

## ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2<sup>ο</sup>: ΚΥΜΑΤΑ

### ΕΝΟΤΗΤΑ 1: Η ΕΝΝΟΙΑ ΤΟΥ ΚΥΜΑΤΟΣ - ΜΗΧΑΝΙΚΑ ΚΥΜΑΤΑ

1. Το σημείο Ο αρχίζει τη χρονική στιγμή  $t = 0$  να εκτελεί απλή αρμονική ταλάντωση, που περιγράφεται από την εξίσωση  $y = A\eta\mu\omega t$ . Το κύμα που δημιουργεί, διαδίδεται κατά μήκος ομογενούς γραμμικού ελαστικού μέσου και κατά τη θετική φορά.

Αν είναι γνωστό ότι:

- 1) το σημείο Ο περνάει από τη θέση ισορροπίας του 30 φορές το λεπτό,
- 2) η ολική ενέργεια ταλάντωσης της πηγής Ο είναι  $2 \cdot 10^{-4} J$ ,
- 3) κάθε στοιχειώδες τμήμα του ελαστικού μέσου θεωρείται υλικό σημείο μάζας  $m = 1g$  και
- 4) το κύμα φτάνει στο σημείο Σ, που απέχει από το Ο απόσταση  $4m$ , τη χρονική στιγμή  $t = 2s$ ,

να υπολογίσετε:

- α) την περίοδο του κύματος.
- β) το πλάτος του κύματος.
- γ) την ταχύτητα διάδοσης και το μήκος κύματος.
- δ) Να γράψετε την εξίσωση αυτού του κύματος.

Δίνεται  $\pi^2 = 10$ .

1α. Μια πηγή Ο που βρίσκεται στην αρχή του άξονα  $x'x$ , αρχίζει να εκτελεί τη χρονική στιγμή  $t = 0$ , απλή αρμονική ταλάντωση με εξίσωση  $y_0 = 6 \cdot 10^{-2}\eta\mu\pi t$  (S.I.). Το παραγόμενο γραμμικό αρμονικό κύμα διαδίδεται κατά τη θετική κατεύθυνση του άξονα  $x'x$  με ταχύτητα  $v = 8m/s$  σε γραμμικό ομογενές ελαστικό μέσο.

- α) Να βρείτε την περίοδο, τη συχνότητα και το μήκος κύματος.
- β) Να γράψετε την εξίσωση του κύματος.
- γ) Ποια χρονική στιγμή θα αρχίσει να κινείται ένα σημείο Μ του άξονα  $x'x$  που βρίσκεται στη θέση  $x = 20m$ ;
- δ) Να βρείτε τη φάση του σημείου Μ τις χρονικές στιγμές:  $t_1 = 1,5s$  και  $t_2 = 2,5s$ .
- ε) Να γράψετε για το σημείο Μ την εξίσωση της απομάκρυνσης  $y$  σε συνάρτηση με το χρόνο και να γίνει η γραφική της παράσταση.

2. Εγκάρσιο γραμμικό κύμα που διαδίδεται σε ένα ομογενές ελαστικό μέσον και κατά την θετική κατεύθυνση έχει εξίσωση  $y = 4 \cdot 10^{-2} \cdot \eta\mu(\pi t - 5\pi x)$ , (S.I.). Η πηγή Ο

δημιουργίας αυτού του κύματος βρίσκεται στη θέση  $x = 0$  του άξονα  $x'x$ . Θεωρούμε ότι ένα σημείο  $\Sigma$  του ελαστικού μέσου βρίσκεται σε απόσταση  $d = 0,3m$  από το  $O$ .

α) Να υπολογισθούν το πλάτος  $A$ , η περίοδος  $T$  και το μήκος  $\lambda$  του κύματος.

