ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1^{ο}: ΜΗΧΑΝΙΚΕΣ ΤΑΛΑΝΤΩΣΕΙΣ
ΕΝΟΤΗΤΑ 5: ΣΥΝΘΕΣΗ ΤΑΛΑΝΤΩΣΕΩΝ

36. Ένα σώμα μάζας $250g$ εκτελεί κίνηση που προέρχεται από τη σύνθεση δύο απλών αρμονικών ταλαντώσεων, ίδιας διεύθυνσης, γύρω από το ίδιο σημείο, με εξισώσεις $x_1 = 0,08\eta\mu(4\pi t)$ και $x_2 = 0,08\sqrt{3}\eta\mu(4\pi t + \frac{\pi}{2})$ (όλα τα μεγέθη στο S.I.).

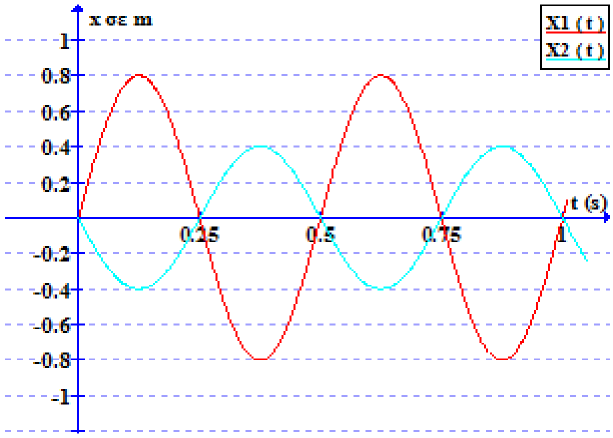
α) Να υπολογισθεί το πλάτος Α της συνισταμένης ταλάντωσης που εκτελεί το σώμα.
β) Να γραφεί η εξίσωση της απομάκρυνσης της ταλάντωσης που εκτελεί το σώμα.
γ) Να βρεθεί η δύναμη επαναφοράς τη στιγμή που το σώμα περνά από τη θέση $x = 0,1m$.
δ) Να υπολογισθεί ο λόγος της κινητικής προς τη δυναμική ενέργεια της ταλάντωσης του υλικού σημείου τη στιγμή που περνά από τη θέση $x = 0,08m$.
Δίνεται: $\pi^2 \simeq 10$.

36α. Ένα σώμα μάζας $m = 0,2Kg$ εκτελεί κίνηση που προέρχεται από τη σύνθεση δύο απλών αρμονικών ταλαντώσεων ίδιας διεύθυνσης, γύρω από το ίδιο σημείο, με εξισώσεις $x_1 = 0,4\eta\mu\left(2\pi t + \frac{\pi}{6}\right)$ και $x_2 = 0,4\eta\mu\left(2\pi t + \frac{2\pi}{3}\right)$ (όλα τα μεγέθη στο S.I.).

α) Να υπολογισθεί η διαφορά φάσης των δύο ταλαντώσεων.
β) Να υπολογισθεί το πλάτος Α της συνισταμένης απλής αρμονικής ταλάντωσης που εκτελεί το σώμα.
γ) Να υπολογιστεί η περίοδος και η αρχική φάση της σύνθετης ταλάντωσης.
δ) Να γραφεί η εξίσωση της δύναμης επαναφοράς της ταλάντωσης, που εκτελεί το σώμα, σε συνάρτηση με το χρόνο.
Δίνεται: $\pi^2 \simeq 10$.

