

## ΜΗΧΑΝΙΚΕΣ ΤΑΛΑΝΤΩΣΕΙΣ

1. Ένα σώμα μάζας  $m=2\text{ kg}$  εκτελεί απλή αρμονική ταλάντωση σε οριζόντια διεύθυνση. Στη θέση με απομάκρυνση  $x_1=+2\text{ m}$  το μέτρο της ταχύτητας του είναι  $u_1=4\text{ m/s}$ , ενώ στη θέση με απομάκρυνση  $x_2=+4\text{ m}$  το μέτρο της ταχύτητας του είναι  $u_2=2\text{ m/s}$ . Να βρείτε:

- Τη σταθερά επαναφοράς  $D$ .
- Την περίοδο  $T$  της ταλάντωσης
- Την ενέργεια της ταλάντωσης
- Το πλάτος  $A$  της ταλάντωσης.

$$\left[ 2 \frac{N}{m}, 2\pi \text{ sec}, 20 \text{ J}, 2\sqrt{5} \text{ m} \right]$$

2. Ένα σώμα μάζας  $m=2\text{ kg}$  κάνει απλή αρμονική ταλάντωση πλάτους  $A=8\text{ m}$ . Όταν το σώμα βρίσκεται στις ακραίες θέσεις της τροχιάς του, η δύναμη επαναφοράς έχει μέτρο  $F=16\text{ N}$ . Να βρείτε:

- τη σταθερά επαναφοράς  $D$
- τη μέγιστη ταχύτητα του σώματος.
- το μέτρο της δύναμης επαναφοράς όταν το μέτρο της απομάκρυνσης είναι  $x=3\text{ m}$

3. Ένα σώμα μάζας  $m=2\text{ kg}$  κάνει απλή αρμονική ταλάντωση πλάτους  $A=5\text{ m}$ . Όταν η απομάκρυνση του σώματος από τη θέση ισορροπίας είναι  $x=3\text{ m}$ , η δύναμη επαναφοράς έχει μέτρο  $F=96\text{ N}$ . Να βρείτε:

- τη σταθερά επαναφοράς  $D$
- τη συχνότητα  $f$  της ταλάντωσης
- το μέτρο της ταχύτητας και της επιτάχυνσης του σώματος στη θέση όπου η απομάκρυνση είναι  $x=+3\text{ m}$

$$\left[ 32 \frac{N}{m}, \frac{2}{\pi} \text{ Hz}, 16 \frac{m}{\text{sec}}, 48 \frac{m}{\text{sec}^2} \right]$$

4. Ένα σώμα μάζας  $m=4\text{ kg}$  βρίσκεται σε λείο οριζόντιο επίπεδο και είναι δεμένο στο ελεύθερο άκρο οριζόντιου ελατηρίου. Απομακρύνουμε το σώμα από τη θέση ισορροπίας του κατά  $\Delta x=10\text{ cm}$  στη διεύθυνση του άξονα του ελατηρίου και στη συνέχεια το αφήνουμε ελεύθερο. Αν στη θέση της μέγιστης απομάκρυνσης η δύναμη του ελατηρίου έχει μέτρο  $F=6,4\text{ N}$ , να βρείτε:

- τη σταθερά  $k$  του ελατηρίου
- τη σταθερά επαναφοράς  $D$
- την περίοδο  $T$  της ταλάντωσης του σώματος
- την απομάκρυνση  $x$  του σώματος από τη θέση ισορροπίας και την ταχύτητα του μετά από χρόνο  $t=\pi/6\text{ sec}$  από τη στιγμή που το αφήνουμε ελεύθερο.

$$\left[ 64 \frac{N}{m}, 64 \frac{N}{m}, \frac{\pi}{2} \text{ sec}, -5 \text{ cm}, -20\sqrt{3} \frac{\text{cm}}{\text{sec}} \right]$$

5. Σώμα μάζας  $m=1\text{ kg}$  είναι δεμένο στο δεξιό άκρο οριζόντιου ελατηρίου σταθεράς  $k=64\text{ N/m}$  του οποίου το άλλο άκρο είναι δεμένο σε κατακόρυφο τοίχο. Το σώμα είναι φορτισμένο με φορτίο  $Q=+6,4 \cdot 10^{-3}\text{ C}$  και βρίσκεται σε μια περιοχή όπου υπάρχει ομογενές ηλεκτρικό πεδίο έντασης  $E=1000\text{ N/C}$  παράλληλης με τον άξονα του ελατηρίου και με φορά προς τα δεξιά. Αν το ηλεκτρικό πεδίο καταργηθεί

- να αποδείξετε ότι το σώμα θα κάνει α.α.τ. και να βρείτε:

β. το πλάτος και την περίοδο της ταλάντωσης καθώς και

γ. τη μέγιστη ταχύτητα του σώματος.

