2 ισχύουν οι σχέσεις $|z_1-i|=1$ και $|z_2-5|=2$, να δείξετε ότι $\sqrt{26}-3\leq|z_1-z_2|\leq\sqrt{26}+3$.

38. Για τους μιγαδικούς αριθμούς z, ισχύει η σχέση: $|3z+9-6i|=12$. Να βρεθούν:

i. Ο γ.τ. των εικόνων του z. ii. Η μέγιστη και η ελάχιστη τιμή του $|z|$. iii. Ο μιγαδικός z που έχει μέγιστο μέτρο.

39. Δίνονται οι μιγαδικοί z,w τέτοιοι, ώστε $|z+1|=|z-i|$ και $|w-3|=1$

i. Να βρεθούν στο μιγαδικό επίπεδο οι γεωμετρικοί τόποι των σημείων των εικόνων των z,w.

ii. Αν Α,Β οι εικόνες των z,w αντίστοιχα για τα οποία το $|z-w|$ παίρνει ελάχιστη τιμή, να βρεθούν τα Α,Β και η ελάχιστη τιμή.

40. Δίνονται οι μιγαδικοί z,w για τους οποίους ισχύουν οι σχέσεις: $|z+3+2i|=2$ και $|w-4+2i|=3$.

i. Να βρεθούν οι γεωμετρικοί τόποι των μιγαδικών z και w.

ii. Να βρεθεί η ελάχιστη και η μέγιστη τιμή του $|z-w|$.

41. Α. Να βρεθεί ο γ.τ. των εικόνων των μιγαδικών z που ικανοποιούν τη σχέση $3|z|=|z+4|$.

Β. Εστω οι μιγαδικοί w_1, w_2, με $w_1, w_2 \neq -2$, για τους οποίους ισχύει ότι:

$\left|\frac{w_1}{w_1+4}\right|=\left|\frac{w_2}{w_2+4}\right|=\frac{1}{3}$. Να βρεθεί η μέγιστη τιμή του $|w_1-w_2|$.

42. Α. Να βρεθεί ο γεωμετρικός τόπος των εικόνων Μ του μιγαδικού z, για τον οποίο ισχύει: $|z-1-3i|=|z-3-i|$.

Β. Να βρεθεί ο μιγαδικός z για τον οποίο η παράσταση $f(z)=|z-1-3i|+|z-3-i|$ παίρνει την ελάχιστη τιμή της.

43. Δίνεται η εξίσωση $z+\frac{2}{z}=2$, $z\in\mathbb{C}^*$.

B.1. Να βρείτε τις ρίζες z_1, z_2 της εξίσωσης.

B.2. Να αποδείξετε ότι $z_1^{2010}+z_2^{2010}=0$.

B.3. Αν για τους μιγαδικούς αριθμούς w ισχύει $|w-4+3i|=|z_1-z_2|$, να βρείτε τον γεωμετρικό τόπο των εικόνων των w στο μιγαδικό επίπεδο.

B.4. Για τους μιγαδικούς αριθμούς w του προηγούμενου ερωτήματος, να αποδείξετε ότι $3\le|w|\le 7$.

Μάιος 2010

44. Θεωρούμε τους μιγαδικούς αριθμούς z και w για τους οποίους ισχύουν οι επόμενες σχέσεις:

$|z-1|^2+|z+1|^2=4$ (1) και $|w-5\overline{w}|=12$ (2)

B1. Να αποδείξετε ότι ο γεωμετρικός τόπος των εικόνων των μιγαδικών αριθμών z στο επίπεδο είναι κύκλος με κέντρο την αρχή των αξόνων και ακτίνα ρ = 1.

B2. Αν z_1, z_2 είναι δύο από τους παραπάνω μιγαδικούς αριθμούς z με $|z_1 - z_2|=\sqrt{2}$, τότε να βρείτε το $|z_1+z_2|$.

Β3. Να αποδείξετε ότι ο γεωμετρικός τόπος των εικόνων των μιγαδικών αριθμών w στο επίπεδο είναι η έλλειψη με εξίσωση $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}=1$ και στη συνέχεια να βρείτε τη μέγιστη και την ελάχιστη τιμή του $|w|$.

Β4. Για τους μιγαδικούς αριθμούς z,w που επαληθεύουν τις σχέσεις (1) και (2) να αποδείξετε ότι: $1 \le |z - w| \le 4$

Μάιος 2012

45. Δίνεται η εξίσωση $2\text{Re}\left[z(1-i)\right]+z\bar{z}-2=0,\ z\in\mathbb{C}$.

Α) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση έχει άπειρες λύσεις στο $\mathbb{C}$.

Β) Αν z_1,z_2 δύο από αυτές τις λύσεις, να αποδείξετε ότι $|z_1-z_2|\le 4$.

Γ) Αν z_1,z_2 δύο από τις λύσεις για τις οποίες το $|z_1-z_2|$ γίνεται μέγιστο, να αποδείξετε ότι:

$|z_1+z_2|^{2\nu}=2^\nu|z_1-z_2|^\nu,\ \nu\in\mathbb{N}^*$.

46. Δίνονται οι μιγαδικοί z,w για τους οποίους ισχύουν οι σχέσεις: $|z-i|=|z-3|$ και $|w+4|=1$.

Α. Να βρείτε το γεωμετρικό τόπο των εικόνων των μιγαδικών z,w.

Β. Να βρείτε την ελάχιστη τιμή του $|z|$.

Γ. Να βρείτε την ελάχιστη τιμή του $|w|$.

Δ. Να βρείτε την ελάχιστη τιμή του $|z-w|$.

Ε. Να βρείτε την ελάχιστη τιμή του $|z+w|$.

47. Δίνονται οι μιγαδικοί z,w για τους οποίους ισχύει ότι $|z|=1$ και $w=iz$.

Α) Να βρείτε τον γεωμετρικό τόπο των εικόνων των μιγαδικών z,w.

Β) Να υπολογίσετε την μέγιστη και την ελάχιστη τιμή του $|z-w|$.

Δίνονται οι μιγαδικοί z,w για τους οποίους ισχύει ότι $|z|=1$ και $w=2z-3-4i$.

Α) Να βρείτε τον γεωμετρικό τόπο των εικόνων των μιγαδικών z,w.

Β) Να υπολογίσετε την μέγιστη και την ελάχιστη τιμή του $|z-w|$.

Γεωμετρικές

48. Εστω $z_1,z_2\in\mathbb{C}^*$ με $|z_1+z_2|=|z_1-z_2|$. Αν M_1,M_2 είναι οι εικόνες των z_1,z_2 αντίστοιχα, να δείξετε ότι:

α) $M_1OM_2=90^\circ$ β) $|z_1-z_2|^2=|z_1|^2+|z_2|^2$ γ) $\text{Re}(z_1\bar{z}_2)=0$

49. Δίνονται οι μιγαδικοί z,w με $z\neq 0$ και $w=z(1+\alpha i)$, $\alpha>0$. Αν Α,Β οι εικόνες των μιγαδικών z, w αντίστοιχα και το τρίγωνο ΟΑΒ, όπου Ο η αρχή των αξόνων, είναι ισοσκελές, να αποδείξετε ότι είναι και ορθογώνιο.

50. Αν οι εικόνες Α,Β των μιγαδικών z_1,z_2 βρίσκονται σε τυχαίο κύκλο κέντρου Ο(0,0), να αποδείξετε ότι τα σημεία Α,Β καθώς και η εικόνα Γ του $-z_2$, σχηματίζουν ορθογώνιο τρίγωνο.

51. Αν οι εικόνες των μιγαδικών z,w και η αρχή των αξόνων ορίζουν ισόπλευρο τρίγωνο πλευράς 1, να αποδείξετε ότι $|z+w|=\sqrt{3}$.

52. Δίνονται οι μιγαδικοί αριθμοί z_1,z_2,z_3 με $|z_1|=|z_2|=|z_3|=1$ και $z_1+z_2+z_3=0$

Α. Να αποδείξετε ότι:

i.. $|z_1 - z_2| = |z_3 - z_1| = |z_2 - z_3|$ ii. $|z_1 - z_2|^2 \le 4$ και $\mathrm{Re}\left(z_1\overline{z_2}\right) \ge -1$

Β. Να βρείτε το γεωμετρικό τόπο των εικόνων των z_1, z_2, z_3 στο μιγαδικό επίπεδο, καθώς και το είδος του τριγώνου που αυτές σχηματίζουν.

53. Εστω οι μιγαδικοί αριθμοί z, w, οι οποίοι ικανοποιούν τις σχέσεις:

$$|z-i| = 1+\mathrm{Im}(z) \ (1) \text{ και } w\left(\overline{w}+3i\right) = i\left(3\overline{w}+i\right) \ (2)$$

Β1. Να αποδείξετε ότι ο γεωμετρικός τόπος των εικόνων των μιγαδικών αριθμών z είναι η παραβολή με εξίσωση $y = \frac{1}{4}x^2$.

Β2. Να αποδείξετε ότι ο γεωμετρικός τόπος των εικόνων των μιγαδικών αριθμών w είναι ο κύκλος με κέντρο το σημείο Κ(0, 3) και ακτίνα $\rho = 2\sqrt{2}$.

Β3. Να βρείτε τα σημεία Α και Β του μιγαδικού επιπέδου, τα οποία είναι εικόνες των μιγαδικών αριθμών z,w με z =w.

Β4. Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο ΚΑΒ είναι ορθογώνιο και ισοσκελές και, στη συνέχεια, να βρείτε τον μιγαδικό αριθμό u με εικόνα στο μιγαδικό επίπεδο το σημείο Λ, έτσι ώστε το τετράπλευρο με κορυφές τα σημεία Κ, Α, Λ, Β να είναι τετράγωνο. Ιούλιος 2011

ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ

54. Δίνεται η σχέση $f(x) = \begin{cases} x^2 - 3x, & x \le \lambda(\lambda+1) \\ \dfrac{x+7}{x+3}, & x \ge \lambda+1 \end{cases}$. Να βρεθούν οι τιμές του ακεραίου λ, για τις οποίες η f είναι συνάρτηση.

55. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \dfrac{x^2-\lambda}{x^2-\lambda x+4}$, $\lambda \in \mathbb{R}$. Να βρεθούν οι τιμές του $\lambda \in \mathbb{R}$, ώστε η f να έχει πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}$.

56. Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = \dfrac{(\lambda-1)x^2 - \lambda x + 3}{x - 2\lambda^2}$ και $g(x) = \dfrac{\lambda - x + 2}{x + \lambda^2 - 3}$. Να βρεθεί το $\lambda \in \mathbb{R}$, ώστε οι συναρτήσεις να είναι ίσες.

57. Εστω η συνάρτηση $f(x) = x\sqrt{25-x^2}$.

α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της. β) Να αποδείξετε ότι $f(5\text{συν}x) \le \dfrac{25}{2}$

58. Να εξετάσετε αν είναι άρτια ή περιττή κάθε μία από τις παρακάτω συναρτήσεις:

α) $f(x) = \dfrac{\text{συν}x}{\sqrt{4-x^2}}$ β) $f(x) = \text{ημ}\left(x^3 - 5\text{ημ}x + x\right)$ γ) $f(x) = \sqrt{1+x+x^2} - \sqrt{1-x+x^2}$

δ) $f(x) = \ln\dfrac{1+x}{1-x}$ ε) $f(x) = x\dfrac{\alpha^x+1}{\alpha^x-1}$, $0 < \alpha \ne 1$

59. Αν οι συναρτήσεις f,g είναι άρτιες (ή περιττές) με κοινό πεδίο ορισμού Α, να δείξετε ότι και η συνάρτηση $h(x) = \kappa f(x) + \lambda g(x)$, $\kappa, \lambda \in \mathbb{R}$ είναι άρτια (ή περιττή).

60. Να δείξετε ότι το γινόμενο δύο περιττών ή δύο άρτιων συναρτήσεων με κοινό πεδίο ορισμού, είναι άρτια συνάρτηση, ενώ το γινόμενο μιας περιττής και μιας άρτιας είναι περιττή συνάρτηση.

61. Δίνονται οι συναρτήσεις f, g, ορισμένες στο διάστημα (-α,α), $\alpha \in \mathbb{R}^*$. Να αποδειχθεί ότι:

i. Αν f, g άρτιες, τότε οι συναρτήσεις $f+g$, $f \cdot g$ είναι άρτιες.

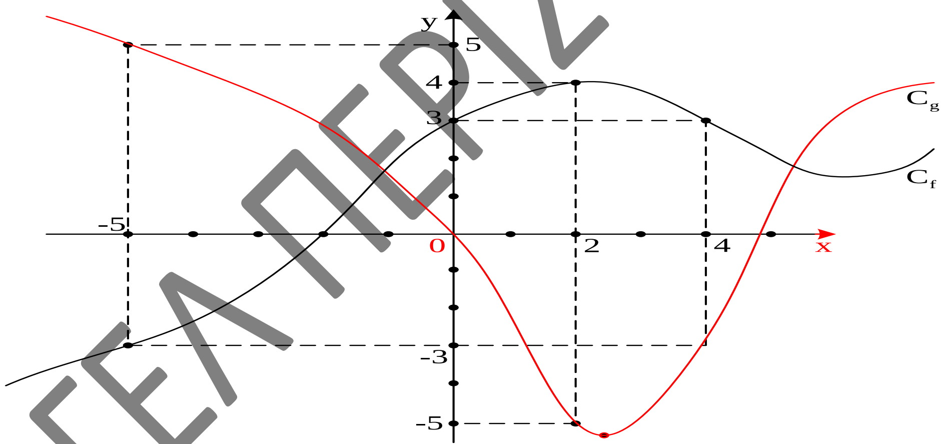
ii. Αν f, g περιττές, τότε η συνάρτηση $f+g$ είναι περιττή, ενώ η $f \cdot g$ είναι άρτια.

62. Εστω οι συναρτήσεις $g:\left[-\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{6}\right]\to\mathbb{R}$ με $g(x)=-2+\eta\mu x$ και $f:[-3,-1]\to\mathbb{R}$ με $f(x)=\frac{x+2}{x-1}$.

Να εξετάσετε αν ορίζεται η fog και να βρείτε την τιμή $(fog)\left(\frac{\pi}{6}\right)$.

63. Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x)=\begin{cases}3x-2, & x<1\\ \frac{4x}{x+2}, & x\geq 1\end{cases}$ και $g(x)=\begin{cases}\frac{2}{x}, & -5\leq x\leq -1\\ x+2, & -1<x\leq 9\end{cases}$. Να βρεθεί η συνάρτηση $f\circ g$.

64. Στο παρακάτω σχήμα δίνονται οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων f και g.



Να υπολογιστούν: $(g\circ f)(2)$, $(f\circ g)(2)$, $(f\circ f)(2)$, και $(g\circ g)(2)$.

65. Αν η συνάρτηση f έχει πεδίο ορισμού το $[-1,1]$, να προσδιορίσετε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης $h(x)=f(2x+3)$. Στη συνέχεια να βρείτε τον τύπο της f, αν είναι γνωστό ότι: $h(x)=2\sqrt{-x^2-3x-2}$.

66. Να βρεθεί η συνάρτηση f , για την οποία ισχύει:

α) $(f\circ g)(x)=4x^2-6x+3$ και $g(x)=2x-1$. β) $(f\circ g)(x)=e^{2x}+x-4$ και $g(x)=e^x-2$.

γ) $(f\circ g)(x)=3\ln x-x^2+1$ και $g(x)=\ln x+1$, $x>0$.

δ) $f\circ g(x)=|\sigma\upsilon\nu x|$ και $g(x)=\eta\mu x$

67. Να βρεθεί η συνάρτηση g για την οποία ισχύει:

i. $(f\circ g)(x)=6x^6-9x^3+3021$ και $f(x)=3x-5000$.

ii. $(f \circ g)(x) = x+3$ και $f(x) = \dfrac{2x+1}{x-3}$, $x \neq 3$.

iii. $(f \circ g)(x) = x^4 + 2x^2$ και $f(x) = \ln x - 1$, $x > 0$.

68. Δίνεται συνάρτηση $f:\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, για την οποία ισχύει $(f \circ f)(x) = 2007x - 2006$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Να αποδειχθεί ότι f(1)=1.

69. Δίνεται συνάρτηση $f:\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, για την οποία ισχύει: $(f \circ f \circ f)(x) = x^2 + x$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Να αποδειχθεί ότι η C_f διέρχεται από την αρχή των αξόνων.

70. Εστω συνάρτηση $f:\mathbb{R} \to \mathbb{R}^*$ για την οποία ισχύει ότι $(fof)(x) = 2 - x^2$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Να βρείτε το $f(1)$.

71. Αν $f(x) = \dfrac{\lambda x + \mu}{2x - \lambda}$ και $I(x) = x$, να βρείτε τη συνθήκη μεταξύ των πραγματικών αριθμών λ και μ, ώστε να ισχύει: $(fof)(x) = I(x)$ για κάθε $x \in A_{fof}$.

72. Εστω συνάρτηση $f:\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει ότι $f(x+y) = f(x) + f(y)$ για κάθε $x, y \in \mathbb{R}$. Να αποδείξετε ότι: α) $f(0) = 0$ β) η f είναι περιττή.

73. Εστω η μη μηδενική συνάρτηση $f:\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει ότι $f(x+y) + f(x-y) = 2f(x)f(y)$ για κάθε $x, y \in \mathbb{R}$. Να αποδείξετε ότι:

α) $f(0) = 1$ β) η f είναι άρτια συνάρτηση

74. Εστω συνάρτηση $f:\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει ότι $3f(x) + 4f(-x) = 5\eta\mu x \sigma\upsilon\nu x$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Να αποδείξετε ότι η f είναι περιττή.

75. Εστω οι συναρτήσεις $g: A \to B$ και $f: B \to \Gamma$. Αν οι f,g είναι περιττές συναρτήσεις, να αποδείξετε ότι η fog είναι περιττή, ενώ αν η g είναι περιττή και η f άρτια, τότε η fog είναι άρτια.

76. Εστω συνάρτηση $f:\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$. Να αποδείξετε τη συνεπαγωγή: $f(f(x)) = x$ για κάθε $x \in \mathbb{R} \Rightarrow f(x) = x$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

77. Εστω συνάρτηση $f:\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει ότι $(fof)(x) = x^2 - x + 1$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Να αποδείξετε ότι:

α) $f(1) = 1$ β) η συνάρτηση $g:\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με $g(x) = x^2 - xf(x) + 1$ δεν είναι 1-1.

78. Εστω συνάρτηση $f:\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει ότι $f(f(x)) = x + f(x)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Να αποδείξετε ότι: α) η f είναι 1-1 β) $f(0) = 0$

79. Εστω συνάρτηση $f:\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει ότι $f(x+y) \geq f(x)f(y) \geq e^{x+y}$ για κάθε $x, y \in \mathbb{R}$.

α) Να αποδείξετε ότι $f(0) = 1$ β) Να αποδείξετε ότι $f(-x) = \dfrac{1}{f(x)}$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

γ) Να βρείτε τον τύπο της f.

80. Δίνεται η συνάρτηση $f:\mathbb{R}^*\to\mathbb{R}^*$, για την οποία ισχύει:
$f(xy)=f(x)\cdot f(y)+xy-1$ για κάθε $x,y\in\mathbb{R}^*$. Να αποδείξετε ότι:

α) f(1)=1. β) $f\left(\frac{1}{x}\right)=\frac{1}{f(x)},\ x\in\mathbb{R}^*$. γ) $f\left(\frac{x}{y}\right)=\frac{f(x)}{f(y)}+\frac{x}{y}-1,\ x,y\in\mathbb{R}^*$.

