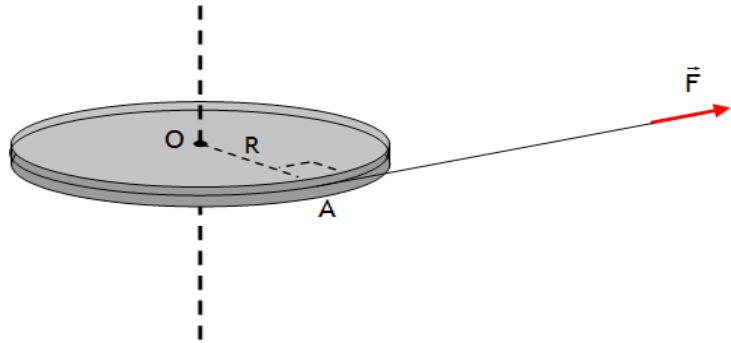


ΣΤΕΡΕΟ ΕΠΑΝΑΛΗΨΗ

1. Ο ομογενής και ισοπαχής δίσκος του σχήματος έχει ακτίνα $R = 10\text{cm}$ και μάζα $M = 2\text{kg}$, είναι οριζόντιος και μπορεί να περιστρέφεται, χωρίς τριβές, γύρω από κατακόρυφο ακλόνητο άξονα που διέρχεται από το κέντρο του. Ο δίσκος είναι αρχικά ακίνητος και στην περιφέρειά του είναι τυλιγμένο αβαρές, μη εκτατό σχοινί

μήκους $\ell = 4\text{m}$. Τη χρονική στιγμή $t_0 = 0$ ασκούμε στην ελεύθερη άκρη του σχοινιού σταθερή, οριζόντια δύναμη $F = 2\text{N}$ και ο δίσκος ξεκινά να περιστρέφεται. Το σχοινί δεν ολισθαίνει στην περιφέρεια του δίσκου.



Να υπολογίσετε:

α) το μέτρο της γωνιακής επιτάχυνσης a_γ του δίσκου.

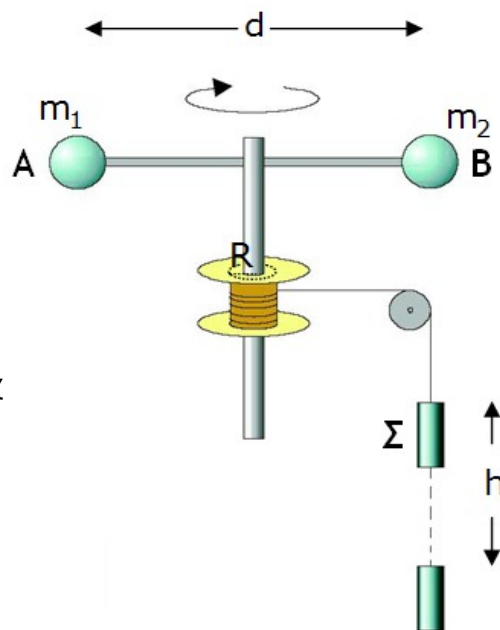
β) τη χρονική στιγμή t_1 που ξετυλίγεται όλο το σχοινί.

γ) το μέτρο της γωνιακής ταχύτητας ω του δίσκου τη στιγμή κατά την οποία έχει ξετυλιχθεί όλο το σχοινί.

δ) το έργο της δύναμης στη διάρκεια του δεύτερου δευτερολέπτου της κίνησης.

Δίνεται η ροπή αδράνειας του δίσκου ως προς τον άξονα περιστροφής του: $I = \frac{1}{2}MR^2$.

2. Η οριζόντια και ομογενής ράβδος AB του σχήματος έχει μήκος $d = 2\text{m}$ μάζα $M = 3\text{kg}$ και μπορεί να στρέφεται γύρω από κατακόρυφο σωλήνα που περνά από το κέντρο της. Στο σωλήνα έχει προσαρμοστεί, σταθερά, ένας μικρός κύλινδρος ακτίνας $R = 0,1\text{m}$. Γύρω από τον κύλινδρο είναι τυλιγμένο πολλές φορές λεπτό νήμα, στην ελεύθερη άκρη του οποίου αναρτάται, μέσω τροχαλίας, ένα σώμα Σ. Στα άκρα A και B της ράβδου έχουν στερεωθεί δύο μικρές σφαίρες με μάζες $m_1 = 1\text{kg}$ και $m_2 = 2\text{kg}$ αντίστοιχα. Ο σωλήνας, ο κύλινδρος, η τροχαλία και το νήμα θεωρούνται αβαρή. Το νήμα δεν ολισθαίνει στον κύλινδρο.



Αρχικά όλη η διάταξη είναι ακίνητη. Τη στιγμή $t_0 = 0$ το σώμα Σ αφήνεται να κινηθεί και η ράβδος ξεκινά να περιστρέφεται. Το

νήμα ασκεί στον κύλινδρο σταθερή ροπή μέτρου $\tau = 16 \text{ Nm}$.

Να βρείτε:

α) Τη συνολική ροπή αδράνειας $I_{ολ}$ του συστήματος της ράβδου και των δύο σφαιριδίων ως προς τον άξονα περιστροφής της ράβδου.

β) Το μέτρο της γωνιακής επιτάχυνσης a_γ του παραπάνω συστήματος.

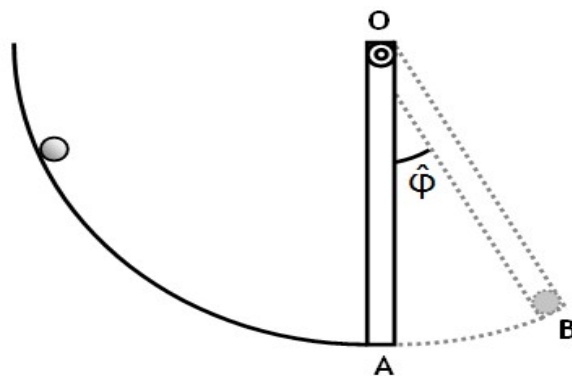
γ) Το ύψος h κατά το οποίο έχει κατέλθει το σώμα Σ από τη χρονική στιγμή $t_0 = 0$ μέχρι τη χρονική στιγμή $t_1 = \sqrt{10\pi} \text{ s}$.

δ) Τον αριθμό των περιστροφών $N_{στρ}$ της ράβδου στο ίδιο χρονικό διάστημα.