β) Αν η πηγή του κύματος αρχίζει να ταλαντώνεται τη στιγμή  $t = 0$ :

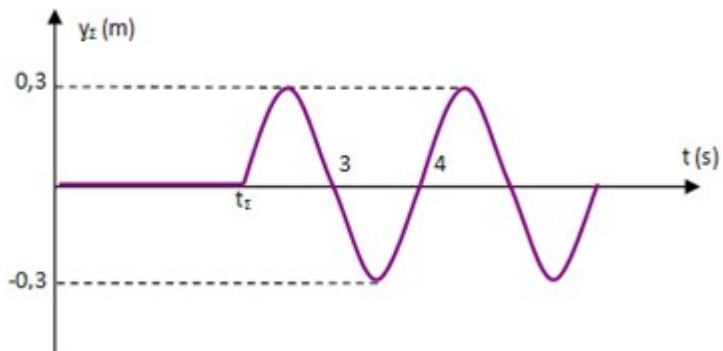
1) Ποιά χρονική στιγμή φτάνει το κύμα στο σημείο  $\Sigma$ ;

2) Να βρεθεί η φάση και η απομάκρυνση του  $\Sigma$  τη στιγμή  $t_1 = 2s$ .

γ) Να γραφεί η εξίσωση της απομάκρυνσης του σημείου  $\Sigma$  από τη θέση ισορροπίας του σε συνάρτηση με το χρόνο.

δ) Να βρεθεί η απόσταση κατά τη διεύθυνση διάδοσης του κύματος ενός ελαχίστου (κοιλιάς) και του μεθεπόμενου μεγίστου (όρους).

2α. Η πηγή  $O$  που βρίσκεται στην αρχή του άξονα  $x'x$ , αρχίζει τη χρονική στιγμή  $t = 0$  να εκτελεί απλή αρμονική ταλάντωση, που περιγράφεται από την εξίσωση  $y = A\eta\mu\omega t$ . Το κύμα που δημιουργεί, διαδίδεται κατά μήκος γραμμικού ομογενούς ελαστικού μέσου και κατά τη θετική φορά. Ένα



σημείο  $\Sigma$  απέχει από την πηγή  $O$  απόσταση  $12m$  και αρχίζει να ταλαντώνεται τη χρονική  $t_\Sigma$ . Στη γραφική παράσταση που ακολουθεί φαίνεται η απομάκρυνση του σημείου  $\Sigma$  από τη θέση ισορροπίας του, σε συνάρτηση με το χρόνο. Δίνεται  $\pi^2 = 10$ . Να υπολογίσετε:

α) Την περίοδο του κύματος.

β) Τη χρονική στιγμή  $t_\Sigma$  και την ταχύτητα διάδοσης του κύματος.

γ) Το μέτρο της μέγιστης επιτάχυνσης ταλάντωσης του σημείου  $\Sigma$ .

δ) Το μέτρο της ταχύτητας ταλάντωσης του σημείου  $\Sigma$  όταν θα βρίσκεται στη θέση  $y = -0,15m$  από τη θέση ισορροπίας του.

ε) Τη διαφορά φάσης του σημείου  $\Sigma$  μεταξύ των χρονικών στιγμών  $t_1 = 12s$  και  $t_2 = 15s$ .

3. Η φάση γραμμικού αρμονικού κύματος που διαδίδεται σε ομογενές ελαστικό μέσο με πλάτος  $A = 0,4m$ , δίνεται από τη σχέση:  $\varphi = \left(5\pi t - \frac{5\pi x}{3}\right)$  (S.I). Κάποια χρονική στιγμή  $t_1$  η φάση ενός σημείου  $K$  με απόσταση από την πηγή  $x_K = 3,9m$ , είναι ίση με  $2,5 \cdot \pi \text{ rad}$ .