81. Να βρεθεί συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, για την οποία ισχύει: $f(x)+2x-4\le x^2\le f(x+1)-3$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

82. Να βρείτε συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ στις παρακάτω περιπτώσεις:

α) $2f(x)+4f(-x)=\sigma\upsilon\nu x-\eta\mu x, x\in\mathbb{R}$. β) $f(x)+3f\left(\frac{1}{x}\right)=\frac{6}{x}+2x, x\in\mathbb{R}^*$.

83. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=(1-x)^{2013}-x^{2013}+5$

α) Να μελετηθεί η f ως προς τη μονοτονία. β) Να λυθεί η ανίσωση: $f\left[2f(x-1)-8\right]>6$.

84. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=3^x+x^3, x\in\mathbb{R}$

i. Να μελετηθεί η f ως προς την μονοτονία.
ii. Να λυθεί η ανίσωση: $3^{3x-1}-3^{x+3}>(x+3)^3-(3x-1)^3$.

85. Δίνεται συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ για την οποία ισχύει: $(f\circ f)(x)-f(x)=x^{2007}$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

Να αποδειχθεί ότι:

α) η f αντιστρέφεται β) η γραφική παράσταση της f διέρχεται από την αρχή των αξόνων.

86. Δίνεται συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ για την οποία ισχύει: $(f\circ f)(x)=f(x)+x-1$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

Να αποδειχθεί ότι:

α) η f αντιστρέφεται, β) η C_f διέρχεται από το σημείο $A(1,1)$.

87. Να εξετάσετε αν είναι 1-1 οι παρακάτω συναρτήσεις:

α) $f(x)=\begin{cases} x-2, & x<1 \\ \sqrt{x-1}, & x\ge 1\end{cases}$ β) $f(x)=\begin{cases} x^3+1, & x\le 0 \\ 1-\frac{x}{4}, & x>0\end{cases}$

88. Εστω συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ για την οποία ισχύει ότι $f^3(x)+5f(x)+x=0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

α) Να αποδείξετε ότι η f αντιστρέφεται και να βρείτε την f^{-1}.
β) Να βρείτε τα κοινά σημεία των $C_f, C_{f^{-1}}$.

89. Δίνεται συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ για την οποία ισχύει: $f(x)-2f^3(x)+x-1=0$ για κάθε $\mathbf{x}\in\mathbb{R}$.

α) Να αποδειχθεί ότι η f αντιστρέφεται. β) Να βρεθεί η f^{-1}.

90. Αν η συνάρτηση $f:A\to f(A)$ είναι περιττή και αντιστρέψιμη, να αποδείξετε ότι και η f^{-1} είναι περιττή.

91. Να αποδειχθεί ότι οι παρακάτω συναρτήσεις δεν είναι αντιστρέψιμες:

α) $f(x)=x^4+2x^2+5$ β) $f(x)=\frac{x^2+1}{x^2+x+2}$

92. Να λυθούν οι εξισώσεις: α) $e^x = 1 - x^{2007}$ β) $\ln\left(x^2+1\right)+e^{x^2+1}=\ln\left(2x^2\right)+e^{2x^2}$.

93. Δίνεται γνησίως μονότονη συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ της οποίας η γραφική παράσταση διέρχεται από τα σημεία $A(-1,5)$ και $B(2,4)$.

α) Να αποδείξετε ότι ορίζεται η συνάρτηση f^{-1}.

β) Να λυθεί η εξίσωση $f(f^{-1}(x^2)-3)=5$.

γ) Να λυθεί η ανίσωση $f(f^{-1}(e^x+3-3)>5$.

94. Δίνεται συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, για την οποία ισχύει: $e^{f(x)}+f(x)=x+2$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

i. Να αποδείξετε ότι η f αντιστρέφεται και να βρείτε την f^{-1}.

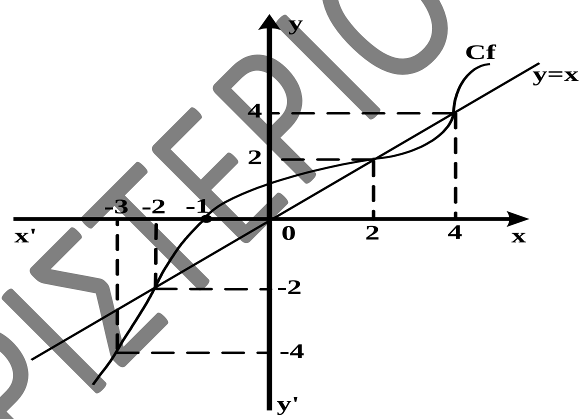
ii. Να υπολογίσετε τα $f(-1)$ και $f(e^2)$.

95. Στο διπλανό σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση μια συνάρτησης f.

α) Να σχεδιάσετε στο ίδιο σύστημα αξόνων τη γραφική παράσταση της f^{-1}.

β) Να υπολογίσετε τις τιμές $f^{-1}(-4),\ f^{-1}(0),\ f^{-1}(2)$.

γ) Να λύσετε την εξίσωση $f(x)=f^{-1}(x)$.



96. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=x^{2007}+x-1,\ x\in\mathbb{R}$.

α) Να αποδειχθεί ότι η f αντιστρέφεται.

β) Να βρεθούν τα $f^{-1}(-1)$ και $f^{-1}(-3)$.

γ) Να βρεθούν τα κοινά σημεία των C_f, $C_{f^{-1}}$.

97. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=3e^x+x-3,\ x\in\mathbb{R}$.

i. Να αποδειχθεί ότι η f είναι αντιστρέψιμη και να βρεθεί το $f^{-1}(0)$.

ii. Να λυθεί η εξίσωση $f(x)=f^{-1}(x)$.

iii. Να λυθεί η εξίσωση $f^{-1}(1+f(x)-x)<1$.

98. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=3^x+x-9,\ x\in\mathbb{R}$.

i. Να αποδείξετε ότι η f αντιστρέφεται και να βρείτε το $f^{-1}(-5)$.

ii. Να λύσετε την εξίσωση $f(x)=f^{-1}(x)$.

iii. Να λύσετε την ανίσωση $f^{-1}(f(\ln x)-3)>0$.

99. Εστω συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ για την οποία ισχύει ότι $f(x+y)=f(x)+f(y)$ για κάθε $x,y\in\mathbb{R}$.

Να αποδείξετε ότι:

α) Η C_f διέρχεται από την αρχή των αξόνων.

β) Η f είναι περιττή.

γ) $f(x-y)=f(x)-f(y)$ για κάθε $x,y\in\mathbb{R}$.

δ) Αν η εξίσωση $f(x)=0$ έχει μοναδική ρίζα την $x=0$, τότε η f είναι 1-1.

ε) $f^{-1}(x+y)=f^{-1}(x)+f^{-1}(y)$ για κάθε $x,y\in\mathbb{R}$.

ΟΡΙΑ- ΣΥΝΕΧΕΙΑ

100. Να υπολογιστούν τα όρια:

i. $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{\sqrt[3]{x+24}-\sqrt{x+13}+1}{x-3}$ ii. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt[4]{x}-1}{\sqrt[5]{x}-1}$ iii. $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{x^2-6x+8}{x\sqrt{x}+x-6\sqrt{x}}$

101. Να βρείτε αν υπάρχει το όριο της f στο x_0, αν: $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x}{2\sqrt{x+2}}, & x\ge 1\\ \dfrac{\sqrt{x+2}-\sqrt{3}}{x-1}, & 0\le x<1\end{cases}$ και x_0=1.

102. Να υπολογιστούν τα όρια: i. $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{|x^2-x|-6}{|x-4|-1}$ ii. $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{|x^2-x-2|-|2-x|}{|4-x^2|}$

iii. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{|x-2|-|x+2|}{x}$ iv. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{|x^2-7x+10|-|x-5|}{|x^2-2x|-|x|}$ v. $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{|x^2-5x+6|-|9-x^2|}{x^2-3|x|+|x-3|}$

vi. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{|1-x|+x|x^2+2|-3}{x^2-1}$

103. Αν για κάθε $x\in\mathbb{R}$ ισχύει $x-x^3\le g(x)\le x+x^3$, να βρεθεί το $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{g(x)}{x}$.

104. Εστω συνάρτηση $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, για την οποία ισχύει $|(x-1)g(x)-x^3+1|\le(x-1)^2$, για κάθε $x\in\mathbb{R}$. Να βρεθεί το $\lim\limits_{x\to 1}g(x)$.

105. Αν για κάθε $x>0$ ισχύει $2\sqrt{2x}\le f(x)\le x+2$ να υπολογισθούν τα όρια:

i. $\lim\limits_{x\to 2}f(x)$ ii. $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{f(x)-4}{x-2}$ iii. $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\sqrt{f(x)+5}-3}{x^2-4}$ iv. $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{|f(x)-3|-1}{x^2-5x+6}$

106. Να υπολογιστούν τα όρια: α) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\eta\mu(\eta\mu x)}{3x^2-2x}$ β) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{\eta\mu(x-3)}{x^2-7x+12}$

107. Να υπολογιστεί το όριο: i. $\lim\limits_{x\to 0}x^3\eta\mu\dfrac{1}{x}$ ii. $\lim\limits_{x\to 0}\left(2x\eta\mu\dfrac{2}{x^3}-3x\sigma\upsilon\nu\dfrac{3}{x^4}\right)$

108. Αν $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x}=3$ να υπολογίσετε το $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2xf(x)+f(-2x)\eta\mu x}{x^2-3\eta\mu^2 x}$.

109. Αν $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{xg(x)-x^2}{x+\eta\mu 3x}=3$, να βρείτε το $\lim\limits_{x\to 0}g(x)$.

110. Αν $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)-2-\eta\mu x}{x^2+x}=3$, να υπολογίσετε τα όρια:

i. $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$ ii. $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)-2}{x}$ iii. $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{|5-3f(x)|-1}{x^2-x}$.

111.Δίνονται οι συναρτήσεις $f,g:(0,1)\cup(1,2)\to\mathbb{R}$ για τις οποίες ισχύουν οι σχέσεις: $\lim\limits_{x\to1}\left[(x-1)g(x)\right]=5$ και $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{f(x)}{x^2-3x+2}=4$. Να υπολογιστεί το $\lim\limits_{x\to1}\left[f(x)\cdot g(x)\right]$.

112.Αν για κάθε $x\in\mathbb{R}$ ισχύει $f(x-4)=f(x)$ και $\lim\limits_{x\to3}\dfrac{f(x)-1}{x-3}=4$ να βρεθεί το $\lim\limits_{x\to7}\dfrac{f(x)-1}{x-7}$.

113.Αν $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(3x)}{f(x)}=4$ να βρεθεί το $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(27x)}{f(x)}$.

114.Αν για κάθε $x\in\mathbb{R}$ είναι $f^2(x)-4f(x)\le x-4$, τότε να δείξετε ότι: $\lim\limits_{x\to0}f(x)=2$.

115.Αν είναι $\lim\limits_{x\to1}\left[f^2(x)+g^2(x)+6f(x)-8g(x)\right]=-25$, να υπολογίσετε τα όρια: $\lim\limits_{x\to1}f(x)$ και $\lim\limits_{x\to1}g(x)$.

116.Να υπολογιστούν, αν υπάρχουν τα παρακάτω όρια:

i. $\lim\limits_{x\to4}\dfrac{2x-9}{(x-4)^2}$ ii. $\lim\limits_{x\to4}\dfrac{3x-6}{x^2-9}$ iii. $\lim\limits_{x\to3}\dfrac{2x-7}{|x-3|}$ iv. $\lim\limits_{x\to2}\dfrac{4x+5}{x^2-4}$

117.Δίνεται η συνάρτηση f, ορισμένη στο διάστημα (0,6) τέτοια ώστε, $(x-3)^2f(x)\le 2x-10$ για κάθε $x\in(0,3)\cup(3,6)$. Να υπολογιστεί το $\lim\limits_{x\to3}f(x)$.

118.Να υπολογίσετε τα όρια: i. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{2ημx-1}{1-συνx}$ ii. $\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{3-5συνx}{2ημx}$

119.Να υπολογιστεί το $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x^2+3x-\lambda}{|x-1|}$, όταν το λ διατρέχει το $\mathbb{R}$.

120.Δίνεται η συνάρτηση $g(x)=\dfrac{\kappa x^4+\lambda x^5-5}{x-1}$, $\kappa,\lambda\in\mathbb{R}$. Να βρεθούν οι πραγματικοί αριθμοί κ, λ, ώστε $\lim\limits_{x\to1}g(x)=2$.

121.Για τις διάφορες τιμές του $\alpha\in\mathbb{R}$ να βρεθούν τα όρια:

i. $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\alpha x^4-(\alpha-2)x^3+2}{(\alpha-2)x^3+\alpha x^2+1}$ ii. $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[\sqrt{4x^2+3x+2}-\alpha x\right]$

122.Να υπολογιστούν τα όρια:

i. $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{4\cdot3^{x+1}-2\cdot5^x+3}{e^{x+2}+4^x}$ ii. $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2^{3x+1}-5^{3x+2}}{3^{2x+1}+2^{3x+2}}$

iii. $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{3\cdot2^x+5^{x+2}-7^{x+1}}{2\cdot4^x-3^{x+2}}$ iv. $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{3\cdot4^x-5^{x+1}}{2e^x-2^{2x+3}}$

123. Να υπολογιστούν τα όρια:

i. $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[\ln\left(2x+\sigma\upsilon\nu^2 x\right)-2\ln x\right]$ ii. $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\ln x-\ln\sqrt{x^2+2x+3}\right)$

124. Να βρεθεί το $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{e^{x+2}+\alpha^x}{e^x+\alpha^{x+2}}$ για τις διάφορες τιμές του $\alpha>0$.

125. Να υπολογισθούν τα όρια:

i. $\lim\limits_{x\to0^+}\frac{3\ln^2 x-4\ln x+5}{\ln^2 x+\ln x+7}$ ii. $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[x-\ln\left(e^x+2\right)\right]$

126. Αν $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=3$ και $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(f(x)-3x\right)=6$, να υπολογιστεί το όριο:

$\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{xf(x)-3x^2-6}{2x^2f(x)-6x^3+4x-5}$

127. Δίνεται συνάρτηση f ορισμένη στο $[0,\pi]$ για την οποία ισχύει ότι: $1+2\sqrt{\eta\mu x}\le f(x)\le 2+\eta\mu x$ για κάθε $x\in[0,\pi]$.

α) Να αποδείξετε ότι η F είναι συνεχής στο $\frac{\pi}{2}$.

β) Να υπολογίσετε το όριο $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\sigma\upsilon\nu^2 x}{f(x)-3}$

128. Δίνεται συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ για την οποία ισχύει $f^2(x)-2f(x)\le x^2-1$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$. Να δείξετε ότι η f είναι συνεχής στο $x_0=0$.

129. Δίνονται οι συναρτήσεις $f,g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ για τις οποίες ισχύει ότι $f^2(x)+g^2(x)+2f(x)-4g(x)+5\le\sigma\upsilon\nu^2(2x)$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$. Να αποδείξετε ότι οι f,g είναι συνεχείς στο $x_0=\frac{\pi}{4}$.

130. Μια συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ είναι συνεχής στο $\alpha\in\mathbb{R}$ και ισχύει $f(x+y)=f(x)\sigma\upsilon\nu y+f(y)\sigma\upsilon\nu x$. Να αποδείξετε ότι η f είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$.

131. Μια συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ είναι συνεχής και υπάρχει $\alpha\in\mathbb{R}$ με $f(f(\alpha))=\alpha$. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f(x)=x$ έχει τουλάχιστον μία πραγματική ρίζα.

132. Δίνεται συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ συνεχής στο $x_0=1$ για την οποία ισχύει: $f(x)+f(x+3)=x-2$. Να αποδείξετε ότι η f είναι συνεχής στο $x_1=4$.

133. Δίνεται συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ για την οποία ισχύει: $f^3(x)+f(x)=2x$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$. Να αποδείξετε ότι η f είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$.

ΘΕΩΡΗΜΑΤΑ ΣΥΝΕΧΩΝ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΩΝ

134. Να δειχθεί ότι η εξίσωση $f(x)=\begin{cases} x^2+x-6, & 0\le x\le 3 \\ x^2-6x+8, & 3<x\le 6 \end{cases}$ έχει ρίζες στο διάστημα [0,6] χωρίς να πληροί τις προϋποθέσεις του θ. Bolzano.

135. Δίνονται οι συνεχείς συναρτήσεις $f,g:\mathbb{R}\to(0,+\infty)$ για τις οποίες ισχύει f(α)=2α, g(β)= -2β. Να αποδειχθεί ότι υπάρχει $x_0\in(\alpha,\beta)$ τέτοια ώστε $f(x_0)=2x_0+g(x_0)$.

136. Να αποδειχθεί ότι οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων $f(x)=x^4+x^3-2x+1$ και $g(x)=3x^3-5x+3$, έχουν ένα τουλάχιστον κοινό σημείο με τετμημένη $x_0\in(0,2)$.

137. Θεωρούμε τη συνάρτηση $f(x)=\alpha x^2+\beta x+\gamma$, $\alpha\neq 0$ ώστε $\alpha\gamma+\beta\gamma+\gamma^2<0$. Να αποδείξετε ότι:

α) η εξίσωση $f(x)=0$ έχει δύο ακριβώς ρίζες από τις οποίες τουλάχιστον η μία βρίσκεται στο $(0,1)$.

β) Αν $A(\beta,\alpha)$, $B(0,\gamma)$, $\Gamma(\alpha,0)$ και $\Delta(-\gamma,0)$ είναι οι εικόνες των μιγαδικών z_1,z_2,z_3,z_4 στο μιγαδικό επίπεδο, τότε ισχύει $|z_2-z_1|>|z_4-z_3|$.

138. Δίνεται συνεχής συνάρτηση $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$ για την οποία ισχύει: $2\ln x-x<f(x)<\ln^2 x+x$ για κάθε $x>0$. Να αποδειχθεί ότι η εξίσωση $f(x)=(e^2+1)\ln x-x$ έχει τουλάχιστον μια ρίζα στο $(1,e)$.

139. Δίνεται συνεχής συνάρτηση $f:[0,1]\to(0,2)$. Να αποδειχθεί ότι υπάρχει $\xi\in(0,1)$ τέτοιο ώστε $f^2(\xi)=2f(\xi)-3\xi$.

140. Δίνεται η συνεχής συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ για την οποία ισχύει: $f^3(x)+\beta f^2(x)+\gamma f(x)=x^3-2x+6x-1$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$, με β, $\gamma\in\mathbb{R}$ και $\beta^2<3\gamma$. Να αποδειχθεί ότι η εξίσωση $f(x)=0$ έχει τουλάχιστον μία ρίζα στο διάστημα $(0,1)$.

141. Δίνεται συνάρτηση f συνεχής στο $[0,1]$. Να αποδειχθεί ότι υπάρχει $\xi\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ τέτοιο, ώστε: $f(\eta\mu\xi)=f(\sigma\upsilon\nu\xi)$.

142. Εστω η συνεχής συνάρτηση $f:[\alpha,\beta]\to\mathbb{R}$ για την οποία ισχύει $f^2(\alpha)+f(\alpha)\cdot f(\beta)=0$. Να αποδειχθεί ότι υπάρχει τουλάχιστον ένα $\xi\in[\alpha,\beta]$ τέτοιο ώστε f(ξ)=0.