Δίνονται: Η ροπή αδράνειας της ράβδου ως προς τον άξονα περιστροφής

$$\text{της } I = \frac{1}{12}Md^2, \quad g = 10 \frac{m}{s^2}.$$

3. Μια λεπτή ομογενής ράβδος μήκους $L = 0,3 \text{ m}$ και μάζας $m = 1 \text{ kg}$ μπορεί να περιστρέφεται σε κατακόρυφο επίπεδο γύρω από ακλόνητο οριζόντιο άξονα, που περνά από το άκρο της O , όπως στο σχήμα. Η ράβδος ισορροπεί ακίνητη στη θέση OA . Ένα μικρό σφαιρίδιο μάζας $m = 1 \text{ kg}$ αφήνεται να κινηθεί εντός τεταρτοκυκλίου που έχει κέντρο του το σημείο O και συναντά τη ράβδο



στο σημείο A , έχοντας ταχύτητα μέτρου $v = 2 \frac{m}{s}$. Το σφαιρίδιο συγκρούεται με τη ράβδο και προσκολλάται στο άκρο της A δημιουργώντας το σύστημα ράβδος - σφαιρίδιο το οποίο έχει ροπή αδράνειας που δίνεται από τη σχέση $I = \frac{4}{3}mL^2$. Το σύστημα ράβδος - σφαιρίδιο ξεκινά να περιστρέφεται γύρω από το άκρο O της ράβδου.

Να βρείτε:

α) Τη ροπή αδράνειας I_ρ της ράβδου, ως προς τον άξονα περιστροφής που περνά από το άκρο O .

β) Το μέτρο της γωνιακής ταχύτητας ω του συστήματος ράβδος - σφαιρίδιο αμέσως μετά την κρούση.

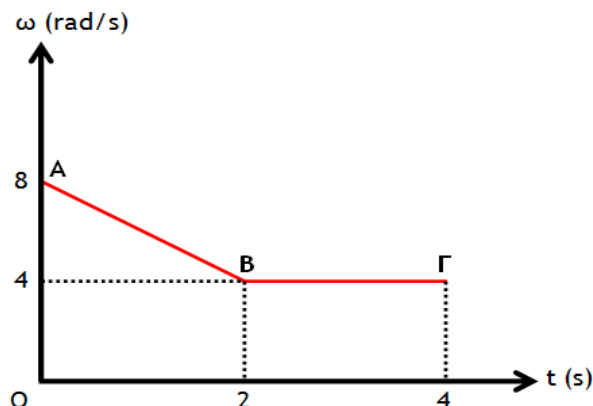
γ) Τη μείωση της μηχανικής ενέργειας του συστήματος λόγω της κρούσης.

δ) Το μέτρο του ρυθμού μεταβολής της στροφορμής του συστήματος ράβδος -

σφαιρίδιο $\frac{dL}{dt}$ όταν βρίσκεται στη θέση OB , η οποία σχηματίζει γωνία $\hat{\varphi} = 30^\circ$ με την αρχική της θέση.

Δίνονται: $g = 10 \frac{m}{s^2}$ και $\eta\mu 30^\circ = 0,5$, $\sigma\upsilon\nu 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$

5. Ένα στερεό Σ περιστρέφεται γύρω από ακλόνητο άξονα ως προς τον οποίο παρουσιάζει ροπή αδράνειας $I = 0,2 \text{ kgm}^2$. Η γραφική παράσταση της γωνιακής ταχύτητας του στερεού Σ ως προς το χρόνο δίνεται στο διάγραμμα που ακολουθεί:
Να βρείτε:



α) την αλγεβρική τιμή της γωνιακής επιτάχυνσης του στερεού τις χρονικές στιγμές $t_1 = 1 \text{ s}$ και $t_3 = 3 \text{ s}$.

β) τον αριθμό των περιστροφών που εκτέλεσε το στερεό από $t_A = 0$ μέχρι $t_\Gamma = 4 \text{ s}$.

γ) την ισχύ της δύναμης που ασκείται στο στερεό τη χρονική στιγμή $t_1 = 1 \text{ s}$.

δ) το μέτρο της στροφορμής του στερεού ως προς τον άξονα περιστροφής του τη χρονική στιγμή $t_B = 2 \text{ s}$.

6. Ένας οριζόντιος δίσκος μπορεί να στρέφεται στο οριζόντιο επίπεδο γύρω από ακλόνητο κατακόρυφο άξονα που διέρχεται από το κέντρο του. Αρχικά ο δίσκος είναι ακίνητος. Τη χρονική στιγμή $t_0 = 0$ ασκείται στο δίσκο σταθερή ροπή, με αποτέλεσμα ο δίσκος να αποκτήσει γωνιακή επιτάχυνση μέτρου $a_{\gamma\omega\nu} = 10 \frac{\text{rad}}{\text{s}^2}$. Να βρείτε:

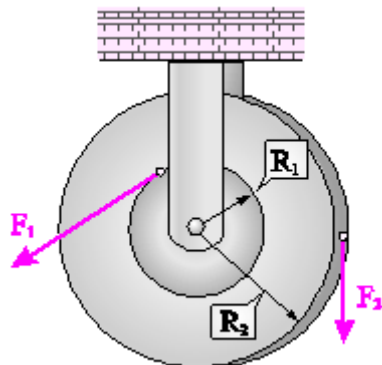
α) το μέτρο της μεταβολής της γωνιακής ταχύτητας $\Delta\omega$ σε χρονικό διάστημα $\Delta t = 4 \text{ s}$.

β) τη ροπή αδράνειας I του δίσκου, αν στο ίδιο χρονικό διάστημα $\Delta t = 4 \text{ s}$ η μεταβολή του μέτρου της στροφορμής του δίσκου είναι $\Delta L = 0,8 \frac{\text{kgm}^2}{\text{s}}$.

γ) Τη στιγμιαία ισχύ P_1 της ροπής που στρέφει το δίσκο, τη χρονική στιγμή $t_1 = 2 \text{ s}$.

δ) Τον αριθμό των στροφών N_1 που έχει εκτελέσει ο δίσκος από τη χρονική στιγμή $t_0 = 0$ μέχρι τη χρονική στιγμή $t_1 = 2 \text{ s}$.

7. Η ακίνητη διπλή τροχαλία του σχήματος μπορεί να στρέφεται γύρω από σταθερό άξονα που συμπίπτει με τον άξονα συμμετρίας της. Η τροχαλία έχει ακτίνες $R_1 = 10\text{cm}$, $R_2 = 20\text{cm}$ και ροπή αδράνειας ως προς τον άξονα περιστροφής $I = 1\text{kgm}^2$. Στην τροχαλία που είναι αρχικά ακίνητη, ασκούνται μέσω κατάλληλων αβαρών νημάτων οι δυνάμεις $F_1 = 60\text{N}$ και $F_2 = 40\text{N}$, με σημεία εφαρμογής και κατευθύνσεις όπως στο σχήμα. Να υπολογίσετε:

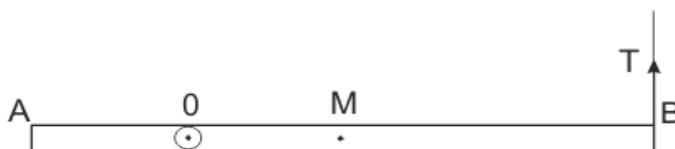


- α) τη συνολική ροπή που δέχεται η τροχαλία.
- β) τη γωνιακή επιτάχυνση που αποκτά η τροχαλία.
- γ) τη γωνιακή της ταχύτητα τη χρονική στιγμή $t = 4 \text{ s}$.
- δ) τη χρονική στιγμή $t = 4 \text{ s}$, το μήκος των νημάτων που έχει τυλιχτεί ή ξετυλιχτεί σε κάθε τροχαλία.