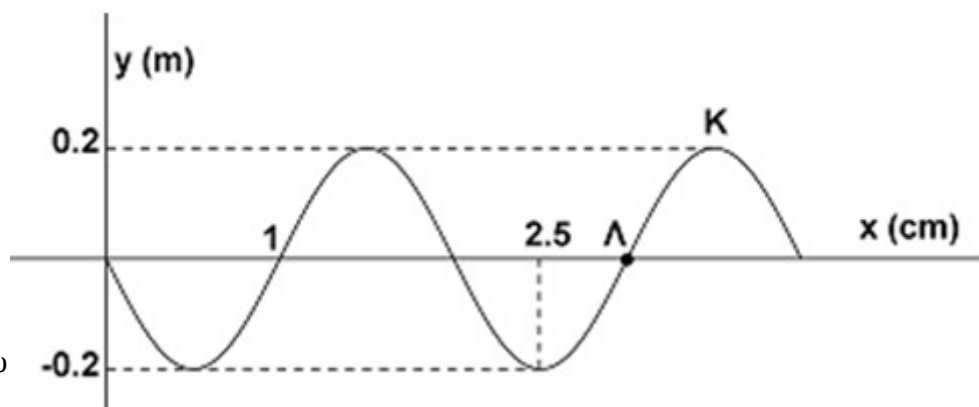
α) Να υπολογίσετε τη χρονική στιγμή  $t_1$ .

β) Μέχρι που θα έχει διαδοθεί το κύμα εκείνη τη στιγμή;

γ) Αν τα στοιχειώδη τμήματα του ελαστικού μέσου θεωρηθούν υλικά σημεία μάζας  $m = 2 \cdot 10^{-3} \text{kg}$  το καθένα, πόση είναι η ολική ενέργεια ταλάντωσης καθενός από αυτά;

δ) Να παρασταθεί το στιγμιότυπο του κύματος  $y = f(x)$  τη χρονική στιγμή  $t_1$  και να υπολογίσετε την απευθείας απόσταση μεταξύ του σημείου Κ και ενός άλλου σημείου Λ με  $x_\Lambda = 3,6 \text{m}$  τότε.

3α. Η πηγή κύματος Ο αρχίζει τη χρονική στιγμή  $t_0 = 0 \text{s}$  να εκτελεί απλή αρμονική ταλάντωση πλάτους  $A = 0,2 \text{m}$ . Το αρμονικό κύμα που δημιουργείται διαδίδεται κατά



μήκος γραμμικού ομογενούς ελαστικού μέσου, κατά τον άξονα  $Ox$ . Στο παρακάτω διάγραμμα απεικονίζεται το στιγμιότυπο του κύματος μετά από χρόνο  $t_1 = 10 \text{s}$ .

α) Να υπολογίσετε την ταχύτητα  $u$  διάδοσης του κύματος στο ελαστικό μέσο.

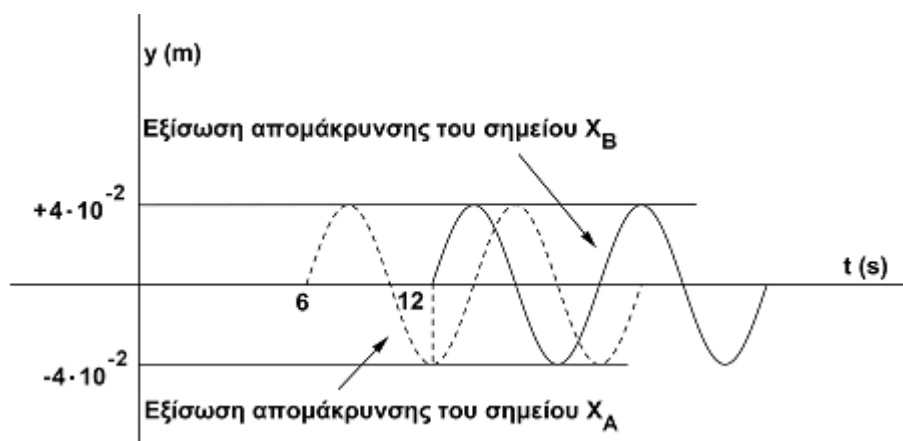
β) Να βρείτε την περίοδο  $T$  του αρμονικού κύματος.

γ) Να υπολογίσετε το μέτρο της μέγιστης ταχύτητας ταλάντωσης των μορίων του ελαστικού μέσου.

δ) Να γράψετε την εξίσωση του αρμονικού κύματος.

ε) Να υπολογίσετε τη διαφορά φάσης μεταξύ των σημείων Κ και Λ τη χρονική στιγμή  $t_1$ .