143. Δίνεται συνάρτηση f συνεχής στο $[\alpha,\alpha+1]$ για την οποία ισχύει $f(\alpha)+f(\alpha+1)=0,\ \alpha\in\mathbb{R}$. Να αποδειχθεί ότι η εξίσωση $f(x)=0$ έχει τουλάχιστον μία ρίζα στο διάστημα $[\alpha,\alpha+1]$.

144. Δίνεται συνάρτηση f συνεχής στο $[0,1]$ με $f(0)=f(1)$. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f(x)=f\left(x+\frac{1}{3}\right)$ έχει τουλάχιστον μία πραγματική ρίζα.

145.Δίνεται συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ για την οποία ισχύει: $f(x)\neq 0$ για κάθε $\mathbf{x}\in\mathbb{R}$ και $f(\alpha)+f(\beta)+f(\gamma)=0$ με $\alpha, \beta, \gamma\in\mathbb{R}$ και $\alpha<\beta<\gamma$. Να αποδειχθεί ότι η f δεν είναι συνεχής.

146.Δίνονται οι συνεχείς συναρτήσεις $f, g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ για τις οποίες ισχύει: $f(x)=\left(x^2-x\right)g(x)$, για κάθε $x\in\mathbb{R}$. Αν η εξίσωση $f(x)=0$ έχει διαδοχικές ρίζες το 0 και το 1, να αποδειχθεί ότι $g(0)\cdot g(1)\geq 0$.

147.Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $x-\beta^2 ημx=\beta^2, \beta\neq 0$ έχει μία τουλάχιστον θετική ρίζα που δεν υπερβαίνει το $2\beta^2$.

148.Να δειχθεί ότι η εξίσωση $x^5-24x+3=0$ έχει τουλάχιστον δύο ρίζες στο διάστημα (0,3).

149.Να αποδειχθεί ότι η εξίσωση $x^3+3x-2=0$ έχει μία ρίζα στο διάστημα (0,1).

150.Να δειχθεί ότι η εξίσωση $2\ln x+3e^x=0$ έχει ρίζα στο (0,1).

151.Να αποδειχθεί ότι η εξίσωση $2x^{2011}+x^3+1=0$, έχει ακριβώς μία πραγματική ρίζα.

152.Εστω συνάρτηση $f:[1,3]\to\mathbb{R}$. Αν το σύνολο τιμών της είναι το διάστημα $(3,5]$, να δείξετε ότι η f δεν είναι συνεχής.

153.Δίνεται η συνάρτηση $g(x)=2x^2-1-συνx,\ x\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$.

i. Δείξτε ότι η g είναι γνησίως αύξουσα. ii. Βρείτε το σύνολο αριθμών.

iii. Δείξτε ότι η εξίσωση $g(x)=0$ έχει μοναδική ρίζα στο $\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$.

154.Δίνεται συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ συνεχής, για την οποία ισχύει ότι: $5f^2(x)-3f(x)=2x^2-x+5$ (1) για κάθε $x\in\mathbb{R}$. Να δειχθεί ότι η f διατηρεί σταθερό πρόσημο στο $\mathbb{R}$.

155.Εστω $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ συνεχής με $f(x)\neq 0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$ και $f(5)=-2$. Να υπολογιστεί το όριο: $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{\left[f(3)-4\right]x^5+3x+5}{x^3+6x^2+2}$

156.Εστω η συνεχής συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ με $f(3)=5$ και $f(2)=f(6)=0$, όπου 2, 6, δύο διαδοχικές ρίζες της f. Να υπολογίσετε το όριο: $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^5f(4)+\left(f(4)-6\right)x^2+3}{x^4-3f(4)x^2+2}$.

157.Αν $f(x)=x^8+x+4$, να δείξετε ότι υπάρχει $\xi\in(1,2)$ τέτοιο ώστε $f(\xi)=250$.

158.Δίνεται η συνεχής συνάρτηση $f:\left[2,10\right]\to\mathbb{R}$. Να δειχθεί ότι υπάρχει $x_0\in\left[2,10\right]$ ώστε:

$$f(x_0)=\frac{3f(3)+5f(6)+2f(8)}{10}.$$

159.Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=e^x+e^{2x}-2$.

α) Να μελετηθεί η f ως προς την μονοτονία

β) Να δειχθεί ότι η εξίσωση $f^3(x)=f(1)\cdot f(2)\cdot f(3)$ έχει ακριβώς μια ρίζα στο $(1,3)$.

160. Εστω η συνεχής και γνησίως αύξουσα συνάρτηση $f:[5,8]\to\mathbb{R}$. Να αποδείξετε ότι υπάρχει ένας ακριβώς $x_0\in(5,8)$ τέτοιος ώστε $3f(x_0)=f(6)+f(7)+f(8)$.

161. Να αποδείξετε ότι αν μια συνάρτηση f είναι συνεχής και 1-1 σε ένα διάστημα Δ, τότε είναι γνησίως μονότονη στο διάστημα αυτό.

162. Εστω συνάρτηση f συνεχής στο διάστημα $[-3,3]$ για την οποία ισχύει $x^2+f^2(x)=9$ για κάθε $x\in[-3,3]$.

α) Να βρείτε τις ρίζες της εξίσωσης $f(x)=0$ στο διάστημα $[-3,3]$.

β) Να δείξετε ότι η συνάρτηση f διατηρεί σταθερό πρόσημο στο $(-3,3)$.

γ) Να βρείτε τον τύπο της f αν $f(0)=-2$.

163. Δίνεται περιττή και συνεχής στο $\mathbb{R}$ συνάρτηση f με $f(2)<0$ και έστω ότι η εξίσωση $f(x)=0$ έχει μοναδική ρίζα την $x=0$.

Α) Να βρείτε το πρόσημο της f.

Β) Να βρείτε το πρόσημο της συνάρτησης $g(x)=f(x)(x^2-4)$.

Γ) Αν $f^2(x)=x^8$, να βρείτε τον τύπο της f.

164. Να βρείτε τη συνεχή συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ με $f(0)=2$ για την οποία ισχύει:

$f^2(x)-6f(x)\text{ημ}x-9\text{συν}^2x=x^2$, για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

165. Δίνεται η συνάρτηση f συνεχής στο $[-3,3]$ για την οποία ισχύει $3x^2+4f^2(x)=27$ για κάθε $x\in[-3,3]$.

i. Να βρείτε τις ρίζες της εξίσωσης $f(x)=0$.

ii. Να αποδείξετε ότι η f διατηρεί πρόσημο στο διάστημα $(-3,3)$. iii. Να βρεθεί ο τύπος της f.

iv. Αν επιπλέον $f(1)=\sqrt{6}$ να βρείτε το όριο $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(x)-\frac{3\sqrt{3}}{2}}{x}$.

166. Δίνεται η συνάρτηση f συνεχής και γνησίως μονότονη στο διάστημα $[1,5]$, της οποίας η γραφική παράσταση περνάει από τα σημεία $A(1,8)$ και $B(5,12)$.

i. Να αποδείξετε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα.

ii. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f παίρνει την τιμή $\frac{29}{3}$.

iii. Υπάρχει μοναδικό $x_0\in(1,5)$ τέτοιο ώστε: $f(x_0)=\dfrac{2f(2)+3f(3)+4f(4)}{9}$

167. Δίνονται οι συνεχείς στο $\mathbb{R}$ συναρτήσεις f και g για τις οποίες ισχύουν:

- $f(x)\neq0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$.
- Οι γραφικές τους παραστάσεις τέμνονται στο $A(2,-1)$.

- $\rho_1=-1$ και $\rho_2=5$ είναι δύο διαδοχικές ρίζες της $g(x)=0$. Να αποδείξετε ότι:
  α) η συνάρτηση f διατηρεί σταθερό πρόσημο στο $\mathbb{R}$.
  β) $g(x)<0$ για κάθε $x\in(-1,5)$ γ) $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{f(3)x^4+2x^2+1}{g(2)x^3+5}=-\infty$

168.Α. Να αποδείξετε ότι για οποιουσδήποτε μιγαδικούς z_1,z_2 ισχύει:
$|z_1|^2+|z_2|^2=|z_1-z_2|^2 \Leftrightarrow \mathrm{Re}\left(z_1\cdot\overline{z_2}\right)=0$

Β. Εστω μια συνάρτηση $f:[\alpha,\beta]\to\mathbb{R}$ συνεχής στο [α,β] και οι μιγαδικοί αριθμοί $z=\alpha^2+if(\alpha)$,$w=f(\beta)+\beta^2 i$ με $\alpha\beta\neq0$. Αν $|w|^2+|z|^2=|w-z|^2$, να αποδείξετε ότι η εξίσωση f(x)=0 έχει μία τουλάχιστον ρίζα στο [α,β]. (1995)

162. Αν η πολυωνυμική εξίσωση $x^2+\beta x+\gamma=0$ όπου $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$ έχει ως ρίζα το μιγαδικό 2-3i να βρείτε τα β,γ καθώς και την εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f(x)= x^2+βx+γ στο σημείο Α(1,f(1)) όταν το x μεταβάλλεται στο $\mathbb{R}$. (1998)

163. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\dfrac{|x-z|^2-|x+\overline{z}|^2}{x^2+|z|^2}$, z=α+βi , $\alpha,\beta\in\mathbb{R},\alpha\neq0$.

Να βρείτε τα όρια $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$, $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)$.

164. Δίνεται μια συνεχής συνάρτηση $f:[\alpha,\beta]\to\mathbb{R}$ με $f(x)\neq0$ για κάθε $x\in[\alpha,\beta]$ και μιγαδικός αριθμός z με $\mathrm{Re}(z)\neq0,\mathrm{Im}(z)\neq0$ και $|\mathrm{Re}(z)|>|\mathrm{Im}(z)|$. Αν $z+\dfrac{1}{z}=f(\alpha)$ και $z^2+\dfrac{1}{z^2}=f^2(\beta)$, να αποδείξετε ότι:

Α. $|z|=1$ **Β.** $f^2(\beta)<f^2(\alpha)$

Γ. η εξίσωση $x^3f(\alpha)+f(\beta)=0$ έχει τουλάχιστον μία ρίζα στο (-1,1).

165. Δίνεται η συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ και ο μιγαδικός $z=f(x)+(x-1)i,\ x\in\mathbb{R}$, για τον οποίο ισχύει: $(z-4)^\nu=(2z-5)^\nu,\ \nu\in\mathbb{N}^*$.

α) Να βρείτε τον γεωμετρικό τόπο της εικόνας Μ του z.
β) Να αποδείξετε ότι η f διατηρεί σταθερό πρόσημο στο διάστημα [0,2].
γ) Αν f(1)=1, να βρείτε τον τύπο της f, όταν $x\in(0,2)$.

166. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=x^3+|z|^2x-|z|^3,\ x\in\mathbb{R},\ z\in\mathbb{C}^*$.

α) Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία. β) Να βρείτε το σύνολο τιμών της f.
γ) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση f(x)=0 έχει ακριβώς 1 ρίζα στο διάστημα $(0,|z|)$.

δ) Αν $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(x)+|z|^3}{\eta\mu x}=1$, να βρείτε το γεωμετρικό τόπο της εικόνας Μ του μιγαδικού z.

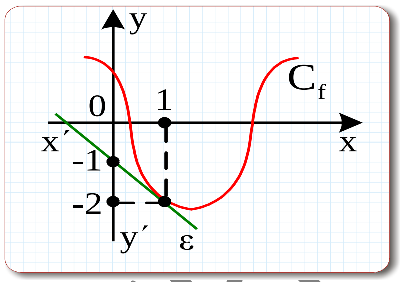
ΠΑΡΑΓΩΓΟΙ

Ορισμός παραγώγου

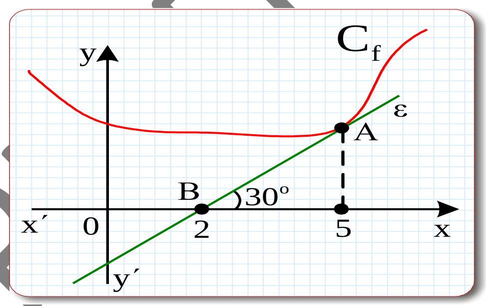
167. Αν η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο $x_0 = 1$, να υπολογίσετε τα όρια:

α) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^2 f(x) - f(1)}{x-1}$ β) $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}} \dfrac{f(\eta\mu x) - f(1)}{x - \frac{\pi}{2}}$

168. Στο διπλανό σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση μίας συνάρτησης f και η εφαπτομένη της στο σημείο Α(1,–2). Να βρείτε το f΄(1).



169. Στο διπλανό σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση μίας συνάρτησης f και η εφαπτομένη της ε, στο σημείο Α(5, f(5)). Αν η ε σχηματίζει με τον άξονα x΄x γωνία 30°, να υπολογίσετε τα f΄(5) και f(5).



170. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} x^2 - \alpha x + \beta, & x<1 \\ 2, & x=1 \\ x^2 - 2x + \gamma, & x>1 \end{cases}$. Αν η f είναι παραγωγίσιμη στο $x_0 = 1$, να βρείτε τα $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$.

171. Δίνεται συνάρτηση $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, για την οποία ισχύει: $7\eta\mu x - x \le f(x) \le 7\eta\mu x + x$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Να αποδείξετε ότι η f είναι παραγωγίσιμη στο $x_0 = 0$ με $f'(0) = 7$.

172. Δίνεται συνάρτηση $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, παραγωγίσιμη στο $x_0 = 0$, για την οποία ισχύει: $|f(x) - 3x| \le \eta\mu^2 x$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

α) Να αποδείξετε ότι f΄(0)=3.

β) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{f(9x) - f(x)}{f(2x)} = 4$.

173. Δίνεται συνάρτηση f παραγωγίσιμη στο $x_0 = 1$ με $f'(1) = 4$ και $f(1)=2$. Να υπολογίσετε το όριο $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{f(x) - 2x}{\sqrt{x+3} - 2}$.

174.Δίνεται συνάρτηση f παραγωγίσιμη στο $x_0 = 3$, με $f'(3) = f(3) = 5$. Να υπολογίσετε το όριο:

$$\lim_{x \to 3} \frac{f^2(x) - 25}{x^2 - x - 6}.$$

175.Η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης μίας συνάρτησης f στο σημείο της Α(3,-2), σχηματίζει με τον άξονα x΄x γωνία 120°. Να υπολογίσετε το όριο $\lim\limits_{h \to 0} \frac{f(3+h)+2}{h}$.

176. Δίνεται συνάρτηση f συνεχής στο $x_0 = -1$ και $\lim\limits_{h \to 0} \frac{f(-1+h)}{h} = 3$. Να αποδείξετε ότι η F είναι παραγωγίσιμη στο $x_0 = -1$.

177.Δίνεται συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, παραγωγίσιμη στο $x_0 \in \mathbb{R}$. Να υπολογίσετε το όριο

$$\lim_{h \to 0} \frac{f^2(x_0 + 2h) - f^2(x_0)}{h}.$$

178.Δίνεται συνάρτηση f παραγωγίσιμη στο $x_0 = 0$, με $f'(0) = \alpha$, $\alpha \in \mathbb{R}$. Να υπολογιστεί το όριο

$$\lim_{x \to 0} \frac{f(3x) - f(x)}{6x}.$$

179.Δίνεται συνάρτηση $f:\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ παραγωγίσιμη στο $x_0 = 2$, για την οποία ισχύει $f^3(x) + f(x) = x^2 - x - 2$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Να βρείτε το $f'(2)$.

180. Δίνεται συνάρτηση $f:\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ και η $g(x) = \begin{cases} f^3(x) + 3f(x) - 4, & x > 0 \\ f(x) - 1, & x \le 0 \end{cases}$. Να βρείτε τα

$f(0), g(0), f'(0), g'(0)$.

181.Για τη συνάρτηση f ισχύουν τα εξής:

α) $f(x+y) = f(x) + f(y) + 2xy(x+y)$, για κάθε $x, y \in \mathbb{R}$.

β)Η f είναι παραγωγίσιμη στο 0 με $f'(0) = 1$.

Να δείξετε ότι η f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$.

182.Εστω συνάρτηση f, παραγωγίσιμη στο 1, με $f'(1) = 3$. Αν για κάθε $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ ισχύει ότι $f(\alpha\beta) = \alpha^2 f(\beta) + \beta^2 f(\alpha)$, να αποδείξετε ότι η f είναι παραγωγίσιμη στο $x_0 \in \mathbb{R}$ και να βρεθεί το $f'(x_0)$.

183.Αν η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο x_0, να υπολογιστεί το όριο:

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + 3h) - 3f(x_0 + 2h) + 3f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}.$$

Κανόνες παραγώγισης- εφαπτομένη

184. Βρείτε την f' συναρτήσει της g', αν:

α) $f(x) = g(x + g(\alpha))$ β) $f(x) = g(xg(\alpha))$ γ) $f(x) = g(x + g(x))$

δ) $f(x)=g(x)(x-\alpha)$ ε) $f(x)=g(\alpha)(x-\alpha)$ στ) $f(x+3)=g(x^2)$

185.Εστω συνάρτηση f παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ τέτοια, ώστε $f(x^3)=x^4+x^3$. Να υπολογίσετε το $f'(8)$.

186.Δίνεται συνάρτηση f, παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$, για την οποία ισχύει: $f(x-\rho)=f(\rho-x)$, για κάθε $x\in\mathbb{R}$, $\rho\in\mathbb{R}$. Να αποδείξετε ότι το 0 είναι ρίζα της εξίσωσης $f'(x)=0$.

187.Εστω συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ περιττή και δύο φορές παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με $f'(-1)=-2$. Αν $g(x)=f(x)\text{συν}x-f(\text{συν}x)$, να βρείτε το $g''(0)$.

188.Εστω συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ άρτια και παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$. Αν $g(x)=\left(\frac{x^3}{3}+1\right)f(x)+x$, να δείξετε ότι $g'(0)=1$.

189.Εστω συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ περιττή και δύο φορές παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$.
α) Να αποδείξετε ότι η C_f διέρχεται από την αρχή των αξόνων.
β) $f''(0)=0$

190.Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\text{συν}x$, $x\in(0,\pi)$. Να αποδείξετε ότι η f αντιστρέφεται και να βρείτε το $\left(f^{-1}(x)\right)'$.

191.Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=e^x+x+2$, $x\in\mathbb{R}$.
α) Να αποδείξετε ότι η f αντιστρέφεται. β) Να υπολογίσετε το $\left(f^{-1}\right)'(3)$.

192.α) Να αποδείξετε ότι μια πολυωνυμική συνάρτηση $P(x)$ έχει παράγοντα το $(x-p)^2$, αν και μόνο αν $P(p)=P'(p)=0$.
β) Να βρείτε τα $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$, ώστε το πολυώνυμο $P(x)=\alpha x^3+\beta x^2-3x-1$, να έχει παράγοντα το $(x-1)^2$.

193.Να βρείτε πολυώνυμο $P(x)$ για το οποίο ισχύει $\left[P'(x)\right]^2=P(x)$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$ και $P'(1)=2$.

194.Να βρεθεί πολυώνυμο $P(x)$, τέτοιο ώστε: $P(x)+P'(x)-P''(x)=x^3-7x^2-20x+18$.