8. Οι τροχοί ενός ποδηλάτου έχουν ακτίνα $R = 0,3\text{m}$ και μάζα $m = 2\text{kg}$ καθένας. Το ποδηλάτο κινείται στην κατεύθυνση από το νότο προς το βορρά με ταχύτητα 6m/s . Ο ποδηλάτης φρενάρει ομαλά και το σύστημα σταματά μετά από 3s . Σε όλη τη διάρκεια της επιβραδυνόμενης κίνησης οι τροχοί κυλίνουν. Για τον κάθε τροχό:

- α) να υπολογίσετε τη ροπή αδράνειάς του, αν θεωρήσετε ότι όλη η μάζα του είναι συγκεντρωμένη στην περιφέρεια.
- β) να βρείτε πώς μεταβάλλεται η γωνιακή ταχύτητά του σε συνάρτηση με το χρόνο.
- γ) να γράψετε τη σχέση που συνδέει το μέτρο της στροφορμής του σε συνάρτηση με το χρόνο και να τη σχεδιάσετε.
- δ) να υπολογίσετε τη ροπή που τον επιβράδυνε και να σχεδιάσετε το διάνυσμά της, καθώς και το διάνυσμα της αρχικής γωνιακής ταχύτητας.

9. Η ομογενής ράβδος AB του σχήματος μάζας $M = 2\text{kg}$ και μήκους $L = \frac{12}{7}\text{m}$, μπορεί να στρέφεται γύρω από οριζόντιο σταθερό άξονα κάθετο στη ράβδο, που διέρχεται από το σημείο της O.



Η απόσταση AO είναι ίση με $\frac{L}{4}$. Η ροπή αδράνειας της ράβδου ως προς άξονα που

διέρχεται από το κέντρο μάζας της M και είναι κάθετος σ' αυτή είναι $I_{cm} = \frac{1}{12}ML^2$. Η ράβδος διατηρείται στην οριζόντια θέση με τη βοήθεια κατακόρυφου νήματος που είναι δεμένο στο άκρο B. Κόβουμε το νήμα.

Να βρείτε:

- α) την τάση του νήματος πριν αυτό κοπεί.
- β) τη ροπή αδράνειας της ράβδου ως προς τον άξονα περιστροφής της.
- γ) τη γωνιακή επιτάχυνση της ράβδου αμέσως μόλις κοπεί το νήμα.
- δ) τη γωνιακή ταχύτητα της ράβδου όταν αυτή διέρχεται από την κατακόρυφη θέση.

Δίνεται η επιτάχυνση βαρύτητας $g = 10m/s^2$.

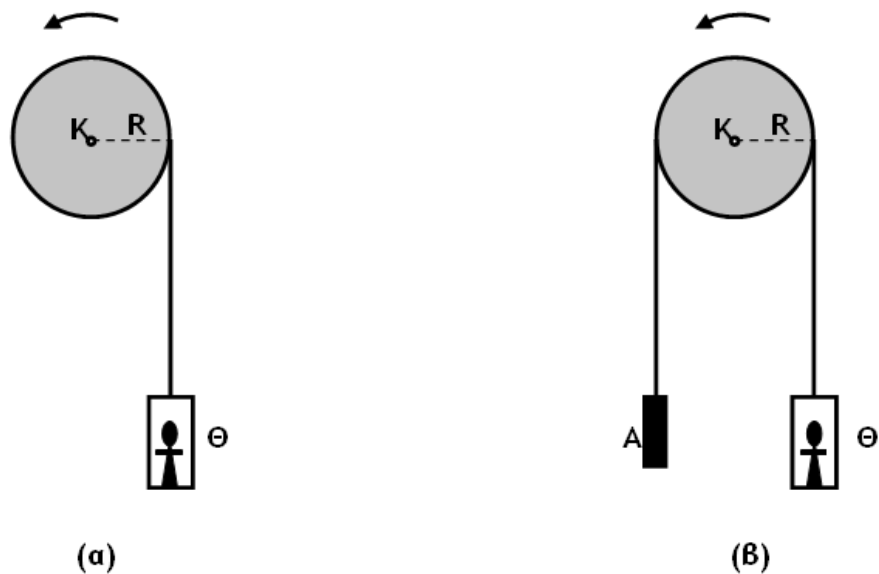
10. Ο ανελκυστήρας του σχήματος (α) αποτελείται από το θάλαμο επιβατών συνολικού βάρους $w_{\Theta} = 2000N$ και το τύμπανο περιέλιξης του συρματόσχοινου ακτίνας $R = 0,25m$, στο οποίο έχει προσαρμοστεί ο κινητήρας του ανελκυστήρα. Ο θάλαμος ανεβαίνει με σταθερή ταχύτητα μέτρου $v = 1m/s$.

α)

1) Να υπολογίσετε τη γωνιακή ταχύτητα περιστροφής του τυμπάνου.

2) Να υπολογίσετε την ισχύ του κινητήρα.

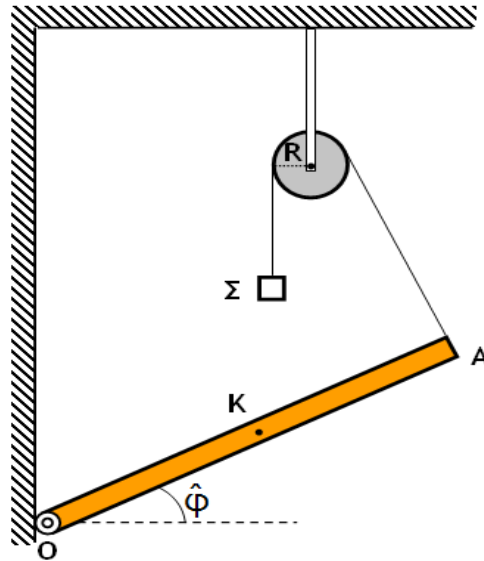
β) Στο σχήμα (β) δείχνεται ο ίδιος ανελκυστήρας στον οποίο έχει προσαρμοστεί ένα αντίβαρο A βάρους $w_A = 1800N$.



Ο θάλαμος ανεβαίνει πάλι με σταθερή ταχύτητα μέτρου $v = 1m/s$.

- 1) Να υπολογίσετε τη νέα ροπή του κινητήρα, που ασκείται στο τύμπανο.
- 2) Να υπολογίσετε τη νέα ισχύ του κινητήρα.