37. Υλικό σημείο Σ εκτελεί κίνηση που προέρχεται από τη σύνθεση δύο απλών αρμονικών ταλαντώσεων, οι οποίες γίνονται στην ίδια διεύθυνση και γύρω από την ίδια θέση ισορροπίας. Οι ταλαντώσεις περιγράφονται από τις εξισώσεις $x_1 = 2\eta\mu 10t$ και $x_2 = 2\eta\mu(10t + \frac{\pi}{3})$, (x_1 και x_2 σε cm , t σε s).
α) Να υπολογισθεί το πλάτος A της συνισταμένης απλής αρμονικής ταλάντωσης που εκτελεί το Σ.
β) Να βρεθεί η εξίσωση της απομάκρυνσης της ταλάντωσης που εκτελεί το Σ.
γ) Να γραφεί η εξίσωση της ταχύτητας ταλάντωσης του Σ.
δ) Να υπολογισθεί η αλγεβρική τιμή της ταχύτητας τη χρονική στιγμή $t = \frac{\pi}{15}s$ μετά από τη στιγμή $t = 0$.

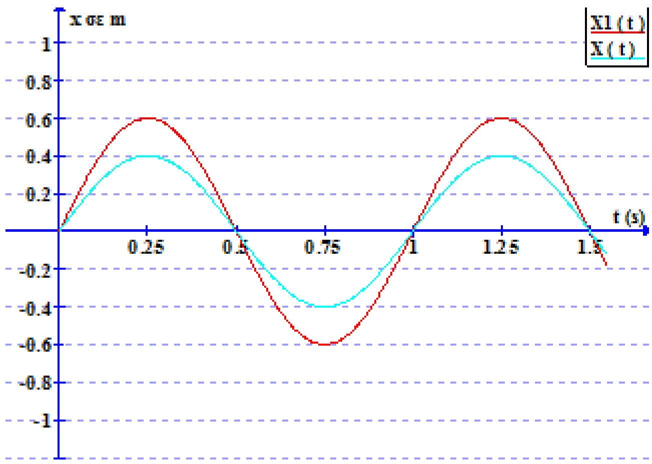
38. Ένα σώμα μάζας $m = 0,1kg$ εκτελεί κίνηση που προέρχεται από τη σύνθεση δύο απλών αρμονικών ταλαντώσεων, ίδιας διεύθυνσης, γύρω από το ίδιο σημείο και οι απομακρύνσεις τους δίνονται από το παρακάτω διάγραμμα.



α) Να γραφεί η εξίσωση της απομάκρυνσης των δύο ταλαντώσεων.
β) Να γραφεί η εξίσωση της απομάκρυνσης της συνισταμένης ταλάντωσης και να παρασταθεί γραφικά στο ίδιο διάγραμμα με τις δύο επιμέρους ταλαντώσεις.
γ) Να υπολογισθεί η ενέργεια της συνισταμένης ταλάντωσης.
δ) Να βρεθεί η απομάκρυνση της σύνθετης ταλάντωσης, τη χρονική στιγμή που η κινητική ενέργεια γίνει τριπλάσια της δυναμικής, για πρώτη φορά.

Δίνεται: $\pi^2 \simeq 10$.

39. Ένα σώμα μάζας $m = 0,2kg$ εκτελεί κίνηση που προέρχεται από τη σύνθεση δύο απλών αρμονικών ταλαντώσεων, ίδιας διεύθυνσης, γύρω από το ίδιο σημείο. Στο παρακάτω διάγραμμα, φαίνεται η γραφική παράσταση της απομάκρυνσης της πρώτης ταλάντωσης $x_1(t)$ και της συνισταμένης ταλάντωσης $x(t)$.



α) Να υπολογισθεί η σταθερά της συνισταμένης ταλάντωσης.
β) Να γραφεί η εξίσωση της απομάκρυνσης της πρώτης και της συνισταμένης ταλάντωσης.
γ) Να γραφεί η εξίσωση της απομάκρυνσης της δεύτερης ταλάντωσης και να παρασταθεί γραφικά στο ίδιο διάγραμμα.
δ) Να βρεθεί η κινητική ενέργεια του σώματος τη χρονική στιγμή $t = \frac{1}{8}s$.

Δίνεται: $\pi^2 \simeq 10$.

