ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΑ

1. Να αποδειχθεί ότι τα μέσα των πλευρών τετραπλεύρου είναι κορυφές παραλληλογράμμου.

2. Δίνεται ένα παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ και ένα οποιοδήποτε σημείο Ρ του χώρου. Να αποδειχτεί ότι: $\vec{PA}+\vec{P\Gamma}+\vec{\mathrm{BP}}+\vec{\Delta \mathrm{P}}=\vec{0}.$

3. Δίνεται ορθογώνιο ΑΒΓΔ. Αν Μ και Ν είναι τα μέσα των πλευρών ΓΔ και ΒΓ αντιστοίχως και $\vec{AB}=3\vec{a}$, και $\vec{\mathrm{A}\Delta}=4\vec{\beta}$, να βρεθούν τα διανύσματα $\vec{AM}$ και $\vec{MN}$.

4. Δίνεται παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ και έστω Μ το μέσον της ΑΔ. Να εκφράσετε τα διανύσματα $\vec{\mathrm{BM}}$ και $\vec{\mathrm{M}\Gamma}$, ως συνάρτηση των διανυσμάτων $\vec{AB}=\vec{a}$ και $\vec{\mathrm{B}\Gamma}=\vec{\beta}$.

5. Δίνεται παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ και τα σημεία Ε και Ζ της διαγωνίου ΑΓ, τέτοια ώστε να είναι ΑΕ=ΖΓ=$\frac{1}{4}$ΑΓ. Να εκφράσετε τα διανύσματα $\vec{\Delta \mathrm{E}}$ και $\vec{\Delta \mathrm{Z}}$, ως συνάρτηση των διανυσμάτων $\vec{AB}=\vec{a}$ και $\vec{\mathrm{B}\Gamma}=\vec{\beta}$. Να δείξετε ότι το ΕΒΖΔ είναι παραλληλόγραμμο.

6. Δίνεται παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ και έστω Ε, Ζ τα μέσα των πλευρών ΒΓ και ΓΔ αντιστοίχως. Να δείξετε ότι: $\vec{AE}+\vec{AZ}=\frac{3}{2}\vec{A\Gamma}$.

7. Δίνεται παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ. Αν Ε το μέσο της πλευράς ΑΔ και Ζ σημείο της ΑΓ, ώστε $\vec{\mathrm{AZ}}=\frac{1}{3}\vec{\mathrm{A}\Gamma}$, να αποδειχθεί ότι : $\vec{\mathrm{EZ}}=\frac{1}{2}\vec{\mathrm{ZB}}$.

8. Δίνεται παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ και τα σημεία Ε και Ζ τέτοια, ώστε $\overrightarrow{\mathrm{AE}}=\overrightarrow{\mathrm{BA}}$ και $\overrightarrow{\Gamma\mathrm{Z}}=\overrightarrow{\mathrm{B}\Gamma}$. Να αποδείξετε ότι τα σημεία Δ,Ε,Ζ είναι συνευθειακά.

9. Έστω Δ, Ε τα μέσα των πλευρών ΑΓ και ΑΒ αντίστοιχα, τριγώνου ΑΒΓ. Θεωρούμε τα σημεία Ζ, Η τέτοια, ώστε $\overrightarrow{\Delta\mathrm{Z}}=\overrightarrow{\mathrm{B}\Delta}$ και $\overrightarrow{\mathrm{EH}}=\overrightarrow{\Gamma\mathrm{E}}$. Να αποδείξετε ότι το Α είναι μέσο του ΖΗ.

10. Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ και τα σημεία Δ, Ε του επιπέδου του τέτοια ώστε : $\vec{\mathrm{A}\Delta}=5\vec{\mathrm{AB}}+8\vec{\mathrm{A}\Gamma}$ και $\vec{\mathrm{AE}}=3\vec{\mathrm{AB}}+10\vec{\mathrm{A}\Gamma}$. Να αποδειχθεί ότι : $\vec{\Delta\mathrm{E}}//\vec{\mathrm{B}\Gamma}$.

11. Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ και τα σημεία Δ, Ε και Ζ τέτοια ώστε: $\vec{\mathrm{A}\Delta}=\frac{1}{3}\vec{\mathrm{AB}},\ \vec{\Gamma\mathrm{E}}=\frac{1}{2}\vec{\mathrm{B}\Gamma}$ και $\vec{\mathrm{AZ}}=\frac{3}{5}\vec{\mathrm{A}\Gamma}$. **Α.** Αν $\vec{\mathrm{AB}}=\vec{\alpha}$ και $\vec{\mathrm{A}\Gamma}=\vec{\beta}$ να εκφράσετε τα $\vec{\Delta\mathrm{E}}$ και $\vec{\Delta\mathrm{Z}}$ συναρτήσει των $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$. **Β.** Να αποδείξετε ότι τα σημεία Δ, Ε, Ζ είναι συνευθειακά.

12. Δίνονται τα διανύσματα $\vec{OA} = \vec{a} + \vec{\beta} + \vec{\gamma}$, $\vec{OB} = 5\vec{a} + 3\vec{\beta} + 4\vec{\gamma}$ και $\vec{O\Gamma} = 13\vec{a} + 7\vec{\beta} + 10\vec{\gamma}$. Να δείξετε ότι τα σημεία Α, Β, Γ είναι συνευθειακά.

13. Να αποδείξετε ότι αν: $(\kappa+2)\vec{PA}+3\vec{PB}=(\kappa+5)\vec{P\Gamma}$, όπου $\kappa \in R$, τότε τα σημεία Α, Β, Γ είναι συνευθειακά.

14. Έστω ΑΔ η διάμεσος τριγώνου ΑΒΓ. Αν Ε, Ζ είναι τα μέσα των ΔΓ, ΑΒ αντίστοιχα και Θ το σημείο τομής των ΖΕ, ΑΔ, να αποδείξετε ότι $\vec{Z\Theta}=\vec{\Theta E}$ και $\vec{\Theta\Delta}=\frac{1}{4}\vec{A\Delta}$.

15. Δίνεται παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ και Ε το μέσο του ΑΒ. Αν Ζ είναι το σημείο τομής των ΔΕ και ΑΓ, να δείξετε ότι: $\vec{AZ}=\frac{1}{3}\vec{A\Gamma}$.

16. Δίνονται τα σημεία Α (3, -4) και Β (2, 1). Να βρεθεί:
    ι) Το συμμετρικό του Α ως προς κέντρο συμμετρίας το Β.
    ιι) Το συμμετρικό του Β ως προς κέντρο συμμετρίας το Α.

17. Δίνονται τα σημεία $A(2,-3)$, $B(-1,4)$ και $\Gamma(5,-10)$. Να δείξετε ότι είναι συνευθειακά.

18. Αν τα σημεία Δ (-1, 4), Ε (5, 4), Ζ (2, -1) είναι αντιστοίχως τα μέσα των πλευρών ΒΓ, ΓΑ και ΑΒ τριγώνου ΑΒΓ, να βρεθούν οι συντεταγμένες των κορυφών του.

19. Θεωρούμε τα διανύσματα: $\vec{a}_1$=(3, -2), $\vec{a}_2$=(2α-β, α+2β-4), $\vec{a}_3$=(α-3β+2, -3α+3β-2),

ι) Αν τα διανύσματα $\vec{\delta}=\vec{a}_1+\vec{a}_2+\vec{a}_3$ και $\vec{v}$=(-3, 4), είναι συγγραμμικά, να εκφραστούν οι συντεταγμένες του $\vec{\delta}$ ως συνάρτηση του α,

ιι) Για ποια τιμή των α, β το διάνυσμα $\vec{\delta}$ είναι το μηδενικό.

20. Δίνονται τα διανύσματα $\vec{a}$=(4λ^2+λ-2, 5λ^2-λ+1) και $\vec{\beta}$=(λ^2-λ-1, 3λ^2-2λ+2). Να βρείτε το λ ώστε: $\vec{a}=\vec{\beta}$. Υπάρχει τιμή του λ ώστε: $\vec{a}=-\vec{\beta}$;

21. Δίνονται τα διανύσματα $\vec{a}$=(2λ+1, -2), $\vec{\beta}$=(1, 2), $\vec{\gamma}$=(λ, μ), λ, μ∈R. Να βρεθούν τα λ και μ ώστε $\vec{a}+2\vec{\beta}-\vec{\gamma}=\vec{0}$.

22. Δίνονται τα διανύσματα $\vec{a}$=(-1,2) και $\vec{\beta}$=(3,-2). Να υπολογιστούν τα: $|-2\vec{a}|$ και $|3\vec{a}-2\vec{\beta}|$.

23. Αν $\vec{a}$=(λ, λ+1), να υπολογιστούν οι τιμές του λ ώστε: $|-3\vec{a}|$=15.

24. Αν Α (-2, 1), Β (3, -2) και $2\vec{AM}-3\vec{BM}=\vec{0}$, να υπολογιστούν οι συντεταγμένες του Μ.

25. Δίνονται τα σημεία Α (-2, -2), Β (3, 0), Γ (-1, 3). Να βρείτε τα μήκη των πλευρών και τα μήκη των διαμέσων του τριγώνου ΑΒΓ.

26. Δίνονται τα σημεία Α (-1, 2),και Β (-3, 0). Να βρείτε σημείο Γ του επιπέδου Oxy τέτοιο ώστε το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ισόπλευρο.

27. Δίνονται σημεία Α (-2, -5) και Β (3, -4). Να βρείτε σημείο Γ του άξονα x΄x τέτοιο ώστε το τρίγωνο ΑΒΓ να είναι ισοσκελές με βάση την πλευρά ΑΒ.

28. Να αποδειχτεί ότι το τρίγωνο ΑΒΓ με κορυφές Α (3, -2), Β (-2, 3) και Γ (0, 4), είναι ορθογώνιο και να υπολογιστούν τα μήκη των πλευρών του.

29. Σε ένα ορθοκανονικό σύστημα αναφοράς Oxy δίνονται τα σημεία Α (1, 1) και Β (4, 2). Να βρείτε ένα σημείο Μ του άξονα xx΄ τέτοιο ώστε το τρίγωνο ΑΜΒ να είναι ορθογώνιο στο Μ.

30. Δίνονται τα σημεία του επιπέδου Α (1, 2) και Β (4, 1). Να βρείτε σημείο Μ του άξονα x΄x τέτοιο ώστε:
ι) Το τρίγωνο ΜΑΒ να είναι:
α) ισοσκελές με κορυφή το σημείο Μ,
β) ορθογώνιο στο Μ,
γ) ορθογώνιο στο Μ και ισοσκελές,
ιι) το άθροισμα των τετραγώνων των αποστάσεων του σημείου Μ από τα Α και Β να γίνεται ελάχιστο.

31. Δίνονται τα σημεία $A(3,1)$, $B(\kappa-1,2\kappa-1)$ και $\Gamma(\kappa,\kappa+1)$. Να αποδείξετε ότι για κάθε $\kappa\in\mathbb{R}$ τα Α, Β, Γ αποτελούν κορυφές τριγώνου.

32. Δίνονται τα διανύσματα $\vec{\alpha}=(x-2y,-2)$ και $\vec{\beta}=(4y^2+2y-x+1,x+2y)$. Να βρείτε τα $x,y\in\mathbb{R}$ ώστε τα διανύσματα $\vec{\alpha},\vec{\beta}$ να είναι συγγραμμικά.

33. Δίνονται τα σημεία $A(3,3)$, $B(2,1)$ και $\Gamma(-5,3)$. Να βρείτε σημείο Ρ του επιπέδου, ώστε το άθροισμα των τετραγώνων των αποστάσεων του από τα Α, Β, Γ, να είναι ελάχιστο.

34. Να βρείτε σημείο Μ (x, y) του επιπέδου τέτοιο ώστε το άθροισμα των τετραγώνων των αποστάσεών του από τα σημεία Α (1, 5), Β (5, -2) και Γ (-3, -3) να είναι ελάχιστο.

35. Δίνεται παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ με διαγώνιες $\overrightarrow{A\Gamma}=(-9,12)$ και $\overrightarrow{B\Delta}=(-3,2)$. Να υπολογίσετε τα μέτρα των διανυσμάτων $\overrightarrow{AB}$ και $\overrightarrow{A\Delta}$.

36. Δίνονται τα σημεία $A(2,5), B(6,3)$ και $\Delta(0,2)$. Να βρείτε σημείο Γ, ώστε το τετράπλευρο ΑΒΓΔ να είναι ισοσκελές τραπέζιο με βάσεις ΑΒ και ΓΔ.

37. Να βρείτε: **ι)** Όλα τα διανύσματα του επιπέδου τα οποία είναι κάθετα στο διάνυσμα $\vec{a}$=(3, -4) και έχουν ίσο μέτρο με αυτό.
ιι) Όλα τα διανύσματα του επιπέδου τα οποία είναι κάθετα στο διάνυσμα $\vec{\beta}$=(-2, 1) και έχουν μέτρο ίσο $\sqrt{5}$.

ιιι) Το διάνυσμα $\vec{\delta}=(x,y)$ του επιπέδου το οποίο σχηματίζει γωνία 60^{o} με τον άξονα x΄x και έχει μέτρο ίσο με $10\sqrt{3}$.

38. Δίνονται τα διανύσματα $\vec{a}=x\vec{i}+y\vec{j}$, $\vec{\beta}=(x-1)\vec{i}+(y-2)\vec{j}$, $\vec{\gamma}=4x\vec{i}+(x-1)\vec{j}$, $\vec{\delta}=y\vec{i}+(2-y)\vec{j}$. Να βρεθούν τα x, y∈R ώστε $\vec{a}\,//\,\vec{\beta}$ και $\vec{\gamma}\perp\vec{\delta}$.

39. Να υπολογιστεί το εσωτερικό γινόμενο $\vec{a}\cdot\vec{\beta}$ δύο διανυσμάτων $\vec{a}$ και $\vec{\beta}$ αν: **ι)** $|\vec{a}|=5, |\vec{\beta}|=7, (\vec{a},\vec{\beta})=\frac{\pi}{6}$, **ιι)** $|\vec{a}|=\sqrt{5}, |\vec{\beta}|=\frac{2}{3}, (\vec{a},\vec{\beta})=\frac{5\pi}{6}$.

40. Να υπολογιστεί το εσωτερικό γινόμενο των διανυσμάτων $\vec{a}$ και $\vec{\beta}$, και η γεωμετρική τους γωνία στις παρακάτω περιπτώσεις: **ι)** $\vec{a}=(-5,3)$, $\vec{\beta}=(6,10)$,
ιι) $\vec{a}=(2,\sqrt{3})$, $\vec{\beta}=(-\frac{5}{2},\frac{\sqrt{3}}{2})$, **ιιι)** $\vec{a}=(0,2)$, $\vec{\beta}=(-\sqrt{3},1)$.

41. Έστω $\vec{a}$ και $\vec{\beta}$ δύο διανύσματα τέτοια ώστε: $|\vec{a}|=2, |\vec{\beta}|=5, (\vec{a},\vec{\beta})=\frac{2\pi}{3}$. Αν $\vec{\delta}=5\vec{\alpha}-4\vec{\beta}$, να υπολογιστεί το $|\vec{\delta}|$.