δ. Μετά από πόσο χρόνο από τη στιγμή κατάργησης του ηλεκτρικού πεδίου το σώμα αποκτά τη μέγιστη ταχύτητα;

6. Ένα σώμα εκτελεί α.α.τ. περιόδου  $T=2s$  και πλάτους  $A$ . Αν για  $t=0$  είναι  $\psi=0$  και  $u<0$ , να βρείτε τις χρονικές στιγμές κατά τις οποίες είναι  $\psi=\frac{A}{2}$  για πρώτη φορά, όταν το υλικό σημείο κινείται:

α. Κατά τη θετική κατεύθυνση

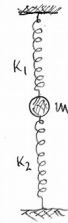
β. Κατά την αρνητική κατεύθυνση

$$\left(\frac{7}{6}, \frac{11}{6}\right)$$

7. Τα δυο κατακόρυφα ελατήρια με σταθερές  $k_1=120\frac{N}{m}$  και  $k_2=136\frac{N}{m}$  θεωρούνται ιδανικά.

Ανάμεσα στα ελατήρια υπάρχει δεμένο ένα σώμα και το σύστημα ισορροπεί όπως φαίνεται στο σχήμα. Αν εκτρέψουμε το σώμα κατακόρυφα προς τα κάτω και το αφήσουμε ελεύθερο να αποδείξετε ότι θα εκτελέσει α.α.τ. και να βρείτε την περίοδο της.

Στη θέση ισορροπίας να θεωρήσετε ότι το πάνω ελατήριο είναι επιμηκυμένο και το κάτω συσπειρωμένο.



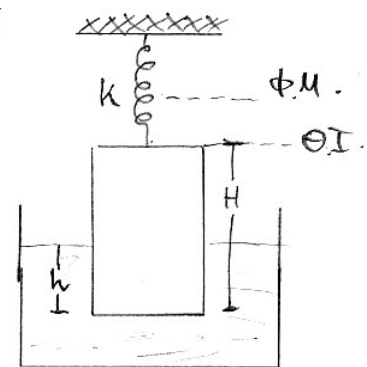
$$\left(\frac{\pi}{8}\right)$$

8. Κύλινδρος βάρους  $10N$ , ύψους  $H$  και διατομής  $S=20cm^2$  δένεται στο κάτω άκρο κατακόρυφου ελατηρίου σταθεράς  $k=380\frac{N}{m}$ , του οποίου το άλλο άκρο προσδένεται σε σταθερό σημείο. Ο κύλινδρος είναι βυθισμένος σε υγρό πυκνότητας  $d=10^3\frac{kg}{m^3}$  όπως φαίνεται στο σχήμα. Εκτρέπουμε τον κύλινδρο κατά  $A=0.02m$ , ώστε να βυθιστεί περισσότερο και τον αφήνουμε ελεύθερο

α. Να δείξετε ότι ο κύλινδρος θα εκτελέσει α.α.τ. και να υπολογίσετε την περίοδο του

β. Μετά από πόσο χρόνο από τη στιγμή που αφέθηκε ελεύθερος ο κύλινδρος θα περάσει για πρώτη φορά από την θέση ισορροπίας του;

γ. Να γράψετε την εξίσωση που περιγράφει την κίνηση του κυλίνδρου αν για  $t=0$  είναι  $y=+\frac{A}{\sqrt{2}}$  και  $u<0$ . Δίνεται  $g=10m/s^2$



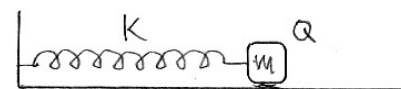
$$\left(\frac{\pi}{10}, \frac{\pi}{40}, \varphi_0=\frac{3\pi}{4}\right)$$

9. Το σώμα του σχήματος μάζας  $m=2kg$  και φορτίου  $Q=200\mu C$  ηρεμεί σε λείο οριζόντιο επίπεδο. Ξαφνικά δημιουργούμε οριζόντιο ηλεκτρικό πεδίο έντασης  $E=10^5\frac{N}{m}$  και το σύστημα αρχίζει να εκτελεί ταλαντώσεις.