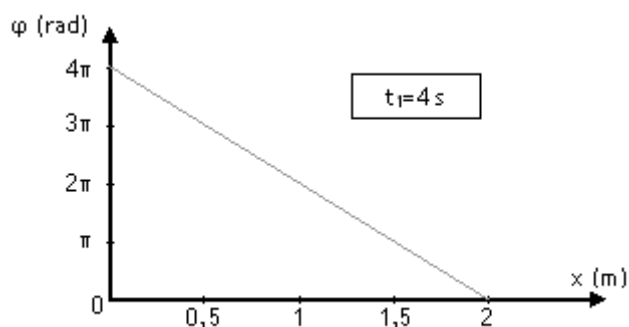
4. Οι παρακάτω γραφικές παραστάσεις αναφέρονται στην ταλάντωση δύο σημείων Α και Β ενός ομογενούς γραμμικού ελαστικού μέσου στο οποίο διαδίδεται εγκάρσιο αρμονικό κύμα προς τη θετική κατεύθυνση με ταχύτητα  $u = 2 \text{m/s}$ .



- α) Να υπολογίσετε το πλάτος  $A$  του κύματος.
- β) Να προσδιορίσετε τις θέσεις  $x_A$  και  $x_B$  των σημείων A και B.
- γ) Να βρείτε το μέτρο της μέγιστης επιτάχυνσης του σημείου A.
- δ) Ποια είναι η φάση του σημείου A την χρονική στιγμή  $t_1 = 12s$  ;

Δίνεται:  $\pi^2 = 10$ . Η πηγή του κύματος βρίσκεται στην θέση  $x_0 = 0$  και τη χρονική στιγμή  $t = 0$  ξεκινά να ταλαντώνεται από τη θέση ισορροπίας της με θετική ταχύτητα.

4α. Το σχήμα παρουσιάζει τη γραφική παράσταση  $\phi = f(x)$  της φάσης των σημείων μιας ομογενούς ελαστικής χορδής, στην οποία διαδίδεται ένα εγκάρσιο αρμονικό κύμα, τη χρονική στιγμή  $t_1 = 4s$ . Το πλάτος της ταλάντωσης των σημείων από τα οποία περνά το κύμα είναι  $A = 0,2m$ . Δύο σημεία K και Λ της χορδής βρίσκονται στις θέσεις  $x_K = +1m$  και



$x_\Lambda = +1,5m$ , αντίστοιχα. Για το σημείο της θέσης  $x = 0$  γνωρίζουμε ότι τη χρονική στιγμή  $t = 0$  το σημείο αυτό διέρχεται από τη θέση ισορροπίας του με θετική ταχύτητα.

- α) Να γραφεί η εξίσωση του κύματος.
- β) Να γραφεί η εξίσωση  $u = f(x, t)$  της ταχύτητας ταλάντωσης των σημείων του ελαστικού μέσου.
- γ) να βρεθούν οι χρονικές στιγμές  $t_K$  και  $t_\Lambda$ , στις οποίες τα σημεία K και Λ ξεκινούν ταλάντωση.
- δ) Να υπολογιστεί η διαφορά φάσης μεταξύ των ταλαντώσεων των σημείων K και Λ την ίδια χρονική στιγμή.

- ε) Να γίνει η γραφική παράσταση  $\phi = f(t)$  του σημείου Λ, μέχρι τη στιγμή που το σημείο Λ έχει εκτελέσει μία πλήρη ταλάντωση.
- στ) Να γίνει η γραφική παράσταση  $y = f(t)$  του σημείου Λ, μέχρι τη στιγμή που το σημείο Λ έχει εκτελέσει 2 πλήρεις ταλαντώσεις.
- ζ) Να βρεθεί η φορά κίνησης του σημείου Λ, τη χρονική στιγμή  $t_1$ .
- η) Να σχεδιαστεί το στιγμιότυπο του κύματος τη χρονική στιγμή  $t_2 = 8 \text{ s}$ .