42. Έστω $\vec{a}$ και $\vec{\beta}$ δύο διανύσματα τέτοια ώστε: $|\vec{a}|=2, |\vec{\beta}|=3, (\vec{a},\vec{\beta})=\frac{2\pi}{3}$. Αν $\vec{\delta}=3\vec{\alpha}+2\vec{\beta}$, να υπολογιστούν οι γωνίες: $(\vec{\delta},\vec{\alpha})$ και $(\vec{\delta},\vec{\beta})$.

43. Έστω $\vec{\alpha},\vec{\beta}$ δύο διανύσματα του επιπέδου με $|\vec{\alpha}|$=2, $|\vec{\beta}|$=3 και $(\vec{\alpha},\vec{\beta})=\frac{2\pi}{3}$. Αν $\vec{\nu}=3\vec{\alpha}+2\vec{\beta}$, να υπολογίσετε: **α)** Το $|\vec{\nu}|$, **β)** Τις γωνίες $(\vec{\alpha},\vec{\nu})$ και $(\vec{\nu},\vec{\beta})$.

44. Δίνεται τρίγωνο ΟΑΒ στο οποίο είναι: $|\overrightarrow{OA}|=2, |\overrightarrow{OB}|=4$ και $(\widehat{\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB}})=\frac{\pi}{3}$. Αν Μ το μέσο της ΑΒ, να υπολογίσετε το συνημίτονο της γωνίας $(\widehat{\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OM}})$.

45. Σε ένα τρίγωνο ΑΒΓ είναι Α (1, 2), Β (-2, 1) και Γ (3, 6). Να αποδειχθεί ότι: $A=\frac{3\pi}{4}$.

46. Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ με Α (-2, 4), Β (3, 2) και Γ (1, -3). Να βρεθούν οι γωνίες του.

47. Αν για τα διανύσματα $\vec{a},\vec{\beta},\vec{\gamma}$ ισχύει: $\vec{a}+\vec{\beta}+\vec{\gamma}=\vec{0}$ και $\frac{|\vec{a}|}{2}=\frac{|\vec{\beta}|}{3}=\frac{|\vec{\gamma}|}{5}$, να δείξετε ότι: το $\vec{a}$ είναι ομόρροπο του $\vec{\beta}$, και ότι: το διάνυσμα $\vec{\beta}$ είναι αντίρροπο του $\vec{\gamma}$.

48. Έστω $\vec{a},\vec{\beta},\vec{\gamma}$, τρία μη μηδενικά διανύσματα του επιπέδου, με: $|\vec{a}|=|\vec{\beta}|=|\vec{\gamma}|=1$, και $\vec{a}.\vec{\beta}+\vec{\beta}.\vec{\gamma}=2$. Να αποδείξετε ότι: $\vec{a}=\vec{\beta}=\vec{\gamma}$.

49. Αν τα διανύσματα $\vec{\alpha}, \vec{\beta}, \vec{\gamma}$ είναι μοναδιαία και ισχύει: $\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}+\vec{\beta}\cdot\vec{\gamma}+2=0$, να αποδειχθεί ότι: $\vec{\alpha}=\vec{\gamma}=-\vec{\beta}$.

50. Δίνονται τα διανύσματα $\vec{\alpha},\vec{\beta},\vec{\gamma}$ με $|\vec{\alpha}|=3$, $|\vec{\beta}|=2$, $|\vec{\gamma}|=1$ και $\vec{\alpha}+\vec{\beta}+\vec{\gamma}=\vec{0}$. Να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης $\Pi=\vec{\alpha}\vec{\beta}+\vec{\beta}\vec{\gamma}+\vec{\gamma}\vec{\alpha}$.

51. Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ με $\vec{AB}$=(1, 3) και $\vec{A\Gamma}$=(3, 1). Να βρείτε το διάνυσμα $\vec{A\Delta}$ της εσωτερικής διχοτόμου της γωνίας Α του τριγώνου.

52. Να αναλυθεί το διάνυσμα $\vec{a}$=(5, 4) σε δύο συνιστώσες μία παράλληλη στο διάνυσμα $\vec{\beta}$=(2, 5) και μία κάθετη σ' αυτό.

53. Να αναλύσετε το διάνυσμα $\vec{\gamma}=(7,11)$ σε δύο συνιστώσες με διευθύνσεις εκείνες των $\vec{\alpha}=(-1,2)$ και $\vec{\beta}=(2,-3)$.

54. Να γράψετε το διάνυσμα $\vec{\gamma}=(11,-29)$ ως γραμμικό συνδυασμό των $\vec{\alpha}=(2,-3)$ και $\vec{\beta}=(-1,4)$.

55. Δίνονται τα διανύσματα $\vec{a}=(2x-1,x+1)$ και $\vec{\beta}=(x+1,2x+3)$.

ι) Να βρείτε τις τιμές του $x\in R$ για τις οποίες ισχύει:

α) $\vec{a}\perp\vec{\beta}$,

β) $\vec{a}\cdot\vec{\beta}=2$

ιι) Για την μεγαλύτερη από τις τιμές του x που βρήκατε στο προηγούμενο ερώτημα να αναλύσετε το διάνυσμα $\vec{\beta}$ σε δύο κάθετες συνιστώσες από τις οποίες η μία να είναι παράλληλη στο $\vec{a}$ και να βρείτε την προβολή του διανύσματος $\vec{a}$ στο $\vec{\beta}$.

56. Να υπολογιστεί η γωνία θ των διανυσμάτων $\vec{a}$=(1, 2-$\sqrt{3}$), $\vec{\beta}$=(1, 1).

57. Αν $|\vec{a}|=\sqrt{3}$, $|\vec{\beta}|=\rho$, $(\vec{a},\vec{\beta})=\frac{\pi}{3}$ και $(\vec{a}+\vec{\beta},\vec{\alpha}-\vec{\beta})=\frac{\pi}{4}$, να βρείτε τον θετικό πραγματικό αριθμό ρ.

58. Αν $\vec{a}$=((x-1)$\sqrt{3}$, 2x) και $\vec{\beta}$=(-$\sqrt{3}$, 1) να υπολογιστεί το x ώστε ($\vec{a}$, $\vec{\beta}$)=$\frac{\pi}{3}$.

59. Δίνονται οι γωνίες $(\vec{a},\vec{\beta})=60^0$, $(\vec{\beta},\vec{\gamma})=45^0$ και $(\vec{a},\vec{\gamma})=120^0$ και $|\vec{a}|=|\vec{\beta}|=|\vec{\gamma}|=1$. Να βρεθούν τα μέτρα των διανυσμάτων: $\vec{x}=\vec{a}-3\vec{\beta}$ και $\vec{y}=\vec{\beta}-2\vec{\alpha}-\vec{\gamma}$. Να εξετάσετε αν υπάρχει λ $\in R$, ώστε $|3\vec{a}-2\lambda\vec{\beta}|>|\lambda\vec{\gamma}-\vec{\beta}|$.

60. Αν $(\widehat{\vec{\alpha},\vec{\beta}}) = \frac{\pi}{3}, |\vec{\alpha}| = 3, (3\vec{\alpha} - \vec{\beta})(\vec{\alpha} - 3\vec{\beta}) = 15$ και $|\vec{\alpha}| < |\vec{\beta}|$, να βρείτε το $|\vec{\beta}|$.

61. Δίνονται τα διανύσματα $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$ για τα οποία ισχύουν οι σχέσεις: $(\widehat{\vec{\alpha},\vec{\beta}}) = \frac{2\pi}{3}$, $\vec{\alpha} + \vec{\beta} \perp \vec{\alpha} - \vec{\beta}$ και $|3\vec{\alpha} + 2\vec{\beta}| = 7$. Να υπολογιστούν τα $|\vec{\alpha}|, |\vec{\beta}|$.

62. Να βρείτε τα μέτρα των διανυσμάτων $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$ για τα οποία ισχύουν : $(\vec{\alpha},\vec{\beta}) = \frac{\pi}{3}$, $\left(\vec{\alpha}+\vec{\beta}\right) \perp \left(\vec{\alpha}-\vec{\beta}\right)$ και $|2\vec{\alpha} + \vec{\beta}| = 7$.

63. Για τα διανύσματα $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$, ισχύει ότι : $\vec{\alpha} \perp \vec{\beta}$, $(\vec{\alpha} + 2\vec{\beta}) \perp (\vec{\alpha} - 3\vec{\beta})$ και $|\vec{\alpha}| = \sqrt{6}$. Να αποδειχθεί ότι : $|2\vec{\alpha} - \vec{\beta}| = 5$.

64. Αν για τα διανύσματα $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$ ισχύουν οι σχέσεις: $|\vec{\alpha}| = \sqrt{2}, |\vec{\beta}| = 1$ και $3\vec{\alpha} - 5\vec{\beta} \perp 2\vec{\alpha} + \vec{\beta}$ να υπολογίσετε την γωνία $(\widehat{\vec{\alpha},\vec{\beta}})$.

65. Αν ισχύει $|\vec{\alpha}| = |\vec{\beta}| = |\vec{\alpha} + \vec{\beta}|$ τότε να δείξετε ότι $|\vec{\alpha} - \vec{\beta}| = |\vec{\alpha}| \cdot \sqrt{3}$.

66. Αν για τα μη μηδενικά διανύσματα $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$ ισχύουν: $|\vec{\alpha}| = 2|\vec{\beta}|$ και $|\vec{\alpha} + \vec{\beta}| = |\vec{\beta}|$, να αποδείξετε ότι $\vec{\alpha} \uparrow\downarrow \vec{\beta}$.

67. Έστω $\vec{\alpha}, \vec{\beta}, \vec{\gamma}$ τρία μη μηδενικά διανύσματα του επιπέδου. Αν $\vec{\alpha} \perp \left(\vec{\beta} - \vec{\gamma}\right)$ και $\vec{\beta} \perp \left(\vec{\gamma} - \vec{\alpha}\right)$, να αποδείξετε ότι $\vec{\gamma} \perp \left(\vec{\alpha} - \vec{\beta}\right)$.

68. Δίνεται ισόπλευρο τρίγωνο ΑΒΓ με πλευρά α=2. Αν ΑΔ είναι το ύψος του, να υπολογίσετε τα εσωτερικά γινόμενα: i. $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{A\Gamma}$, ii. $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{B\Gamma}$, iii. $\overrightarrow{A\Delta} \cdot \overrightarrow{A\Gamma}$.

69. Δίνεται τρίγωνο με κορυφές τα σημεία Α (1, 2), Β (-1, -2) και Γ (-3, 4). Να βρείτε τη γωνία που σχηματίζει η διάμεσος ΑΜ με την πλευρά ΑΓ.

70. Αν $\vec{a}$=(2, 3) και $\vec{\beta}$=(-1, 4), να βρείτε την προβολή του $\vec{a}$ πάνω στο $\vec{\beta}$.

71. Αν $|\vec{a}| = 1$, $|\vec{\beta}| = 2$ και $(\vec{a}, \vec{\beta}) = 60^0$, να βρείτε την προβολή του διανύσματος $\vec{v} = 2\vec{a} - \vec{\beta}$, πάνω στο διάνυσμα $\vec{a}$.

72. Αν τα διανύσματα $\vec{a}$ και $\vec{\beta}$ είναι μοναδιαία και κάθετα, να βρείτε την προβολή του διανύσματος $\vec{v} = \vec{a} - \vec{\beta}$, πάνω στο διάνυσμα $\vec{u} = \vec{a} + 2\vec{\beta}$.

73. Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ με $\mathrm{A}(1,-3)$, $\mathrm{B}(-3,0)$ και $\Gamma(4,4)$. Αν ΑΔ το ύψος του τριγώνου, να υπολογίσετε τις συντεταγμένες του διανύσματος $\overrightarrow{\mathrm{B}\Delta}$.

74. Αν είναι $\vec{a}=4\vec{i}+3\vec{j}$ και $\vec{\beta}=-8\vec{i}+6\vec{j}$,

ι) Να δείξετε ότι η γωνία των δύο διανυσμάτων είναι αμβλεία,

ιι) Να βρείτε το μήκος της προβολής του $\vec{\beta}$, πάνω στο $\vec{a}$.

75. Έστω τα διανύσματα $\vec{a}=(4, 3)$ και $\vec{\beta}=(-1, -3)$, να υπολογιστεί το $\left|\pi\rho o\beta_{\vec{a}}(2\vec{a}-\vec{\beta})\right|$.

76. Έστω τα διανύσματα $\vec{a}=(1, 3)$ και $\vec{\beta}=(-1, -4)$ και $\vec{v}=(\vec{a}\cdot\vec{\beta})\cdot\vec{\beta}-2\vec{a}$, να βρείτε την $\pi\rho o\beta_{\vec{a}}\vec{v}$.

77. Τα σημεία Α, Β, Γ, Δ έχουν, ως προς την αρχή Ο, των αξόνων διανύσματα θέσης (2, 5), (4, 10), (-6, -15) και (-16, λ-15), $\lambda\in R$, αντίστοιχα. Να δείξετε ότι τα Α, Β, Γ είναι συνευθειακά. Να βρείτε το λ ώστε $\vec{AB}\perp\vec{\Gamma\Delta}$.

78. Δίνονται τα διανύσματα $\vec{u}=(-2, 3)$ και $\vec{v}=(4, -3)$. Να βρεθεί το διάνυσμα $\vec{w}$ που είναι κάθετο στο $3\vec{u}-5\vec{v}$.

79. Δίνονται τα διανύσματα $\vec{u}=2\vec{i}-2\vec{j}$, $\vec{v}=-\frac{1}{4}\vec{i}+\frac{1}{4}\vec{j}$ και $\vec{w}=(4\sigma\upsilon\nu\varphi)\vec{i}+(4\eta\mu\varphi)\vec{j}$. Να βρείτε το $\varphi\in(0,\pi)$ ώστε $\vec{v}\perp\vec{w}$. Αν $(\widehat{\vec{u},\vec{w}})=\frac{3\pi}{4}$, να αποδείξετε ότι $\sigma\upsilon\nu\varphi=\eta\mu\varphi-1$. Αν ο λόγος του εσωτερικού γινομένου $\vec{v}\cdot\vec{w}$ προς το εσωτερικό γινόμενο $\vec{u}\cdot\vec{w}$ είναι $\frac{\sqrt{6}}{16}$, να υπολογίσετε τη γωνία $(\widehat{\vec{v},\vec{w}})$, όταν $(\widehat{\vec{u},\vec{w}})=\frac{3\pi}{4}$.

80. Δίνονται τα διανύσματα $\vec{a}=\sqrt{3}\vec{i}+\vec{j}$, $\vec{\beta}=(-3\sigma\upsilon\nu\theta)\vec{i}+(3\eta\mu\theta)\vec{j}$, $\vec{\gamma}=-\vec{i}+\vec{j}$.

Α. Για ποιες τιμές του $\theta\in(0, \pi)$ τα διανύσματα $\vec{a}$ και $\vec{\beta}$ είναι κάθετα.

Β. Αν τα $\vec{\beta}$ και $\vec{\gamma}$ σχηματίζουν γωνία $\frac{\pi}{4}$, να δείξετε ότι συνθ=1-ημθ.