α. Να δείξετε ότι το σύστημα κάνει α.α.τ. και να βρείτε το πλάτος και την περίοδο της

Όταν το σώμα αποκτήσει την μέγιστη ταχύτητα του καταργείται το πεδίο. Να υπολογίσετε:

β. Το μέτρο της ταχύτητας του σώματος τη στιγμή που καταργείται το πεδίο



γ. Το νέο πλάτος ταλάντωσης

$$(0, 1, \frac{\pi}{5}, 1, \frac{\sqrt{2}}{10})$$

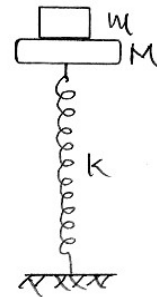
10. Υλικό σημείο εκτελεί α.α.τ. πλάτους  $A=10\text{ cm}$  και περιόδου  $T=6\text{ s}$ . Τη χρονική στιγμή  $t=0$  το υλικό σημείο διέρχεται από τη θέση ισορροπίας του, κινούμενο κατά τη θετική φορά του άξονα των απομακρύνσεων. Να βρείτε τις χρονικές στιγμές της περιόδου, κατά τις οποίες το σώμα διέρχεται από τη θέση στην οποία η απομάκρυνση του είναι  $x=5\sqrt{3}\text{ cm}$ . Ποια είναι τότε η ταχύτητα του;

$$[1, 2, \pi/60, -\pi/60]$$

11. Ένα σώμα εκτελεί απλή αρμονική ταλάντωση. Η απομάκρυνση του σε συνάρτηση με το χρόνο είναι  $x=4\eta\mu(\omega t + \frac{\pi}{3})$ . Το σώμα εκτελεί 15 πλήρεις ταλαντώσεις σε χρόνο  $1\text{ min}$ . Να βρείτε τη χρονική στιγμή μετά την στιγμή μηδέν, κατά την οποία το σώμα διέρχεται για δεύτερη φορά από τη θέση  $x=2\text{ m}$  με αρνητική κατεύθυνσης κίνησης.

[5]

12. Το ένα άκρο κατακόρυφου ιδανικού ελατηρίου είναι στερεωμένο σε οριζόντιο επίπεδο. Στο άλλο άκρο του συνδέεται σταθερά σώμα A μάζας  $M=3\text{ kg}$ . Πάνω στο σώμα A είναι τοποθετημένο σώμα B μάζας  $m=1\text{ kg}$  και το σύστημα ισορροπεί με το ελατήριο συσπειρωμένο από το φυσικό του μήκος κατά  $y_1=0,4\text{ m}$ . Στη συνέχεια εκτρέπουμε το σύστημα κατακόρυφα προς τα κάτω κατά  $y_2=0,8\text{ m}$  από τη θέση ισορροπίας του και το αφήνουμε ελεύθερο τη χρονική στιγμή  $t=0$ .



α. Να υπολογίσετε την κυκλική συχνότητα  $\omega$  της ταλάντωσης του συστήματος και τη σταθερά επαναφοράς  $D_1$  και  $D_2$  κάθε μιας μάζας ξεχωριστά.

β. Να δείξετε ότι το σώμα B θα εγκαταλείψει το σώμα A και να βρείτε τη θέση και την ταχύτητα του τότε.