11. Η λεπτή, ομογενής ράβδος OA του σχήματος έχει μήκος L , μάζα M και μπορεί να περιστρέφεται σε κατακόρυφο επίπεδο γύρω από οριζόντιο ακλόνητο άξονα (άρθρωση) που διέρχεται από το άκρο της O. Στο άλλο άκρο A της ράβδου είναι δεμένο ένα αβαρές νήμα, στο άλλο άκρο του οποίου είναι αναρτημένο, μέσω τροχαλίας ακτίνας



R, ένα σώμα Σ μάζας $m_1 = 0,1\sqrt{5} \text{ kg}$.

Το νήμα είναι κάθετο στη ράβδο OA στο άκρο της A. Η ράβδος, το σώμα Σ και η τροχαλία ισορροπούν ακίνητα, με τη ράβδο να σχηματίζει γωνία $\varphi = 45^\circ$ με το οριζόντιο δάπεδο. Να βρείτε:

α) το μέτρο της τάσης T_1 του νήματος στο σημείο A.

β) τη μάζα M της ράβδου.

γ) το μήκος L της ράβδου, αν η ροπή αδράνειάς της ως προς τον άξονα που διέρχεται από το σημείο O είναι $I_O = 15\sqrt{10} \cdot 10^{-4} \text{ kgm}^2$.

δ) Το μέτρο της δύναμης F που ασκεί η άρθρωση στη ράβδο.

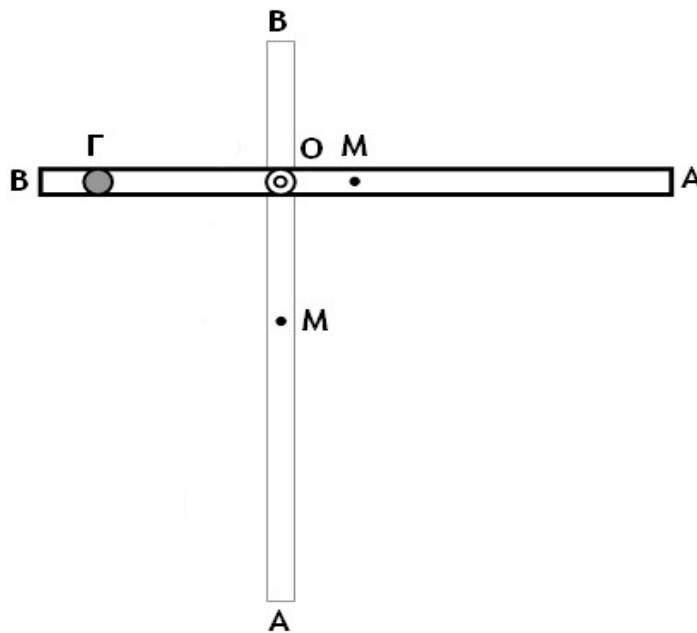
Δίνονται: Η επιτάχυνση βαρύτητας $g = 10 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$ και η ροπή αδράνειας της ράβδου ως προς άξονα που διέρχεται από το κέντρο μάζας είναι

$$I_{cm} = \frac{1}{12}ml^2$$

12. Λεπτή ομογενής και ισοπαχής ράβδος BA με μήκος $L = 0,6\sqrt{3} \text{ m}$ και μάζα $M = 5 \text{ kg}$ ισορροπεί σε οριζόντια θέση, όπως φαίνεται στο σχήμα. Στο σημείο της O υπάρχει ακλόνητη οριζόντια άρθρωση γύρω από την οποία η ράβδος μπορεί να περιστρέφεται στο κατακόρυφο επίπεδο χωρίς τριβές, ενώ στο σημείο Γ υπάρχει στερεωμένο αμελητέων διαστάσεων σφαιρίδιο μάζας m_1 . Η απόσταση (ΓO) είναι ίση με 30 cm , ενώ η απόσταση (OM) είναι ίση με 10 cm , όπου M είναι το μέσο της ράβδου BA.

α) Να υπολογίσετε τη μάζα m_1 .

β) Ενώ το σύστημα βρίσκεται σε ισορροπία προσκολλάμε στο σημείο M σημειακή μάζα $m_2 = \frac{65}{99} kg$ με συνέπεια η ράβδος υπό την επίδραση της βαρύτητας να περιστραφεί χωρίς τριβές γύρω από το σημείο O.



Να υπολογίσετε:

β1) Τη ροπή αδράνειας του συστήματος ως προς τον άξονα περιστροφής που διέρχεται από το σημείο O.

β2) Τη γωνιακή επιτάχυνση του συστήματος ράβδου-μαζών στην οριζόντια θέση αμέσως μετά την προσκόλληση της μάζας m_2 .

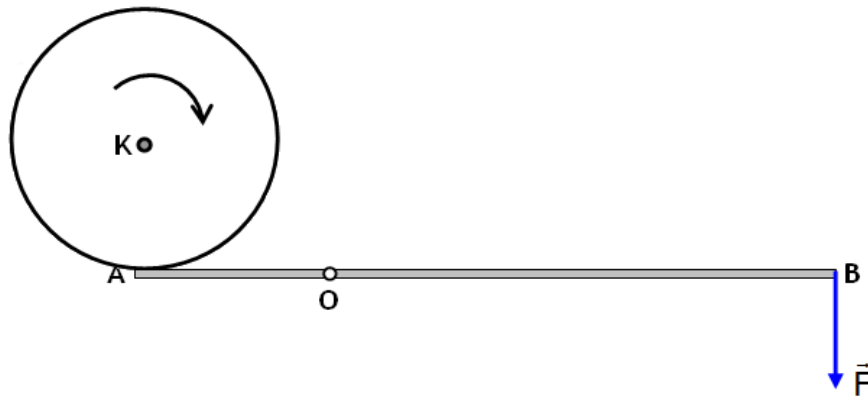
β3) Τη στροφορμή συστήματος ράβδου-μαζών στην κατακόρυφη θέση.

Δίνονται: η ροπή αδράνειας της ράβδου ως προς άξονα που διέρχεται από το κέντρο μάζας της $I_{cm} = \frac{1}{12} ML^2$, $g = 10 \frac{m}{s^2}$.

13. Ο τροχός του σχήματος έχει ακτίνα $R = 0,1 m$ και στρέφεται γύρω από οριζόντιο σταθερό άξονα που διέρχεται από το κέντρο του με στροφορμή μέτρου $L_0 = 20 \frac{kgm^2}{s}$. Η ράβδος AOB του σχήματος έχει μήκος $d = 0,4 m$, είναι

αβαρής και μπορεί να στρέφεται γύρω από οριζόντιο σταθερό άξονα που περνά από το σημείο O και είναι παράλληλος στον άξονα περιστροφής του τροχού. Τη χρονική στιγμή $t_0 = 0$ ασκείται στο άκρο B της ράβδου κατακόρυφη δύναμη μέτρου $F = 400 N$ με αποτέλεσμα η ράβδος να εφάπτεται στον τροχό στο άκρο της A. Η ράβδος ισορροπεί οριζόντια, ενώ ο τροχός, λόγω τριβών στο σημείο επαφής με τη ράβδο, επιβραδύνεται και τελικά σταματά. Η τριβή ολίσθησης που ασκεί η ράβδος στον

τροχό, όσο αυτός περιστρέφεται, έχει μέτρο $T_{o\lambda} = 10 \text{ N}$.