40. Ένα διαπασών παράγει ήχο συχνότητας $f_1 = 1001Hz$. Αν φέρουμε πολύ κοντά ένα δεύτερο διαπασών, περίπου ίδιο με το πρώτο, παράγεται και ένας δεύτερος ήχος συχνότητας f_2

που είναι λίγο μικρότερη από την πρώτη. Ο σύνθετος ήχος που ακούει τότε ένας παρατηρητής έχει συχνότητα $f = 1000Hz$. Να υπολογισθεί:

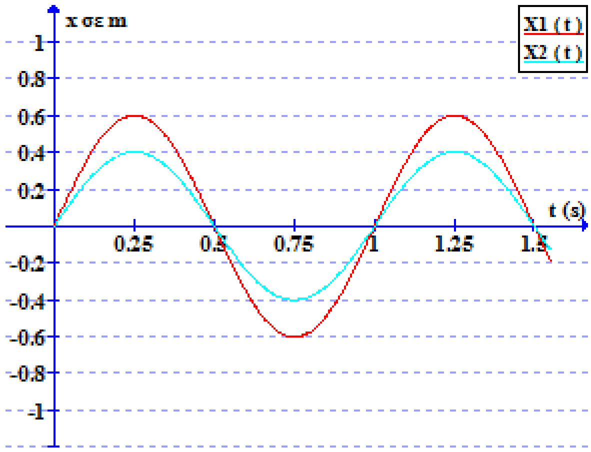
α) η συχνότητα f_2.

β) η συχνότητα μεταβολής του πλάτους της σύνθετης κίνησης.

γ) πόσες φορές μηδενίζεται η ένταση του ήχου που ακούει ο παρατηρητής σε χρόνο $\Delta t = 2s$.

δ) Ένα μόριο του αέρα ταλαντώνεται εξαιτίας του ήχου που παράγουν τα διαπασών. Να υπολογισθεί πόσες φορές περνά από τη θέση ισορροπίας του σε χρόνο ίσο με τη περίοδο των διακροτημάτων.

40α. Ένα σώμα μάζας $m = 1kg$ εκτελεί κίνηση που προέρχεται από τη σύνθεση δύο απλών αρμονικών ταλαντώσεων ίδιας διεύθυνσης, γύρω από το ίδιο σημείο και οι απομακρύνσεις τους παριστάνονται στο παρακάτω διάγραμμα.



α) Να υπολογισθεί η γωνιακή συχνότητα της συνισταμένης ταλάντωσης.

β) Να γραφούν οι εξισώσεις της απομάκρυνσης των δύο επιμέρους ταλαντώσεων, σε συνάρτηση με το χρόνο.

γ) Να γραφεί η εξίσωση της απομάκρυνσης της συνισταμένης ταλάντωσης και να παρασταθεί γραφικά στο ίδιο διάγραμμα με τις δύο προηγούμενες εξισώσεις.

δ) Να υπολογισθεί η κινητική ενέργεια του σώματος τη χρονική στιγμή $t = 1s$.

Δίνεται: $\pi^2 \simeq 10$.

41. Σώμα μάζας $m = 0,5\ kg$ εκτελεί ταυτοχρόνως δύο Α.Α.Τ. της ίδιας συχνότητας που γίνονται γύρω από το ίδιο σημείο και στην ίδια διεύθυνση. Οι δύο Α.Α.Τ. περιγράφονται από τις εξισώσεις:

$x_1 = 0,5 \cdot \eta\mu 20\pi t$ (S. I.)

$x_2 = 0,7 \cdot \eta\mu \left(20\pi t + \pi\right)$ (S. I.)

α) Να βρεθεί η εξίσωση της απομάκρυνσης και της ταχύτητας σε σχέση με το χρόνο για τη σύνθετη ταλάντωση.

β) Να υπολογιστεί η περίοδος της σύνθετης ταλάντωσης.