81. Δίνονται τα διανύσματα του επιπέδου $\vec{a}$, $\vec{\beta}$ για τα οποία ισχύουν:

$(\vec{a}+3\vec{\beta})\perp(7\vec{a}-5\vec{\beta})$ και $(\vec{a}-4\vec{\beta})\perp(7\vec{a}-2\vec{\beta})$.

ι) Να δείξετε ότι: $\vec{\beta}^2=2\vec{a}.\vec{\beta}$ και $\vec{a}^2=2\vec{a}.\vec{\beta}$,

ιι) Να βρείτε την γωνία που σχηματίζουν τα διανύσματα $\vec{a}$, $\vec{\beta}$.

82. Δίνονται τα διανύσματα $\vec{a}=\kappa\vec{i}+\lambda\vec{j}$, $\vec{\beta}=(\kappa-\lambda)\vec{i}+(\kappa+\lambda)\vec{j}$, $\vec{\gamma}=(\kappa+25)\vec{i}+5\vec{j}$ και $\vec{\delta}=(2\kappa+\lambda-5)\vec{i}+(\kappa-1)\vec{j}$, κ, $\lambda\in R$,

α) Αν $\vec{a}\,//\,\vec{\beta}$, να δείξετε ότι: $\vec{\gamma}\uparrow\downarrow\vec{\delta}$,

β) Αν τα $\vec{a}$ και $\vec{\beta}$, όχι συγγραμμικά να βρείτε την γωνία που σχηματίζουν.

83. Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ με $|\overrightarrow{OA}| = |\overrightarrow{OB}| = |\overrightarrow{O\Gamma}|$ και $3\overrightarrow{OA} + 4\overrightarrow{OB} = 5\overrightarrow{O\Gamma}$ όπου Ο η αρχή των αξόνων. Να αποδείξετε ότι: $\overrightarrow{OA} \perp \overrightarrow{OB}$.

84. Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ και σημείο Ρ για το οποίο ισχύει: $|\overrightarrow{PA}| = |\overrightarrow{PB}| = |\overrightarrow{P\Gamma}|$ και $\overrightarrow{PA} + \overrightarrow{PB} + \overrightarrow{P\Gamma} = \vec{0}$. Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο είναι ισόπλευρο.

85. Δίνονται τα διανύσματα $\vec{\alpha}, \vec{\beta}, \vec{\gamma}$ με $|\vec{\beta}| = |\vec{\gamma}| = 7, |\vec{\alpha}| = \sqrt{13}$ και $4\vec{\beta} + 3\vec{\gamma} = 7\vec{\alpha}$.

α) Να βρείτε τη γωνία $(\widehat{\vec{\beta}, \vec{\gamma}})$.

β) Αν τα διανύσματα $\vec{\alpha}, \vec{\beta}, \vec{\gamma}$ έχουν κοινή αρχή, να αποδείξετε ότι τα πέρατά τους είναι σημεία συνευθειακά.

γ) Να βρείτε διάνυσμα $\vec{x}$ καθώς και το μέτρο του, αν $\vec{x} \parallel (2\vec{\beta} + \vec{\gamma})$ και $(\vec{x} + 2\vec{\gamma}) \perp \vec{\beta}$.

86. Αν $\overrightarrow{PA} + \overrightarrow{PB} - 2\overrightarrow{P\Gamma} = \vec{0}$ και $|\overrightarrow{PA}| = 6, |\overrightarrow{PB}| = |\overrightarrow{P\Gamma}| = 2\sqrt{3}$, να αποδείξετε ότι:

α) Τα σημεία Α,Β,Γ είναι συνευθειακά.
β) Το Γ είναι ανάμεσα στα Α,Β.
γ) Το διάνυσμα $\vec{v} = \overrightarrow{PB} + \overrightarrow{P\Gamma}$ είναι κάθετο στο $\overrightarrow{A\Gamma}$.

87. Αν για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$ ισχύει ότι $(\vec{\alpha} + \lambda\vec{\beta}) \perp (\lambda\vec{\alpha} - \vec{\beta})$ και $|\vec{\alpha}| = 1$, να αποδείξετε ότι:

i. $\vec{\alpha} \perp \vec{\beta}$ και $|\vec{\beta}| = 1$ **ii.** $|4\vec{\alpha} - 3\vec{\beta}| = 5$

88. Έστω ω η γωνία των διανυσμάτων $\vec{\alpha} = (x_1, y_1)$ και $\vec{\beta} = (x_2, y_2)$. Να αποδείξετε ότι $|\vec{\alpha}| \cdot |\vec{\beta}| \cdot \eta\mu\omega = |\det(\vec{\alpha}, \vec{\beta})|$.

89. Αν $\vec{v} = \vec{\alpha} + 2\vec{\beta}$ με $\vec{\alpha} \neq \vec{0}$ και $(\widehat{\vec{\alpha}, \vec{\beta}}) = \frac{2\pi}{3}$, να αποδείξετε ότι: $|\pi\rho o\beta_{\vec{\alpha}}\vec{v}| = |\vec{\alpha}| - |\vec{\beta}|$.

90. Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ με $AB = 2$, $A\Gamma = 4$ και $A = 60^\circ$.
Να υπολογίσετε το μήκος της διαμέσου ΑΜ.
Να αποδείξετε ότι: $\pi\rho o\beta_{\overrightarrow{AM}}\overrightarrow{AB} = \frac{6}{7}\overrightarrow{AM}$.

91. Αν $x^2 + y^2 = 16$, $x, y \in \mathbb{R}$, να βρείτε τη μέγιστη τιμή της παράστασης $\Pi = 3x - 4y$ καθώς και τις τιμές των χ,y για τις οποίες η παράσταση Π παίρνει τη μέγιστη τιμή της.

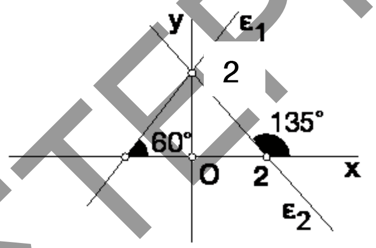
ΕΥΘΕΙΑ

92. Να βρείτε την γωνία ω που σχηματίζουν με τον άξονα x΄x οι ευθείες που ορίζονται από τα σημεία: **ι)** (-8, -4), (5, 9), **ιι)** (5, -7), (5, -2), **ιιι)** (3, 7), (5, 7).

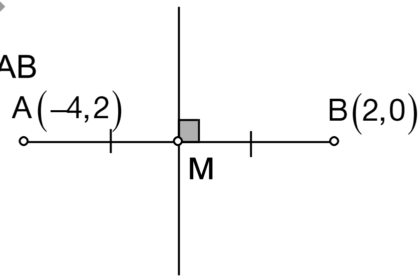
93. Να βρείτε τις εξισώσεις των ευθειών που διέρχονται από το σημείο Α (-2, 3) και είναι παράλληλες προς το διάνυσμα:
ι) $\vec{\delta} = (4,-5)$, **ιι)** $\vec{\mathrm{B\Gamma}}$ με άκρα Β (-3, 4) και Γ (-1, 5).

94. Να βρείτε τις εξισώσεις των ευθειών που διέρχονται από τις κορυφές Α (2, -1), Β (4, -5) και Γ (-3, 4) τριγώνου ΑΒΓ και είναι παράλληλες προς τις απέναντι πλευρές.

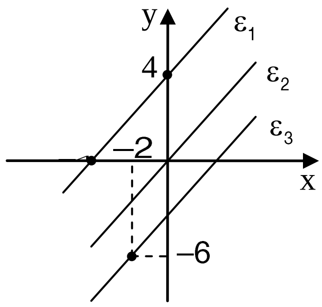
95. Να βρείτε τις εξισώσεις των ευθειών ε_1 και ε_2 του διπλανού σχήματος.



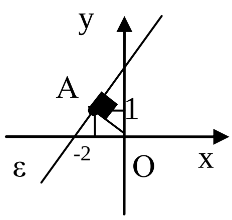
96. Να βρείτε την εξίσωση της μεσοκαθέτου του τμήματος ΑΒ του διπλανού σχήματος.



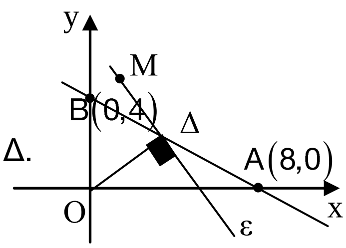
97. Να βρείτε τις εξισώσεις των ευθειών $\varepsilon_1 \parallel \varepsilon_2 \parallel \varepsilon_3$ του διπλανού σχήματος

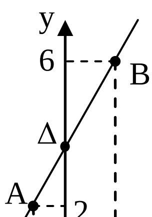


98. Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας ε του διπλανού σχήματος.



99. Δίνονται τα σημεία $A(8,0)$, $B(0,4)$ και έστω Δ το μέσο του ΑΒ.
Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας ΟΔ.
Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας ε που είναι κάθετη στην ΟΔ στο Δ.
Αν Μ τυχαίο σημείο της ε, να αποδείξετε ότι: $\overrightarrow{MA}^2 + \overrightarrow{MB}^2 = 2\overrightarrow{OM}^2$





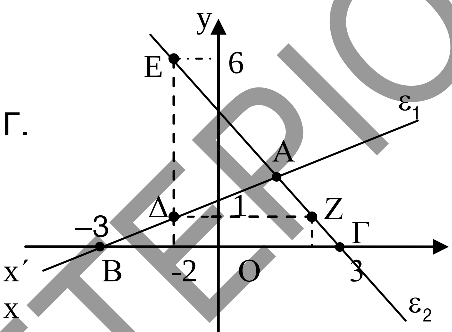
100. Δίνεται η ευθεία ΑΒ του διπλανού σχήματος. Να βρείτε το εμβαδόν του τριγώνου ΟΓΔ.

101. Με βάση το διπλανό σχήμα, να βρείτε:

i. τις εξισώσεις των ευθειών $\varepsilon_1, \varepsilon_2$.

ii. τις συντεταγμένες των σημείων Α και Γ.

iii. το εμβαδόν του τριγώνου ΑΒΓ.



102. Να αποδειχθεί ότι τα σημεία Α (1, -1), Β (-2, 8), Γ (3, -7) βρίσκονται στην ίδια ευθεία, της οποίας να βρεθεί η εξίσωση.

103. Να βρείτε τις εξισώσεις των υψών τριγώνου ΑΒΓ που έχει κορυφές Α (-5, 4), Β (2, 3) και Γ (-3, -2).

104. Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας που τέμνει τον άξονα xx΄στο σημείο Α (-2, 0) και είναι παράλληλη στην διχοτόμο της γωνίας x΄Oy.

105. Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας που διέρχεται από την αρχή των αξόνων και είναι κάθετη στην ευθεία με εξίσωση: y=3x-1.

106. Να βρείτε την ευθεία που διέρχεται από την αρχή των αξόνων και είναι κάθετη στην ευθεία που ορίζεται από τα σημεία, Α(-1, 2) και Β(3, -2).

107. Να βρεθεί η εξίσωση της ευθείας που έχει συντελεστή διεύθυνσης $\lambda=-\frac{3}{4}$ και σχηματίζει με τους άξονες τρίγωνο με εμβαδόν 24 τ. μονάδες.

108. Δίνονται οι εξισώσεις 2x-3y+5=0, 3x+2y-7=0 δύο πλευρών ενός ορθογωνίου παραλληλογράμμου και η κορυφή του Α (2, -3). Να βρείτε τις εξισώσεις των δύο άλλων πλευρών του, τις κορυφές και το εμβαδόν του.

109. Να βρεθεί η εξίσωση της μεσοπαράλληλης των ευθειών: 2x-3y+5=0 και 4x-6y+9=0.

110. Να βρείτε το συμμετρικό του σημείου Μ (5, -4) ως προς την ευθεία 4x-3y+2=0.

111. Δίνονται οι εξισώσεις: 8x+3y+1=0, 2x+y-1=0 δύο πλευρών ενός παραλληλογράμμου και η εξίσωση 3x+2y+3=0 μιας διαγωνίου του. Να βρεθούν οι συντεταγμένες των κορυφών του.

112. Το εμβαδόν τριγώνου ΑΒΓ είναι 8 τ.μ. και οι δύο κορυφές του Α και Β έχουν συντεταγμένες (1, -2), και (2, 3) αντιστοίχως. Η τρίτη κορυφή του Γ είναι σημείο της ευθείας 2x+y-2=0. Να βρεθούν οι συντεταγμένες της κορυφής Γ.

113. Να αποδείξετε ότι η απόσταση των παράλληλων ευθειών, ε_1: αx+βy+γ_1=0 και ε_2: αx+βy+γ_2=0 είναι ίση με: $\dfrac{|\gamma_1-\gamma_2|}{\sqrt{\alpha^2+\beta^2}}$. Δύο πλευρές ενός τετραγώνου βρίσκονται στις ευθείες με εξισώσεις: 5x-12y-65=0 και 5x-12y+26=0. Να υπολογιστεί το εμβαδόν του τετραγώνου.

114. Να βρείτε τις εξισώσεις των ευθειών που είναι παράλληλες με την ευθεία ε: 3x-4y+12=0 και απέχουν από το σημείο Α (2, 1) απόσταση ίση με 1.

115. Να βρείτε τα σημεία της ευθείας ε: x+y-1=0 που απέχουν από την ευθεία ζ: 3x+4y-2=0 απόσταση ίση με 2.

116. Να βρείτε τις εξισώσεις των πλευρών του τριγώνου ΑΒΓ του οποίου η κορυφή Γ έχει συντεταγμένες (2, 3) το ύψος ΑΔ έχει εξίσωση 3x-5y+6=0 και η διάμεσος ΑΜ εξίσωση: x-11y+2=0.

117. Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ με Α (-1, 2). Αν η εξίσωση της μιας πλευράς του είναι x-2y+1= 0, και το ύψος του ΒΔ έχει εξίσωση x+2y+3=0, να βρείτε τις κορυφές Β και Γ.

118. Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ με Α (-1, 2) και τα δύο ύψη του έχουν εξισώσεις: y=3 και 2x-y+1=0. Να βρείτε τις κορυφές Β και Γ.

119. Δυο από τα ύψη ενός τριγώνου ΑΒΓ έχουν εξισώσεις: $y=-3x+11$ και $y=x+3$. Αν Α (2, 1), να βρεθούν οι εξισώσεις των πλευρών και οι συντεταγμένες των κορυφών του τριγώνου.

120. Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ με ορθόκεντρο το σημείο Η (1, 3). Αν οι εξισώσεις των πλευρών του ΑΒ και ΑΓ είναι x+y-3=0 και y=2x αντίστοιχα να βρείτε τις κορυφές του Α και Β.

121. Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ με ΑΒ: y=3x και ΑΓ: x-y+2=0. Αν το σημείο Μ (1, 2) είναι το μέσον της πλευράς ΒΓ, να βρείτε την εξίσωση της πλευράς ΒΓ.

122. Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ με Α (1, 2) και Β (-1, 0). Αν η εξίσωση της διχοτόμου ΑΔ είναι y=2x, Να βρείτε: **α)** Το συμμετρικό σημείο του Β ως προς την ευθεία ΑΔ, **β)** Την εξίσωση της πλευράς ΑΓ.

123. Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ με Α (-1, 2) και ορθόκεντρο Η (3, 0) και βαρύκεντρο Θ(1, 4). Να βρείτε: **α)** Το μέσον Μ της πλευράς ΒΓ, **β)** Την εξίσωση της πλευράς ΒΓ.

124. Τριγώνου ΑΒΓ δίνονται η κορυφή Α(1, 2) και οι εξισώσεις $x-3y+1=0$ και $y-1=0$ δύο διαμέσων του. Να βρείτε τις εξισώσεις των πλευρών του τριγώνου ΑΒΓ.

125. Δίνονται τα σημεία Α (4, 2), Β (3, -1) και η ευθεία ε:y=-3x. Να βρεθεί σημείο Γ της ευθείας ε, ώστε το τρίγωνο ΑΒΓ να είναι ισοσκελές με κορυφή το Β.

126. Στο τρίγωνο ΑΒΓ δίνονται το ύψος του ΑΔ: 3x+2y-11=0, η διάμεσός του ΑΜ: 4x+y-13=0 και το μέσο Λ (2, -2) της πλευράς του ΑΓ. Να βρεθούν οι εξισώσεις των πλευρών του.

127. Δίνονται τα σημεία Β(-3,7), Γ(3,1) και οι ευθείες $(\varepsilon_1): 3x-y+2=0$ και $(\varepsilon_2): 2x+y-7=0$ οι οποίες τέμνονται στο σημείο Α. Να βρεθούν :

α) Ο συντελεστής διεύθυνσης της ευθείας ΒΓ, η γωνία που σχηματίζει η ΒΓ με τον άξονα x΄x και η εξίσωση της ΒΓ.

β) Οι συντεταγμένες του σημείου Α.

γ) Η εξίσωση της διαμέσου ΑΜ του τριγώνου ΑΒΓ και η γωνία των ευθειών ΑΜ, ΒΓ.

δ) η εξίσωση του ύψους ΓΔ του τριγώνου ΑΒΓ.

128. Δίνεται το σημείο Α (2, 1) του καρτεσιανού επιπέδου Oxy.

Α) Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας ΟΑ.

Β) Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας (ε) που διέρχεται από το Α και είναι κάθετη στην ευθεία ΟΑ.

Γ) Η ευθεία (ε) τέμνει τον άξονα x΄x στο σημείο Β. Να βρείτε την εξίσωση του ύψους του τριγώνου ΟΑΒ που διέρχεται από την κορυφή Α.

Δ) Να βρείτε το εμβαδόν του τριγώνου ΟΑΒ.

129. Να βρείτε τις τιμές των λ, $\mu \in R$, για τις οποίες οι ευθείες: ε_1:x+μy+1=0 και ε_2: 2μx+2y+λ=0, είναι παράλληλες και η απόστασή τους είναι ίση με $2\sqrt{2}$.

130. Δίνονται τα σημεία Α (1, 3), Β (-1, 0) και Γ (3, -2).

ι) Να δείξετε ότι ορίζουν τρίγωνο ΑΒΓ,

ιι) Να βρείτε τις εξισώσεις των πλευρών του ΑΒ, ΑΓ,

ιιι) Να βρείτε τις εξισώσεις των υψών ΒΔ και ΓΕ,

ιv) Να προσδιορίσετε τις συντεταγμένες του ορθόκεντρου Η,

v) Να υπολογίσετε την απόσταση του σημείου Η από την πλευρά ΑΓ.

131. Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας που περνάει από το σημείο Μ (2, 3) όταν:

α) Το Μ είναι το μέσον του ΑΒ όπου τα Α και Β είναι τα σημεία στα οποία η ευθεία τέμνει τους άξονες xx΄ και yy΄ αντίστοιχα,

β) Σχηματίζει με τους άξονες τρίγωνο με εμβαδόν $\frac{3}{2}$.

132. Να βρείτε τις εξισώσεις των ευθειών που είναι παράλληλες προς την ευθεία $\varepsilon: 2x-3y-12=0$ και οι οποίες ορίζουν με τους άξονες τρίγωνο με εμβαδόν ίσο με

12τμ.

133. Να βρεθεί η εξίσωση της ευθείας, η οποία διέρχεται από το σημείο P(-2, 6) και σχηματίζει με τους άξονες τρίγωνο με εμβαδόν 3.

134. Να βρείτε ευθεία που διέρχεται από το σημείο Μ(1,2) και τέμνει τους άξονες στα σημεία Α, Β έτσι ώστε το Μ να είναι μέσο του ΑΒ.

135. Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας ε που διέρχεται από το σημείο Μ (1, 4) και τέμνει τις ευθείες $ε_1$: y=-x+4 και $ε_2$: y=2x+3 στα σημεία Α και Β αντιστοίχως, έτσι ώστε το Μ να είναι το μέσον του ΑΒ.

136. Να διατάξετε με φθίνουσα σειρά τις αποστάσεις των σημείων Α (2, 5), Β (-3, -6),
Γ (-1, 4) από την ευθεία 4x-3y=0.

137. Ενός παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ, η πλευρά ΑΒ ανήκει στην ευθεία 3x-7y+27=0 και η πλευρά ΑΔ στην ευθεία $4x+y+5=0$. Οι διαγώνιοι ΑΓ, ΒΔ του παραλληλογράμμου τέμνονται στο σημείο $K\left(2,\frac{5}{2}\right)$.

Α) Να αποδείξετε ότι η κορυφή Γ έχει συντεταγμένες (6,2).
Β) Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας στην οποία ανήκει η πλευρά ΒΓ.
Γ) Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας στην οποία ανήκει η διαγώνιος ΒΔ.

138. Δίνεται τετράγωνο ΑΒΓΔ με $B(8,-6)$ ΚΑΙ $\Delta(2,2)$. Να βρείτε τις συντεταγμένες των κορυφών Α και Γ.

139. Δίνεται η ευθεία ε: $y=-x+2$. Να βρείτε τη συμμετρική ευθεία της ε, ως προς:
α) τον άξονα χ΄χ β) τον άξονα y΄y γ) την αρχή Ο των αξόνων δ) τη διχοτόμο $y=x$.

140. Δίνεται η ευθεία ε: $y=-x+3$. Να βρείτε τη συμμετρική ευθεία τη ε, ως προς:
α) το σημείο $M(3,1)$ β) την ευθεία $ε_1: y=-2x$.

141. Να αποδειχθεί ότι οι ευθείες ($ε_λ$): $(3λ-1)x+(λ-1)y+4-8λ=0$ διέρχονται από σταθερό σημείο, για κάθε $λ\in\mathbb{R}$.

142. Να αποδειχθεί ότι, οι ευθείες της οικογένειας (ε): $(1+μ)x+(1-μ)y-(1+5μ)=0$, μ $\in\Re$, διέρχονται από το ίδιο σημείο.

143. Να αποδειχθεί ότι, η εξίσωση $\left(λ^2-3λ-3\right)x+\left(-λ^2+2λ+1\right)y-λ^2-3=0$ είναι εξίσωση ευθείας, η οποία διέρχεται από σταθερό σημείο, για κάθε λ $\in\Re$.

144. Θεωρούμε την εξίσωση $\left(2λ^2+λ-3\right)x-\left(λ^2+λ-2\right)y-5λ^2-3λ+8=0$(1). Για ποιες τιμές του $λ\in\mathbb{R}$ η (1) παριστάνει ευθεία;

145. Να αποδειχθεί ότι, η εξίσωση $\left(2λ^2+λ+3\right)x-\left(λ^2-λ+1\right)y+\left(3λ+1\right)=0$
είναι εξίσωση ευθείας, η οποία διέρχεται από σταθερό σημείο, για κάθε $λ\in\mathbb{R}$.

146. Δίνεται η εξίσωση : $\left(\lambda^2+\lambda-2\right)x+\left(\lambda^2-3\lambda+2\right)y+\lambda^2-1=0$.Να βρεθούν οι τιμές του λ έτσι ώστε : Η εξίσωση αυτή να παριστάνει ευθεία, έστω (ε). Η ευθεία (ε) να διέρχεται από την αρχή των αξόνων.

147. Δίνεται η εξίσωση (ε): $(1-2\lambda)x+(1+\lambda)y+8\lambda-1=0$.Να αποδειχθεί ότι :

α) Η εξίσωση (ε) παριστάνει ευθεία για κάθε $\lambda\in\mathbb{R}$.

β) Η ευθεία (ε) διέρχεται από σταθερό σημείο ,όταν το λ μεταβάλλεται στο $\mathbb{R}$.

148. Να βρεθεί ο γεωμετρικό τόπος των σημείων i. $M\left(\lambda-1,\ 2\lambda+3\right)\lambda\in\mathbb{R}$,

ii. $K\left(\lambda+2,1-\lambda\right),\lambda\in\mathbb{R}$ iii. $A\left(\text{ημ}\theta,\text{συν}\theta\right),\theta\in\mathbb{R}$ iv. $X\left(\lambda^2,2\lambda^2-4\right),\ \lambda\in\mathbb{R}$

149. Να βρείτε τον γεωμετρικό τόπο των σημείων $M\left(\lambda+3,3\lambda\right)$. Από τα προηγούμενα σημεία να βρείτε το πλησιέστερο στην αρχή των αξόνων.

150. Δίνονται οι εξισώσεις: (ε_1) (κ-2)x-κy=-2 και (ε_2) (κ+1)x+(κ^2-4)y=-3, με κ πραγματικό αριθμό.

α) Να αποδειχτεί ότι είναι εξισώσεις ευθειών,

β) Να βρεθεί το κ ώστε να είναι κάθετες.

151. Να δείξετε ότι η γραμμή με εξίσωση (2ημ^{2}α)x+(2συν^{2}α)y+συν2α-1=0 (1) παριστάνει ευθεία για κάθε τιμή της παραμέτρου α∈ (0, π). Βρείτε το σταθερό σημείο από το οποίο διέρχονται όλες οι ευθείες που ορίζονται από την (1).

152. Να βρεθεί ο γεωμετρικός τόπος των σημείων M (β-1, α+1) με α, β∈R, αν το σημείο P (α, β) ανήκει στην ευθεία x+y-2=0.

153. Σε καρτεσιανό επίπεδο Oxy η εξίσωση ευθείας (2λ^2+λ+1)x-(λ^2-λ+1)y-(λ^2+2λ)=0, όπου λ∈{0,1,2,3,...,19}, παριστάνει πορεία 20 πλοίων που κατευθύνονται σε κάποιο λιμάνι.

α) Να βρεθεί η θέση του λιμανιού,

β) Ανοικτά του λιμανιού στο σημείο (1, 2) υπάρχει φάρος που δεν λειτουργεί. Να εξετάσετε αν υπάρχει περίπτωση κάποιο από τα πλοία να συγκρουστεί με τον φάρο,

γ) Εξετάστε αν κάποιο από τα 20 πλοία κινείται παράλληλα με μικρό σκάφος που κινείται στην ίδια περιοχή και του οποίου η πορεία δίνεται από την εξίσωση: 11x-3y-22=0.

154. Στην πόλη των Μαθηματικών οι δρόμοι που έχουν εξίσωση: (3λ+1)x+2(λ-1)y+7λ+5=0, περνούν από την πλατεία της γνώσης,

ι) Να δείξετε ότι οι δρόμοι της εξίσωσης (1) είναι ευθείες ∀ λ∈R και να βρείτε τις συντεταγμένες της πλατείας της γνώσης (η πλατεία θεωρείται ως σημείο),

ιι) Να βρείτε τους δρόμους της εξίσωσης (1) που είναι παράλληλοι στον xx΄,

ιιι) Αν ο δρόμος των συναντήσεων έχει εξίσωση της μορφής (1) και είναι κάθετη στην ευθεία ε: 2x-y+1=0, να βρεθεί η εξίσωση του δρόμου αυτού.

155. Ένα γήπεδο ποδοσφαίρου είναι τοποθετημένο στο επίπεδο xOy έτσι ώστε η μεσαία γραμμή να είναι τμήμα της ευθείας ε: 4x-3y+10=0. Αν το σημείο του πέναλτι στην μία περιοχή, έχει συντεταγμένες (20, -20) τότε:

ι) Να βρείτε τις συντεταγμένες του σημείου που γίνεται η έναρξη του αγώνα,

ιι) Να βρείτε τις συντεταγμένες του σημείου του πέναλτι στην άλλη περιοχή.

156. Οι συντεταγμένες ενός πλοίου κάθε χρονική στιγμή είναι Π (2t+20, t+40), $t \geq 0$. Το πλοίο ξεκινά από το λιμάνι Λ την χρονική στιγμή t=0 με προορισμό προς το λιμάνι Ο, όπου Ο είναι η αρχή των αξόνων του καρτεσιανού επιπέδου.

α) Να βρεθούν οι συντεταγμένες του Λ,

β) Να βρεθεί η απόσταση των δύο λιμανιών,

γ) Είναι σωστή η πορεία του πλοίου σε σχέση με τον προορισμό του,

δ) Ποιο σημείο της πορείας του πλοίου απέχει από τον τελικό προορισμό την μικρότερη απόσταση και ποια είναι αυτή;

157. Σε έναν αγώνα αυτοκινήτων δύο κινητά βρίσκονται κάθε χρονική στιγμή t στα σημεία K_1 (t, t+4), K_2 (1-2t, t+1), $t \geq 0$.

α) Να βρεθεί η απόσταση των δύο κινητών την χρονική στιγμή t=2,

β) Να βρεθούν οι εξισώσεις των γραμμών πάνω στις οποίες κινούνται τα δύο κινητά,

γ) Την χρονική στιγμή t=1, να βρεθεί η απόσταση του K_1 από την τροχιά του K_2.

158. Έστω τα σημεία Α (0, -4) και Β (3, 0). Να βρεθεί αν υπάρχουν οι ευθείες που περνάνε από το Α και απέχουν από το Β απόσταση: **α)** d=3, **β)** την μέγιστη απόσταση, **γ)** d=6.

159. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση: $x^2+y^2+2xy-3x-3y+2=0$ παριστάνει δύο παράλληλες ευθείες και στην συνέχεια να βρείτε το εμβαδόν του τραπεζίου που σχηματίζουν οι ευθείες αυτές με τους άξονες.

160. Να δείξετε ότι η εξίσωση: $x^2-3xy+2y^2=0$ παριστάνει δύο ευθείες.

161. Δίνεται η εξίσωση $y^2=yx$.

α) Να δείξετε ότι παριστάνει δύο ευθείες, έστω ε_1 και ε_2, που τέμνονται στην αρχή των αξόνων,

β) Να δείξετε ότι το σημείο Μ $(2+\sqrt{2}, \sqrt{2})$ ισαπέχει από τις ε_1 και ε_2,

γ) Να βρεθούν οι εξισώσεις των διχοτόμων των γωνιών που σχηματίζουν οι ε_1 και ε_2.

162. Να βρείτε την σχετική θέση των ευθειών ε_1: μx-y=μ-2 και ε_2: 3x-y=1 για τις διάφορες τιμές του $\mu \in R$. Για ποια τιμή του $\mu \in R$ η ευθεία ε_2 σχηματίζει με την ε_1 γωνία ίση με: **α)** $\frac{\pi}{2}$, και **β)** $\frac{\pi}{4}$.