Δίνεται  $g=10\text{ m/s}^2$ .

$$[\omega=5\text{ rad/s}, 75\text{ N/m}, 25\text{ N/m}, 0,4\text{ m}, v=2\cdot 3^{1/2}\text{ m/s}]$$

13. Ένα υλικό σημείο εκτελεί α.α.τ. Αν γνωρίζετε ότι, για τις τιμές  $x_1=0,5\text{ m}$  και  $x_2=0,3\text{ m}$  της απομάκρυνσης οι τιμές της ταχύτητας του είναι  $u_1=3\frac{\text{m}}{\text{s}}$  και  $u_2=5\frac{\text{m}}{\text{s}}$  αντίστοιχα, να βρείτε:

α. την περίοδο  $T$  της ταλάντωσης

β. Το πλάτος  $A$  της ταλάντωσης

$$[0, 2\pi, 0, 2]$$

14. Ένα υλικό σημείο εκτελεί α.α.τ. πλάτους  $A=1\text{ m}$  και περιόδου  $T=2\text{ s}$ . Να υπολογίσετε το ελάχιστο χρονικό διάστημα που απαιτείται για να μεταβεί το υλικό σημείο από τη θέση  $x_1=0,5\text{ m}$  στη θέση  $x_2=-0,5\text{ m}$ , αν κατά τη διέλευση του από τη θέση  $x_1$  κινείται:

α. Κατά τη θετική κατεύθυνση

β. Κατά την αρνητική κατεύθυνση.

$$[1, 1/3]$$

15. Υλικό σημείο εκτελεί α.α.τ. Η μέγιστη απόσταση που μπορεί να διανύσει το σημείο, κινούμενο κατά την ίδια φορά, είναι  $d=1\text{m}$ , ενώ κάθε φορά που ολοκληρώνει μια τέτοια κίνηση η επιτάχυνση του είναι  $a=2\frac{m}{s^2}$ . Τη στιγμή  $t=0$  το σημείο βρίσκεται στη θέση  $x=0,25\text{m}$  και έχει αρνητική ταχύτητα. Να βρεθούν οι εξισώσεις της απομάκρυνσης και της ταχύτητας του υλικού σημείου σε συνάρτηση με το χρόνο.

$$[0,5\eta\mu(2t+5\pi/6),,1\sigma\nu(2t+5\pi/6)]$$

16. Ένα σώμα μάζας  $m=0,5\text{kg}$  ισορροπεί εξαρτημένο από το κάτω άκρο κατακόρυφου ελατηρίου με σταθερά  $k=50\text{N/m}$ . Εκτρέπουμε το σώμα τραβώντας το με το χέρι μας προς τα κάτω κατά  $0,2\text{m}$  και τη χρονική στιγμή  $t=0$  το αφήνουμε ελεύθερο.

α. Ποια δύναμη ασκούσε το χέρι μας στο σώμα λίγο πριν το αφήσουμε ελεύθερο;

β. Να αποδείξετε ότι το σώμα θα εκτελέσει απλή αρμονική ταλάντωση

γ. Θεωρώντας ως θετική την κατακόρυφη προς τα πάνω φορά, να δώσετε τη χρονική εξίσωση της απομάκρυνσης του σώματος

δ. Να σχεδιάσετε το χρονικό διάγραμμα της συνισταμένης δύναμης που ενεργεί στο σώμα. Στο διάγραμμα να αναγράφουν όλες οι χαρακτηριστικές τιμές.

$$(10\text{N}, x=0,2\eta\mu(10t+3\pi/2))$$

17. Οι ακραίες θέσεις μιας απλής αρμονικής ταλάντωσης απέχουν  $l=20\text{cm}$ . Τη χρονική στιγμή  $t=0$  η ταχύτητα της ταλάντωσης είναι  $u=20\sqrt{3}\frac{\text{cm}}{\text{sec}}$  και η επιτάχυνση  $a=-80\frac{\text{cm}}{\text{sec}^2}$ .

α. Να εξετάσετε αν η ταλάντωση έχει αρχική φάση

β. Να βρεθεί η χρονική εξίσωση της απομάκρυνσης της ταλάντωσης

γ. Να βρεθεί ποια χρονική στιγμή η ταχύτητα θα μηδενιστεί για πρώτη φορά

δ. Να βρεθεί ποια χρονική στιγμή η δύναμη επαναφοράς θα μηδενιστεί για πρώτη φορά

$$(x=0,1\eta\mu(4t+\pi/6), \pi/12\text{ sec}, 5\pi/24\text{ sec})$$

18. Συμπαγής μεταλλικός κύλινδρος με πυκνότητα  $d=2\times 10^4\text{ kg/m}^3$ , ύψους  $h=0,1\text{m}$  και εμβαδού βάσης  $S=5\times 10^{-4}\text{m}^2$ , είναι κρεμασμένος από το κάτω άκρο ελατηρίου σταθεράς  $k=350\text{N/m}$ , του οποίου το άλλο άκρο είναι δεμένο ακλόνητα σε οριζόντιο ταβάνι. Ο κύλινδρος είναι βυθισμένος κατά το μισό του ύψος σε υγρό που έχει πυκνότητα  $d_1=10^4\text{kg/m}^3$  και ισορροπεί σε κατακόρυφη θέση.