γ) Να υπολογιστεί το πλάτος της δύναμης επαναφοράς για τη σύνθετη ταλάντωση.

δ) Να υπολογιστεί η ταχύτητα του σώματος όταν η απομάκρυνσή του είναι $x = 0,1\ m$.

Δίνεται $\pi^2 = 10$.

42. Σώμα εκτελεί ταυτόχρονα δύο Α.Α.Τ. της ίδιας διεύθυνσης, που γίνονται γύρω από το ίδιο σημείο, με το ίδιο πλάτος και συχνότητες που διαφέρουν πολύ λίγο. Οι επιμέρους ταλαντώσεις περιγράφονται από τις εξισώσεις $x_1 = 0,2\eta\mu 100\pi t$ (S. I.) και $x_2 = 0,2\eta\mu 102\pi t$ (S. I.).

α) Να γραφεί η εξίσωση της απομάκρυνσης σε σχέση με το χρόνο για τη σύνθετη ταλάντωση.
β) Να υπολογιστεί η χρονική στιγμή που μηδενίζεται το πλάτος για πρώτη φορά.
γ) Να υπολογιστεί ο χρόνος ανάμεσα σε δύο διαδοχικούς μηδενισμούς του πλάτους.

43. Ένα σώμα μάζας $m = 200g$ εκτελεί κίνηση που προέρχεται από τη σύνθεση δύο απλών αρμονικών ταλαντώσεων, ίδιας διεύθυνσης, ίδιας συχνότητας, ίδιου πλάτος A και γύρω από το ίδιο σημείο. Η πρώτη ταλάντωση έχει αρχική φάση μηδέν και υστερεί φασικά από τη δεύτερη κατά ϕ, με $\phi < \pi\ rad$. Η συνισταμένη κίνηση που προκύπτει έχει το ίδιο πλάτος A με κάθε μια από τις επιμέρους ταλαντώσεις. Η κάθε μια ταλάντωση έχει ενέργεια $0,1J$, ενώ η δύναμη επαναφοράς έχει μέγιστη τιμή $2N$.

α) Να υπολογισθεί η διαφορά φάσης της:
   α1) δεύτερης ταλάντωσης με την πρώτη και
   α2) της σύνθετης ταλάντωσης με την πρώτη.
β) Να γραφούν οι εξισώσεις της απομάκρυνσης των δύο αρχικών ταλαντώσεων.
γ) Να γραφεί η εξίσωση της επιτάχυνσης – χρόνου για την συνισταμένη ταλάντωση.
δ) Να υπολογισθεί το μέτρο της ταχύτητας ταλάντωσης του σώματος τη στιγμή που η δυναμική ενέργεια του σώματος είναι τριπλάσια της κινητικής.

44. Ένα σώμα μάζας $m = 100g$ εκτελεί κίνηση που προέρχεται από τη σύνθεση δύο απλών αρμονικών ταλαντώσεων, ίδιας διεύθυνσης, ίδιας συχνότητας και γύρω από το ίδιο σημείο. Η δεύτερη ταλάντωση έχει τριπλάσιο πλάτος από την πρώτη και η φάση της προηγείται κατά γωνία $\phi = 60^\circ$. Η πρώτη ταλάντωση έχει αρχική φάση μηδέν. Η συνισταμένη ταλάντωση έχει εξίσωση: $x = 0,2\sqrt{13}\eta\mu(2\pi t + \theta)$ (S.I.).

α) Να υπολογισθεί η αρχική φάση θ της συνισταμένης ταλάντωσης.
β) Να γραφούν οι εξισώσεις της απομάκρυνσης των δύο αρχικών ταλαντώσεων.
γ) Να γραφεί η εξίσωση της ταχύτητας - χρόνου της συνισταμένης ταλάντωσης.
δ) Να υπολογισθεί ο ρυθμός μεταβολής της ορμής του σώματος όταν περνά από τη θέση $x = 0,2m$.