195.Δίνεται η παραγωγίσιμη συνάρτηση $g:\mathbb{R}^*\to\mathbb{R}$, για την οποία ισχύει:
$g(xy)=g(x)-g(y)$ για κάθε $x,y\in\mathbb{R}$. Να δειχθεί ότι $xg'(x)+yg'(y)=0$.

196.Εστω συνάρτηση f παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με $f(x^3)=3x^4+1$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$. Να υπολογίσετε τις τιμές $f'(1)$ και $f'(0)$.

197.Γνωρίζουμε ότι για κάθε $x\neq 1$ ισχύει $\frac{x^{\nu+1}-1}{x-1}=1+x+x^2+...+x^\nu$.

α) Να υπολογίσετε το άθροισμα $1+2x+3x^2+...+\nu x^{\nu-1},\ x\neq 1$

β) Να υπολογίσετε το άθροισμα $2+\frac{3}{4}+\frac{4}{8}+\frac{5}{16}+...+\frac{20}{2^{19}}$

198. Δίνεται συνάρτηση f για την οποία ισχύει $f(x)-y^3\leq f(x+y)\leq f(x)+y^3$ για κάθε $x,y\in\mathbb{R}$.
Να αποδείξετε ότι η F είναι παραγωγίσιμη σε κάθε $x_0\in\mathbb{R}$.

199. Να υπολογιστούν τα παρακάτω όρια:

α) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x}$ β) $\lim\limits_{x\to 1}\frac{\ln x}{x-1}$ γ) $\lim\limits_{x\to 1}\frac{e^{e^x}-e^e}{x-1}$ δ) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{3}}\frac{4\eta\mu^2 x-3}{3x-\pi}$ ε) $\lim\limits_{x\to e}\frac{\ln^4 x-1}{x-e}$

200. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=x^x+2,\ x>0$. Να αποδείξετε ότι η εφαπτομένη της C_f στο σημείο Μ(1,3), σχηματίζει με τους άξονες ισοσκελές τρίγωνο με εμβαδόν 2τ.μ.

201. Να βρείτε τις κοινές εφαπτομένες των γραφικών παραστάσεων των συναρτήσεων:
$f(x)=x^2-5x+10$ και $g(x)=x^2-x+6$.

202. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\alpha x^2+\beta x+\gamma$, $\alpha,\beta\in\mathbb{R}^*$, $\gamma,x\in\mathbb{R}$ και το σημείο Α(κ,λ). Αν από το Α άγονται δύο εφαπτομένες προς την C_f, να αποδειχθεί ότι $\alpha^2\kappa^2-\alpha\lambda+\alpha\gamma+\alpha\kappa\beta>0$.

203. Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x)=\frac{x^2-2}{x+2}$ και $g(x)=x^2-x+\lambda$. Αν η εφαπτομένη της C_f στο σημείο $M(0,f(0))$ εφάπτεται και στη C_g, να βρεθεί η τιμή της παραμέτρου $\lambda\in\mathbb{R}$.

204. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=x^4-\lambda x+3,\ x,\lambda\in\mathbb{R}$. Αν από την αρχή των αξόνων διέρχονται δύο εφαπτομένες προς την C_f κάθετες μεταξύ τους, να βρείτε το λ.

205. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\alpha x^2+\beta x+\gamma$, $\alpha,\beta\in\mathbb{R}^*$, $\gamma,x\in\mathbb{R}$ και το σημείο Α(κ,λ). Αν από το Α άγονται δύο εφαπτόμενες προς την C_f, να αποδειχθεί ότι $\alpha^2\kappa^2-\alpha\lambda+\alpha\gamma+\alpha\kappa\beta>0$.

206. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\begin{cases}x^3\cdot\eta\mu\frac{1}{x}, & x\neq 0\\ 0, & x=0\end{cases}$. Να αποδείξετε ότι ο άξονας $x'x$ εφάπτεται της C_f στην αρχή των αξόνων.

207. Δίνεται παραγωγίσιμη συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, για την οποία ισχύει: $f^3(x)+xf(x)=x^2-5x+2$, για κάθε $x\in\mathbb{R}$. Να βρείτε την εφαπτομένη της C_f στο σημείο με $x_0=1$.

208. Δίνεται παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ συνάρτηση f για την οποία ισχύει ότι: $f(2+x)-f(2-x)=-2x$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$. Να αποδείξετε ότι η εφαπτομένη της C_f στο σημείο $(2,f(2))$ είναι κάθετη στην ευθεία $y=x$.

209. Να βρείτε τις κοινές εφαπτόμενες των γραφικών παραστάσεων των συναρτήσεων:

$f(x)=x^2-5x+10$ και $g(x)=x^2-x+6$.

210. Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x)=\dfrac{x^2-2}{x+2}$ και $g(x)=x^2-x+\lambda$. Αν η εφαπτομένη της C_f στο σημείο $M(0,f(0))$ εφάπτεται και στη C_g, να βρεθεί η τιμή της παραμέτρου $\lambda\in\mathbb{R}$.

211. Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x)=-x^2+4\lambda+2$ και $g(x)=x^2+4\lambda x$. Να βρείτε την τιμή της παραμέτρου $\lambda\in\mathbb{R}$, αν είναι γνωστό ότι οι C_f, C_g δέχονται κοινή εφαπτομένη. Στη συνέχεια να βρεθεί η κοινή τους εφαπτομένη.

212. α) Έστω δύο συναρτήσεις f,g με πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}$. Να γράψετε τις συνθήκες ώστε οι C_f, C_g να δέχονται κοινή εφαπτομένη σε σημείο με τετμημένη $x=x_0$.

β) Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x)=\dfrac{1}{3}x^3-x^2+1$ και $g(x)=x^2-3x+1$. Να αποδείξετε ότι οι C_f, C_g δέχονται κοινή εφαπτομένη σε σημείο του οποίου να υπολογίσετε τις συντεταγμένες.

213. Εστω η συνάρτηση $f(x)=\dfrac{3x^2+1}{x^2+3}$. Δείξτε ότι οι εφαπτομένες της γραφικής παράστασης της f στα σημεία της με τεταγμένη 1, τέμνονται στην αρχή των αξόνων.

214. Εστω δύο συναρτήσεις f,g με πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}$ με τη g παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$, για τις οποίες ισχύει ότι $f(x)g(x)=1$ και $g'(x)=-g(x)$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$. Να αποδείξετε ότι οι εφαπτομένες των γραφικών παραστάσεων των f,g στα σημεία $M(\alpha,f(\alpha))$ και $N(\alpha,g(\alpha))$ αντίστοιχα, είναι:
i) κάθετες και ii) τέμνουν τον άξονα x΄x σε δύο σημεία που η μεταξύ τους απόσταση είναι σταθερή.

Ρυθμός μεταβολής

215. Ενα σώμα, κινείται πάνω σε ευθεία και η θέση του κάθε χρονική στιγμή $t(\text{sec})$ δίνεται από τον τύπο: $x(t)=t^3-6t^2+9t+2,\ t\in[0,5]$.

I. Να βρείτε την αρχική θέση του σώματος πάνω στην ευθεία.
II. Να βρείτε την ταχύτητα και την επιτάχυνσή του τη χρονική στιγμή t.
III. Να βρείτε την επιτάχυνσή του τις χρονικές στιγμές που είναι ακίνητο.
IV. Να βρείτε τα χρονικά διαστήματα κατά τα οποία το σώμα κινείται κατά τη θετική και κατά την αρνητική φορά.
V. Να βρείτε το συνολικό διάστημα που διανύει το σώμα.
VI. Να βρείτε τη μέση ταχύτητα του σώματος.

216. Δίνεται ορθογώνιο με εμβαδόν $E=50\text{cm}^2$. Αν το μήκος του ελαπτώνεται με ρυθμό $1\ \text{cm/s}$, να βρείτε το ρυθμό μεταβολή της περιμέτρου του, όταν το μήκος του είναι 5cm.

217. Το κόστος κατασκευής x τεμαχίων ενός προϊόντος, είναι $-5x^2+500x+100$ χιλιάδες ευρώ, ενώ τα έσοδα από την πώληση των x τεμαχίων είναι, $-x^3+100x^2-2500x-150$ χιλιάδες ευρώ. Να βρείτε το πλήθος των τεμαχίων που πρέπει να κατασκευαστούν, ώστε ο ρυθμός του κέρδους να είναι θετικός.

218. Υλικό σημείο κινείται επί της γραφικής παράστασης της συνάρτησης $f(x)=x^3-6x^2+2$. Να βρείτε τα σημεία της καμπύλης για τα οποία ο ρυθμός μεταβολής της κλίσης της εφαπτομένης της C_f στα σημεία αυτά, είναι θετικός.

219. Υλικό σημείο κινείται επί της καμπύλης $y=x\ln x$, $x>0$. Να βρείτε τη θέση του, τη χρονική στιγμή κατά την οποία ο ρυθμός μεταβολής της τεταγμένης του, είναι διπλάσιος από το ρυθμό μεταβολής της τετμημένης του, αν γνωρίζουμε ότι ο ρυθμός μεταβολής της τετμημένης του σημείου είναι θετικός.

220. Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ, με γωνία $A=30^o$ και πλευρές $\beta=4cm$ και $\gamma=2cm$. Αν η πλευρά β αυξάνεται με ρυθμό $0{,}5cm/s$ και η πλευρά γ αυξάνεται με ρυθμό $0{,}9cm/s$, να βρείτε:

I. Το ρυθμό μεταβολής του Εμβαδού του τριγώνου τη χρονική στιγμή κατά την οποία είναι ισοσκελές, με κορυφή Α.

II. Το ρυθμό μεταβολής της πλευράς α του τριγώνου, τη χρονική στιγμή που είναι ισοσκελές, με κορυφή Α.

221. Εστω $f(t)mgr$ η ποσότητα ενός φαρμάκου που έχει απορροφηθεί από έναν ασθενή, t ώρες μετά τη λήψη του. Αν $f(t)=1-4^{-\frac{t}{4}}$, να βρείτε:

I. Την ποσότητα του φαρμάκου που έχει απορροφηθεί από το σώμα του ασθενούς, 2 ώρες μετά τη λήψη του.

II. Τη χρονική στιγμή κατά την οποία ο ρυθμός απορρόφησης του φαρμάκου από τον ασθενή είναι ίσος με το $\frac{1}{64}$ του ρυθμού απορρόφησης τη στιγμή λήψης του.

222. Θεωρούμε τη συνάρτηση $f(x)=e^x$ και το τρίγωνο που ορίζουν τα σημεία $K(0,1), A(x,0)$ και $B(x,e^x)$.

α) Να υπολογίσετε το εμβαδόν του τριγώνου ΚΑΒ, αφού πρώτα κάνετε το σχήμα.

β) Να υπολογίσετε το ρυθμό μεταβολής του εμβαδού του ως προς x, τη χρονική στιγμή κατά την οποία $x=\ln 2$.

223. Ενας φοιτητής Φυσικής στέκεται σε απόσταση 30m από ένα ευθύγραμμο τμήμα σιδηροτροχιάς, περιμένοντας να περάσει το τρένο, για να πειραματιστεί με το φαινόμενο Doppler. Ενα τρένο πλησιάζει με ταχύτητα 90Km/h. Να βρείτε το ρυθμό μείωσης της απόστασης τρένου- φοιτητή, όταν αυτή είναι ίση με 50m.

224. Ευθεία ε με συντελεστή διεύθυνσης $\lambda>0$ στρέφεται γύρω από το σημείο $M(6,2)$ με ρυθμό $\frac{d\lambda}{dt}=10^{-3}rad/sec$. Αν η ε τέμνει τους άξονες x΄x και y΄y στα σημεία Α και Β αντίστοιχα, να βρείτε το ρυθμό μεταβολής του εμβαδού του τριγώνου ΟΑΒ ως προς το χρόνο, τη χρονική στιγμή που η ε διέρχεται από το σημείο $N(2,-2)$.

225. Ο ρυθμός ανάπτυξης βακτηριδίων μετά την έναρξη της καλλιέργειάς τους σε ένα εργοστάσιο είναι ανάλογος με το πλήθος τους. Αν η αρχική ποσότητα είναι 5 βακτηρίδια και μετά από 3 ώρες είναι 30 τα βακτηρίδια, πόσα θα είναι τα βακτηρίδια μετά από 10 ώρες;

Θεώρημα Rolle

226. Να αποδείξετε ότι υπάρχει σημείο της γραφικής παράστασης της συνάρτησης $f(x)=e^x\left(x^2-1\right)\eta\mu x$, με τετμημένη $\xi\in(-1,1)$, στο οποίο η εφαπτομένη είναι παράλληλη στον άξονα $x'x$.

227. Δίνονται οι συναρτήσει f,g,h, ορισμένες και συνεχείς στο $[\alpha,\beta]$, παραγωγίσιμες στο (α,β) με $f(\alpha)=h(\beta)=0$ και $f(x)g(x)h(x)\neq 0$ για κάθε $x\in(\alpha,\beta)$.

i. Να αποδείξετε ότι εφαρμόζεται για τη συνάρτηση $\varphi(x)=f(x)g(x)h(x)$ το θ. Rolle στο διάστημα $[\alpha,\beta]$.

ii. Να αποδείξετε ότι υπάρχει $\xi\in(\alpha,\beta)$ τέτοιο, ώστε: $\dfrac{f'(\xi)}{f(\xi)}+\dfrac{g'(\xi)}{g(\xi)}+\dfrac{h'(\xi)}{h(\xi)}=0$.

228. Δίνεται συνάρτηση f, παραγωγίσιμη στο $[0,1]$ με $f(0)=4$ και $f(1)=1$. Να αποδείξετε ότι υπάρχει $\xi\in(0,1)$ τέτοιο, ώστε: $f'(\xi)=3\xi^2-4\xi-2$.

229. Να δείξετε ότι η εξίσωση $12x^3-6x^2=10x-4$ έχει τουλάχιστον ρίζα στο (0, 1).

230. Αν για τους αριθμούς $\alpha,\beta,\gamma,\delta\in\mathbb{R}$ ισχύει $\dfrac{\alpha}{4}+\dfrac{\beta}{3}+\dfrac{\gamma}{2}+\delta=0$, να αποδείξετε ότι η εξίσωση $\alpha x^3+\beta x^2+\gamma x+\delta=0$, έχει τουλάχιστον μία ρίζα στο διάστημα $(0,1)$.

231. Δίνεται παραγωγίσιμη συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $(2x-3)f(x)+\left(x^2-3x\right)f'(x)=0$, έχει τουλάχιστον μία ρίζα στο διάστημα $(0,3)$.

232. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $\left(x^2-1\right)\sigma\upsilon\nu x+2x\eta\mu x=0$ έχει τουλάχιστον δύο ρίζες στο $(-1,1)$.

233. Δίνεται παραγωγίσιμη συνάρτηση $f:[1,2]\to\mathbb{R}$, για την οποία ισχύει: $f(1)=2f(2)$. Να αποδείξετε ότι υπάρχει $\xi\in(1,2)$ τέτοιο, ώστε $f(\xi)+\xi f'(\xi)=0$.

234. Εστω συνάρτηση f συνεχής στο $[0,\pi]$, παραγωγίσιμη στο $(0,\pi)$ τέτοια, ώστε $\sigma\upsilon\nu x\cdot f(x)\neq\eta\mu x\cdot f'(x)$ για κάθε $x\in[0,\pi]$. Να αποδείξετε ότι:

α) $f(0)f(\pi)\neq 0$ β) υπάρχει $x_0\in(0,\pi)$ τέτοιο, ώστε $f(x_0)=0$

235. Δίνεται παραγωγίσιμη συνάρτηση $f:[1,2]\to\mathbb{R}$, για την οποία ισχύει: $f(2)=2f(1)$. Να αποδείξετε ότι υπάρχει $\xi\in(1,2)$ τέτοιο, ώστε $f'(\xi)=\dfrac{f(\xi)}{\xi}$.

236. Δίνεται συνάρτηση f, συνεχής στο $[1,3]$, παραγωγίσιμη στο $(1,3)$, με $3f(1)=f(3)$. Να αποδείξετε ότι υπάρχει $\xi\in(1,3)$, τέτοιο, ώστε η εφαπτομένη της C_f στο σημείο $M(\xi,f(\xi))$ να διέρχεται από την αρχή των αξόνων.

237. Δίνεται συνάρτηση f, συνεχής στο $\left[\alpha,\beta\right]$, παραγωγίσιμη στο $\left(\alpha,\beta\right)$, για την οποία ισχύει: $f^2\left(\beta\right)-f^2\left(\alpha\right)=\beta^2-\alpha^2$. Να αποδείξετε ότι υπάρχει $\xi\in\left(\alpha,\beta\right)$ τέτοιο, ώστε: $f'\left(\xi\right)f\left(\xi\right)=\xi$.

238. Η συνάρτηση f είναι συνεχής στο [α,β] παραγωγίσιμη στο (α,β) και $f(\alpha)=f(\beta)=0$.
Να δείξετε ότι υπάρχει $\xi\in$(α,β),ώστε να ισχύει : $f'(\xi)+f(\xi)=0$.

239. Δίνεται παραγωγίσιμη συνάρτηση $f:\left[0,1\right]\to\mathbb{R}$, για την οποία ισχύει: $f(0)=f(1)=0$. Να αποδείξετε ότι υπάρχει $\xi\in(0,1)$, τέτοιο, ώστε: $f'(\xi)-2f(\xi)=0$.

240. Δίνεται παραγωγίσιμη συνάρτηση $f:\left[-\alpha,\alpha\right]\to\mathbb{R}$, $\alpha>0$, για την οποία ισχύει $f(-\alpha)=f(\alpha)$. Να αποδείξετε ότι υπάρχει $\xi\in(-\alpha,\alpha)$, τέτοιο, ώστε $f'(\xi)+2\xi f(\xi)=0$.

241. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=x^4-x^3+\dfrac{\lambda^2}{8}x^2-6\lambda^3x+2$, $\lambda,x\in\mathbb{R}$. Αν η εξίσωση $f(x)=0$ έχει 4 πραγματικές ρίζες, να αποδείξετε ότι $\left|\lambda\right|<\sqrt{3}$.

242. Δίνεται συνάρτηση f, δύο φορές παραγωγίσιμη στο $\left[\alpha,\beta\right]$, $\alpha\cdot\beta<0$, με $f(\alpha)=f(\beta)=f(0)$. Να αποδείξετε ότι υπάρχει $\xi\in\left(\alpha,\beta\right)$, τέτοιο, ώστε $f''(\xi)=0$.

243. Δίνεται παραγωγίσιμη συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, για την οποία ισχύει: $f(\alpha)<0$, $f(\alpha)f(\beta)<0$, και $f(\gamma)<0$, όπου $\alpha,\beta,\gamma\in\mathbb{R}$, με $\alpha<\beta<\gamma$. Να αποδείξετε ότι η γραφική παράσταση της f, δέχεται εφαπτομένη παράλληλη στον άξονα $x'x$.

244. Να δείξετε ότι η εξίσωση $\ln x+\dfrac{x^3}{3}=6$ έχει το πολύ μία ρίζα στο διάστημα $\left(1,2\right)$.

245. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $x^{20}+\alpha x+\beta=0$ έχει το πολύ δύο πραγματικές ρίζες.

246. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $e^x-x^2+x-2012=0$, έχει το πολύ 3 πραγματικές ρίζες.

247. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $x^3=2-3\ln x$ έχει ακριβώς μία ρίζα στο $\left(1,2\right)$.