Να βρείτε:

α) Την απόσταση (ΑΟ).

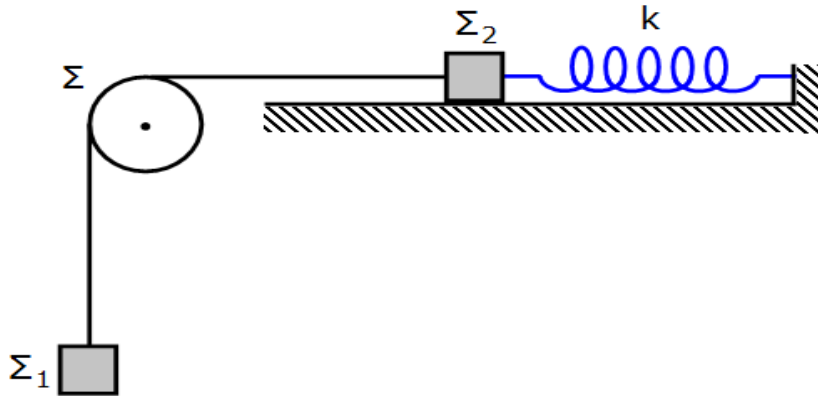
β) Το μέτρο του ρυθμού μεταβολής της στροφορμής του τροχού, $\frac{dL}{dt}$, κατά τη διάρκεια της στροφικής του κίνησης.

γ) Το ρυθμό μεταβολής της κινητικής ενέργειας του τροχού, $\frac{dK}{dt}$, τη στιγμή που το μέτρο της γωνιακής του ταχύτητας είναι το μισό από το αρχικό.

δ) Τη χρονική στιγμή t_1 κατά την οποία ο τροχός ακινητοποιείται καθώς και τη μέση ισχύ $|P_\mu|$ της ροπής που τον ακινητοποίησε (σε απόλυτη τιμή).

Δίνονται: Η ροπή αδράνειας του τροχού ως προς τον άξονα περιστροφής του $I = 2 \text{ kgm}^2$ και ο συντελεστής τριβής ολίσθησης μεταξύ τροχού και της ράβδου $\mu = 0,1$.

14. Η τροχαλία Σ του σχήματος μπορεί να περιστρέφεται γύρω από οριζόντιο ακλόνητο άξονα που διέρχεται από το κέντρο της και είναι κάθετος στο επίπεδό της. Η ροπή αδράνειας της τροχαλίας ως προς τον άξονα της, είναι $I = 0,01 \text{ kgm}^2$ και η ακτίνα της είναι $R = 0,1 \text{ m}$. Γύρω από την τροχαλία είναι τυλιγμένο πολλές φορές λεπτό αβαρές και μη εκτατό νήμα, το οποίο δεν ολισθαίνει πάνω στην τροχαλία. Στη μία άκρη του νήματος έχει αναρτηθεί το σώμα $\Sigma 1$. Στην άλλη άκρη του νήματος έχει προσδεθεί το σώμα $\Sigma 2$, το οποίο βρίσκεται πάνω σε λείο οριζόντιο επίπεδο. Το σύστημα ισορροπεί ακίνητο με τη βοήθεια ιδανικού ελατηρίου σταθεράς $k = 100 \frac{\text{N}}{\text{m}}$, στο οποίο έχει προσδεθεί στο ένα άκρο του το σώμα $\Sigma 2$ και το άλλο άκρο του σε ακλόνητο στήριγμα. Τα σώματα $\Sigma 1$ και $\Sigma 2$ έχουν μάζα $m = 1 \text{ kg}$ το καθένα.



α) Να βρεθεί το μέτρο της δύναμης $F_{ελ}$ που ασκεί το ελατήριο στο σώμα Σ_2 , όταν το σύστημα ισορροπεί.

β) Τη χρονική στιγμή $t_0 = 0$ κόβουμε το νήμα στο σημείο που συνδέει το σώμα Σ_2 με την τροχαλία, με αποτέλεσμα η τροχαλία να ξεκινήσει να περιστρέφεται και το σύστημα ελατήριο - Σ_2 να ξεκινήσει απλή αρμονική ταλάντωση.

Να βρείτε:

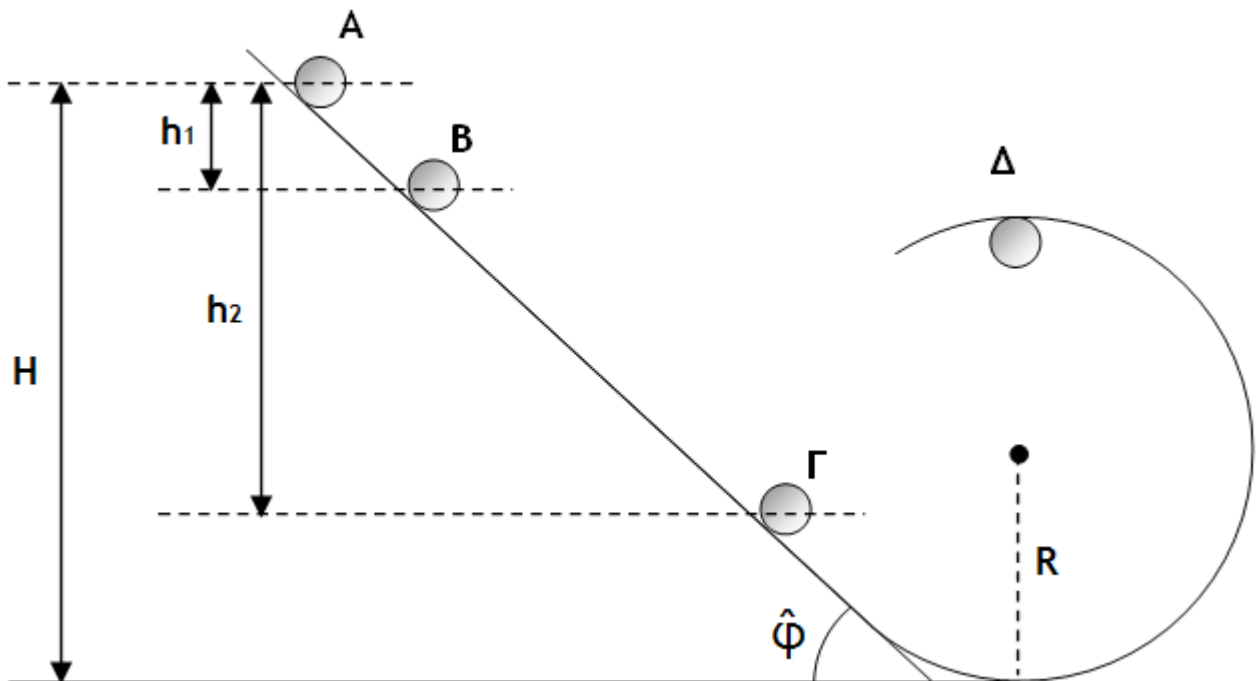
β1) Το μέτρο της γωνιακής επιτάχυνσης a_γ της τροχαλίας.