5. Εγκάρσιο γραμμικό κύμα που διαδίδεται σε ένα ελαστικό ομογενές μέσον κατά την θετική κατεύθυνση και έχει εξίσωση:  $y = 6 \cdot 10^{-2} \cdot \eta\mu(2\pi t - 10\pi x)$ , (S.I.). Η πηγή Ο παραγωγής αυτού του κύματος βρίσκεται στη θέση  $x = 0$  του ημιάξονα  $Ox$  και τη χρονική στιγμή  $t_0 = 0$  ξεκινά να ταλαντώνεται από τη θέση ισορροπίας της με θετική ταχύτητα.

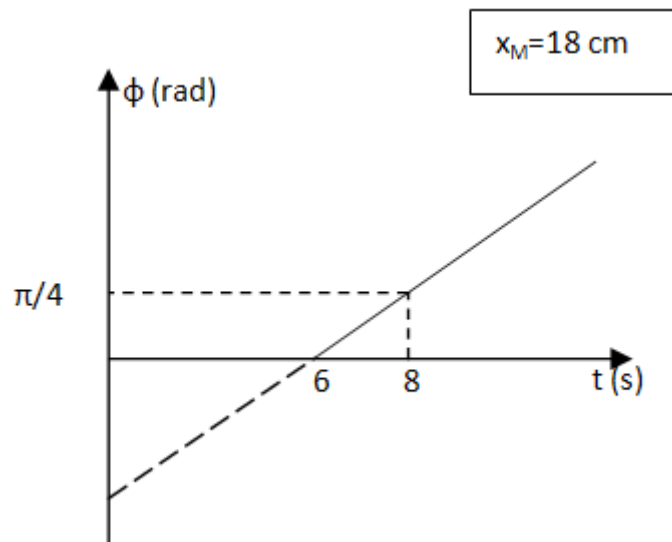
- α) Να υπολογισθούν το πλάτος  $A$ , η περίοδος  $T$ , το μήκος  $\lambda$  και η ταχύτητα διάδοσης  $v$  του κύματος.
- β) Να γραφεί η εξίσωση της ταχύτητας ταλάντωσης και της φάσης ενός σημείου Σ που απέχει  $x_\Sigma = 0,4\text{m}$  από το Ο σε συνάρτηση με το χρόνο και να γίνουν οι γραφικές τους παραστάσεις.
- γ) Αν το Σ θεωρηθεί υλικό σημείο με μάζα  $m = 10^{-3}\text{Kg}$  να εκφραστεί η κινητική του ενέργεια σε συνάρτηση με το χρόνο.
- δ) Πόσο απέχουν μεταξύ τους δύο σημεία Μ και Ν που έχουν την ίδια χρονική στιγμή φάσεις  $\phi_M = \frac{2\pi}{3}\text{rad}$  και  $\phi_N = \frac{\pi}{2}\text{rad}$ ;
- ε) Να παρασταθεί το στιγμιότυπο του κύματος  $y = f(x)$  τη χρονική στιγμή  $t = 2,75\text{s}$ .

6. Μια πηγή Ο αρχίζει να εκτελεί, τη χρονική στιγμή  $t = 0$ , απλή αρμονική ταλάντωση. Το παραγόμενο από την πηγή γραμμικό αρμονικό κύμα, διαδίδεται σε ελαστικό ομογενές μέσο, προς τη θετική φορά  $x'x$ . Τα σημεία του μέσου ταλαντώνονται εξαιτίας του κύματος και έχουν εξίσωση επιτάχυνσης:  $\alpha = -\pi^2 \cdot 10^{-4}\eta\mu 2\pi \left( \frac{t}{2} - \frac{x}{4} \right)$  (S.I.).

- α) Να υπολογίσετε τη γωνιακή συχνότητα του κύματος.
- β) Να βρείτε την μέγιστη ταχύτητα ταλάντωσης των μορίων του ελαστικού μέσου και την ταχύτητα διάδοσης αυτού του κύματος.
- γ) Πότε θα βρίσκεται για 1η φορά στην ανώτερη θέση της ταλάντωσής του ένα σημείο Κ που βρίσκεται σε απόσταση  $x_K = 10\text{m}$  από την πηγή Ο;

δ) Να υπολογίσετε την ταχύτητα ταλάντωσης ενός άλλου σημείου Λ που βρίσκεται σε απόσταση  $x_{\Lambda} = 13m$  από την πηγή Ο, κάποια στιγμή που το Κ θα βρίσκεται στην ανώτερη θέση της ταλάντωσής του.