248. Εστω $f\left(x\right)=\left(x+1\right)\left(x-1\right)\left(x-2\right)\left(x+3\right)$. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f'\left(x\right)=0$ έχει ακριβώς 3 πραγματικές ρίζες.

249. Δίνεται συνάρτηση f δύο φορές παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ τέτοια, ώστε $f\left(0\right)=f\left(2\pi\right)$ και $f''\left(x\right)\neq$ συνx για κάθε $x\in\mathbb{R}$. Να δείξετε ότι υπάρχει μοναδικό $\xi\in\left(0,2\pi\right)$ τέτοιο, ώστε η εφαπτομένη της C_g, όπου $g\left(x\right)=f\left(x\right)+$ συνx, στο σημείο $\left(\xi,g\left(\xi\right)\right)$ είναι παράλληλη στον άξονα x΄x.

250. Δίνεται παραγωγίσιμη συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$. Να αποδείξετε ότι:

i. Μεταξύ δύο διαδοχικών ριζών της εξίσωσης $f(x)=0$, υπάρχει τουλάχιστον μία ρίζα της εξίσωσης $f'(x)=0$.

ii. Μεταξύ δύο διαδοχικών ριζών της εξίσωσης $f'(x)=0$, υπάρχει το πολύ μία ρίζα της εξίσωσης $f(x)=0$.

251. Δίνονται οι συναρτήσεις f,g, παραγωγίσιμες στο $\mathbb{R}$, για τις οποίες ισχύει: $f'(x)g(x)-f(x)g'(x)\neq 0$, για κάθε $x\in\mathbb{R}$. Να αποδείξετε ότι μεταξύ δύο ριζών της εξίσωσης $f(x)=0$, υπάρχει τουλάχιστον μία ρίζα της εξίσωσης $g(x)=0$.

Θεώρημα Μέσης Τιμής

252. Δίνεται συνάρτηση f, παραγωγίσιμη στο $[1,3]$, για την οποία ισχύει $f(3)=12$ και $f(1)=4$. Να αποδείξετε ότι υπάρχει σημείο της γραφικής παράστασης της f, στο οποίο η εφαπτομένη είναι παράλληλη στην ευθεία $y=4x-2007$.

253. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\begin{cases}4x^2+2, & x\leq 1\\ x^3+5x, & x>1\end{cases}$ και τα σημεία $A(0,2)$, $B(2,18)$.

Να βρεθεί σημείο του διαγράμματος της C_f τέτοιο, ώστε η αντίστοιχη εφαπτομένη της C_f σε αυτό το σημείο, να είναι παράλληλη προς την ευθεία ΑΒ.

254. Δίνεται συνάρτηση f, συνεχής στο $[\alpha,\beta]$ και παραγωγίσιμη στο (α,β), με $f(\alpha)=-2\beta$ και $f(\beta)=-2\alpha$. Να αποδείξετε ότι υπάρχουν $\xi_1,\xi_2\in(\alpha,\beta)$ τέτοια, ώστε: $f'(\xi_1)+f'(\xi_2)=4$.

255. Δίνεται παραγωγίσιμη συνάρτηση $f:[0,9]\to\mathbb{R}$, με $f(0)=f(9)$. Να αποδείξετε ότι υπάρχουν $\xi_1,\xi_2,\xi_3\in(0,9)$ τέτοια, ώστε: $f'(\xi_1)+f'(\xi_2)+f'(\xi_3)=0$.

256. Δίνεται συνάρτηση f, παραγωγίσιμη στο $[1,10]$, με $f(1)=4$ και $f(10)=9$. Να αποδείξετε ότι υπάρχουν $\xi_1,\xi_2,\xi_3\in(1,10)$ τέτοια, ώστε: $2f'(\xi_1)+3f'(\xi_2)+4f'(\xi_3)=5$.

257. Δίνεται συνάρτηση f παραγωγίσιμη στο $[0,10]$, με $f(0)=0$ και $f(10)=20$. Να αποδείξετε ότι υπάρχουν $\xi_1,\xi_2,\xi_3,\xi_4\in(0,10)$ τέτοια, ώστε: $\dfrac{1}{f'(\xi_1)}+\dfrac{1}{f'(\xi_2)}+\dfrac{1}{f'(\xi_3)}+\dfrac{1}{f'(\xi_4)}=2$

258. Δίνεται συνάρτηση f, συνεχής στο $[2,10]$ και παραγωγίσιμη στο $(2,10)$. Αν $f(2)=3$ και $f(10)=15$ να αποδείξετε ότι υπάρχουν $\xi_1,\xi_2,\xi_3\in(2,10)$ τέτοια, ώστε: $\dfrac{1}{f'(\xi_1)}+\dfrac{2}{f'(\xi_2)}+\dfrac{3}{f'(\xi_3)}=4$

259. Δίνεται συνάρτηση f, παραγωγίσιμη στο $[1,2]$, για την οποία ισχύει $f(1)=4$ και $f(2)=1$. Να αποδείξετε ότι:

I. Υπάρχει $x_0\in(1,2)$ τέτοιο, ώστε, $f(x_0)=3x_0-2$.

II. Υπάρχουν $\xi_1,\xi_2\in(1,2)$ τέτοια, ώστε: $f'(\xi_1)\cdot f'(\xi_2)=9$.

260. Δίνεται συνάρτηση f, δύο φορές παραγωγίσιμη στο $[-1,3]$, για την οποία ισχύει: $2f(1)=f(-1)+f(3)$. Να αποδείξετε ότι υπάρχει $\xi\in(-1,3)$ τέτοιο, ώστε $f''(\xi)=0$.

261. Δίνεται συνάρτηση f, παραγωγίσιμη στο $[\alpha,\beta]$, με $f(\alpha)=f(\beta)$. Να αποδείξετε ότι υπάρχουν $\xi_1,\xi_2\in(\alpha,\beta)$ τέτοια, ώστε $f'(\xi_1)\cdot f'(\xi_2)\leq 0$.

262. Εστω συνάρτηση f δύο φορές παραγωγίσιμη στο $[\alpha,\beta]$ με $f(\alpha)=f(\beta)=0$. Αν $\gamma\in(\alpha,\beta)$ και $f(\gamma)>0$, να δείξετε ότι υπάρχει $x_0\in(\alpha,\beta)$ τέτοιο, ώστε $f''(x_0)<0$.

263. Δίνεται συνάρτηση g, δύο φορές παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ και ευθεία ε, που τέμνει την C_f σε τρία διαφορετικά σημεία $A((x_1),g(x_1))$, $B((x_2),g(x_2))$, $\Gamma((x_3),g(x_3))$. Να αποδείξετε ότι υπάρχει τουλάχιστον ένα $\xi\in\mathbb{R}$ τέτοιο, ώστε $g''(\xi)=0$.

264. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=e^x-x^2,\ x\in\mathbb{R}$. Να αποδείξετε ότι υπάρχουν $x_1,x_2\in(\alpha,\beta)$, $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$ τέτοια, ώστε: $f'(x_1)+\alpha+\beta=e^{x_2}$.

265. Να αποδείξετε ότι $(\beta-\alpha)e^{\alpha}\leq e^{\beta}-e^{\alpha}\leq e^{\beta}(\beta-\alpha)$, για κάθε $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$.

266. Να αποδείξετε ότι για κάθε $\alpha,\beta\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$, με $\alpha<\beta$, ισχύει: $\frac{\beta-\alpha}{\sigma\upsilon\nu^2\alpha}<\varepsilon\varphi\beta-\varepsilon\varphi\alpha<\frac{\beta-\alpha}{\sigma\upsilon\nu^2\beta}$.

267. Να αποδείξετε ότι για κάθε $x>0$, ισχύει: $\frac{1}{x+1}<\ln\frac{x+1}{x}<\frac{1}{x}$.

268. Να αποδείξετε ότι $2-\frac{e}{\pi}<\ln\pi<\frac{\pi}{e}$.

269. Να συγκρίνετε τους αριθμούς: $\left(\sqrt[3]{7}+\sqrt[3]{3}\right)$ και $\left(\sqrt[3]{6}+\sqrt[3]{4}\right)$.

270. Αν $0<\alpha\leq\beta<\frac{\pi}{2}$, να δείξετε ότι $|\beta\sigma\upsilon\nu\beta-\alpha\sigma\upsilon\nu\alpha|\leq\pi|\beta-\alpha|$.

271. Δίνεται συνάρτηση f, παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$, για την οποία ισχύει: $f'(x)\geq x^2+1$, για κάθε $x\in\mathbb{R}$. Να αποδείξετε ότι $\lim_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$.

272. Μία συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ και η συνάρτηση f' είναι 1−1. Να αποδείξετε ότι κάθε εφαπτομένη της C_f έχει ένα μοναδικό κοινό σημείο με την C_f.

273. Δίνεται συνάρτηση f δύο φορές παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ της οποίας η εφαπτόμενη σε τυχαίο σημείο $M(x_0,f(x_0))$ επανατέμνει τη C_f σε δύο άλλα σημεία. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f'' δεν είναι γνησίως μονότονη.

274. Εστω συνάρτηση f παραγωγίσιμη στο $(0,+\infty)$. Αν υπάρχουν στο $\mathbb{R}$ τα όρια $\lim_{x\to+\infty}f(x)$ και $\lim_{x\to+\infty}f'(x)$, να αποδείξετε ότι $\lim_{x\to+\infty}f'(x)=0$.

Συνέπειες Θ.Μ.Τ

275. Να δείξετε ότι η συνάρτηση $f(x)=2(\eta\mu^6 x+\sigma\upsilon\nu^6 x)-3(\eta\mu^4 x+\sigma\upsilon\nu^4 x)$ είναι σταθερή και να βρεθεί η τιμή $f(1821)$.

276. Να βρείτε τη συνάρτηση f, για την οποία ισχύει:

Α) $f'(x)=\sigma\upsilon\nu x+2x$, $f(0)=1$

Β) $f'(x)=3\eta\mu^2 x\sigma\upsilon\nu x$, $f\left(\frac{\pi}{2}\right)=1$

Γ) $f'(x)=\frac{2\ln x}{x}$, $f(1)=0$, x>0.

Δ) $f'(x)=2x\eta\mu x+x^2\sigma\upsilon\nu x$, $f(0)=0$, $x\in\mathbb{R}$

Ε) $f'(x)=\frac{xe^x-e^x}{x^2}$, $f(1)=e$, $x>0$

ΣΤ) $f'(x)=\frac{\ln x-1}{x^2}$, $f(1)=1$, $x>0$

277. Να βρείτε συνάρτηση f, δύο φορές παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$, για την οποία ισχύει:

$f''(x)=12x^2+6x-1$, για κάθε $x\in\mathbb{R}$, $f'(1)=7$, $f(1)=\frac{1}{2}$.

278. Δίνονται οι συναρτήσεις f,g, δύο φορές παραγωγίσιμες στο $\mathbb{R}$, για τις οποίες ισχύει: $f''(x)=g''(x)$, για κάθε $x\in\mathbb{R}$. Αν $f(1)=f'(1)=2$ και $g(1)=g'(1)=1$, να αποδείξετε ότι $f(x)-g(x)=x$, $x\in\mathbb{R}$.

279. Εστω f,g παραγωγίσιμες στο $\mathbb{R}$ με $f'(x)=g(x)$ και $g'(x)=f(x)$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$, $f(0)=\sqrt{3}$ και $g(0)=\sqrt{2}$. Να δείξετε ότι $f^2(x)=1+g^2(x)$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

280. Εστω $f,g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ με $f(0)=0$, $g(0)=1$, $f'(x)=g(x)$ και $g'(x)=-f(x)$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

α) Να δείξετε ότι η συνάρτηση $h(x)=\left[f(x)-\eta\mu x\right]^2+\left[g(x)-\sigma\upsilon\nu x\right]^2$ είναι σταθερή.

β) Να βρείτε τις συναρτήσεις f,g.

281. Να βρείτε συνάρτηση f, παραγωγίσιμη στο $(0,+\infty)$, για την οποία ισχύει: $xf'(x)+f(x)=e^x$, για κάθε $x>0$ και $f(1)=e+1$.

282. Να βρείτε συνάρτηση f, παραγωγίσιμη στο $(0,+\infty)$, για την οποία ισχύει:

$xf'(x)-f(x)=x^2\eta\mu x+x^3\sigma\upsilon\nu x$, για κάθε $x>0$ και $f\left(\frac{\pi}{2}\right)=\frac{\pi^2}{4}$.

283. Να βρείτε τον τύπο της παραγωγίσιμης στο $\mathbb{R}$ συνάρτησης f για την οποία ισχύει ότι: $f'(x)=e^{x-f(x)}$ και $f(0)=0$.

284. Να βρείτε παραγωγίσιμη συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}^*$, για την οποία ισχύει: $f'(x)=2xf^2(x)$, για κάθε $x\in\mathbb{R}$ και η C_f διέρχεται από το σημείο $A(0,-1)$.

285. Να βρείτε παραγωγίσιμη συνάρτηση $f:(0,+\infty)\to(0,+\infty)$, για την οποία ισχύει:

$f'(x)=\frac{4x^3+2x}{3f^2(x)}$, για κάθε $x>0$ και $f(1)=2$.

286. Δίνεται συνάρτηση f παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με $\left(f\left(x\right)-\sigma\upsilon\nu x\right)\left(f'\left(x\right)+\eta\mu x\right)=0$ (1) για κάθε $x\in\mathbb{R}$ και $f\left(0\right)=1$. Να αποδείξετε ότι $f\left(x\right)=\sigma\upsilon\nu x$, $x\in\mathbb{R}$.

287. Δίνεται η παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ συνάρτηση f, για την οποία ισχύει ότι $f^2(x)f'(x)=\frac{1}{3}e^x$ και $f(0)=3$, για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

i. Να αποδείξετε ότι $f(x)>0$, για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

ii. Να βρείτε τον τύπο της f.

288. Δίνεται συνάρτηση f, δύο φορές παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$, για την οποία ισχύει: $f''(x)=f(x)+2$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$, $f(0)=f'(0)=-1$.

Α) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $g(x)=\left(f(x)-f'(x)+2\right)e^x$ είναι σταθερή στο $\mathbb{R}$.

Β) Να αποδείξετε ότι $f'(x)-f(x)=2-2e^{-x}$, $x\in\mathbb{R}$.

Γ) Να βρείτε τον τύπο της f.

289. Να βρείτε συνάρτηση f, παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$, για την οποία ισχύει: $f'(x)-2f(x)=e^{3x}$, για κάθε $x\in\mathbb{R}$ και $f(0)=2$.

290. Να βρείτε συνάρτηση f, παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$, για την οποία ισχύει: $f'(x)+2xf(x)=2x$, $x\in\mathbb{R}$ και $f(0)=1+e$.

291. Να βρείτε συνάρτηση f, δύο φορές παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$, για την οποία ισχύει:
$f(x)+xf'(x)+f''(x)=0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$, $f'(0)=0$ και $f(0)=2$.

292. Να βρείτε συνάρτηση f, δύο φορές παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$, για την οποία ισχύει:
$f''(x)+2f'(x)+f(x)=0$, $x\in\mathbb{R}$ και $f(0)=f'(0)=1$.

293. Να εξετάσετε αν υπάρχει συνάρτηση f, συνεχής στο $\mathbb{R}$, παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}-\{2\}$, με $f'(x)(x-2)-f(x)=0$, της οποίας η γραφική παράσταση διέρχεται από τα σημεία $A(1,3)$ και $B(3,4)$.

294. Να βρείτε συνάρτηση f παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ για την οποία ισχύει ότι $xf'\left(x\right)=2x^2+x$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$ και $f\left(1\right)=2$.

295. Να βρείτε συνάρτηση f παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ τέτοια, ώστε $f'\left(x\right)=\begin{cases}2x\ , & x<1\\ 2\ , & x\geq 1\end{cases}$ και $f\left(0\right)=1$.

Μονοτονία- Ακρότατα

296. Να βρείτε το πρόσημο των παρακάτω συναρτήσεων:

i. $f(x)=e^x-x$, $x\in\mathbb{R}$ ii. $f(x)=2\ln x+1-x^2$, $x>0$

297. Να μελετήσετε ως προς τη μονοτονία τις συναρτήσεις:

Α) $f(x)=x^2-2x+x\ln x-\ln x$ Β) $g(x)=2e^x-x^2-2x+1$ Γ) $h(x)=\dfrac{\ln(x-1)}{\ln x}$, όταν $x\geq 2$

298. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=e^x+3\ln x-e$, $x>0$.

Α) Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία.

Β) Να βρείτε το πρόσημο των αριθμών $f\left(\dfrac{1}{2012}\right)$ και $f(20152)$.

Γ) Να συγκρίνετε τους αριθμούς $f\left(\sqrt[10]{10}\right)$, $f\left(\sqrt[20]{20}\right)$, $f\left(\sqrt[30]{30}\right)$.

299. Εστω η συνάρτηση $f(x)=e+x\ln x-2x$.

α) Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία.

β) Να συγκρίνετε τους αριθμούς $f(e)$ και $f(\pi)$.

γ) Να αποδείξετε ότι $e^{e-2\pi}\cdot\pi^{\pi}>1$.

300. Δίνεται συνάρτηση f, δύο φορές παραγωγίσιμη στο $(0,+\infty)$, για την οποία ισχύει $f(0)=0$ και $f''(x)<0$ για κάθε $x>0$. Να μελετήσετε ως προς τη μονοτονία τη συνάρτηση: $g(x)=2e^x-\dfrac{f(x)}{x}$, $x>0$

301. Δίνεται συνάρτηση f, δύο φορές παραγωγίσιμη στο $(0,+\infty)$, για την οποία ισχύει $f(0)=0$ και f' γνησίως φθίνουσα στο $(0,+\infty)$. Να μελετήσετε ως προς τη μονοτονία τη συνάρτηση:

$g(x)=2e^x-\dfrac{f(x)}{x}$, $x>0$

302. Δίνεται συνάρτηση f δύο φορές παραγωγίσιμη στο $[1,4]$, για την οποία ισχύει $f''(x)<0$ για κάθε $x\in[1,4]$. Να συγκρίνετε τους αριθμούς $A=f(2)+f(3)$ και $B=f(1)+f(4)$.

303. Η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$, με την παράγωγο $f'(x)$ γνησίως αύξουσα. Να δείξετε ότι $2f(x)<f(x-2)+f(x+2)$, $x\in\mathbb{R}$.

304. Αν η συνάρτηση f είναι συνεχής στο $[\alpha,\beta]$, παραγωγίσιμη στο (α,β) και είναι $f(\alpha)=f(\beta)$, να αποδείξετε ότι, αν $f''(x)<0$, τότε $f(x)>f(\alpha)$ για κάθε $x\in(\alpha,\beta)$.

305. Δίνονται οι παραγωγίσιμες συναρτήσεις $f,g:[\alpha,\beta]\to\mathbb{R}$, για τις οποίες ισχύει ότι $f'(x)<g'(x)$ για κάθε $x\in(\alpha,\beta)$ και $f(\beta)=g(\beta)$. Να αποδείξετε ότι η γραφική παράσταση της f βρίσκεται πάνω από το γραφική παράσταση της g στο διάστημα (α,β).

306. Δίνεται συνάρτηση f, παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$, για την οποία ισχύει $f'(x)<2e^{2x}$, $x\in\mathbb{R}$. Αν η γραφική παράσταση της f διέρχεται από το σημείο $M(0,1)$, να αποδείξετε ότι:

Α) $f(x)>e^{2x}$, για κάθε $x<0$ Β) $f(x)<e^{2x}$, για κάθε $x>0$.