α. Να βρείτε τη δύναμη του ελατηρίου όταν ο κύλινδρος ισορροπεί

β. Να αποδείξετε ότι αν μετατοπίσουμε λίγο τον κύλινδρο κατακόρυφα και στη συνέχεια τον αφήσουμε ελεύθερο, ο κύλινδρος θα κάνει απλή αρμονική ταλάντωση. Θεωρήστε ότι η στάθμη του υγρού δεν μεταβάλλεται και ότι οι τριβές είναι αμελητέες.

γ. Να υπολογίσετε τη συχνότητα της ταλάντωσης του κυλίνδρου. Δίνεται  $g=10\text{m/sec}^2$ .

$$\left[7,5\text{N}, 400\frac{\text{N}}{\text{m}}, \frac{10}{\pi}\text{Hz}\right]$$

19. Ένα σώμα μάζας  $m=2\text{kg}$  εκτελεί α.α.τ. Τη χρονική στιγμή  $t=0$  το σώμα βρίσκεται στη θέση  $x=0,1\text{m}$  του θετικού ημιαξονα, έχει ταχύτητα  $u=\sqrt{3}\text{m/s}$  και επιτάχυνση  $a=-10\text{m/s}^2$ .

α. Να υπολογίσετε την περίοδο της ταλάντωσης

β. Να υπολογίσετε το πλάτος της ταλάντωσης

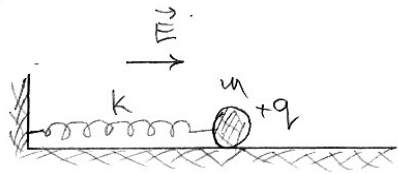
γ. Να γράψετε την εξίσωση της ταχύτητας του σώματος, σε συνάρτηση με το χρόνο.

δ. Να παραστήσετε γραφικά σε βαθμολογημένους άξονες τη συνισταμένη δύναμη που δέχεται το σώμα, σε συνάρτηση με την απομάκρυνση από τη θέση ισορροπίας του.

Δίνεται  $\eta\mu\frac{\pi}{6}=0,5$

$[T=\pi/5\text{sec},, A=0,2\text{ m},, u=2\text{ συν}(10t+\pi/6)]$

20. Μια μικρή μεταλλική σφαίρα μάζας  $m=0,25\text{ kg}$  φέρει ηλεκτρικό φορτίο  $q=10^{-3}\text{ C}$ . Η σφαίρα είναι δεμένη μέσω μονωτικού συνδέσμου στο ελεύθερο άκρο οριζόντιου ελατηρίου σταθεράς  $k=100\text{ N/m}$ , του οποίου το άλλο άκρο είναι στερεωμένο σε ακίνητο σημείο. Το σύστημα βρίσκεται μέσα σε οριζόντιο ομογενές ηλεκτρικό πεδίο έντασης μέτρου  $E=2\cdot 10^4\text{ N/C}$ , του οποίου οι δυναμικές γραμμές είναι παράλληλες προς τον άξονα του ελατηρίου. Η σφαίρα ισορροπεί πάνω σε λείο οριζόντιο επίπεδο από μονωτικό υλικό και το ελατήριο είναι αρχικά επιμηκυμένο. Εκτρέπουμε τη σφαίρα από τη θέση ισορροπίας της κατά τη διεύθυνση του άξονα του ελατηρίου, κατά  $x_0=0,1\text{ m}$  και την αφήνουμε ελεύθερη.



α. Να αποδείξετε ότι θα κάνει α.α.τ.