7. Η διπλανή γραφική παράσταση αναφέρεται στη μεταβολή της φάσης  $\phi$  σε συνάρτηση με το χρόνο ενός σημείου Μ ελαστικού μέσου στο οποίο διαδίδεται εγκάρσιο αρμονικό κύμα πλάτους  $A = 10cm$  προς τη θετική κατεύθυνση. Το σημείο Μ απέχει από την πηγή Ο παραγωγής κυμάτων απόσταση  $x_M = 18cm$  και μπορεί να θεωρηθεί υλικό σημείο μάζας  $m = 2 \cdot 10^{-3}kg$ . Η πηγή του κύματος βρίσκεται στη θέση  $x_0 = 0$  και ξεκινά να ταλαντώνεται από τη θέση ισορροπίας τη χρονική στιγμή  $t_0 = 0$  με  $u > 0$ .



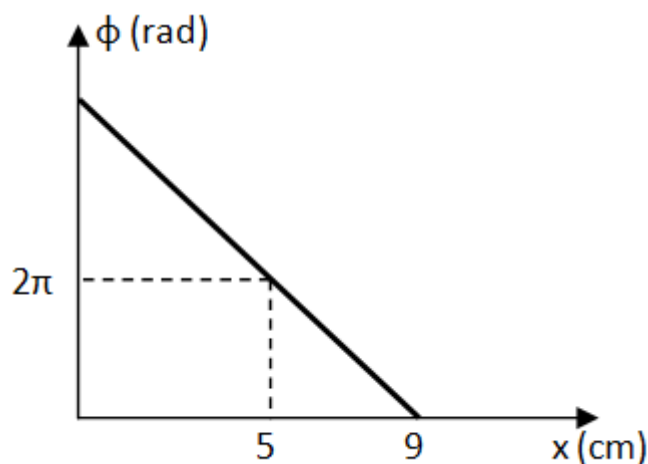
α) Να υπολογίσετε την περίοδο και το μήκος του κύματος.

β) Να γραφεί η εξίσωση του κύματος.

γ) Να παρασταθεί γραφικά η εξίσωση της απομάκρυνσης του σημείου Μ καθώς και ενός άλλου σημείου Ν, που βρίσκεται δεξιά του Μ και απέχει από αυτό απόσταση  $d = \frac{\lambda}{2}$ , από τη θέση ισορροπίας τους σε συνάρτηση με το χρόνο σε κοινό διάγραμμα.

δ) Να υπολογίσετε τη δυναμική ενέργεια ταλάντωσης του σημείου Μ τη χρονική στιγμή  $t = 8s$ .

8. Η παρακάτω γραφική παράσταση αναφέρεται στη μεταβολή της φάσης  $\phi$  σε συνάρτηση με την απόσταση  $x$  από την πηγή γραμμικού αρμονικού κύματος, που διαδίδεται σε ομογενές ελαστικό μέσο κατά τη θετική κατεύθυνση  $x'x$ , πλάτους  $A = 2cm$  κάποια χρονική στιγμή  $t_1$ .



Η ταχύτητα διάδοσης του κύματος είναι  $u = 0,5 \text{ cm/s}$ .

α) Να υπολογίσετε την περίοδο και το μήκος του κύματος.

β) Να γραφεί η εξίσωση του κύματος.

γ) Να προσδιοριστεί η χρονική στιγμή  $t_1$ .

δ) Να γίνει η γραφική παράσταση 1) της ταχύτητας ταλάντωσης των διαφόρων σημείων του ελαστικού μέσου σε συνάρτηση με τη θέση τους  $x$  τη χρονική στιγμή  $t_1$  και 2) της φάσης σε συνάρτηση με το χρόνο για το σημείο M με  $x_M = 5 \text{ cm}$ .

Σημείωση: Η πηγή του κύματος βρίσκεται στη θέση  $x_0 = 0$  και τη χρονική στιγμή  $t = 0$ , ξεκινά να ταλαντώνεται από τη θέση ισορροπίας της με θετική ταχύτητα.