β2) Πόσο έχει κατέβει το σώμα Σ_1 από τη χρονική στιγμή $t_0 = 0$ μέχρι τη χρονική στιγμή t_1 κατά την οποία το μέτρο της γωνιακής ταχύτητας της τροχαλίας γίνεται αριθμητικά ίσο με τη γωνιακή συχνότητα της απλής αρμονικής ταλάντωσης του συστήματος ελατήριο - Σ_2 .

β3) Το ρυθμό μεταβολής της κινητικής ενέργειας της τροχαλίας $\frac{dK}{dt}$ τη χρονική στιγμή t_1 όπως αυτή καθορίζεται στο προηγούμενο ερώτημα.

Δίνεται: $g = 10 \frac{m}{s^2}$.

15. Μια συμπαγής ομογενής σφαίρα μάζας $m = 0,7 \text{ kg}$ και ακτίνας r , αφήνεται από το σημείο A ενός πλάγιου επιπέδου που σχηματίζει γωνία $\hat{\varphi}$ με το οριζόντιο δάπεδο. Το σημείο A βρίσκεται σε ύψος $H = 84 \text{ cm}$ από το οριζόντιο δάπεδο. Η σφαίρα καθώς κατέρχεται κυλιόμενη διέρχεται από τα σημεία B και Γ που απέχουν από το σημείο A κατακόρυφη απόσταση h_1 και h_2 αντίστοιχα, με $h_2 = 4h_1$. Μόλις η σφαίρα φτάσει στη βάση του πλάγιου επιπέδου, μπαίνει σε κυκλική στεφάνη ακτίνας $R = 28 \text{ cm}$. Η σφαίρα κυλιόμενη εντός της κυκλικής στεφάνης εκτελεί ανακύκλωση.



α) Να βρείτε το μέτρο της επιτάχυνσης του κέντρου μάζας, a_{cm} , της σφαίρας κατά την κίνησή της στο πλάγιο επίπεδο.

β) Να βρείτε το λόγο των μέτρων $\frac{L_B}{L_\Gamma}$ των στροφορμών της σφαίρας στις θέσεις B και Γ.

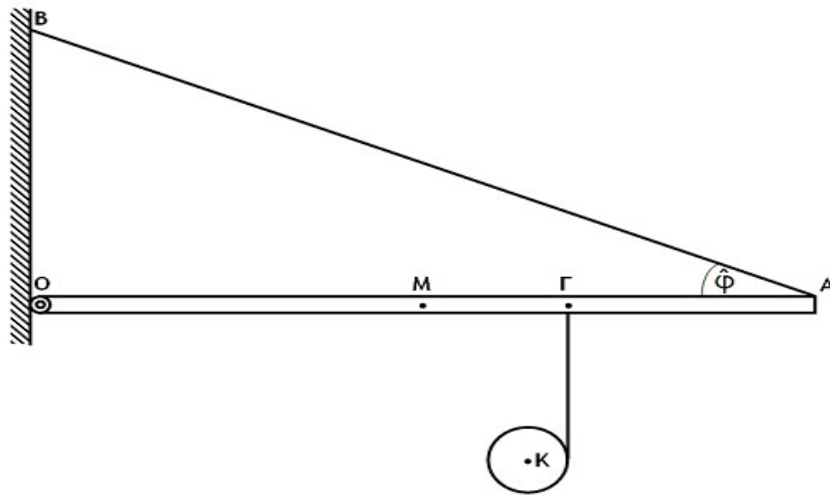
γ) Να βρείτε το μέτρο της ταχύτητας του κέντρου μάζας της σφαίρας v_{cm} στο ανώτερο σημείο της στεφάνης (σημείο Δ στο σχήμα).

δ) Να βρείτε το μέτρο της δύναμης N που δέχεται η σφαίρα από τη στεφάνη στο σημείο Δ.

Δίνονται: Η ροπή αδράνειας της σφαίρας ως προς άξονα που διέρχεται από το κέντρο μάζας της: $I_{cm} = \frac{2}{5}mr^2$, $\eta\mu\hat{\phi} = 0,7$. Η ακτίνα της σφαίρας r είναι πολύ μικρή σε

σχέση με την ακτίνα R της στεφάνης, $g = 10 \frac{m}{s^2}$.

16. Η ομογενής ράβδος OA του σχήματος έχει μάζα $M = 4 \text{ kg}$ και μήκος $L = 2 \text{ m}$. Η ράβδος ισορροπεί σε οριζόντια θέση με τη βοήθεια άρθρωσης στο άκρο O και νήματος που είναι δεμένο στο άκρο A και σχηματίζει γωνία 30° με τη ράβδο, όπως φαίνεται στο σχήμα. Από ένα σημείο Γ της ράβδου έχει δεθεί μέσω αβαρούς σχοινού ένα γιο-γιο μάζας $m = 12 \text{ kg}$, ο κύλινδρος του οποίου έχει ακτίνα $R = 0,1 \text{ m}$. Το γιο-γιο ελευθερώνεται και κατέρχεται διαγράφοντας κατακόρυφη τροχιά, χωρίς ποτέ το σχοινί να γλιστρά. Καθώς το γιο-γιο κατέρχεται το νήμα AB ασκεί στη ράβδο δύναμη μέτρου $T = 100 \text{ N}$. Να βρείτε:



α) το μέτρο της επιτάχυνσης α_{cm} του κέντρου μάζας K του γιο-γιο.

β) το μέτρο του ρυθμού μεταβολής της στροφορμής του γιο-γιο ως προς τον ελεύθερο άξονα περιστροφής του, που περνά από το κέντρο του K.

γ) την απόσταση (ΟΓ).

δ) τη δύναμη \vec{F} που ασκεί η άρθρωση στη ράβδο (μέτρο και διεύθυνση ως προς τον οριζόντιο άξονα).