Να θεωρήσετε ότι: $\pi^2 \simeq 10$ και $0,6\sqrt{3} \simeq 1$.

45. Ένα σώμα εκτελεί κίνηση που προέρχεται από τη σύνθεση δύο απλών αρμονικών ταλαντώσεων, ίδιας διεύθυνσης, γύρω από το ίδιο σημείο που περιγράφονται από τις εξισώσεις $x_1 = A\eta\mu 199\pi t$ και $x_2 = A\eta\mu 201\pi t$ (S.I.). Η εξίσωση που περιγράφει την συνισταμένη ταλάντωση είναι $x = 0,04 \cdot \sigma\upsilon\nu 2\pi f_3 t \cdot \eta\mu 2\pi f_4 t$ (S.I.).

α) Να υπολογισθεί το πλάτος A και οι συχνότητες f_1 και f_2 των δύο επιμέρους Α.Α.Τ.
β) Τι εκφράζει το ημιάθροισμα των συχνοτήτων των επιμέρους Α.Α.Τ. και ποιά είναι η τιμή του;
γ) Να υπολογισθεί η περίοδος των διακροτημάτων T_Δ και ο αριθμός των ταλαντώσεων που εκτελεί το σώμα στο χρόνο αυτό.
δ) Να σχεδιάσετε ποιοτικά τη γραφική παράσταση της απομάκρυνσης της σύνθετης ταλάντωσης με το χρόνο.

46. Οι ήχοι που παράγονται από δύο ακίνητα διαπασών, έχουν την ίδια ένταση, βρίσκονται

πολύ κοντά το ένα με το άλλο και έχουν συχνότητες $f_1 = 499Hz$ και $f_2 = 501Hz$, αντίστοιχα. Οι ήχοι αναγκάζουν το τύμπανο ενός αυτιού να ταλαντώνεται. Οι επιμέρους ταλαντώσεις που ενεργοποιούν το τύμπανο έχουν μηδενική αρχική φάση και ίδιο πλάτος A .

α) Να υπολογισθεί η συχνότητα:
   α1) των διακροτημάτων.
   α2) μεταβολής του πλάτους της σύνθετης κίνησης.
   α3) της σύνθετης κίνησης.
β) Να υπολογισθεί ο αριθμός των μεγιστοποιήσεων του πλάτους των διακροτημάτων σε χρόνο $20s$.
γ) Να υπολογισθεί ο αριθμός των ταλαντώσεων που εκτελεί το τύμπανο σε χρόνο $1s$
δ) Να υπολογισθεί, σαν συνάρτηση του χρόνου, η διαφορά φάσης των δύο επιμέρους ταλαντώσεων που ενεργοποιούν το τύμπανο και να παρασταθεί γραφικά. Στο διάγραμμα να φαίνονται οι χρονικές στιγμές $\frac{T_\Delta}{2}$ και T_Δ (όπου T_Δ η περίοδος των διακροτημάτων). Να εξηγήσετε με τη βοήθεια της διαφοράς φάσης, γιατί στις στιγμές αυτές το πλάτος είναι μηδέν και μέγιστο αντίστοιχα.

47. Ένα σώμα εκτελεί κίνηση που προέρχεται από τη σύνθεση δύο απλών αρμονικών ταλαντώσεων, ίδιας διεύθυνσης, ίδιου πλάτους A , που πραγματοποιούνται γύρω από το ίδιο σημείο με παραπλήσιες συχνότητες f_1 και f_2 $(f_2 < f_1)$. Οι δύο ταλαντώσεις έχουν αρχική φάση μηδέν. Η απομάκρυνση σε συνάρτηση με το χρόνο της σύνθετης κίνησης που παρουσιάζει διακροτήματα είναι $x = 0,02 \cdot \sigma\upsilon\nu 2\pi t \cdot \eta\mu 50\pi t$ (S.I.)