9. Γραμμικό αρμονικό εγκάρσιο κύμα με πλάτος  $A = 4 \cdot 10^{-3} \text{ m}$  και περίοδο  $T = 2 \text{ s}$ , διαδίδεται σε ομογενές ελαστικό μέσο με ταχύτητα  $u = 2 \text{ cm/s}$ . Η πηγή παραγωγής αυτού του κύματος βρίσκεται στη θέση  $x = 0$ , αρχή του ημιάξονα  $Ox$  και τη χρονική στιγμή  $t = 0$  ξεκινά να ταλαντώνεται από τη θέση ισορροπίας της με σταθερή ταχύτητα. Κάθε μόριο του ελαστικού μέσου μπορεί να θεωρηθεί υλικό σημείο μάζας  $m = 1 \cdot 10^{-3} \text{ kg}$ .

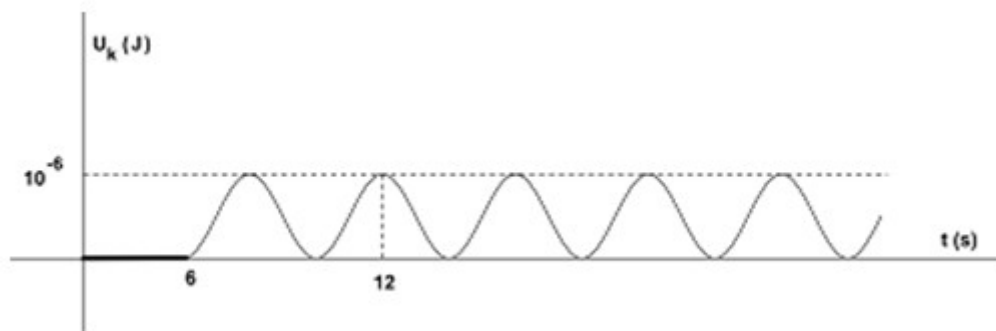
α) Να γράψετε την εξίσωση αυτού του κύματος.

β) Να υπολογίσετε τη φάση του σημείου Σ που βρίσκεται στη θέση  $x_\Sigma = 3 \text{ cm}$  την στιγμή  $t_1 = 4,5 \text{ s}$ .

γ) Να σχεδιάσετε το στιγμιότυπο του κύματος την χρονική στιγμή  $t_1$  καθώς και τη χρονική στιγμή  $t_2 = t_1 + \frac{T}{4}$ .

δ) Να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση της κινητικής ενέργειας των διαφόρων σημείων του ελαστικού μέσου τη χρονική στιγμή  $t_1$  σε συνάρτηση με την απόστασή τους  $x$  από το σημείο Ο τη χρονική στιγμή  $t_1$ .

10. Στο παρακάτω διάγραμμα φαίνεται η γραφική παράσταση της δυναμικής ενέργειας ταλάντωσης ενός μορίου Κ ενός ομογενούς ελαστικού μέσου στο οποίο διαδίδεται γραμμικό αρμονικό εγκάρσιο κύμα σε συνάρτηση με το χρόνο. Η ταχύτητα διάδοσης του κύματος είναι  $u = 2\text{m/s}$  και έχει μηδενική αρχική φάση. Κάθε μικρό τμήμα του σχοινιού μπορεί να θεωρηθεί υλικό σημείο μάζας  $m = 2 \cdot 10^{-3}\text{kg}$ .



α) Πόσο απέχει από την πηγή του κύματος το σημείο Κ στο οποίο αναφέρεται η παραπάνω γραφική παράσταση;

β) Να βρείτε το πλάτος και το μήκος κύματος αυτού του κύματος.

γ) Να γράψετε την εξίσωση του κύματος.

δ) Να κάνετε τη γραφική παράσταση της δυναμικής ενέργειας ταλάντωσης σε συνάρτηση με το χρόνο και για ένα άλλο μόριο Μ του ελαστικού μέσου που βρίσκεται στη θέση  $x = 16\text{m}$ .

Να θεωρήσετε:  $\pi^2 \simeq 10$ .