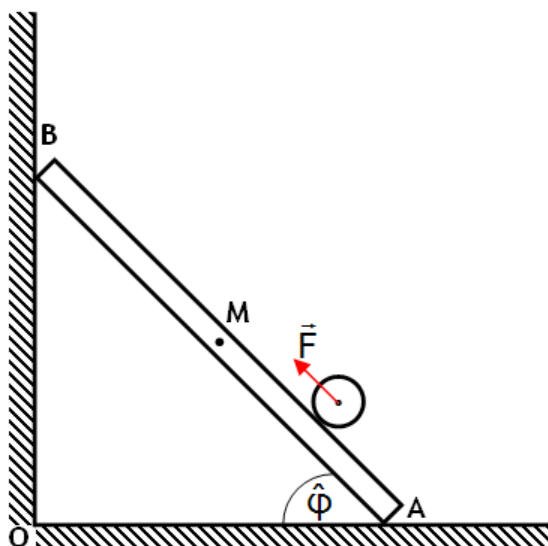
Δίνονται: Η ροπή αδράνειας του γιο-γιο ως προς τον ελεύθερο άξονα περιστροφής του $I_{cm} = \frac{1}{2}mR^2$, $g = 10 \frac{m}{s^2}$.

17. Η λεπτή ομογενής δοκός AB του σχήματος μήκους $L = 7,5\sqrt{2} \text{ m}$ και μάζας $M = 20 \text{ kg}$ ακουμπά σε λείο κατακόρυφο τοίχο OB και ισορροπεί σχηματίζοντας γωνία $\hat{\varphi} = 45^0$ με το οριζόντιο δάπεδο. Ένας ομογενής, λεπτός δίσκος μάζας $m = 1 \text{ kg}$ και ακτίνας R κυλίνεται (χωρίς να ολισθαίνει) κατά μήκος της δοκού προς το άκρο B, υπό την επίδραση δύναμης μέτρου $F = 20\sqrt{2} \text{ N}$, παράλληλης στη δοκό, όπως φαίνεται στο σχήμα.

Να βρείτε:

α) το μέτρο της επιτάχυνσης α_{cm} του κέντρου μάζας του δίσκου.

β) το μέτρο της ταχύτητας του κέντρου μάζας v_{cm} του δίσκου τη στιγμή που φτάνει στο ανώτερο σημείο B της δοκού, αν ο δίσκος ξεκίνησε να κινείται από τη βάση A χωρίς ταχύτητα.



γ) Το μέτρο και τη διεύθυνση της δύναμης \vec{A} που ασκεί ο δίσκος στη ράβδο.

δ) Τον ελάχιστο συντελεστή οριακής στατικής τριβής μεταξύ δοκού και δαπέδου ώστε ο δίσκος να φτάσει στο άκρο B της δοκού, χωρίς η δοκός να ολισθήσει στο δάπεδο.

Δίνονται: Η ροπή αδράνειας του δίσκου ως προς το κέντρο μάζας του $I_{cm} = \frac{1}{2}mR^2$

$$, g = 10 \frac{m}{s^2}.$$

18. Ο λεπτός ομογενής δίσκος του σχήματος (α) έχει μάζα $M = 9kg$, ακτίνα $R = \frac{1}{30}m$ και μπορεί να περιστρέφεται σε κατακόρυφο επίπεδο, γύρω από οριζόντιο σταθερό άξονα που διέρχεται από το σημείο O της περιφέρειάς του.

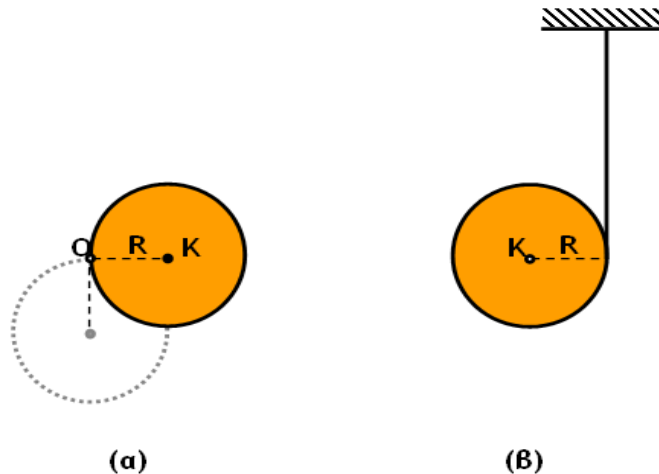
Αρχικά ο δίσκος βρίσκεται σε τέτοια θέση, ώστε η ακτίνα OK που συνδέει το σημείο O με το κέντρο μάζας K του δίσκου (που συμπίπτει με το κέντρο του δίσκου), να είναι οριζόντια. Από αυτή τη θέση αφήνουμε το δίσκο να στραφεί. Η γωνιακή επιτάχυνση με την οποία ο δίσκος ξεκινά τη στροφική του κίνηση έχει μέτρο $a_\gamma = 200 \frac{rad}{s^2}$.

Να βρείτε:

α) Τη ροπή αδράνειας $I(O)$ του δίσκου ως προς τον άξονα περιστροφής του που διέρχεται από το σημείο O.

β) Τυλίγουμε πολλές φορές ένα αβαρές, μη εκτατό νήμα γύρω από έναν ίδιο δίσκο και την ελεύθερη άκρη του νήματος τη στερεώνουμε στην οροφή, σχηματίζοντας ένα γιο-γιο,

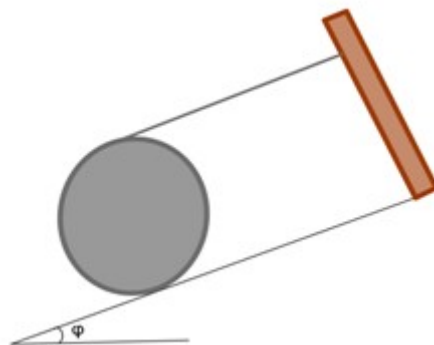
όπως φαίνεται στο σχήμα (β). Αφήνουμε ελεύθερο το δίσκο και αυτός ξεκινά να κατέρχεται με το νήμα διαρκώς κατακόρυφο και χωρίς αυτό να γλιστρά ως προς το δίσκο.



- γ) Να βρείτε τη ροπή αδράνειας I_{cm} του δίσκου ως προς άξονα που διέρχεται από το κέντρο μάζας του και είναι κάθετος στο επίπεδό του.
- δ) Να δείξετε ότι η τάση του νήματος που ασκείται στο δίσκο δε μεταβάλλει την συνολική κινητική του ενέργεια.
- ε) Να βρείτε το μέτρο της γωνιακής ταχύτητας ω του δίσκου όταν έχει ξετυλιχθεί νήμα με μήκος ίσο με την ακτίνα του δίσκου.
- στ) Να βρείτε το ρυθμό μεταβολής της στροφικής κινητικής ενέργειας του δίσκου όταν έχει ξετυλιχθεί νήμα με μήκος ίσο με την ακτίνα του δίσκου.

Δίνεται η επιτάχυνση της βαρύτητας: $g = 10 \frac{m}{s^2}$. Επίσης δεν θεωρείται γνωστός ο τύπος της ροπής αδράνειας ομογενή δίσκου για άξονα που διέρχεται από το κέντρο μάζας του.