α) Να υπολογισθούν οι συχνότητες f_1 και f_2 και το πλάτος A των δύο ταλαντώσεων.
β) Να γραφούν οι εξισώσεις απομάκρυνσης – χρόνου των δύο επιμέρους ταλαντώσεων.
γ) Να υπολογιστεί πότε μηδενίζεται το πλάτος του διακροτήματος στο χρονικό διάστημα από 0 έως $1s$.
δ) Να υπολογισθεί πόσες φορές μηδενίζεται η απομάκρυνση της σύνθετης κίνησης σε χρόνο ίσο με την περίοδο των διακροτημάτων.
ε) Να γίνει το διάγραμμα της συνισταμένης ταλάντωσης για χρονικό διάστημα από 0 έως $1s$.

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

1. [f=0,5Hz, ω=π rad/s, u_{max}=0,1π m/s, a_{max}=0,1π^2m/s^2
   x=0,1ημπt, u=0,1πσυνπt, a=-0,1π^2ημπt]
2. [ω=2rad/s, T=πs. f=1/πHz, A=0,2m. u_{max}=0,4m/s, a_{max}=0,8m/s^2, x=0,1 $\sqrt{2}$ m]
3. [f=5/πHz, a_{max}=5m/s^2, du/dt=-2,5 $\sqrt{2}$ m/s^2, W=-0,5j]
4. [T=1s, m=2,5kg, t_1=1/12s, t_2=5/12s, u_1=0,4 $\sqrt{3}$ π m/s, u_2=-0,4 $\sqrt{3}$ π m/s]
5. [dφ/dt=10πrad/s, u=π $\sqrt{3}$ m/s,]
6. [m=2,5 10^{-3}kg, u_{max}=10πm/s, Δφ=7πrad, x=0,125m]
7. [ω=10rad/s, a_{max}=20m/s^2, x= $\frac{\pm\sqrt{3}}{10}$ m, u= $\pm\sqrt{2}$ m/s]
8. [D=2·10^4N/m, A=±10cm, dK/dt=-√3·10^4j/s,]
9. [$u=\pm\sqrt{7,5}$ m/s, dU/dt= $-\sqrt{3}\pi\, m/s$]
10. [T=2πm/s, φ_0=3π/4, a=-2ημ(t+3π/4), K/U=1]
11. [A=0,4m, m=25kg, t=π/8 s, F_{max}=40N, F=-40ημ(2t+3π/2)]
12. [T=0,2π s, A=0,1m, x=0,1ημ(10t+3π2), u=1m/s, K=1j, U=0j]
13. [ω=πrad/s, A=0,4m, φ_0=π/2, F=-2ημ(πt+π/2), a=2m/s^2]
14. [A=0,2m, ω=10rad/s, E=0,2j, U=0,05j, φ_0=π/4, x=-0,1 $\sqrt{2}$ m, U=0,1j]