ΚΥΚΛΟΣ

163. Να βρείτε το κέντρο και την ακτίνα των κύκλων: α) $x^2+y^2-10x+2y+22=0$,
β) $x^2+y^2+6x+8=0$, γ) $x(x-1)+(y+1)(y-3)=0$, δ) $(x+y)^2-2y=2x(\alpha+y)$,
ε) $2x^2+2y^2-4x+1=0$, ζ) $(2x-1)^2+(2y+3)^2=4$.

164. Να βρείτε την εξίσωση του κύκλου που έχει κέντρο Κ (2, -3) και ακτίνα ρ=4.

165. Να βρείτε την εξίσωση του κύκλου που έχει διάμετρο το ευθύγραμμο τμήμα ΑΒ με Α (-1, 2) και Β (3, 4).

166. Να βρείτε την εξίσωση του κύκλου που είναι ομόκεντρος του κύκλου: $x^2+y^2-3x+1=0$ και διέρχεται από την αρχή των αξόνων.

167. Να βρεθεί η εξίσωση του κύκλου ο οποίος έχει:
ι) Κέντρο το σημείο Κ (-3, 1) και εφάπτεται της ευθείας $2x+3y-15=0$,
ιι) Το κέντρο του πάνω στην ευθεία $3x+2y=0$ και διέρχεται από τα σημεία Α (2, -6) και Β (1, 7)

168. Να βρεθεί η εξίσωση του κύκλου που έχει κέντρο το σημείο Κ (3, -1) και αποκόπτει από την ευθεία $2x-5y+18=0$, χορδή μήκους 6.

169. Να βρεθεί η εξίσωση κύκλου που διέρχεται από τα σημεία Α (3, 3) και Β (0, 2) και έχει ακτίνα 5.

170. Να βρείτε την εξίσωση του κύκλου που εφάπτεται στις ευθείες $2x+3y-2=0$ και $4x+6y+8=0$ στο σημείο Α (1, -2) που ανήκει σε μία από αυτές.

171. Να βρείτε την εξίσωση του κύκλου που εφάπτεται στην ευθεία $3x-4y-13=0$ στο σημείο της Α (7, 2) και έχει ακτίνα $\rho=10$.

172. Να βρεθεί η εξίσωση του κύκλου σε καθεμιά από τις παρακάτω περιπτώσεις:
   a. έχει διάμετρο το ευθύγραμμο τμήμα ΑΒ με Α (1, 3) και Β (-3, 5).
   b. διέρχεται από τα σημεία Α (1, -1), Β (3, 1) και Γ (-1, 3).
   c. διέρχεται από τα σημεία (3, 1), (-1, 3) και έχει κέντρο πάνω στην ευθεία $y = 3x-2$.
   d. έχει κέντρο το σημείο (8, -6) και διέρχεται από την αρχή των αξόνων.
   e. έχει κέντρο την αρχή των αξόνων και εφάπτεται της ευθείας $3x+y=10$.
   f. έχει ακτίνα 4, εφάπτεται στον άξονα x΄x και διέρχεται από το σημείο (5, 4).
   g. έχει κέντρο το σημείο (-3, 2), εφάπτεται στον άξονα y΄y και διέρχεται από το σημείο (-6, 2).
   h. έχει κέντρο το σημείο (3, 3) και εφάπτεται των αξόνων x΄x και y΄y.

173. Να βρείτε την εξίσωση του κύκλου, ο οποίος είναι εγγεγραμμένος στο τρίγωνο που σχηματίζει η ευθεία $x+y-6=0$ με τους άξονες x΄x και y΄y.

174. Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης του κύκλου : $C: x^2+y^2=2$, η οποία :
I) Είναι παράλληλη προς την ευθεία ε_1: $y=x+3$.
II) Είναι κάθετη προς την ευθεία ε_2: $y=2x+1$.
III) Διέρχεται από το σημείο Α (3, 0).

175. Να δείξετε ότι οι εφαπτόμενες που φέρνουμε στον κύκλο $x^2+y^2=25$, από το σημείο Α (-1, 7) είναι κάθετες.

176. Δίνεται η ευθεία $y = \lambda x$ και ο κύκλος $x^2+y^2-4x+1=0$. Να βρεθεί η τιμή του λ ώστε η ευθεία: α) να τέμνει τον κύκλο β) να εφάπτεται του κύκλου γ) να μην έχει κοινά σημεία με τον κύκλο.

177. Να βρεθεί η εξίσωση της εφαπτομένης του κύκλου: $(x-1)^2+(y+\frac{1}{2})^2=5$, στο σημείο $(3, \frac{1}{2})$.

178. Δίνεται ο κύκλος $(x-3)^2+(y-2)^2=25$. Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης του κύκλου στο σημείο Α (-1, 5). Να δείξετε ότι η ευθεία ε εφάπτεται του κύκλου, $x^2+y^2+2x-8=0$.

179. Δίνεται ο κύκλος: $x^2+y^2-2x+4y=0$, να βρείτε τις εφαπτομένες του κύκλου που έχουν συντελεστής διεύθυνσης $\lambda=-2$.

180. Δίνεται ο κύκλος $x^2+y^2=2$. Να βρεθεί η εξίσωση της εφαπτομένης του κύκλου, που σχηματίζει με τους άξονες ισοσκελές τρίγωνο.

181. Δίνεται ο κύκλος: $x^2+y^2-2\lambda x+\lambda^2-5=0$. Να βρείτε το λ ώστε ο κύκλος να εφάπτεται στην ευθεία: $y=2x-7$. Για $\lambda=1$ να βρείτε την άλλη εφαπτομένη του κύκλου που διέρχεται από το σημείο τομής της ε με τον άξονα xx΄.

182. Δίνεται κύκλος C: $x^2+y^2=9$ (1) και το σημείο P $(2t, \frac{3}{2}t+\frac{9}{2})$ $t\in R$. Από το P φέρνουμε τις εφαπτόμενες PA και PB του κύκλου. Αφού πρώτα αποδειχτεί ότι το P είναι εξωτερικό σημείο του κύκλου C $\forall$ $t\in R$, στην συνέχεια να αποδειχτεί ότι το σημείο Σ $(-\frac{3}{2}, 2)$ ανήκει στην AB.

183. Να βρεθούν οι εφαπτομένες του κύκλου C: $x^2+y^2=4$, στα σημεία του με τετμημένη 1.

184. Να βρεθεί η εφαπτομένη του κύκλου C: $x^2+y^2+2x-6y+1=0$, στο σημείο του Α (2, 3).

185. Έστω κύκλος C: $x^2+y^2-2x-4y=0$ και έστω Κ το κέντρο του. Μία μεταβλητή ευθεία που διέρχεται από την αρχή των αξόνων τέμνει τον κύκλο C στα σημεία Α και Β.
ι) Να βρεθεί η ευθεία αν (ΑΒ)=2,
ιι) Να βρεθεί η ευθεία αν το εμβαδόν του τριγώνου ΑΚΒ είναι ίσο με $\frac{3}{2}$ τ.μ.

186. Δίνεται ο κύκλος $x^2+y^2=\frac{4}{5}$.
α) Να βρεθούν οι εξισώσεις των εφαπτομένων που άγονται από το Α (-1, 0).
β) Αν Β και Γ είναι τα σημεία επαφής με τον κύκλο ποιο το εμβαδόν του τριγώνου ΑΒΓ.

187. Δίνεται ο κύκλος $(x-2)^2+(y-1)^2=1$. να βρείτε τις συντεταγμένες των σημείων επαφής Α και Β, των εφαπτομένων που άγονται από το σημείο Ο (0, 0) στον παραπάνω κύκλο.

188. Να βρεθεί σημείο του άξονα yy΄ώστε οι εφαπτομένες που άγονται προς τον κύκλο C: $x^2+y^2=\rho^2$ από το σημείο αυτό να σχηματίζουν με τον xx΄ ισόπλευρο τρίγωνο.

189. **α)** Να βρείτε τις εξισώσεις των εφαπτομένων του κύκλου: $x^2+y^2=16$, που είναι παράλληλες στην ευθεία δ: $3x+4y=\gamma$, $\gamma\in R$,
β) Αν μία από τις εφαπτομένες ε_1, ε_2 του (α) έστω η ε_1 είναι μεσοπαράλληλη των ε_2 και δ, να βρείτε το γ.

190. Ο χώρος που χρειάζεται για να κατασκευαστεί μία πισίνα περικλείεται από την γραμμή C: $x^2+y^2-12x=0$. Στην θέση Τ (0, 3) είναι τοποθετημένος ένας προβολέας για να φωτίζει τις βραδινές ώρες.
ι) Να δείξετε ότι η πισίνα είναι κυκλική και να βρείτε το κέντρο και την ακτίνα της,
ιι) Βρείτε τις εξισώσεις των δύο φωτεινών ακτίνων που εφάπτονται στην κυκλική πισίνα (Δεχτείτε ότι προβολέας και επιφάνεια πισίνας βρίσκονται στο ίδιο επίπεδο).

191. Δίνεται το ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ με κάθετες πλευρές β, γ και υποτείνουσα α και ο κύκλος: C: $x^2+y^2=\rho^2$ και η ευθεία ε: $\beta x+\gamma y+\alpha=0$. Αν η ε είναι εφαπτόμενη του κύκλου C να υπολογιστεί η ακτίνα ρ του κύκλου.

192. Δίνονται τα σημεία Α (3, -4), και Β (-5, 8) και η ευθεία ε: $3x+5y-5=0$. Να βρεθεί σημείο Μ με θετική τετμημένη, πάνω στην ευθεία ε τέτοιο ώστε: $A\widehat{M}B=90^0$ και να υπολογιστεί το εμβαδόν του τριγώνου ΑΒΜ.

193. Δίνονται τα σημεία Α (1, 2), Β (2, 4) και Γ (3, 1).
Να αποδειχθεί ότι: γωνία ΒΑΓ = 90^0.
Να βρεθεί η εξίσωση του κύκλου που διέρχεται από τα σημεία Α, Β και Γ.

194. Δίνεται ο κύκλος: $x^2+y^2-4x-4y-10=0$. Να βρείτε τα σημεία του κύκλου που απέχουν την μεγαλύτερη και την μικρότερη απόσταση από το Ο.

195. Να βρείτε τη μέγιστη και την ελάχιστη απόσταση του σημείου $A(-1,0)$ από τον κύκλο $C: x^2+y^2-6x-6y+2=0$ καθώς και τα σημεία του κύκλου που δίνουν αυτές τις αποστάσεις.

196. Να βρείτε τη μέγιστη και την ελάχιστη απόσταση του σημείου $A(4,-6)$ από τον κύκλο $C: x^2+y^2-2x+4y-4=0$ καθώς και τα σημεία του κύκλου που δίνουν αυτές τις αποστάσεις.

197. Να βρείτε τα σημεία του κύκλου $C: x^2+y^2+4x-5=0$ που έχουν τη μέγιστη και την ελάχιστη απόσταση από την αρχή Ο των αξόνων.

198. Να βρείτε τη μέγιστη και την ελάχιστη απόσταση των κύκλων $C_1: x^2+y^2-4x+2y+4=0$ και $C_2: x^2+y^2+8x-14y+40=0$ καθώς και τα σημεία τους που δίνουν αυτές τις αποστάσεις.

199. Δίνεται ο κύκλος $C: x^2+y^2=1$ και η ευθεία $\varepsilon: 3x+4y=25$.

α) Να αποδείξετε ότι η ευθεία και ο κύκλος δεν έχουν κανένα κοινό σημείο.
β) Να βρείτε την ελάχιστη απόσταση της ευθείας από τον κύκλο.
γ) Να βρείτε τα σημεία της ευθείας και του κύκλου που έχουν την ελάχιστη απόσταση.

200. Δίνεται ο κύκλος $C: x^2+y^2-6x+8=0$ και η ευθεία $\varepsilon: y=-x$.
α) Να αποδείξετε ότι η ευθεία και ο κύκλος δεν έχουν κανένα κοινό σημείο.
β) Να βρείτε την ελάχιστη απόσταση της ευθείας από τον κύκλο.
γ) Να βρείτε τα σημεία της ευθείας και του κύκλου που έχουν την ελάχιστη απόσταση.

201. Αν η εξίσωση $4x^2-8\alpha x+8\alpha-4\beta^2+3=0$, έχει πραγματικές ρίζες να βρείτε τον γεωμετρικό τόπο των σημείων Μ (α, β).

202. Να βρείτε τον γ. τ. των μέσων των χορδών του κύκλου $x^2+y^2=169$, που διέρχονται από το σημείο Α (-4, 2).

203. Να βρείτε τον γ. τ. των μέσων των χορδών του κύκλου $x^2+y^2-2x=0$, που διέρχονται από την αρχή των αξόνων.

204. Να βρείτε τον, γ. τ. των μέσων των χορδών του κύκλου: $x^2+y^2-4y+3=0$, που διέρχονται από το σημείο Α (-2, 4).

205. Δίνεται κύκλος C: $x^2+y^2=12$ (1) και το κινητό του σημείο Ρ (x_1, y_1). Ενώνουμε το Ρ με το σημείο Σ (7, 0). Να αποδειχτεί ότι το μέσον Μ του τμήματος ΣΡ διαγράφει κύκλο και να βρεθούν το κέντρο και η ακτίνα του όταν το Ρ κινείται στον κύκλο C.

206. Να βρεθεί η εξίσωση της ευθείας που περιέχει μία διάμετρο του κύκλου C: $x^2+y^2+4x-6y-17=0$ και είναι κάθετη στην ευθεία (ε): $5x+2y=13$.

207. Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ με $\Gamma=45^o$ και Α (2, κ), Β (1, -1), Γ (3, κ) κ>0.
ι) Βρείτε τις συντεταγμένες των κορυφών Α και Γ,
ιι) Βρείτε τις συντεταγμένες του ίχνους Δ του ύψους ΑΔ,
ιιι) Βρείτε τις συντεταγμένες του συμμετρικού σημείου Δ΄, του Δ ως προς την πλευρά ΑΓ,
ιv) Δείξτε ότι τα σημεία Α, Δ, Γ, Δ΄ είναι ομοκυκλικά και να βρείτε την εξίσωση του κύκλου.

208. Έστω κύκλος C: $x^2+y^2-4x-2y=0$ και το σημείο Μ $(\frac{1}{2},\frac{3}{2})$,
ι) Να δείξετε ότι το Μ είναι εσωτερικό σημείο του κύκλου,
ιι) Να βρεθεί η εξίσωση της χορδής ΑΒ του κύκλου που έχει μέσον το σημείο Μ,
ιιι) Να βρεθεί το συμμετρικό του κέντρου Κ του κύκλου, ως προς ΑΒ,
ιv) Να βρεθεί το εμβαδόν του τριγώνου ΚΑΒ.