307. Να μελετήσετε ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα τις παρακάτω συναρτήσεις:

α) $f(x)=\sqrt{x^2-4x+3}$ β) $f(x)=\begin{cases} x^2, & x\le 1 \\ 4-x, & x>1 \end{cases}$ γ) $f(x)=\begin{cases} x^3, & x<0 \\ 3, & x=0 \\ x^2+1, & x>0 \end{cases}$

308. Να βρεθούν τα κρίσιμα σημεία και οι θέσεις των πιθανών τοπικών ακροτάτων της συνάρτησης

$$f(x)=\begin{cases} (x+1)^3, & x\in[-8,0) \\ 2ημx-x+1, & x\in\left[0,\frac{π}{2}\right] \end{cases}.$$

309. Να βρείτε τα ακρότατα των συναρτήσεων

α) $f(x)=x^4-4x^3+4x^2+1$ β) $f(x)=(x-2)^3(x-3)^4$ γ) $f(x)=\begin{cases} 1-x^2, & x\le 2 \\ 2x-7, & x>2 \end{cases}$

310. Να δείξετε ότι η παραγωγίσιμη συνάρτηση f, για την οποία ισχύει $2f^3(x)+f(x)=e^{-x}(x^2-2x+3)-7$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$, δεν έχει ακρότατα.

311. Να βρείτε τα ολικά ακρότατα της $f(x)=x^3-3x+4,\ x\in\left[-3,\frac{3}{2}\right]$.

312. Για ποια τιμή της παραμέτρου $λ>0$ το μέγιστο της συνάρτησης $f(x)=(x+1)e^{-λx}$ γίνεται ελάχιστο;

313. Αν η συνάρτηση $f(x)=α\ln|x|+βx^2+γx+δ$ παρουσιάζει τοπικά ακρότατα στα $x_1=-1$ και $x_2=1$, να δείξετε ότι: $(α+β)^{10}+γ^{10}=(α+β+γ)^{10}$.

314. Δίνεται η συνάρτηση $g(x)=\frac{\ln x}{x}$.

- **I.** Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα.
- **II.** Να αποδείξετε ότι για κάθε $λ>e$ ισχύει $λ^{λ+1}>(λ+1)^λ$.
- **III.** Να αποδείξετε ότι $x^e\le e^x$ για κάθε $x>0$.

315. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=x^x(1-x)^{1-x}$.

- **I.** Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα.
- **II.** Αν $x,y\in(0,1)$ με $x+y=1$, να αποδείξετε ότι $x^xy^y\ge\frac{1}{2}$.

316. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=αx^4+4βx^3+γx^2+δx+ε$, $αβ\ne 0$. Αν η f έχει τρία κρίσιμα σημεία, να αποδείξετε ότι $αγ<6β^2$.

317. Να αποδείξετε ότι: Α) $\ln(x-3)<x-4,\ x>4$ Β) $\ln x<ex^2,\ x>0$

Γ) $\ln(x-1)<x-2$ για κάθε $x>2$ Δ) $e^x(x+1)>1$ για κάθε $x>0$.

318. Δίνονται οι παραγωγίσιμες συναρτήσεις $f,g:[0,+\infty)\to\mathbb{R}$, για τις οποίες ισχύει η σχέση: $f'(x)=g'(x)+\eta\mu^2 x+e^x,\ x\in[0,+\infty)$. Να αποδείξετε ότι $f(0)+g(x)<g(0)+f(x)$ για κάθε $x\in(0,+\infty)$.

319. Α) Να αποδείξετε ότι $\ln(x+1)>x-\frac{x^2}{2}-\frac{1}{5},\ x\in[0,+\infty)$.

Β) Δίνεται συνάρτηση f παραγωγίσιμη στο $[0,+\infty)$ για την οποία ισχύει:

$$f^5(x)+2f^3(x)+3f(x)=(x+1)\ln(x+1)-\frac{4}{5}x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{6}+182 \text{ για κάθε } x\geq 0.$$

Να αποδείξετε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα στο $[0,+\infty)$.

320. Να αποδείξετε τις ανισότητες: Α) $e^x\geq x+1$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$ Β) $e^x\geq xe$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

Γ) $\varepsilon\varphi x-x\geq 0$ για κάθε $x\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right)$ Δ) $x^e\leq e^x,\ x>0$

321. Να αποδείξετε ότι $x^3+3x^2+6x+6\leq 6e^x$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

322. Δίνεται συνάρτηση f, παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$, για την οποία ισχύουν οι σχέσεις: $e^{x-1}f(x)+x\leq x^2-2,\ x\in\mathbb{R}$ και $f(1)=-2$. Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της C_f στο σημείο $A(1,-2)$.

323. Δίνεται η τρεις φορές παραγωγίσιμη συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, για την οποία ισχύει: $2f(x)\geq f(3)+f(4),\ x\in\mathbb{R}$. Να αποδείξετε ότι:

Α) $f(3)=f(4)$

Β) Υπάρχει τουλάχιστον ένα $\xi\in(3,4)$ τέτοιο, ώστε η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της f'' στο σημείο $M(\xi,f''(\xi))$ να είναι παράλληλη στον άξονα $x'x$.

324. Να αποδείξετε ότι $x+1\leq e^x\leq xe^x+1$, για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

325. Δίνεται συνάρτηση f, παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$, που ικανοποιεί τη σχέση: $f(x)-e^{-f(x)}=x-1$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$ και $f(0)=0$.

I. Να εκφράσετε την f' ως συνάρτηση της f.

II. Να αποδείξετε ότι $\frac{x}{2}\leq f(x)\leq xf'(x)$ για κάθε $x\in[0,+\infty)$.

326. Να αποδείξετε ότι για κάθε $x\in[-1,1]$, ισχύει: $-e\leq (x^2-3x+1)e^x\leq \frac{5}{e}$.

327. Να λυθεί η ανίσωση $e^{x^2+x+1}-e^{x+1}+x^2>0$.

328. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $x^3-3x+1=0$ έχει δύο θετικές ρίζες και μία αρνητική.

329. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $x^4-4x+6=0$ δεν έχει πραγματικές ρίζες.

330. Δίνεται συνάρτηση f, ορισμένη στο $\mathbb{R}$, με συνεχή πρώτη παράγωγο, για την οποία ισχύουν οι σχέσεις: $f(x)=-f(2-x)$ και $f'(x)\neq 0$, για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

I. Να αποδείξετε ότι η f είναι γνησίως μονότονη.

II. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f(x)=0$ έχει μοναδική ρίζα.

III. Να αποδείξετε ότι η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της συνάρτησης $g(x)=\dfrac{f(x)}{f'(x)}$, στο σημείο που τέμνει τον άξονα $x'x$, σχηματίζει με αυτόν, γωνία 45°.

331. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $2^x+3^x=5^x$ έχει μοναδική λύση στο $\mathbb{R}$.

332. Να λύσετε την εξίσωση $3^x+4^x=2^x+5^x$.

333. Δίνεται συνάρτηση f, δύο φορές παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με $f(x)>0$ και $f''(x)f(x)-(f'(x))^2>0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$. Να αποδείξετε ότι:

I. Η συνάρτηση $\dfrac{f'}{f}$ είναι γνησίως αύξουσα.

II. Για κάθε $x_1,x_2\in\mathbb{R}$ ισχύει: $f\left(\dfrac{x_1+x_2}{2}\right)\leq\sqrt{f(x_1)f(x_2)}$.

334. Δίνεται συνάρτηση f δύο φορές παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ και α,β θέσεις τοπικών ακρότατων της f με $\alpha<\beta$. Να αποδείξετε ότι υπάρχει $\xi\in(\alpha,\beta)$ τέτοιο, ώστε $\kappa f''(\xi)+\lambda f'(\xi)=0$, $\kappa,\lambda\in\mathbb{R}^*$.

335. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=e^x-\alpha x$, $\alpha>0$.

α) Να βρείτε την ελάχιστη τιμή της f.

b) Να προσδιοριστεί η μεγαλύτερη τιμή του α για την οποία $e^x\geq\alpha x$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

336. Να βρείτε την μικρότερη τιμή του λ για την οποία $x^4-4x^3+\lambda\geq 0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

337. Μια συνάρτηση f είναι ορισμένη και παραγωγίσιμη στο $(0,+\infty)$ με $f(x)>0$ για κάθε $x>0$. Η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της f σε οποιοδήποτε σημείο της $M(x_0,f(x_0))$ τέμνει τους θετικούς ημιάξονες Ox και Oy στα σημεία A και B αντίστοιχα. Αν M μέσο του AB, να βρείτε την f.

338. Εστω συνάρτηση f συνεχής στο $[\alpha,\beta]$ με $f(\alpha)\neq f(\beta)$. Έστω η συνάρτηση $g(x)=f(\alpha+\beta-x)$.

α) Να αποδείξετε ότι οι γραφικές παραστάσεις των f,g έχουν ένα τουλάχιστον κοινό σημείο με τετμημένη $x_0\in(\alpha,\beta)$.

β) Αν η f είναι παραγωγίσιμη στο (α,β) με $f'(x)>0$ για κάθε $x\in(\alpha,\beta)$, να αποδείξετε ότι το x_0 είναι μοναδικό και να το βρείτε.

Κυρτότητα - Σημεία Καμπής

339. Εστω η συνάρτηση $f(x)=-2x^3+6\lambda x^2-9\lambda x+10\lambda^2-4\lambda^3$. Να αποδείξετε ότι η C_f έχει για κάθε $\lambda\in\mathbb{R}$, ακριβώς ένα σημείο καμπής που βρίσκεται στη παραβολή $y=x^2$.

340. Εστω η συνάρτηση $f(x)=2x^4+4x^3+2\alpha x+\beta,\ \alpha,\beta\in\mathbb{R}$ με $f(x)\geq f(1)$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$. Να αποδείξετε ότι τα σημεία καμπής της C_f και το σημείο της με τετμημένη $x_0=1$ σχηματίζουν τρίγωνο με εμβαδόν 2 τ.μ.

341. Εστω η παραγωγίσιμη συνάρτηση f στο $[\alpha,\beta]$ με $f(\alpha)=f(\beta)=0$. Αν η f είναι κοίλη στο $[\alpha,\beta]$, να δείξετε ότι $f(x)>0$ για κάθε $x\in(\alpha,\beta)$.

342. Εστω συνάρτηση f τρείς φορές παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με $f^{(3)}(x)>0$ και $f''(0)=0$. Να δείξετε ότι η f στρέφει τα κοίλα κάτω στο $(-\infty,0]$ και τα κοίλα άνω στο $[0,+\infty)$.

343. Εστω συνάρτηση f δύο φορές παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ όπου η f' είναι κυρτή στο $\mathbb{R}$. Αν η f δεν έχει σημείο καμπής, να δείξετε ότι η f' είναι 1−1.

344. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\ln\dfrac{\alpha^x+\beta^x}{2},\ \alpha,\beta>0$ με $\alpha\neq\beta$.

α) Να αποδείξετε ότι η f είναι κυρτή.

β) Αν $f(x)\geq x$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$, να αποδείξετε ότι $\alpha\beta=e^2$.

345. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=e^{3x}+e^{2x}-2012x,\ x\in\mathbb{R}$.

- **I.** Να βρείτε την εφαπτομένη της C_f στο σημείο $A(0,f(0))$.
- **II.** Να δείξετε ότι $e^{3x}+e^{2x}\geq 5x+2$.
- **III.** Να δείξετε ότι κάθε εφαπτομένη της C_f δεν έχει άλλο κοινό σημείο με την C_f εκτός από το σημείο επαφής.

346. Να αποδείξετε ότι η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της συνάρτησης $f(x)=2e\ln x+\dfrac{1}{x}$ στο σημείο, $M\left(\dfrac{1}{e},-e\right)$ διαπερνά την C_f

347. Δίνεται η δύο φορές παραγωγίσιμη και κυρτή στο $\mathbb{R}$ συνάρτηση f. Να δείξετε ότι $2f\left(\dfrac{\alpha+\beta}{2}\right)\leq f(\alpha)+f(\beta)$ για κάθε $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$.

348. Δίνεται συνάρτηση f παραγωγίσιμη και κυρτή στο $\mathbb{R}$. Να αποδείξετε ότι:
$f'(x)<f(x+1)-f(x)<f'(x+1),\ x\in\mathbb{R}$.

349. Δίνεται συνάρτηση f, δύο φορές παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$, η οποία παρουσιάζει ακρότατο στο $x_0\in\mathbb{R}$ το 0 και ικανοποιεί τη σχέση $f''(x)>4(f'(x)-f(x))$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

- **I.** Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $g(x)=e^{-2x}f(x)$ είναι κυρτή στο $\mathbb{R}$.
- **II.** Να αποδείξετε ότι $f(x)\geq 0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

De L' Hospital

350. Να υπολογίσετε τα όρια:

α) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(3x^2-2\ln x\right)$ β) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[x\left(e^{\frac{1}{x}}-1\right)\right]$ γ) $\lim\limits_{x\to0^+}x^x$ δ) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{x+1}{x-1}\right)^{x^2}$ ε) $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(xe^x\right)$

στ) $\lim\limits_{x\to0}\frac{e^{x^2}-\sigma\upsilon\nu x}{x^2}$ ζ) $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x^2}{\ln^2 x}$ η) $\lim\limits_{x\to0}\frac{x^2\eta\mu x}{\ln(x+1)}$ θ) $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{e^{kx}}{x^\lambda}$, $k,\lambda>0$ ι) $\lim\limits_{x\to0^+}\frac{e^{\frac{1}{x}}}{\ln x}$

351. Να βρείτε τις τιμές των $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$, για τις οποίες ισχύει: $\lim\limits_{x\to0}\left(\frac{e^{x^2}-\alpha x\eta\mu x-\beta\sigma\upsilon\nu x}{x^2}\right)=\frac{1}{2}$.

352. Δίνεται συνάρτηση f, με συνεχή δεύτερη παράγωγο στο $\mathbb{R}$. Να αποδείξετε ότι

$$\lim_{h\to0}\frac{f(x-2h)+f(x+2h)-2f(x)}{4h^2}=f''(x).$$

Ασύμπτωτες

353. Εστω η συνάρτηση $f(x)=\begin{cases} xe^{\frac{1}{x}}, & x\neq0 \\ 0, & x=0 \end{cases}$.

α) Να εξετάσετε αν είναι συνεχής.
β) Να βρείτε τις ασύμπτωτες της γραφικής παράστασης της f.

354. Δίνονται οι συναρτήσεις g,h, ορισμένες στο $(0,+\infty)$ και για τις οποίες ισχύει $\left|g(x)h(x)+x^2\right|\le x\ln x$ για κάθε $x>1$. Αν οι γραφικές παραστάσεις των g,h δέχονται πλάγιες ασύμπτωτες στο $+\infty$ τις ευθείες $\varepsilon_1,\varepsilon_2$ αντίστοιχα, να δείξετε ότι $\varepsilon_1\perp\varepsilon_2$.

355. Δίνεται συνάρτηση f, ορισμένη στο $\mathbb{R}$, της οποίας η γραφική παράσταση έχει στο $+\infty$ ασύμπτωτη την ευθεία $y=2x+5$.

I. Να βρείτε τα όρια $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}$, $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(f(x)-2x\right)$.

II. Να βρείτε το $\lambda\in\mathbb{R}$, αν ισχύει: $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\lambda f(x)+4x}{xf(x)-2x^2+3x}=1$.

356. Δίνεται η συνάρτηση $g(x)=\frac{(\alpha-2)x^2+\beta x+3}{2x+\gamma}$. Να βρείτε τα $\alpha,\beta,\gamma\in\mathbb{R}$, ώστε οι ευθείες $x=3$ και $y=2$ να είναι ασύμπτωτες της C_g.

357. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\frac{\alpha x^2-\beta x+2}{x-3}$. Να βρείτε τα $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$, ώστε η ευθεία $\varepsilon: y=2x-1$ να είναι ασύμπτωτη της C_f.

358. Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x)=\frac{x^2-x+1}{x-1}$ και $g(x)=x^3+3\alpha x^2+\beta x$, $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$.

α) Να βρείτε τις ασύμπτωτες της γραφικής παράστασης της f.

β) Να βρείτε τα α,β, ώστε η g να έχει τοπικό μέγιστο στη κατακόρυφη ασύμπτωτη της C_f και η C_g να έχει σημείο καμπής στη πλάγια ασύμπτωτη της C_f.

359. Δίνονται οι παραγωγίσιμες στο $\mathbb{R}$ συναρτήσεις f,g για τις οποίες ισχύει: $e^x f'(x) = g'(x) - g(x)$ και $f(0) = g(0) = 0$.

α) Να αποδείξετε ότι $f(x) = \dfrac{g(x)}{e^x}$.

β) Αν η f έχει πλάγια ασύμπτωτη στο $+\infty$ την ευθεία $y = x - 2$, να αποδείξετε ότι

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{g(x)}{xg(x) - x^2e^x} = -\frac{1}{2}.$$

360. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \sqrt{x^2 - 2x}$ της οποίας οι πλάγιες ασύμπτωτες είναι διάμεσοι του τριγώνου ΑΒΓ με $B(2,1)$ και $\Gamma(-2,3)$.

α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της f.

β) Να αποδείξετε ότι η f δεν είναι παραγωγίσιμη στα σημεία με $x = 0$ και $x = 2$.

γ) Να βρείτε τις συντεταγμένες του της κορυφής Α.

361. Δίνεται συνάρτηση f παραγωγίσιμη στο $(0, +\infty)$. Αν η ευθεία $y = \lambda x + \beta$, $\lambda \neq 0$ είναι ασύμπτωτη της C_f στο $+\infty$, να αποδειχθεί ότι:

Α) $\lim\limits_{x\to+\infty} f'(x) = \lambda$ Β) $\lim\limits_{x\to+\infty} \left[f(x) - xf'(x)\right] = \beta$

362. Αν η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$, με $f(x) \neq 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ και υπάρχει στο $\mathbb{R}$ το $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$, τότε να δείξετε ότι $\lim\limits_{x\to+\infty} f'(x) = 0$.