β. Να υπολογίσετε το πλάτος και τη γωνιακή συχνότητα της ταλάντωσης της σφαίρας

γ. Να γράψετε την εξίσωση της δύναμης που δέχεται η σφαίρα από το ελατήριο, σε συνάρτηση με το χρόνο. Ως χρονική στιγμή  $t=0$  να θεωρηθεί η χρονική στιγμή που η σφαίρα διέρχεται από τη θέση ισορροπίας της και κινείται κατά τη θετική φορά

δ. Όταν η σφαίρα βρίσκεται στη μέγιστη θετική απομάκρυνση από τη θέση ισορροπίας της καταργούμε ακαριαία το ηλεκτρικό πεδίο. Ποιο θα είναι το πλάτος ταλάντωσης της σφαίρας μετά την κατάργηση του ηλεκτρικού πεδίου;

$A'=0,3\text{ m} [A=0,1\text{ m},, \omega=20\text{ rad/s},, F_{ελ}=20+10\eta\mu 20t$

21. Σώμα μάζας  $m=2\text{ kg}$  είναι προσαρμοσμένο στο πάνω άκρο κατακόρυφου ιδανικού ελατηρίου σταθεράς  $k=200\text{ N/m}$  του οποίου το πάνω άκρο είναι στερεωμένο σε σταθερό σημείο. Ανυψώνουμε το σώμα κατακόρυφα, ώστε το ελατήριο να αποκτήσει το φυσικό του μήκος και τη χρονική στιγμή  $t=0$  το αφήνουμε ελεύθερο.

α. Να αποδείξετε ότι η κίνηση που θα εκτελέσει το σώμα είναι απλή αρμονική ταλάντωση

β. Να υπολογίσετε την ενέργεια που απαιτήθηκε για την ανύψωση του σώματος

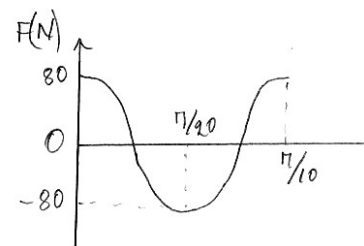
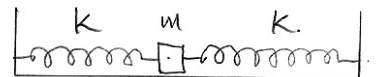
γ. Να γράψετε την εξίσωση της απομάκρυνσης του σώματος από τη θέση ισορροπίας του σε συνάρτηση με το χρόνο.

δ. Να προσδιορίσετε τη χρονική στιγμή που η δύναμη του ελατηρίου και η δύναμη επαναφοράς της ταλάντωσης έχουν ίσα μέτρα για δεύτερη φορά.

Δίνεται  $g=10\text{ m/s}^2$ . Να θεωρήσετε ως θετική φορά τη φορά προς τα επάνω.

$[E=1\text{ j},, x=0,1\eta\mu(10t+\pi/2),, t=\pi/6\text{ sec}]$

22. Σώμα μάζας  $m=1\text{ kg}$  ισορροπεί πάνω σε λείο οριζόντιο επίπεδο, στερεωμένο στα άκρα δυο οριζόντιων ελατηρίων της ίδιας σταθεράς  $K$ , όπως φαίνεται στο σχήμα. Τα δυο ελατήρια έχουν το φυσικό τους μήκος. Όταν το σώμα εκτραπεί από τη θέση ισορροπίας του κατά μήκος του κοινού άξονα των δυο ελατηρίων, εκτελεί α.α.τ. Το διάγραμμα του σχήματος παριστάνει τη μεταβολή της δύναμης επαναφοράς  $F$  που δέχεται το σώμα, σε συνάρτηση με το χρόνο  $t$ .



α. Να υπολογίσετε το πλάτος της ταλάντωσης του σώματος

β. Να αποδείξετε ότι η ταλάντωση έχει αρχική φάση και να προσδιορίσετε την τιμή της.

γ. Να γράψετε την εξίσωση της απομάκρυνσης του σώματος από τη θέση ισορροπίας του, σε συνάρτηση με το χρόνο και να παραστήσετε γραφικά την απομάκρυνση, σε συνάρτηση με το χρόνο.

δ. Να υπολογίσετε τη σταθερά κάθε ελατηρίου.

$$[A=0,2\text{ m}, \varphi_0=3\pi/2, x=0,2\text{ ημ}(20t+3\pi/2), K=200\text{ N/m}]$$