209. Δίνεται ο κύκλος C: $x^2+y^2=4$, και το σημείο Α (2, 4),
ι) Να δείξετε ότι το Α είναι εξωτερικό σημείο του κύκλου C,
ιι) Να βρείτε τις εφαπτομένες του κύκλου που άγονται από το Α,
ιιι) Αν Β, Γ τα σημεία επαφής των προηγούμενων εφαπτομένων να βρείτε την προβολή του Α στην ΒΓ,

ιv) Να βρείτε το συμμετρικό του Α ως προς την ΒΓ,
v) Να βρείτε την γωνία των εφαπτομένων,
vι) Να βρείτε το εμβαδόν του τριγώνου ΑΒΓ.

210. Δίνεται ο κύκλος $x^2+y^2=10$ και το σημείο Μ (-2. 2). Να βρείτε την εξίσωση της χορδής του κύκλου που έχει μέσον το σημείο Μ.

211. **Α)** Να δείξετε ότι από τις εξισώσεις: η C_1: $x^2-3xy+2y^2=0$, παριστάνει ευθεία, ενώ η C_2: $x^2+y^2-4y=0$, παριστάνει κύκλο.
Β) Να βρείτε το εμβαδόν του τριγώνου που σχηματίζεται από τα σημεία τομής των γραμμών C_1 και C_2.

212. Δίνεται η εξίσωση $x^2+y^2-2x\sigma\upsilon\nu\theta-2y\eta\mu\theta-1=0,\ 0\leq\theta<2\pi$.
Α. Να αποδείξετε ότι για κάθε θ η εξίσωση αυτή παριστάνει κύκλο, του οποίου να προσδιορίσετε το κέντρο και την ακτίνα.
Β. Αν $\theta=\dfrac{\pi}{2}$, να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης του κύκλου στο σημείο Μ (1, 2).
Γ. Να αποδείξετε ότι για τις διάφορες τιμές του θ τα κέντρα των παραπάνω κύκλων βρίσκονται σε κύκλο με κέντρο Ο (0, 0) και ακτίνα $\rho=1$.

213. Δίνεται κύκλος C: $x^2-8x+y^2-4y=0$.
ι) Να βρεθεί ο γ.τ. των σημείων Ρ από τα οποία φέρνουμε κάθετες εφαπτόμενες στον κύκλο C.
ιι) Να βρεθεί ο γ.τ. των μέσων Μ των χορδών του C που διέρχονται από την αρχή των αξόνων.

214. Δίνονται οι εξισώσεις: $C_1=x^2+y^2+16x+12y-525=0$ και C_2: $x^2+y^2=225$.
ι) Δείξτε ότι οι εξισώσεις αυτές παριστάνουν κύκλους και να βρείτε τα κέντρα και τις ακτίνες τους,
ιι) Δείξτε ότι οι κύκλοι αυτοί εφάπτονται εσωτερικά και να βρείτε την εξίσωση της κοινής εφαπτομένης τους.

215. Δίνεται η γραμμή: C_μ: $x^2+y^2+\mu x-\mu y-2=0$, $\mu\in R$.
ι) Δείξτε ότι $\forall\ \mu\in R$ η C_μ είναι κύκλος,
ιι) Να βρείτε το μ ώστε η χορδή που ορίζει η ευθεία (ε): y=x+1 στον κύκλο C_μ να φαίνεται από την αρχή των αξόνων υπό ορθή γωνία,
ιιι) Ποιος ο γ.τ. των κέντρων των κύκλων.

216. Σε ορθοκανονικό σύστημα αναφοράς Οχψ με Μ (χ, ψ) παριστάνουμε τα σημεία μιας περιοχής. Στο Κ (12, 6) είναι τοποθετημένος ένας πομπός κινητής τηλεφωνίας. Η λήψη σε ένα σημείο της περιοχής θεωρείται "πολύ καλή", αν αυτό βρίσκεται στον κυκλικό δίσκο που ορίζεται από τον κύκλο C_1, ο οποίος έχει κέντρο Κ και ακτίνα $\rho_1=\sqrt{10}$, ενώ η λήψη θεωρείται "καλή", να το σημείο είναι εξωτερικό του C_1 και εσωτερικό του C_2, που γράφεται με κέντρο Κ και ακτίνα $\rho_2=4$.
Α. Να γράψετε τις εξισώσεις των δύο κύκλων.
Β. Να εξετάσετε αν στα σημεία Α (10, 7) και Β (9, 4) η λήψη είναι "καλή' ή "πολύ καλή".

Γ. Ένας αυτοκινητόδρομος της περιοχής (θεωρούμενος ως ευθεία) έχει εξίσωση ε: x-ψ-1=0. Να εξετάσετε αν υπάρχει τμήμα του αυτοκινητοδρόμου στο οποίο η λήψη είναι "καλή" ή "πολύ καλή".

217. Δίνονται οι κύκλοι $C_1: x^2+\psi^2=1$ και $C_2:\ (x-3)^2+(\psi-4)^2=16$.

α) Να δείξετε ότι οι κύκλοι εφάπτονται εξωτερικά.

β) Να βρεθούν οι εξισώσεις των κοινών εφαπτόμενών τους.

218. Θεωρούμε έναν πληθυσμό από 1.999 μυρμήγκια. Κάθε μυρμήγκι χαρακτηρίζεται από έναν αριθμό n = 1,2,3 …, 1.999 και κινείται επάνω στο καρτεσιανό επίπεδο Oxy διαγράφοντας μια τροχιά με εξίσωση: $(x-1)^2 + y^2 = 2n\,(x + y - 1)$. Να δείξετε ότι:

Α) η τροχιά κάθε μυρμηγκιού είναι κύκλος και να βρεθούν οι συντεταγμένες του κέντρου του.

Β) κατά την κίνησή τους όλα τα μυρμήγκια διέρχονται από ένα σταθερό σημείο Α (που είναι η φωλιά τους). Ποιες είναι οι συντεταγμένες του σημείου Α;

Γ) Οι τροχιές των μυρμηγκιών εφάπτονται στην ευθεία $x+y-1=0$ στο σημείο Α.

ΠΑΡΑΒΟΛΗ

219. Να βρεθεί η εξίσωση παραβολής που έχει εστία Ε (7, 0) και διευθετούσα δ: x=-7.

220. Να βρείτε την εστία και την διευθετούσα της παραβολής $2y^2=5x$.

221. Να βρεθεί η εξίσωση της παραβολής σε κάθε μία από τις παρακάτω περιπτώσεις:

ι) Όταν έχει εστία το Ε΄ (-2, 0),

ιι) Όταν έχει διευθετούσα δ: y=2,

ιιι) Διέρχεται από το σημείο Α (2, 1).

222. Για ποιες τιμές του λ η ευθεία y=λx+2 εφάπτεται της παραβολής $y^2=4x$.

223. Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της παραβολής $y^2=4x$ που είναι παράλληλη στην ευθεία 6x-3y+7=0.

224. Να βρείτε την εφαπτομένη της παραβολής: $y^2=2x$ που απέχει από την εστία απόσταση $\frac{3\sqrt{2}}{4}$.

225. Δίνεται η παραβολή (C): $y^2=-4x$. Να βρείτε τις εφαπτομένες της (C), οι οποίες απέχουν από την κορυφή της απόσταση $d=\frac{\sqrt{2}}{2}$.

226. Να βρείτε την εφαπτομένη της παραβολής: $y^2=4x$ που σχηματίζει με τους άξονες τρίγωνο με εμβαδόν $\frac{1}{2}$ τ. μ.

227. Δίνεται η παραβολή με εξίσωση: $y^2=6x$,

α) Να βρείτε σημείο Μ της παραβολής στο οποίο η εφαπτομένη της να σχηματίζει με τους άξονες ισοσκελές τρίγωνο,

β) Να δείξετε ότι η κάθετη στην εφαπτομένη στο Μ διχοτομεί την γωνία που σχηματίζει η ΕΜ και η παράλληλη από το Μ προς τον xx΄.

228. Να βρείτε την εφαπτομένη της παραβολής: $y^2=4x$ η οποία τέμνει τους άξονες στα σημεία Α και Β με ΑΒ=$\sqrt{2}$.

229. Να βρεθεί η εξίσωση της παραβολής όταν έχει άξονα συμμετρίας τον xx΄ και εφάπτεται στην ευθεία x+y+1=0.

230. Δίνεται η παραβολή (C): $y^2=6x$. Από το σημείο P (-3, 3) φέρνουμε τις εφαπτομένες PA, PB προς την παραβολή. Να βρείτε την εξίσωση της ΑΒ.

231. Από το σημείο Μ (-2, -1) φέρνουμε τις εφαπτόμενες ΜΑ και ΜΒ στην παραβολή $y^2=4x$. Να δειχτεί ότι: d(M, AB)=$\frac{9\sqrt{5}}{5}$.

232. Από το σημείο Μ (-3, 2) φέρνουμε τις εφαπτομένες ΜΑ και ΜΒ στην παραβολή C: $y^2=8x$. Να βρεθεί η απόσταση του Μ από την ΑΒ.

233. Δίνεται η παραβολή $y^2=16x$. Μία ευθεία (ε) περνά από το σημείο Μ (2, 1) και τέμνει την παραβολή στα σημεία Α και Β. Αν Μ είναι το μέσον της ΑΒ να βρεθεί η εξίσωση της (ε).

234. Δίνεται η παραβολή C_1: $y^2=8x$ και η ευθεία C_2 που τέμνει την παραβολή στα σημεία Α και Β. Έστω Μ (4, 1) το μέσον του ΑΒ. Να βρεθεί η εξίσωση της C_2.

235. Δίνεται η παραβολή C: y=$\frac{1}{2}x^2$. Η εφαπτομένη σε ένα σημείο Α της παραβολής τέμνει τον άξονα xx΄ στο σημείο Μ και τον yy΄ στο σημείο Β. Να δείξετε ότι η ΕΜ είναι διάμεσος του τριγώνου ΑΕΒ όπου Ε η εστία της παραβολής.

236. **Α)** Να βρεθεί το σημείο Μ που ανήκει στον γεωμετρικό τόπο των σημείων του επιπέδου που ισαπέχουν από την ευθεία x=-$\frac{1}{2}$ και το σημείο Ε ($\frac{1}{2}$, 0), ώστε $\left|\vec{AM}\right| \le \sqrt{5}$, όπου Α (1, 4).

Β) Ποιο σημείο Κ του παραπάνω γεωμετρικού τόπου ικανοποιεί την σχέση: $\left|\vec{OA}\right| = \left|\vec{AK}\right|$.

237. Ένα παραβολικό κάτοπτρο έχει βάθος 12 cm και διαμετρικό άνοιγμα 32cm. Βρείτε την απόσταση της κορυφής από την εστία.

238. Δίνεται η παραβολή με εξίσωση: $y^2=2px$. Έστω δύο ευθείες που διέρχονται από την αρχή των αξόνων, σχηματίζουν ορθή γωνία μεταξύ τους και τέμνουν την παραβολή στα σημεία Β και Γ (Β$\neq$Γ),
α) Να βρεθούν οι συντεταγμένες των Β και Γ,

β) Να δοθεί η εξίσωση της ευθείας ΒΓ,
γ) Να δείξετε ότι η ευθεία ΒΓ διέρχεται πάντα από το ίδιο σημείο.

239. Θεωρούμε την παραβολή $y^2=2px$, $(p>0)$ και τυχαίο σημείο Μ (x_1, y_1) της παραβολής (Μ διαφορετικό του Ο). Από το σημείο Μ φέρνουμε κάθετη στον yy. Έστω Ν το σημείο τομής. Φέρνουμε την ΟΜ και από το Ν φέρνουμε κάθετη στην ΟΜ, που τέμνει την ΟΜ στο Κ και τον xx΄στο Λ.
Α) Να δείξετε ότι το Λ είναι σταθερό και ανεξάρτητο του Μ, και
Β) Να βρεθεί η εξίσωση του γεωμετρικού τόπου του Κ.

240. Δίνεται η παραβολή με εξίσωση: $y^2=16x$,
α) Βρείτε την ευθεία (ε) που διέρχεται από την εστία και είναι παράλληλη στην ευθεία με εξίσωση: $4x+3y+2004=0$,
β) Αν η (ε) τέμνει την παραβολή στα σημεία Α και Β να βρείτε τις συντεταγμένες τους,
γ) Δείξτε ότι οι εφαπτομένες της παραβολής στα σημεία Α και Β τέμνονται κάθετα και ότι το σημείο τομής τους ανήκει στην διευθετούσα της παραβολής.

241. Δίνεται η παραβολή με εξίσωση: $y^2=6x$ και η ευθεία (ε) $y=3x+10$. Να δείξετε ότι όλα τα μέσα των χορδών που είναι παράλληλες προς την (ε) βρίσκονται πάνω σε μία σταθερή ευθεία (χορδή της παραβολής λέγεται το ευθύγραμμο τμήμα που ενώνει δύο σημεία της).

242. Να βρεθεί ο γεωμετρικός τόπος των μέσων των παραλλήλων χορδών της παραβολής $y^2=2px$.

243. Θεωρούμε την παραβολή $y^2=2px$, $(p>0)$ και την εφαπτομένη (ε) της παραβολής στο σημείο Μ (x_1, y_1), (Μ διαφορετικό του Ο). Από την κορυφή Ο της παραβολής φέρνουμε την κάθετη στην εφαπτομένη, που την τέμνει στο σημείο Κ. Αν η κάθετος συναντά την παραβολή στο Λ να δείξετε ότι: $d(O, K).d(O, \Lambda)=p^2$.
244. Θεωρούμε την παραβολή $y^2=2px$, $(p>0)$ και δύο σημεία Α, Β διάφορα της κορυφής. Αν (ε) είναι η εφαπτομένη της παραβολής στο σημείο Μ (x_1, y_1), (Μ διαφορετικό του Ο) και (ε) //ΑΒ να δείξετε ότι: $y_1=\frac{y_A+y_B}{2}$.

245. Έστω παραβολή C: $y^2=2px$ $(p>0)$ με κορυφή Ο (0, 0) και σημείο Μ (x_o, y_o) με $x_o\neq 0$ της C και Μ΄ το συμμετρικό του Μ ως προς τον xx΄. Θέτω Κ και Λ τα μέσα των ευθυγράμμων τμημάτων ΟΜ και ΟΜ΄ αντίστοιχα.
Α) Δείξτε ότι οι μεσοκάθετες ε_1 και ε_2 των ΟΜ και ΟΜ΄ αντίστοιχα τέμνονται σε σημείο Σ του άξονα xx΄ και να βρεθούν οι συντεταγμένες του.
Β) Ποιες πρέπει να είναι οι συντεταγμένες των Μ και Μ΄ ώστε το τετράπλευρο ΟΜΣΜ΄ να γίνει ρόμβος.
Γ) Να βρεθεί η γωνία ΜΟΜ΄ στην περίπτωση του ερωτήματος (Β).
Δ) Ποιες οι συντεταγμένες του Μ όταν η γωνία ΜΟΣ είναι 45^o.
Ε) Όταν ΜΟΣ=45^o τι σχήμα δημιουργούν τα Ο, Μ, Σ, Μ΄.

246. Έστω (ε): η εφαπτομένη σε τυχαίο σημείο Κ (x_1, y_1) της παραβολής C: $y^2=2px$ και ΑΒ χορδή της παραβολής παράλληλη στην (ε) που περνάει από την εστία Ε. Να δείξετε ότι: $\left|\vec{AB}\right|=4\left|\vec{EK}\right|$.