15. [$A=0{,}5m$, $D=50N/m$, $\varphi_0=5\pi/3$, $K/E100\%=25\%$, $F_1=10-25\eta\mu(10t+5\pi/3)$]
16. [$f=5/\pi Hz$, $A=0{,}2m$, $x=0{,}2\eta\mu(10t+\pi/6)$, $F_{\varepsilon\lambda}=15N$ και $F_{\varepsilon\lambda}=25N$]
17. [$A=0{,}2m$, $D=800N/m$, $K=16-400x^2$, $\omega=20rad/s$, $\varphi_0=5\pi/6$, $t=\pi/12s$]
18. [0,2m, 10N/m, 0,05J, $\sqrt{3}m/s$, $\sqrt{3}J/s$]
19. [0,2m, 100rad/s, 5J, 1/3, 5]
20. [0,25m, 6,25J, (0,5, 20, π/2), 1/4]
21. [2m, 1m, 1m, 50J, (1, π, 3π/2), το Σ_2 στο έδαφος]
22. [0,2m, 10rad/s, 0,05πs, F=2-20x, 0,1m, $\sqrt{3}m/s$, 0,15m]
23. [400N/m, 300N/m, 100N/m, T=-100x, 0,5m/s]
24. [π/20s, 4m/s, 900N/m, 0,2m, x=0,2ημ(15π), 3π/20, 1m]
25. [0,1m, 0,1m, T=100-1000x, 0,1m]
26. [1000rad/s, 80C/s, -60A/s]
27. [2,5μF, i=-0,4ημ1000t, $24\cdot10^{-9}J$]
28. [2A, $32\cdot10^{-3}J$, $6\pi\cdot10^{-4}s$, $4\pi\cdot10^{-4}s$, $q=8\cdot10^{-4}\eta\mu2500t$, i=2συν2500t, 5000A/s]
29. [$q=8\cdot10^{-4}\sigma\upsilon\nu2500t$, $-\sqrt{2}A$, $10^{-2}J$, $\pi\cdot10^{-4}s$, $q=2\sqrt{2}\cdot10^{-4}\eta\mu5000t$, $U_E=10^{-2}\eta\mu^2 5000t$]
30. [$2\cdot10^{-4}\sigma\upsilon\nu2500t$, -0,5ημ2500t, $10^{-3}J$, $\sqrt{3}/4A$, $10^{-4}C$, -0,5ημ5000t, $0{,}25\cdot10^{-3}J$, $-(1{,}25/2)\sqrt{2}J/s$]
31. [5A, $2\cdot10^{-4}C$, 5/1, $U_E=2\cdot10^{-3}\sigma\upsilon\nu^2 5000t$, $U_B=2\cdot10^{-3}\eta\mu^2 5000t$, $0{,}5\pi\cdot10^{-4}s$, $1{,}5\pi\cdot10^{-4}s$, $2{,}5\pi\cdot10^{-4}s$, $3{,}5\pi\cdot10^{-4}s$]
32. [$0{,}07s^{-1}$, 10s, 1cm]
33. [50s, 100, 20%]
34. [0,05s, 20, 15/256]
35. [x=0,2ημ10t, u=2συν10t, 2J/s, θα ελαττωθεί]
36. [0,16m, x=0,16ημ(4πt+π/3), -4N, 3/1]
37. [$2\sqrt{3}cm$, $x=2\sqrt{3}\eta\mu(10t+\pi/6)$, $u=20\sqrt{3}\sigma\upsilon\nu(10t+\pi/6)$, -30cm/s]
38. [0,8ημ(4πt), 0,4ημ(4πt+π), 0,4ημ(4πt), 1,28J, 0,2m]
39. [8N/m, 0,6ημ2πt, 0,4ημ2πt, 0,2ημ(2πt+π), 0,32J]
40. [999Hz, 2Hz, 4, 1000]
41. [0,2ημ(20πt+π), 4πσυν(20πt+π), 0,1s, 400N, $2\pi\sqrt{3}m/s$]
42. [x=0,4συν(πt)ημ(101πt), 0,5s, 1s]
43. [2π/3, π/3, 0,1ημ10t, 0,1ημ(10t+2π/3), -10ημ(10t+π/3), 0,5m/s]
44. [π/4rad, 0,2ημ2πt, 0,6ημ(2πt+π/3), $0{,}4\pi\sqrt{13}\sigma\upsilon\nu(2\pi t+\pi/4)$, $-0{,}8kgm/s^2$]
45. [0,02m, 99,5Hz, 100,5Hz, 100Hz είναι η συχνότητα ταλάντωσης του σώματος, 1s, 100 ταλαντώσεις]
46. [2Hz, 2Hz, 500Hz, 40, 500, Δφ=4πt]
47. [0,01m, 26Hz, 24Hz, 0,01ημ52πt, 0,01ημ48πt, 0,25s, 0,75s, 25]