Ολοκληρώματα

363. Να υπολογίσετε τα παρακάτω ολοκληρώματα:

$I_1 = \int_{-1}^{1} (4x^3 - 2x + 1)dx$, $I_2 = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \left(\dfrac{1}{\sigma\upsilon\nu^2 x} - \eta\mu x\right)dx$, $I_3 = \int_0^1 x\sqrt{x}dx$,

$I_4 = \int_{-2}^{2} \dfrac{x^5 - 2x^3 + 3x - 1}{x^3}dx$, $I_5 = \int_0^1 \left(\sqrt{x} - \dfrac{1}{\sqrt{x}}\right)dx$, $I_6 = \int_0^1 \sqrt{x\sqrt{x^3}}\,dx$

364. Να υπολογίσετε τα παρακάτω ολοκληρώματα:

$I_1 = \int_0^1 \dfrac{x - 2}{e^x}dx$, $I_2 = \int_1^2 \dfrac{\ln x}{x^2}dx$, $I_3 = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \dfrac{x}{\sigma\upsilon\nu^2 x}dx$,

$I_4 = \int_0^1 e^x \eta\mu x dx$, $I_5 = \int_1^e \ln^2 x dx$, $I_6 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (x - 1)\eta\mu 2x dx$

365. Να υπολογίσετε τα παρακάτω ολοκληρώματα:

$$I_1=\int_0^3 \frac{x}{\sqrt{x^2+16}}dx,\quad I_2=\int_1^4 \frac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}dx,\quad I_3=\int_0^{\frac{\pi}{2}}(1-\eta\mu x)^4\,\sigma\upsilon\nu x dx,\quad I_4=\int_0^1 \frac{e^x}{\sqrt{e^x+1}}dx,$$

$$I_5=\int_0^1 \frac{e^{2x}}{1+e^x}dx,\quad I_6=\int_1^2 \frac{6x^5}{(x^6+1)\ln(x^6+1)}dx$$

366. Να υπολογίσετε τα παρακάτω ολοκληρώματα:

$$I_1=\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{x\sigma\upsilon\nu x-\eta\mu x}{x^2}dx,\quad I_2=\int_0^{\pi} 4\eta\mu^2 x dx,\quad I_3=\int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{1}{1+\eta\mu x}dx,$$

$$I_4=\int_0^1 \frac{6x+7}{3x+2}dx,\quad I_5=\int_0^1 \frac{2x^2+x+1}{x+3}dx,\quad I_6=\int_1^2 \frac{x+2}{x^2+x}dx\quad I_7=\int_1^4 e^{\sqrt{x}}dx$$

367. Εστω $f(x)=e^{x}+2x-5$, $x\in\mathbb{R}$.

α) Να δείξετε ότι η f αντιστρέφεται

β) Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα : $I=\int_{-4}^{e-3} f^{-1}(x)dx$.

368. Δίνεται συνάρτηση f γνησίως αύξουσα στο [1,10] της οποίας η γραφική παράσταση διέρχεται από τα σημεία Α(1,8) και Β(10,13). Να δείξετε ότι : $\int_1^{10} f(x)dx+\int_8^{13} f^{-1}(x)dx=122$

369. Δίνονται οι συνεχείς συναρτήσεις $f,g:[0,2]\to\mathbb{R}$ για τις οποίες ισχύει:
$f(x)+f(2-x)=g(x)+g(2-x)$ για κάθε $x\in[0,2]$. Να αποδείξετε ότι:
$\int_0^2 f(x)dx=\int_0^2 g(x)dx$

370. Δίνεται συνάρτηση f συνεχής στο [α, β] για την οποία ισχύει : $f(x)+f(\alpha+\beta-x)=c,\ c\in\mathbb{R}$.

Να δείξετε ότι : $\int_\alpha^\beta f(x)dx=\left[f(\alpha)+f(\beta)\right]\cdot\frac{\beta-\alpha}{2}=f\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\cdot(\beta-\alpha)$.

371. Εστω συνάρτηση f συνεχής στο $[-\alpha,\alpha]$, $\alpha>0$.

α) Να αποδείξετε ότι $\int_{-\alpha}^{\alpha} f(x)dx=\int_{-\alpha}^{\alpha}\left[f(x)+f(-x)\right]dx$

β) Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα $I=\int_{-1}^{1}\frac{x^3+x^2+\eta\mu x}{x^2+1}dx$

372. Να αποδείξετε ότι $I=\int_0^{\alpha}\frac{f(x)}{f(x)+f(\alpha-x)}dx=\frac{\alpha}{2},\ \alpha>0$.

373. Να αποδείξετε ότι $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sigma\upsilon\nu x}{e^x+1}=1$

374. Εστω συνάρτηση f συνεχής στο $[0,1]$ με τιμές στο διάστημα $[\alpha,\beta]$ για την οποία ισχύει ότι

$\int_0^1 f(x)dx = 0$. Να αποδείξετε ότι $\int_0^1 f^2(x)dx \le -\alpha\beta$.

375.Εστω συνάρτηση f παραγωγίσιμη στο $[-1,1]$ με γνησίως αύξουσα παράγωγο. Να αποδείξετε ότι

$\frac{1}{2}\int_{-1}^{1} f(x)dx \le f(-1) + f'(1)$.

376.Δίνεται συνεχής συνάρτηση $f:\mathbb{R} \to (0,+\infty)$, για την οποία ισχύει:

$\int_0^1 f(x)\left(\int_0^1 f(x)dx\right)dx = 2\int_0^1 f(x)dx + 3$. Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα $I = \int_0^1 f(x)dx$.

377.Να βρείτε συνεχή συνάρτηση $f:\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, για την οποία ισχύει :

$\int_0^1 e^{1-x} \cdot f(x)dx = f(x) + e^x,\ x \in \mathbb{R}$.

378.α) Δείξτε ότι $x^2\ln x > x - 3$ για κάθε x>1. β) Δείξτε ότι $\int_2^{10} \left(x^2 \cdot \ln x + 3\right)dx > 48$.

379.Εστω η συνάρτηση f(x)=$\frac{\ln x}{x}$ ορισμένη στο (0, +∞). Να δείξετε ότι:

α. f(x)≤1/e β. $\int_e^5 x^e dx \le \int_e^5 e^x dx$

380.Να αποδείξετε ότι: $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \eta\mu^{2007} x dx \le \frac{\pi}{2}$.

381.Να αποδείξετε ότι $\frac{4}{e} \le \int_{-1}^{1} (x^2 + 1) \cdot e^x dx \le 4e$.

382.Εστω f συνάρτηση ορισμένη στο $\Re$, δύο φορές παραγωγίσιμη με $f''(x) > 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.
Εστω α, β $\in \mathbb{R}$ με α < β. Να δειχθεί ότι:

i. $f(x) - f(\alpha) \le f'(\beta)(x-\alpha)$ για κάθε $x \in [\alpha,\beta]$ ii. $2\int_\alpha^\beta f(x)dx \le f'(\beta)(\beta-\alpha)^2 + 2f(\alpha)(\beta-\alpha)$.

383.Να βρείτε τα πεδία ορισμού των συναρτήσεων:

α) $F_1(x) = \int_3^x (\ln t + 2t)dt$ β) $F_2(x) = \int_{-3}^x \sqrt{t^2 - 4}dt$

γ) $F_3(x) = \int_2^{-x^2+4x} \frac{\sigma\upsilon\nu t}{t}dt$ δ) $F_4(x) = \int_{x-3}^{2-x} \frac{\ln(t-2)}{\sqrt{4-t}}dt$

384.Να βρείτε τις παραγώγους των συναρτήσεων:

α) $F(x) = \int_0^{x^2} \sigma\upsilon\nu x(t-2)dt$ β) $F(x) = \int_0^x \sigma\upsilon\nu(x-t)dt$ γ) $F(x) = \int_0^{\sqrt{x}} e^{xt}dt$, $x > 0$

385.Εστω συνάρτηση g συνεχής στο $\mathbb{R}$ με $g(x) = 3 + g(3x)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Αν $f(x) = \int_3^5 g(x-2t)dt$,

να βρείτε το $f'(12)$.

386.Να βρείτε συνάρτηση f, παραγωγίσιμη στο $[0,+\infty)$, για την οποία ισχύει:

$x+\int_0^x f(t)dt=(x+1)f(x)$, για κάθε $x\geq 0$.

387.Να βρείτε συνάρτηση f συνεχή στο $\mathbb{R}$, για την οποία ισχύει: $f(x)=\int_0^x 2ue^{u^2+4-f(u)}du$, $x\in\mathbb{R}$.

388.Να βρείτε συνεχή συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, για την οποία ισχύει:

$\int_\alpha^x e^{-t}f(t)dt=e^{-x}-e^{-\alpha}-e^{-x}f(x)$ για κάθε $\alpha,x\in\mathbb{R}$.

389.Να βρείτε συνεχή συνάρτηση $f:(0,+\infty)\to(0,+\infty)$, για την οποία ισχύει: $\int_1^x xf(t)dt=f(x)-x$ για κάθε $x>0$.

390.Να βρείτε την παραγωγίσιμη συνάρτηση f, για την οποία ισχύει: $f(x)=2x^2-\int_1^x \frac{xf(t)}{t^2}dt$ για κάθε $x\in(0,+\infty)$.

391.Να βρείτε συνεχή συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, για την οποία ισχύει: $f(x)=(e^x+1)\left(2e^{-x}+\int_0^x \frac{f(t)}{e^t+1}dt\right)$, $x\in\mathbb{R}$.

392.Να βρείτε συνάρτηση f, συνεχή στο $(0,+\infty)$, για την οποία ισχύει: $f(x)=\ln x-\int_{\frac{1}{x}}^1 \frac{f(xt)}{t}dt$, $x>0$.

393.Εστω συνάρτηση $f:\mathbb{R}^*\to\mathbb{R}$ παραγωγίσιμη και περιττή με $f(1)=1$ και $f(x)=\int_0^1 tf(xt)dt$, $x\neq 0$.

Να αποδείξετε ότι $f(x)=\frac{1}{x}$.

394.Να βρείτε παραγωγίσιμη συνάρτηση $f:[0,+\infty)\to(0,+\infty)$, για την οποία ισχύει:

$f(x)=2+3\int_0^1 x^3t^2f(xt)dt$ για κάθε $x\geq 0$.

395.Δίνονται οι συνεχείς συναρτήσεις $f,g:[0,+\infty)\to\mathbb{R}^*$ για τις οποίες ισχύει ότι $1+\int_0^x f(t)dt=\frac{1}{g(x)}$ και $1+2\int_0^x g(t)dt=\frac{2}{f(x)}$.

α) Να αποδείξετε ότι: $f(x)=2g(x)$, $x\geq 0$.

β) Να βρείτε τις συναρτήσεις f,g.

396. Να βρείτε συνάρτηση f συνεχή στο $(-\infty,0)$ με τιμές στο $(0,+\infty)$ για την οποία ισχύει ότι:

$\eta\mu\left(\int_0^x f(t)dt\right)=e^x$, $x<0$

397. Θεωρούμε τις συναρτήσεις f,g για τις οποίες ισχύει: $g(x)=\int_{x}^{x+2\pi}\sigma\upsilon\nu t\,dt+\alpha$ και $\int_{0}^{x^2}f(t)dt=x^4-x^2$, όπου f συνεχής στο $\mathbb{R}$.

α) Να δείξετε ότι η g είναι σταθερή και να βρείτε το $\alpha\in\mathbb{R}$ αν η C_g διέρχεται από το $A(0,2)$.

β) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f(x)=g(x)$ έχει τουλάχιστον μία ρίζα στο $(1,4)$.

398. Θεωρούμε τις συναρτήσεις f,g με $f(t)=\int_{1}^{t}u\ln u\,du,\ u\in(0,+\infty)$ και $g(x)=\int_{1}^{x}f(t)dt$.

α) Να αποδείξετε ότι η C_g δέχεται οριζόντια εφαπτομένη στο $x_0=1$.

β) Να αποδείξετε ότι το $A(1,0)$ είναι σημείο καμπής της C_g.

γ) Να βρείτε το όριο $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{g''(x)+x^2}{2x^2}$.

399. α) Να αποδείξετε ότι $\int_{0}^{1}\dfrac{1}{1+x^2}dx=\dfrac{\pi}{4}$

β) Έστω συνάρτηση f συνεχής στο $[0,1]$ με $\int_{0}^{1}f(x)dx=\dfrac{\pi}{4}$. Να αποδείξετε ότι υπάρχει $x_0\in(0,1)$ τέτοιο, ώστε $f(x_0)=\dfrac{1}{1+x_0^2}$.

400. Δίνεται συνάρτηση f, συνεχής στο $[0,5]$ με $f(x)>3$ για κάθε $x\in(0,5)$. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $2x+5=\int_{0}^{x}f(t)dt$ έχει ακριβώς μία ρίζα στο $(0,5)$.

401. Δίνεται συνάρτηση f συνεχής στο $[\alpha,\beta]$. Να αποδείξετε ότι υπάρχει $\xi\in[\alpha,\beta]$ τέτοιο, ώστε $\int_{\alpha}^{\xi}f(x)dx=\int_{\xi}^{\beta}f(x)dx$

402. Δίνεται συνάρτηση f συνεχής στο $[0,2]$ με $3\int_{0}^{2}f(x)dx=8$. Να αποδείξετε ότι υπάρχει $\xi\in(0,2)$ τέτοιο, ώστε: $f(\xi)=\xi^2$.

403. Δίνονται οι συνεχείς στο $[\alpha,\beta]$ συναρτήσεις g,h. Να αποδείξετε ότι υπάρχει $\xi\in(\alpha,\beta)$ τέτοιο, ώστε: $g(\xi)\int_{\xi}^{\beta}h(u)du=h(\xi)\int_{\alpha}^{\xi}g(u)du$.

404. Δίνεται συνάρτηση f, συνεχής στο $\mathbb{R}$ με $f(x)\geq 2$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$. Θεωρούμε τη συνάρτηση $g(x)=x^2-5x+1-\int_{0}^{x^2-5x}f(t)dt$, $x\in\mathbb{R}$. Να αποδείξετε ότι:

- **I.** $g(-3)g(0)<0$.
- **II.** Η εξίσωση $g(x)=0$ έχει μοναδική ρίζα στο διάστημα $(-3,0)$.

405. Εστω συνάρτηση f συνεχής στο $[\alpha,\beta]$. Θεωρούμε τη συνάρτηση $\varphi(x)=(x-\alpha)\int_{\alpha}^{x}f(t)dt+(\beta-x)\int_{\beta}^{x}f(t)dt$. Να αποδείξετε ότι υπάρχει $\xi\in(\alpha,\beta)$ τέτοιο, ώστε στο σημείο $\left(\xi,\varphi(\xi)\right)$ η C_φ να δέχεται εφαπτομένη παράλληλη στον άξονα x΄x. Στη συνέχεια να αποδείξετε ότι $\int_\alpha^\xi f(x)dx=\int_\xi^\beta f(x)dx+(\alpha+\beta-2\xi)f(\xi)$.

406. Δίνεται συνάρτηση f συνεχής στο $[1,5]$. Να αποδείξετε ότι υπάρχει $\xi\in[1,5]$ τέτοιο, ώστε:
$\int_1^\xi f(t)dt=\int_1^3 f(t)dt+\frac{1}{2}\int_3^5 f(t)dt$.

407. Εστω η συνάρτηση $f(x)=\int_0^x \sqrt{x}\eta\mu t^2dt$.

α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της.
β) Να βρείτε την f'.
γ) Να υπολογίσετε το $\lim\limits_{x\to0^+} f'(x)$

408. Εστω συνάρτηση f συνεχής στο $\mathbb{R}^*$ με $\int_1^{\kappa^2}\frac{f(x)-\alpha}{f(x)}\delta x=8+\int_{\kappa^2}^1\frac{\alpha}{f(x)}dx$, $\alpha,\kappa\in\mathbb{R}$ για την οποία εφαρμόζεται το θεώρημα Rolle στο $[1,3]$.

α) Να υπολογίσετε το κ

β) Αν η συνάρτηση F είναι αρχική της f και $\int_1^3\left[F(3)-F(1)\right]dx=10$, να υπολογίσετε τις τιμές των παραμέτρων μ,ν για τις οποίες ισχύει ότι: $\int_1^3\left[\mu f(x)-2003f'(x)\right]dx=45$ και $\int_1^3\left[\nu f(x)+f'(x)\right]dx=2000$.

409. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\int_0^x e^{\eta\mu u-u^2}du$, $x\in\mathbb{R}$. Να αποδείξετε ότι:

α) $f(x)\le ex$ για κάθε $x\ge0$.
β) $f(x)>ex$ για κάθε $x<0$.

410. Εστω συνάρτηση f συνεχής στο $[\alpha,\beta]$, $\alpha>0$ τέτοια, ώστε $f'(x)>0$ για κάθε $x\in(\alpha,\beta)$. Να αποδείξετε ότι $f(\beta)\ln\frac{\beta}{\alpha}\le\int_\alpha^\beta\frac{f(x)}{x}dx\le f(\alpha)\ln\frac{\beta}{\alpha}$.

411. Δίνονται οι συναρτήσεις f,g με πεδίο ορισμού το $[\alpha,+\infty)$ και τιμές στο $(0,+\infty)$. Αν η f είναι συνεχής στο $[\alpha,+\infty)$ και η g παραγωγίσιμη με συνεχή και θετική παράγωγο στο $[\alpha,+\infty)$ και επιπλέον ισχύει ότι $f(x)\le g(x)$ για κάθε $x\in[\alpha,+\infty)$, να αποδείξετε ότι:

α) $\ln g(x)-\ln g(\alpha)\le\int_\alpha^x\frac{g'(t)}{f(t)}dt$, $x\ge\alpha$.

β) $f(x)\le g(\alpha)e^{\int_0^x\frac{g'(t)}{f(t)}dt}$, $x\ge\alpha$.

412. Να αποδείξετε ότι: α) $\int_1^x e^{t^2}dt \le \frac{1}{2}\left(e^{x^2}-e\right)$, $x\in\mathbb{R}$ β) $\int_0^{e^x} e^{t^3}dt \ge \int_0^{x+1} e^{t^3}dt$, $x\in\mathbb{R}$

413. Δίνεται παραγωγίσιμη συνάρτηση $f:[0,+\infty)\to\mathbb{R}$, της οποίας η γραφική παράσταση διέρχεται από την αρχή των αξόνων. Αν $0<f'(x)<2$ για κάθε $x>0$, να αποδείξετε ότι

$\int_0^x f^3(t)dt \le 2\left(\int_0^x f(t)dt\right)^2$ για κάθε $x\ge 0$.

414. Αν για τη συνεχή συνάρτηση f για κάθε $x>0$ ισχύει ότι: $\int_1^x f(t)dt+3x^2 \le 2\ln x + x^3+2$, να βρείτε την τιμή $f(1)$.

415. Δίνεται συνάρτηση f συνεχής στο $\mathbb{R}$, για την οποία ισχύει: $\int_0^x f(t)dt \ge \int_0^x (x-t)f(t)dt$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$. Να αποδείξετε ότι η C_f διέρχεται από την αρχή των αξόνων.

416. Εστω f, g συνεχείς στο $\Re$ με $\int_1^x f(t)dt - 2x^2 \le \int_1^x g(t)dt - 2$, $x\in\Re$. Δείξτε ότι η εξίσωση $x^3f(x)=xg(x)+2$ έχει τουλάχιστον μια ρίζα στο (0, 1).

417. Δίνεται συνάρτηση f, παραγωγίσιμη στο $[\alpha,\beta]$ με $\alpha<0<\beta$, για την οποία ισχύει:

$\int_\alpha^\beta f(t)dt \ge \int_\alpha^\beta f(x+t)dt$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$. Να αποδείξετε ότι:

I. $f(\alpha)=f(\beta)$.

II. Υπάρχει $\xi\in(\alpha,\beta)$ τέτοιο, ώστε $f'(\xi)=0$.

418. Να αποδείξετε ότι: $\frac{1}{10}<\int_1^3 \frac{1}{1+t^2}dt-\int_1^2\frac{1}{1+t^2}dt<\frac{1}{5}$.

419. Δίνεται συνάρτηση f παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με $f'(x)>0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $g(x)=e^{\int_0^x f(t)dt}-\ln x$ έχει το πολύ ένα κρίσιμο σημείο στο $(0,+\infty)$.

420. Δίνεται συνάρτηση f, συνεχής στο $[\alpha,\beta]$ με $f(x)>0$, για κάθε $x\in[\alpha,\beta]$. Να μελετήσετε ως προς τη μονοτονία τη συνάρτηση $h(x)=\dfrac{\int_\alpha^x tf(t)dt}{\int_\alpha^x f(t)dt}$, $x\in(\alpha,\beta]$.