247. Δίνεται η παραβολή: y^2=3x και δύο σημεία της Α (x_1, y_1) και Β (x_2, y_2) με $x_1 \neq x_2$, $B\widehat{O}A = 90^o$, Να δείξετε ότι:
α) $x_1 . x_2$=9 και $y_1 . y_2$=-9,
β) Η ΑΒ διέρχεται από σταθερό σημείο του xx΄,
γ) Οι εφαπτομένες της παραβολής στα Α και Β τέμνονται στο σημείο Μ το οποίο κινείται σε σταθερή ευθεία.

248. Να αποδείξετε ότι τα σημεία $M\left(2pt^2, 2pt\right)$ με $t \in \mathbb{R}$ και $p \neq 0$ κινούνται σε μια παραβολή.

249. Να αποδείξετε ότι ο κύκλος $(C_1): x^2 + y^2 - 6x + 1 = 0$ εφάπτεται στην παραβολή (C): $y^2 = 4x$.

250. Δίνεται η παραβολή y^2 = 4x. Να βρείτε:
Α. την εστία και τη διευθετούσα της παραβολής
Β. τις ευθείες που διέρχονται από την εστία της παραβολής και απέχουν από την αρχή των αξόνων απόσταση ίση με $\frac{\sqrt{2}}{2}$
Γ. την εξίσωση της εφαπτομένης της παραβολής που είναι παράλληλη στην ευθεία y=x – 1. (ΘΕΜΑ 2002)

251. Να υπολογιστεί η υποτείνουσα ΟΒ ορθογωνίου τριγώνου ΑΟΒ με Α (1, 2) το οποίο είναι εγγεγραμμένο στην παραβολή C: $ψ^2$=2ρx.

252. Να δείξετε ότι το συμμετρικό της εστίας Ε μιας παραβολής ως προς τυχαία εφαπτομένη της βρίσκεται στη διευθετούσα της παραβολής.

253. Σε ένα σημείο Μ μιας παραβολής (διαφορετικό από την κορυφή της) θεωρούμε την εφαπτομένη και την κάθετη της, που τέμνουν τον άξονά της παραβολής στα σημεία Α και Β αντίστοιχα. Να δείξετε ότι η εστία Ε είναι το μέσο του τμήματος ΑΒ.

254. Να δείξετε ότι τα μέσα των χορδών της παραβολής C: $ψ^2$=2ρx που διέρχονται από την κορυφή της παραβολής ανήκουν στην παραβολή C΄: $ψ^2$=ρx.

255. Δίνεται σημείο Α (4, 0) και ευθεία ε: x=1. Σημείο Ρ κινείται στο επίπεδο έτσι ώστε ΡΑ΄=ΡΑ$\cdot$συνθ όπου Α΄ η προβολή του Ρ στην ε και $\theta \in \mathbb{R}$.
Να βρεθεί ο γ.τ. του Ρ όταν: i. θ=0 ii. $\theta = \frac{\pi}{3}$

ΕΛΛΕΙΨΗ

256. Να βρεθεί η εξίσωση της έλλειψης αν έχει:
ι) Εστίες E_1 (-5, 0), και E_2 (5, 0) και μεγάλο άξονα 24,

ii) Μεγάλο άξονα 20 και εκκεντρότητα $\frac{3}{5}$,

iii) Εστιακή απόσταση 2γ=6 και εκκεντρότητα $\frac{3}{5}$.

257. Δίνεται η έλλειψη $4x^2+25y^2=100$. Να βρεθούν:
i) Τα μήκη των αξόνων,
ii) Οι εστίες,
iii) Η εκκεντρότητα.

258. Να βρεθούν οι εξισώσεις των εφαπτομένων των ελλείψεων:
i) $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{9}=1$**,** στο σημείο (-2, $\frac{3\sqrt{3}}{2}$),
ii) $9x^2+25y^2=225$ στο σημείο (0, -3).

259. Να βρεθούν οι εξισώσεις των εφαπτομένων της έλλειψης: $4x^2+25y^2-100=0$, οι οποίες είναι παράλληλες προς την ευθεία 2x-3y+1=0.

260. Να βρεθούν οι εξισώσεις των εφαπτομένων της έλλειψης: $2x^2+3y^2-24=0$, που είναι κάθετες στην ευθεία -x-2y+5=0.

261. Να βρεθούν οι εφαπτομένες της έλλειψης (C): $3x^2+y^2=4$, οι οποίες είναι παράλληλες στην ευθεία (η): $3x+y-7=0$.

262. Να βρεθούν οι εφαπτομένες της έλλειψης (C): $\frac{x^2}{15}+\frac{y^2}{10}=1$, οι οποίες είναι κάθετες στην ευθεία (η): $2x-2y+7=0$.

263. Να βρεθούν οι εφαπτομένες της έλλειψης $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{5}=1$**,** τις οποίες φέρνουμε από το σημείο (3, 5).

264. Να βρεθούν οι εξισώσεις των εφαπτόμενων της έλλειψης C: $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{16}=1$, που περνούν από το σημείο Μ (5, 8).

265. Να βρείτε τις εξισώσεις των εφαπτομένων της έλλειψης C: $x^2+4y^2=10$ που έχουν:

α) Συντελεστή διεύθυνσης λ=$-\frac{3}{2}$,

β) Διέρχονται από το σημείο Μ (4, 1),

γ) Διέρχονται από το σημείο Ν ($\sqrt{10}, \frac{\sqrt{10}}{2}$).

266. Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της έλλειψης $(C): \frac{x^2}{3}+y^2=1$**,** η οποία σχηματίζει με τους θετικούς ημιάξονες ισοσκελές τρίγωνο.

267. Δίνεται η έλλειψη C: $4x^2+9y^2=36$. **Α)** Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της έλλειψης στο σημείο της Μ ($\sqrt{5}$, μ), μ<0.

Β) Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της C που διέρχεται από το σημείο τομής της C, **α)** με τον xx; **β)** με τον άξονα yy; **γ)** με την ευθεία y=x.

268. Να βρείτε την εφαπτομένη της έλλειψης C: $3x^2+8y^2=45$, που απέχει από την αρχή των αξόνων απόσταση ίση με 3.

269. Δίνεται η έλλειψη $(C): \frac{x^2}{\alpha^2}+\frac{y^2}{\beta^2}=1$ και η εφαπτομένη (ε) αυτής στο σημείο Μ.
Η (ε) τέμνει την εφαπτομένη της (C) στο Α, στο σημείο Ρ. Να αποδειχθεί ότι : ΟΡ//Α΄Μ.

270. Να βρεθεί η εξίσωση της έλλειψης με άξονες συμμετρίας τους xx΄και yy΄ που έχει εφαπτομένη την ευθεία (ε): $x+2y=5$ και περνάει από το σημείο (-4, 0). Να βρεθεί και το σημείο επαφής.

271. Να βρεθεί η εξίσωση της έλλειψης όταν γ=2 και εφάπτεται στην ευθεία $2x+3y+9=0$.

272. Σε μία έλλειψη είναι α=5. Να προσδιοριστεί το β καθώς και το σημείο Μ που εφάπτεται η ευθεία (ε): $y=\frac{1}{3}x+3$ στην έλλειψη.

273. Δίνεται η έλλειψη: $\frac{x^2}{4^2}+\frac{y^2}{3^2}=1$ και η ευθεία $x+y+\mu=0$, $\mu \in R$.

Α) Να βρεθούν οι τιμές του μ ώστε η έλλειψη και η ευθεία να έχουν δύο κοινά σημεία.
Β) Να βρεθεί ο γ.τ. του μέσου των χορδών κατά τις οποίες η ευθεία ε τέμνει την έλλειψη για τις παραπάνω τιμές του μ.

274. Να δειχτεί ότι το γινόμενο των αποστάσεων των εστιών E_1 και E_2 μιας έλλειψης από μία εφαπτομένη της είναι σταθερό.

275. Δίνεται η έλλειψη C: $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{16}=1$, και το σημείο Μ (4, 1),

α) Να δείξετε ότι το Μ είναι εσωτερικό σημείο της έλλειψης,
β) Να βρείτε την εξίσωση της χορδής της έλλειψης που έχει μέσον το Μ.

276. **ι)** Να βρεθεί η εξίσωση της έλλειψης με $\varepsilon=\frac{4}{5}$ και Ε΄ (-4, 0),

ιι) Να βρεθούν τα σημεία τομής της παραπάνω έλλειψης με την ευθεία y=x,
ιιι) Να βρεθούν οι εξισώσεις των πλευρών του ορθογωνίου που περιέχουν την έλλειψη.

277. Να βρείτε το γ. τ. της κορυφής Μ του τριγώνου ΜΓΔ που έχει περίμετρο 28 και Γ (-4, 0) και Δ (4, 0).

278. Έστω Ε και Ε΄ οι εστίες της έλλειψης $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{16}=1$ και Μ τυχαίο σημείο της. Αν (ΜΕ)=1 να βρείτε το μήκος ΜΕ΄.

279. Δίνεται η έλλειψη C: $4x^2+9\psi^2=36$ και το σημείο Ρ (2, 1). Να δείξετε ότι το Ρ είναι εσωτερικό σημείο της έλλειψης και να βρείτε την εξίσωση της χορδής που έχει μέσο το σημείο Ρ.

280. Δίνεται η έλλειψη: $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{\beta^2}=1$ και το σημείο Α (1, 1). Να βρεθεί η εξίσωση της ευθείας που τέμνει την έλλειψη στα σημεία Β και Γ ώστε το Α να είναι το μέσον του ευθύγραμμου τμήματος ΒΓ.

281. Δίνεται ο κύκλος $x^2+y^2=4$, και η έλλειψη: $\frac{x^2}{2}+\frac{y^2}{6}=1$,

α) Να βρεθούν τα κοινά τους σημεία,

β) Να δείξετε ότι τα κοινά τους σημεία είναι κορυφές ορθογωνίου παραλληλογράμμου.

282. Δίνεται η έλλειψη $\frac{x^2}{9}+y^2=1$,ο κύκλος $x^2+y^2=9$ και ένα σημείο Γ του κύκλου. Η κάθετος από το Γ προς τον άξονα x΄x τέμνει την έλλειψη στο σημείο Δ. Να αποδείξετε ότι οι εφαπτομένες του κύκλου και της έλλειψης στα σημεία Γ και Δ αντίστοιχα, τέμνονται σε σημείο Ρ, το οποίο ανήκει στον άξονα x΄x.

283. Δίνεται η έλλειψη C: $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{2}=1$ και η ευθεία (ε) y=2x+1,

α) Δείξτε ότι η ευθεία τέμνει την έλλειψη σε δύο σημεία Α και Β,

β) Να υπολογίσετε τις συντεταγμένες του μέσου της χορδής ΑΒ,

γ) Να υπολογίσετε το εσωτερικό γινόμενο: $\vec{OA}.\vec{OB}$, όπου Ο το κέντρο της έλλειψης.

284. Να βρείτε την εκκεντρότητα της έλλειψης που έχει κέντρο την αρχή των αξόνων, εστίες στον xx΄και ο μικρός άξονας φαίνεται από τις εστίες υπό γωνία 45^o.

285. Έστω έλλειψη με εστίες Ε και Ε΄ στον xx΄ και μικρό άξονα ΒΒ΄. Αν το τρίγωνο Ε΄ΒΕ είναι ισόπλευρο, να βρείτε την εκκεντρότητα της έλλειψης.

286. Έστω έλλειψη με εστίες Ε και Ε΄ στον xx΄ και μεγάλο άξονα ΑΑ΄. Αν ΕΑ=2 και ΕΑ΄=10, να βρείτε την εκκεντρότητα της έλλειψης.

287. Δίνεται η έλλειψη C: $x^2+2y^2=1$ και το σημείο της Μ $(\frac{1}{2},\lambda)$, λ<0. Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας που διχοτομεί την γωνία Ε΄ΜΕ, όπου Ε΄ και Ε είναι οι εστίες της έλλειψης.

288. Να δείξετε ότι οι ελλείψεις: C_1: $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{\beta^2}=1$ και C_2: $\frac{x^2}{a^2+\lambda^2}+\frac{y^2}{\beta^2+\lambda^2}=1$, α>β>0, έχουν τις ίδιες εστίες.

289. Να δείξετε ότι οι ελλείψεις: C_1: $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{\beta^2}=1$ και C_2: $\frac{x^2}{a^2\lambda}+\frac{y^2}{\beta^2\lambda}=1$, α>β>0 και λ>0, είναι όμοιες.

290. Έστω η έλλειψη: C: $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{\beta^2}=1$ και το σημείο της Μ. Να δείξετε ότι: (ΜΕ΄).(ΜΕ)+$OM^2=\alpha^2+\beta^2$.

291. Να βρείτε την εξίσωση της έλλειψης C που έχει κέντρο την αρχή των αξόνων, μία εστία της, είναι η εστία της παραβολής C_1: $x^2=4\sqrt{3}y$ και διέρχεται από το κέντρο του κύκλου C_2: $2x^2+2y^2-x-2\sqrt{15}y=0$.

292. Να βρείτε την εξίσωση της έλλειψης C που έχει κέντρο την αρχή των αξόνων και διέρχεται από το κέντρο του κύκλου C_1: $4x^2+4y^2-8x-4\sqrt{3}y+3=0$ και την εστία της παραβολής C_2: $y^2=8x$.

293. Αν το σημείο P (x_o, y_o) κινείται στον κύκλο $x^2+y^2=3$, να αποδείξετε ότι το σημείο M (x, y) με $x=\frac{1}{2}x_o$ και $y=2y_o$, κινείται σε έλλειψη της οποίας να βρείτε την εκκεντρότητα.

294. Έστω τα σημεία Ε΄ (-1, 0) και Ε (1, 0) και η ευθεία δ: x+1=0. Να βρείτε το σημείο Μ του επιπέδου ώστε d(M, E)=d(M,δ) και (ΜΕ΄)+(ΜΕ)=4.

295. Δίνεται η έλλειψη C: $x^2+4y^2=4$ και το σημείο Σ (0, 2). Η ευθεία ε: $\sqrt{3}x-2y+2\beta=0$ διέρχεται από το Σ και τέμνει τις εφαπτομένες της έλλειψης στα άκρα του μεγάλου άξονα στα σημεία Μ και Μ΄, να βρείτε την εξίσωση του κύκλου C΄ με διάμετρο ΜΜ΄.

296. Δίνονται τα σημεία Α (-4, 0) και Β (4, 0). Να βρείτε τα γεωμετρικό τόπο των σημείων Μ του επιπέδου για τα οποία είναι : $\lambda_{AM}\cdot\lambda_{BM}=-9$. Να σχεδιάσετε τη γραμμή που θα προκύψει.

297. Αν το φ μεταβάλλεται στο $\mathbb{R}$, να βρείτε το γεωμετρικό τόπο του σημείου Μ $(5\eta\mu\varphi, 4\sigma\upsilon\nu\varphi)$. Να σχεδιάσετε τη γραμμή αυτή με λεπτομέρεια.

ΥΠΕΡΒΟΛΗ

298. Να βρεθεί η εξίσωση της υπερβολής αν έχει:
ι) Εστιακή απόσταση 2γ=20 και άξονα 2β=16,
ιι) Άξονα 2α=16 και εκκεντρότητα $\varepsilon=\frac{5}{4}$.

299. Δίνεται η υπερβολή: $9x^2-16y^2=144$. Να βρεθούν:
ι) Τα μήκη των αξόνων,
ιι) Οι εστίες,
ιιι) Η εκκεντρότητα.

300. Να βρεθεί η εξίσωση της υπερβολής που έχει ασύμπτωτες: $y=\pm\frac{4}{3}x$ και εστιακή απόσταση 2γ=20.

301. Να βρεθεί η εξίσωση της υπερβολής (C) όταν:

Α) Το σημείο Μ (8, $3\sqrt{3}$) ανήκει στην υπερβολή και η εκκεντρότητα είναι ε=$\frac{5}{4}$.

Β) Το σημείο Μ (6, $\frac{3}{2}\sqrt{5}$), ανήκει στην υπερβολή και οι ασύμπτωτες είναι: $y=\pm\frac{3}{4}x$.

302. Να βρεθεί η εξίσωση της υπερβολής που οι εστίες της συμπίπτουν με τις εστίες της έλλειψης: $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{1}=1$ και έχει εκκεντρότητα ε=2.

303. Να βρεθούν οι εξισώσεις των εφαπτομένων των υπερβολών:
   ι) $\frac{x^2}{64}-\frac{y^2}{16}=1$, στο σημείο (-10, -3),
   ιι) $25x^2-64y^2=1600$ στο σημείο ($-8\sqrt{2}$, 5).

304. Να βρεθούν οι εφαπτομένες της υπερβολής $x^2-y^2=16$ οι οποίες σχηματίζουν γωνία 120^o με τον άξονα xx΄.

305. Να βρεθούν οι εξισώσεις των εφαπτομένων της υπερβολής: $\frac{x^2}{16}-\frac{y^2}{9}=1$, οι οποίες είναι παράλληλες προς την ευθεία 5x-4y-3=0.

306. Να βρείτε τις εξισώσεις των εφαπτομένων της υπερβολής $x^2-2y^2=-16$ οι οποίες είναι παράλληλες στην ευθεία ε: 2x+4y-5=0 καθώς και την απόσταση των δύο εφαπτομένων.

307. Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της υπερβολής $x^2-2y^2=3$ που είναι κάθετη στο διάνυσμα: $\vec{v}$=(2, -1).

308. Να βρείτε τις εξισώσεις των εφαπτομένων της υπερβολής $x^2-y^2=16$, που διέρχονται από το σημείο Μ(-1, -7).

309. Έστω η έλλειψη C_1:$x^2+4y^2=4$ και η υπερβολή C_2: $x^2-2y^2=2$. Να δείξετε ότι : οι C_1 και C_2 έχουν τις ίδιες εστίες. Στην συνέχεια να βρείτε τα κοινά τους σημεία και να δείξετε ότι οι εφαπτομένες στα σημεία αυτά τέμνονται κάθετα.

310. Να βρείτε την εξίσωση της χορδής της υπερβολής C: $4x^2-9y^2=36$ που έχει μέσον το σημείο Μ (6, 2).

311. Αν $ε_1$ και $ε_2$ είναι οι εκκεντρότητες δύο συζυγών υπερβολών, να αποδειχτεί ότι: $ε_1^2+ε_2^2=ε_1^2.ε_2^2$. Συζυγείς λέγονται οι υπερβολές: $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{\beta^2}=1$ και $\frac{x^2}{\beta^2}-\frac{y^2}{a^2}=1$.

312. Να αποδειχτεί ότι το εμβαδόν του τριγώνου που σχηματίζεται από τις ασύμπτωτες μιας υπερβολής και μιας οποιαδήποτε εφαπτομένης είναι σταθερό.

313. Δίνεται η υπερβολή C: $4x^2-y^2=4$,
α) Να βρείτε τις εστίες Ε και Ε΄ και τις ασύμπτωτες ε και ε΄ της C,
β) Να βρείτε το σημείο Μ της ευθείας $y=-3x+1$, ώστε η ΕΜ να είναι παράλληλη στην ε,
γ) Να γράψετε την εξίσωση του κύκλου που έχει διάμετρο ΕΜ,
δ) Να δείξετε ότι τα μοναδικά σημεία της C που έχουν ακέραιες συντεταγμένες είναι τα (1, 0) και (-1, 0).

314. Έστω τα σημεία Μ ($\kappa t\sqrt{t^2+2}, \sqrt{3}(t^2+1)$), $t\in R$, $\kappa>0$.
α) Να βρεθεί ο γεωμετρικός τόπος των παραπάνω σημείων,
β) Να βρεθούν οι εξισώσεις των εφαπτομένων του παραπάνω γεωμετρικού τόπου που διέρχονται από το σημείο Α (1, 0),
γ) Να βρείτε τον κ και τον αντίστοιχο γεωμετρικό τόπο όταν οι εφαπτομένες είναι κάθετες μεταξύ τους.

315. Δίνονται τα σταθερά σημεία Α (-α, 0) και Β (α, 0) και το μεταβλητό σημείο Μ (x, y) του επιπέδου ώστε $\lambda_{M\vec{A}}\cdot\lambda_{M\vec{B}}=1$, όπου $\lambda_{M\vec{A}}$ ο συντελεστής του $M\vec{A}$ και $\lambda_{M\vec{B}}$, ο συντελεστής του $M\vec{B}$. Να βρεθεί ο γεωμετρικός τόπος του Μ.

316. Δίνεται η ισοσκελής υπερβολή: $x^2-y^2=\alpha^2$. Μία ευθεία παράλληλη στον xx΄τέμνει την υπερβολή σε δύο σημεία Γ και Δ. Να δείξετε ότι οι γωνίες ΓΑΔ και ΓΑ΄Δ είναι ορθές (Α και Α΄ είναι οι κορυφές της υπερβολής).

317. Δίνεται η υπερβολή με εξίσωση: $x^2-y^2=\alpha^2$ και το σημείο της Σ (x_o, y_o) με $x_o>0$,
α) Να βρείτε τις εξισώσεις των ασύμπτωτων της,
β) Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας δ η οποία είναι κάθετη στην εφαπτομένη ε της υπερβολής στο Σ,
γ) Αν Ρ είναι το σημείο τομής της δ με τον xx΄και η κάθετη από το Σ στην μια ασύμπτωτη της υπερβολής τέμνει τον yy΄ στο Τ. Να δείξετε ότι $ΣΤ^2-ΣΡ^2=\alpha^2$.

318. Να βρείτε την εξίσωση της ισοσκελούς υπερβολής που έχει τις ίδιες εστίες με την έλλειψη $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{16}=1$.

319. Δίνεται η υπερβολή $(C):\frac{x^2}{\alpha^2}-\frac{y^2}{\beta^2}=1$ και μια ευθεία (η), η οποία διέρχεται από την αρχή Ο και τέμνει την (C) στα σημεία Μ και Ν. Να αποδειχθεί ότι οι εφαπτομένες της (C) στα Μ και Ν είναι παράλληλες.

320. Να αποδείξετε ότι το γινόμενο των αποστάσεων τυχαίου σημείου Μ της υπερβολής $(C): \dfrac{x^2}{\alpha^2} - \dfrac{y^2}{\beta^2} = 1$ από τις ασύμπτωτες είναι σταθερό και με ίσο με $\left(\dfrac{\alpha\beta}{\gamma}\right)^2$.

321. Να δειχτεί ότι η απόσταση μιας εστίας της υπερβολής $\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{\beta^2} = 1$ από μία ασύμπτωτή της είναι ίση με β.

322. Να βρείτε το γεωμετρικό τόπο του σημείου Μ, των οποίων η απόσταση από το σημείο Ε(0,6) είναι τα 3/2 της απόστασής τους από την ευθεία (δ): $3y - 8 = 0$.

261. Ένα σημείο Μ κινείται ώστε η απόστασή του από το σημείο Α(0,5), να είναι τα $\dfrac{5}{3}$ της απόστασής του από την ευθεία (δ): $5y - 9 = 0$. Να βρεθούν :

α) Ο γεωμετρικός τόπος (C) του Μ.

β) Οι εστίες οι ασύμπτωτες και η εκκεντρικότητα της (C).

ΣΥΝΔΥΑΣΤΙΚΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ

324. **Α.** Δίνεται η εξίσωση $x^2 + y^2 + 6\mu x + 8\lambda y = 0$, όπου μ, λ πραγματικοί αριθμοί διάφοροι του μηδενός. Να δείξετε ότι, για κάθε τιμή των μ, λ, η παραπάνω εξίσωση παριστάνει κύκλο που διέρχεται από την αρχή των αξόνων Ο.

Β. Έστω ότι για τους πραγματικούς αριθμούς μ, λ ισχύει η σχέση $3\mu + 2\lambda = 0$.

α. Να δείξετε ότι, όλοι οι κύκλοι που ορίζονται από την εξίσωση $x^2 + y^2 + 6\mu x + 8\lambda y = 0$ για τις διάφορες τιμές των μ και λ, έχουν τα κέντρα τους σε ευθεία που διέρχεται από την αρχή των αξόνων.

β. Να βρείτε τα μ, λ έτσι, ώστε, αν Α, Β είναι τα σημεία τομής του αντίστοιχου κύκλου με την ευθεία $x + y + 2 = 0$, να ισχύει $\vec{OA} \cdot \vec{OB} = 0$.

γ. Για τις τιμές των μ, λ που βρήκατε στο ερώτημα **β** να υπολογίσετε το εμβαδόν του τριγώνου ΑΟΒ. (ΘΕΜΑ 2001)

325. Δίνεται η εξίσωση: $x^2 + y^2 - 2\lambda x - 1 = 0$ (1), όπου $\lambda \in \mathbf{R}$.

(i) Να αποδείξετε ότι για κάθε τιμή του *λ* η (1) παριστάνει κύκλο του οποίου ζητείται να βρεθεί το κέντρο και η ακτίνα.

(ii) Να αποδείξετε ότι όλοι οι κύκλοι C_λ που ορίζονται από την (1) για τις διάφορες τιμές του *λ* διέρχονται από δύο σταθερά σημεία. Ποιά είναι η εξίσωση της κοινής χορδής όλων αυτών των κύκλων;

326. Δίνονται οι κύκλοι $C_1 : x^2 + y^2 = 1$ και $C_2 : (x-2)^2 + y^2 = 2^2$ και η ευθεία $y = \lambda x + \beta$, όπου $\lambda, \beta \in \mathbf{R}$.

(i) Ποιες είναι οι αποστάσεις των κέντρων των κύκλων C_1 και C_2 από την ευθεία;

(ii) Για ποιες τιμές των *λ* και β η ευθεία εφάπτεται και στους δύο κύκλους;

(iii) Να αποδείξετε ότι οι κοινές εφαπτόμενες των κύκλων C_1 και C_2 τέμνονται πάνω στον άξονα $x'x$ και σχηματίζουν μεταξύ τους γωνία 60^0.

327. Να βρεθεί εξίσωση κύκλου με κέντρο K (x_0, $ψ_0$) ($x_0 < ψ_0$) και ακτίνα ρ όταν:

- Τα x_0, $ψ_0$ είναι πιθανές τιμές του Μ.Κ.Δ των ακεραίων 2α+3β,3α+2β όπου $α,β \in \mathbb{Z}^*$ με (α,β)=1
- ρ=$|\overrightarrow{AB}|$ όπου Α,Β σημεία της παραβολής $x^2=4ψ$ με την ίδια τεταγμένη τέτοια ώστε $\widehat{AOB}=90^\circ$.

328. α) Να βρείτε την εξίσωση του συμμετρικού του κύκλου C: $(x-1)^2+(ψ+1)^2=5$ ως προς την ευθεία ε: 2x+ψ-5=0

β) Ποια είναι η σχετική θέση των ε και C;

329. Δίνεται η εξίσωση: $x^2+ψ^2-4ψ+3=0$.

Α) Να δείξετε ότι παριστάνει εξίσωση κύκλου του οποίου να βρεθεί το κέντρο και η ακτίνα.

Β) Να βρεθεί ευθεία της μορφής ψ=λx που να εφάπτεται στον προηγούμενο κύκλο.

Γ) Να βρεθεί η εξίσωση της υπερβολής $\frac{x^2}{α^2}-\frac{ψ^2}{β^2}=1$ που έχει ως ασύμπτωτες τις ευθείες του προηγούμενου ερωτήματος αν επιπλέον ισχύει: $β^2=α^2+2$.

330. Δίνεται το σημείο $A(3,0)$ και η ευθεία x=6. Να βρεθεί ο γ. τόπος των σημείων Μ για τα οποία: $\frac{d(A,M)}{d(M,ε)}=\frac{\sqrt{2}}{2}$.

331. Δίνεται ο κύκλος C: $x^2+ψ^2=4$ και το σημείο Α (2, 4).

α) Να δείξετε ότι: το Α είναι εξωτερικό του κύκλου

β) Να βρείτε τις εφαπτόμενες του κύκλου που άγονται από το Α.

γ) Αν Β,Γ τα σημεία επαφής των προηγούμενων εφαπτόμενων, να βρείτε την προβολή του Α στη ΒΓ.

δ) Να βρείτε το συμμετρικό του Α ως προς τη ΒΓ.

ε) Να βρείτε τη γωνία των εφαπτόμενων.

στ) Να βρείτε το εμβαδόν του τριγώνου ΑΒΓ.

332. α) Να δείξετε ότι η εξίσωση: $x^2+ψ^2-2κx-2λψ=0$ (1), κ, λ $\in \mathbb{R}^*$ παριστάνει κύκλο, του οποίου να βρείτε το κέντρο και την ακτίνα.

β)Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτόμενης του παραπάνω κύκλου στο σημείο Ο (0, 0).

γ) Να βρείτε τον γεωμετρικό τόπο των κέντρων των κύκλων της (1) αν ισχύει κ-λ=2.

333. Τα σημεία Α,Β κινούνται στους άξονες x΄x και ψ΄ψ έτσι ώστε $|\overrightarrow{AB}|=6$. Να βρείτε τον γεωμετρικό τόπο του μέσου Μ του ΑΒ.

334. Δίνονται δύο κύκλοι C_1, C_2 που διέρχονται από το σημείο Α (14, 2), έχουν τα κέντρα τους στην ευθεία ψ=$\frac{1}{2}$x και εφάπτονται στον x΄x. Να βρείτε:

i. τις εξισώσεις τους

ii. την εξίσωση της άλλης κοινής εφαπτομένης τους.

335. Δίνεται η εξίσωση $x^2+ψ^2-2=2x\lnθ+\ln^2θ+4\lnθ$ (1), $θ>0$

i. Για ποιες τιμές του θ η (1) παριστάνει κύκλο;
ii. Για τις τιμές του θ του (i) ερωτήματος να βρεθεί το κέντρο και η ακτίνα του κύκλου.
iii. Να εξεταστεί αν υπάρχει τιμή του θ ώστε η ευθεία ζ: $ψ=x+4$ να εφάπτεται του κύκλου.