421. Δίνεται συνάρτηση f, παραγωγίσιμη και κοίλη στο $\mathbb{R}$, της οποίας η γραφική παράσταση διέρχεται από την αρχή των αξόνων. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $g(x)=\int_\alpha^x \frac{f(t)}{t}dt$, $\alpha>0$ είναι κοίλη στο $(0,+\infty)$.

422. Να βρείτε τα όρια: α) $\lim\limits_{x\to1}\frac{1}{x-1}\int_2^{2x}\sqrt{t}e^t dt$ β) $\lim\limits_{x\to+\infty}\int_0^{\frac{1}{x}}\frac{e^{x+1}}{\ln(3+t^2)}dt$.

423.Να βρείτε το όριο: $\lim\limits_{x\to+\infty}\int_x^{x+1}\frac{e^t}{t^2+3}dt$.

424.Να βρείτε το όριο $\lim\limits_{x\to+\infty}\int_x^{2x}\frac{3t^2+2}{t^2+2}dt$.

425.Για τις διάφορες τιμές του πραγματικού αριθμού α, να υπολογίσετε το όριο $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{1}{x}-\frac{\alpha}{x^3}\int_0^x\frac{tdt}{t^2+1}\right)$

Εμβαδά

426.Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=x^{2007}+x-1,\ x\in\mathbb{R}$.

I. Να αποδείξετε ότι η f αντιστρέφεται.

II. Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τις γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων f και f^{-1} και τις ευθείες $x=-1$ και $x=1$.

427.Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=x^3-3x^2+3x,\ x\in\mathbb{R}$.

I. Να αποδείξετε ότι η f αντιστρέφεται.

II. Να βρείτε τα κοινά σημεία της C_f με τη διχοτόμο της πρώτης γωνίας των αξόνων.

III. Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τις γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων f και f^{-1}.

428.Δίνεται η συνάρτηση: $f(x)=\begin{cases} e^{x-1}, & x\le 1\\ \frac{1}{x^2}, & x>1\end{cases}$.

Να βρείτε το εμβαδό που καθορίζεται από τη C_f και τις ασύμπτωτες αυτής.

429.Να βρείτε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x)=e^{2x}-x+2$ και τις ευθείες ε_1: $y=x+3$ και ε_2: $x=1$.

430.Δίνεται συνάρτηση f παραγωγίσιμη και κοίλη στο $[0,2]$. Αν η f παρουσιάζει τοπικό ακρότατο στο $x_1=1$ το μηδέν και $f(0)+f(2)+3=0$, να υπολογιστεί το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της συνάρτησης f', τους άξονες $x'x$, $y'y$ και την ευθεία $x=2$.

431.Εστω συνάρτηση f παραγωγίσιμη στο $[\alpha,\beta]$με $f'(x)<0$. Να βρείτε σημείο $(x_0,f(x_0))$ της C_f για το οποίο το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από την C_f και τις ευθείες $y=f(x_0)$, $x=\alpha$και $x=\beta$,είναι ελάχιστο.

432.α) Να βρείτε μη μηδενική συνεχή συνάρτηση f για την οποία ισχύει ότι: $f^2(x)=2\int_1^x\frac{f(t)}{t}dt$ για κάθε $x>0$.

β) Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τις γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων f και f^2.

433.Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται καμπύλες $y=1+x^2$, $y=\eta\mu x$

τους άξονες x΄x, y΄y και την ευθεία $x=\frac{5\pi}{4}$.

434. Εστω η συνάρτηση $f(x)=\frac{2x^2+1}{x}$ και τα σημεία της M_1, M_2 με τετμημένες α,β αντίστοιχα, όπου $0<\alpha<\beta<\frac{1}{2}$. Να αποδείξετε ότι το εμβαδόν του μεικτόγραμμου τριγώνου OM_1M_2 είναι ίσο με $\ln\frac{\beta}{\alpha}$,

435. Εστω η παραβολή $y^2=4x$. Να βρείτε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τις εφαπτομένες της παραβολής στο σημείο $\left(\frac{1}{2},\sqrt{2}\right)$, το διάγραμμα της παραβολής με $y>0$, τον άξονα y΄y και την ευθεία $x=k$, όπου k η τετμημένη της εστίας της παραβολής.

436. α) Να αποδείξετε ότι $\int_1^x \frac{1}{1+y^2}dy+\int_1^{\frac{1}{x}} \frac{1}{1+y^2}dy=0$ για κάθε $x>0$.

β) Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\frac{1}{1+x^2}$. Να βρείτε ευθεία $x=\alpha$ η οποία χωρίζει το χωρίο που περικλείεται από την C_f, τον άξονα x΄x και τις ευθείς $x=\frac{1}{2}$ και $x=2$ σε δύο ισεμβαδικά χωρία.

437. Εστω συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ τέτοια, ώστε $\left[f'(x)-f(x)\right](x^2+1)=2xf(x)$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$, της οποίας η γραφική παράσταση έχει στο σημείο $A(0,f(0))$ εφαπτομένη κάθετη στην ευθεία $y=-x+3$.

α) Να αποδείξετε ότι $f(x)=(x^2+1)e^x$

β) Να αποδείξετε ότι η ευθεία $y=-x+3$ δεν μπορεί να έχει με την C_f δύο κοινά σημεία.

γ) Έστω η συνάρτηση $g(t)=\int_0^t f(x)dx,\ t\geq 0$. Να υπολογίσετε το $\lim\limits_{t\to+\infty}\frac{g'(t)}{e^{2t}}$.

δ) Να βρείτε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από την C_f, τον άξονα x΄x και τις ευθείς $x=0$ και $x=\alpha,\ \alpha>0$.

438. Εστω η συνεχής συνάρτηση f για την οποία ισχύει ότι: $\int_0^x (1+t)f(t)dt=x^2+6x,\ x\geq 0$.

α) Να αποδείξετε ότι $f(x)=\frac{2x+6}{x+1},\ x\geq 0$.

β) Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από την C_f, τον άξονα x΄x και τις ευθείς $x=0$ και $x=1$.

γ) Να βρείτε την ελάχιστη και την μέγιστη τιμή της f στο $[1,3]$.

δ) Να αποδείξετε ότι $9e<\int_1^3 e^t f(t)dt<32e$

439. Εστω η συνάρτηση $f(x)=\alpha+\dfrac{2\alpha^2 x}{(2x-\alpha)^2}$, $\alpha>0$.

α) Να βρείτε το σύνολο τιμών της f.

β) Στη περίπτωση που η F έχει ελάχιστο το $\dfrac{3}{4}$, να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από την C_f και τις ευθείες $y=1$, $x=-2$ και $x=0$.

Θέματα εξετάσεων

440. Εστω η συνεχής συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ με f(1)=1. Αν για κάθε $x\in\mathbb{R}$ ισχύει:

$g(x)=\int_1^{x^3}|z|f(t)dt-3\left|z+\dfrac{1}{z}\right|(x-1)\geq 0$, όπου z=α+βi $\in\mathbb{C}$, $\alpha,\beta\in\mathbb{R}^*$, τότε:

Α. Να αποδείξετε ότι η g είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ και να βρείτε την g΄.

Β. Να αποδείξετε ότι: $|z|=\left|z+\dfrac{1}{z}\right|$

Γ. Με δεδομένη τη σχέση του ερωτήματος Β να αποδείξετε ότι $\mathrm{Re}\left(z^2\right)=-\dfrac{1}{2}$.

Δ. Αν επιπλέον f(2)=α > 0 , f(3) =β και α >β , να αποδείξετε ότι υπάρχει $x_0\in(2,3)$ τέτοιο, ώστε $f(x_0)=0$. (2004)

441. Εστω οι μιγαδικοί αριθμοί z, που ικανοποιούν την ισότητα $(4-z)^{10}=z^{10}$ και η συνάρτηση f με τύπο $f(x)=x^2+x+\alpha$, $\alpha\in\mathbb{R}$.

Α. Να αποδείξετε ότι οι εικόνες των μιγαδικών z ανήκουν στην ευθεία x = 2.

Β. Αν η εφαπτομένη (ε) της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f στο σημείο τομής της με την ευθεία x = 2 τέμνει τον άξονα y΄y στο σημείο $y_0=-3$, τότε

i. να βρείτε το α και την εξίσωση της εφαπτομένης (ε)

ii. να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται μεταξύ της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f, της εφαπτομένης (ε), του άξονα x΄x και της ευθείας $x=\dfrac{3}{5}$. (2006)

442.Α. Εστω δύο συναρτήσεις h, g συνεχείς στο [α, β].

Να αποδείξετε ότι αν h(x) > g(x) για κάθε x ∈ [α, β], τότε και $\int_\alpha^\beta h(x)dx>\int_\alpha^\beta g(x)dx$.

Β. Δίνεται η παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ συνάρτηση f, που ικανοποιεί τις σχέσεις:

$f(x)-e^{-f(x)}=x-1$ $x\in\mathbb{R}$ και f(0) = 0 .

i. Να εκφραστεί η f΄ ως συνάρτηση της f.

ii. Να δείξετε ότι $\dfrac{x}{2}<f(x)<x f'(x)$ για κάθε $x>0$.

iii. Αν Ε είναι το εμβαδόν του χωρίου Ω που ορίζεται από τη γραφική παράσταση της f, τις ευθείες x = 0, x = 1 και τον άξονα x΄x, να δείξετε ότι $\frac{1}{4} < E < \frac{1}{2} f(1)$. (2002)

443. Εστω η συνάρτηση $f(x) = x^5 + x^3 + x$.

Α. Να μελετήσετε την f ως προς την μονοτονία και τα κοίλα και να αποδείξετε ότι η f έχει αντίστροφη συνάρτηση.

Β. Να αποδείξετε ότι $f(e^x) \geq f(1+x)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$

Γ. Να αποδείξετε ότι η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της f στο σημείο (0,0) είναι ο άξονας συμμετρίας των γραφικών παραστάσεων της f και της f^{-1}.

Δ. Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της f^{-1}, τον άξονα των x και την ευθεία με εξίσωση x=3. (2003)

444. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = 2x + \ln(x^2+1)$, $x \in \mathbb{R}$.

Γ.1. Να μελετήσετε ως προς τη μονοτονία τη συνάρτηση f.

Γ.2. Να λύσετε την εξίσωση $2(x^2 - 3x + 2) = \ln\left[\frac{(3x-2)^2+1}{x^4+1}\right]$.

Γ.3. Να αποδείξετε ότι η f έχει δύο σημεία καμπής και ότι οι εφαπτομένες της γραφικής παράστασης της f στα σημεία καμπής της τέμνονται σε σημείο του άξονα y΄y.

Γ.4. Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα $I = \int_{-1}^{1} x f(x)\,dx$. (2010)

445. Δίνεται η συνεχής συνάρτηση $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ η οποία για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ικανοποιεί της σχέσεις $f(x) \neq x$ και $f(x) - x = 3 + \int_0^x \frac{t}{f(t)-t}\,dt$.

Δ.1. Να αποδείξετε ότι η f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με παράγωγο $f'(x) = \frac{f(x)}{f(x)-x}$, $x \in \mathbb{R}$.

Δ.2. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $g(x) = f^2(x) - 2xf(x)$, $x \in \mathbb{R}$ είναι σταθερή.

Δ.3. Να αποδείξετε ότι $f(x) = x + \sqrt{x^2+9}$, $x \in \mathbb{R}$.

Δ.4. Να αποδείξετε ότι $\int_x^{x+1} f(t)\,dt < \int_{x+1}^{x+2} f(t)\,dt$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. (2010)

446. Δίνεται η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, δύο φορές παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ $\mathbb{R}$με $f'(0) = f(0) = 0$, η οποία ικανοποιεί τη σχέση: $e^x\,(f'(x) + f''(x) - 1) = f'(x) + xf''(x)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ $\mathbb{R}$

C1. Να αποδείξετε ότι: $f(x) = \ln\,(e^x - x)$, $x \in \mathbb{R}$

C2. Να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα.

C3. Να αποδείξετε ότι η γραφική παράσταση της f έχει ακριβώς δύο σημεία καμπής.

C4. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $\ln\left(e^x - x\right) = \sigma\upsilon\nu x$ έχει ακριβώς μία λύση στο διάστημα $\left(0, \dfrac{\pi}{2}\right)$

(2011)

447.Δίνονται οι συνεχείς συναρτήσεις $f,g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ οι οποίες για κάθε $x\in\mathbb{R}$ ικανοποιούν τις σχέσεις:

$f(x)>0$ και $g(x)>0$, $\dfrac{1-f(x)}{e^{2x}} = \displaystyle\int_0^{-x} \frac{e^{2t}}{g(x+t)}dt$ και $\dfrac{1-g(x)}{e^{2x}} = \displaystyle\int_0^{-x} \frac{e^{2t}}{f(x+t)}dt$

Δ1. Να αποδείξετε ότι οι συναρτήσεις f και g είναι παραγωγίσιμες στο $\mathbb{R}$ και ότι $f(x)=g(x)$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

D2. Να αποδείξετε ότι: $f(x)=e^x$, $x\in\mathbb{R}$.

D3. Να υπολογίσετε το όριο: $\displaystyle\lim_{x\to 0^-} \frac{\ln f(x)}{f\left(\frac{1}{x}\right)}$

D4. Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της συνάρτησης $F(x)=\displaystyle\int_1^x f\left(t^2\right)dt$ τους άξονες x΄x και y΄y και την ευθεία με εξίσωση x=1.

(2011)

448.Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=(x-1)\ell nx-1$, $x>0$

C1. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $\Delta_1=(0,1]$ και γνησίως αύξουσα στο διάστημα $\Delta_2=[1,+\infty)$. Στη συνέχεια να βρείτε το σύνολο τιμών της f.

C2. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $x^{x-1}=e^{2013}$, x>0 έχει ακριβώς δύο θετικές ρίζες.

C3. Αν x_1, x_1 με $x_1 < x_1$ είναι οι ρίζες της εξίσωσης του ερωτήματος Γ2, να αποδείξετε ότι υπάρχει $x_0\in\left(x_1, x_2\right)$ τέτοιο, ώστε $f'(x_0)+f(x_0)=2012$

C4. Να βρείτε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της συνάρτησης g(x) = f(x) + 1 με x>0, τον άξονα x΄x και την ευθεία x=e. (2012)

449.Εστω η συνεχής συνάρτηση $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$ η οποία για κάθε x>0 ικανοποιεί τις σχέσεις:

$f(x)\neq 0$, $\displaystyle\int_1^{x^2-x+1} f(t)dt \geq \frac{x-x^2}{e}$ και $\ell nx - x = -\left(\displaystyle\int_1^x \frac{\ell nt - t}{f(t)}dt + e\right)\cdot\left|f(t)\right|$

D1. Να αποδείξετε ότι η f είναι παραγωγίσιμη και να βρείτε τον τύπο της.
Αν είναι $f(x) = e^{-x}(\ell nx - x)$, $x>0$, τότε:

D2. Να υπολογίσετε το όριο: $\displaystyle\lim_{x\to 0^+}\left[\left(f(x)\right)^2 \eta\mu\frac{1}{f(x)} - f(x)\right]$

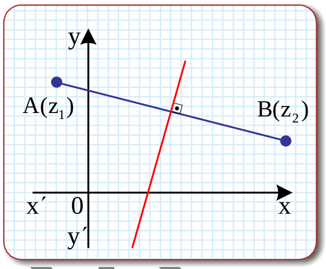
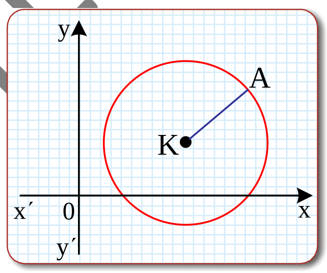
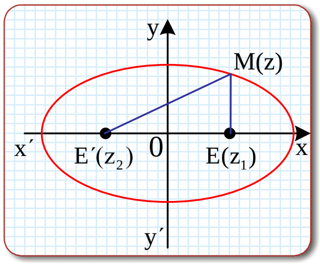
D3. Με τη βοήθεια της ανισότητας $\ln x \leq x-1$, που ισχύει για κάθε x>0, να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $F(x)=\displaystyle\int_\alpha^x f(t)dt$, x>0 όπου α>0, είναι κυρτή (μονάδες 2). Στη συνέχεια να αποδείξετε ότι: F(x) + F(3x) > 2F(2x), για κάθε x>0

D4. Δίνεται ο σταθερός πραγματικός αριθμός β>0. Να αποδείξετε ότι υπάρχει μοναδικό $\xi_0\in(\beta,2\beta)$ τέτοιο ώστε: F(β) + F(3β) = 2F(ξ) (2012)

ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ

Γεωμετρικοι Τοποι

Γεωμετρικός τόπος είναι ένα σύνολο σημείων με χαρακτηριστική ιδιότητα
Παραθέτουμε έναν πίνακα **βασικών γεωμετρικών τόπων (γ.τ.)**.

ΜΙΓΑΔΙΚΗ ΣΧΕΣΗ	ΓΕΩΜΕΤΡΙΚΗ ΣΧΕΣΗ	ΓΕΩΜΕΤΡΙΚΟΣ ΤΟΠΟΣ
$\mathbf{\lvert z-z_1\rvert=\lvert z-z_2\rvert}$ όπου z_1, z_2 γνωστοί μιγαδικοί αριθμοί.	Αν $A(z_1)$, $B(z_2)$ και $M(z)$ οι εικόνες των μιγαδικών z_1, z_2 και z αντίστοιχα, τότε $\lvert\overrightarrow{MA}\rvert=\lvert\overrightarrow{MB}\rvert$.	Η μεσοκάθετος ε του ευθύγραμμου τμήματος AB 
$\mathbf{\lvert z-z_0\rvert=\rho}$ όπου $z_0 \in \mathbb{C}$ (μιγαδικός) και ρ>0.	Αν $K(z_0)$ και $A(z)$ οι εικόνες των z_0, z αντίστοιχα, τότε $\lvert\overrightarrow{KA}\rvert=\rho$.	Κύκλος με κέντρο $K(z_0)$ και ακτίνα ρ. 
$\mathbf{\lvert z-z_1\rvert+\lvert z-z_2\rvert=2\alpha}$ όπου z_1, z_2 γνωστοί μιγαδικοί, α>0 και $\lvert z_1-z_2\rvert<2\alpha$.	Αν $M(z)$, $E(z_1)$, $E'(z_2)$ οι εικόνες των z, z_1, z_2 αντίστοιχα, τότε $\lvert\overrightarrow{ME}\rvert+\lvert\overrightarrow{ME'}\rvert=2\alpha$.	Έλλειψη με εστίες $E(z_1)$ και $E'(z_2)$. 
$\mathbf{\lvert\lvert z-z_1\rvert-\lvert z-z_2\rvert\rvert=2\alpha}$ όπου z_1, z_2 γνωστοί μιγαδικοί, α>0 και $\lvert z_1-z_2\rvert>2\alpha$.	Αν $M(z)$, $E(z_1)$, $E'(z_2)$ οι εικόνες των z, z_1, z_2 αντίστοιχα, τότε $\lvert\lvert\overrightarrow{ME}\rvert-\lvert\overrightarrow{ME'}\rvert\rvert=2\alpha$.	Υπερβολή με εστίες τα σημεία $E(z_1)$ και $E'(z_2)$.