19. Ο δίσκος ισορροπεί με τη βοήθεια ενός νήματος παράλληλου στο κεκλιμένο επίπεδο. Αν το βάρος του δίσκου είναι $w = 10N$ και η γωνία του κεκλιμένου επιπέδου είναι $\phi = 30^\circ$, να βρεθούν:



- α) η συνισταμένη ροπή των δυνάμεων που δέχεται ο δίσκος ως προς το κέντρο του K.

β) η δύναμη που δέχεται ο τροχός από το νήμα.

γ) η στατική τριβή στον δίσκο καθώς και το μέτρο της δύναμης που ασκεί το κεκλιμένο επίπεδο στο δίσκο.

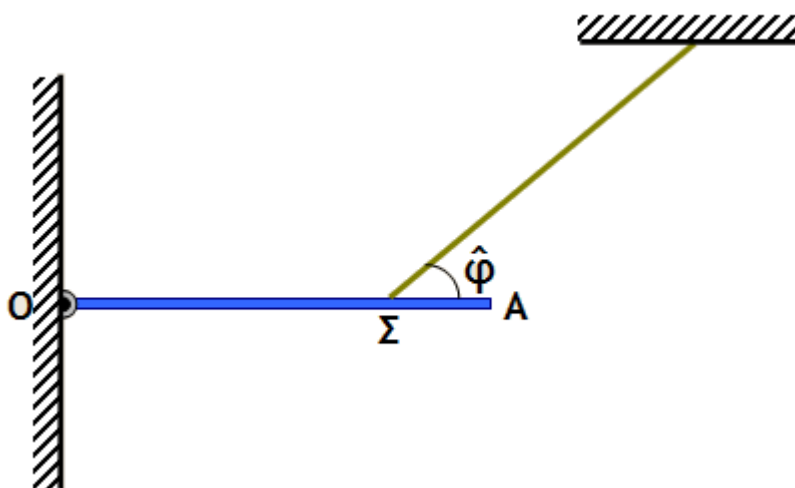
20. Η ομογενής ράβδος του σχήματος έχει μήκος $L = 4 \text{ m}$, μάζα $M = 30 \text{ kg}$ και είναι αρθρωμένη στο άκρο της Ο. Η ράβδος ισορροπεί με τη βοήθεια νήματος, το οποίο είναι δεμένο σε σημείο Σ της ράβδου και σχηματίζει με τη ράβδο γωνία $\hat{\phi} = 30^\circ$. Η απόσταση (ΟΣ) είναι ίση με 3 m . Να βρεθούν:

α) Το μέτρο της τάσης \vec{N} του νήματος.

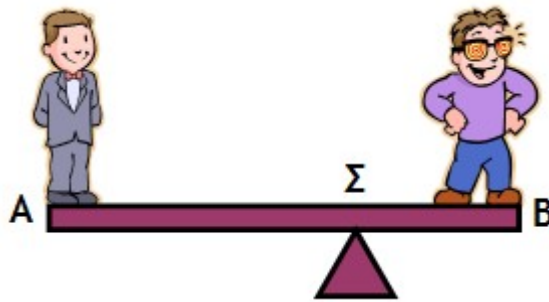
β) Το μέτρο και η κατεύθυνση της δύναμης \vec{F} που ασκεί η άρθρωση στη ράβδο.

γ) Το μέτρο και η κατεύθυνση της δύναμης \vec{F}' που θα ασκήσει η άρθρωση στη ράβδο, αν το νήμα δεθεί σε σημείο Κ της ράβδου, τέτοιο, ώστε η απόσταση (ΟΚ) να είναι ίση με $\frac{4}{3} \text{ m}$ και το νήμα να σχηματίζει την ίδια γωνία $\hat{\phi}$ με τη ράβδο.

Δίνεται: $g = 10 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$.



21. Στα άκρα Α και Β της αβαρούς τραμπάλας του σχήματος βρίσκονται δύο παιδιά. Το παιδί που βρίσκεται στο άκρο Α έχει βάρος μέτρου $w_A = 200 \text{ N}$, ενώ το άλλο παιδί έχει βάρος μέτρου $w_B = 800 \text{ N}$.



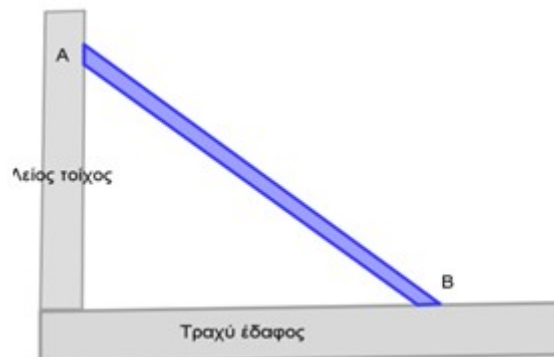
Το μήκος της τραμπάλας είναι $L = 2 \text{ m}$.

α) Να βρεθεί σε πόση απόσταση από το άκρο A πρέπει να τοποθετηθεί στήριγμα (Σ), ώστε η τραμπάλα να ισορροπεί.

β) Να βρεθεί η δύναμη στήριξης \vec{F} που ασκεί το στήριγμα (Σ) στην τραμπάλα.

γ) Αν το παιδί που βρίσκεται στο άκρο A σταθεί πιο κοντά στο στήριγμα (Σ), προς ποια μεριά θα ανατραπεί η τραμπάλα;

22. Μια ράβδος ομογενής AB μήκους L και βάρους $w = 100 \text{ N}$ ισορροπεί όπως φαίνεται στο σχήμα στηριζόμενη στο άκρο της A σε λείο τοίχο και στο άκρο της B σε τραχύ έδαφος. Δίνεται ότι η ελάχιστη γωνία για την οποία η ράβδος δεν ολισθαίνει είναι $\phi = 45^\circ$ και ότι $g = 10 \text{ m/s}^2$.



Ζητείται:

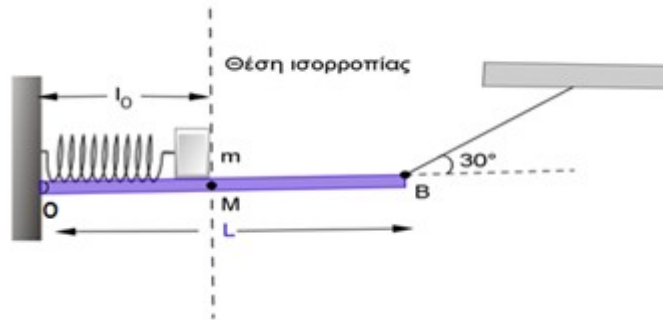
α) Η κάθετη δύναμη που ασκεί το έδαφος στη ράβδο.

β) Ο συντελεστής στατικής τριβής μεταξύ ράβδου-εδάφους καθώς και τη δύναμη που ασκεί ο λείος τοίχος στη ράβδο.

γ) Το μέτρο της δύναμης (αντίδρασης) του εδάφους στη ράβδο.

23. Η ράβδος OB είναι ομογενής έχει βάρος $w = 10 \text{ N}$ και έχει μήκος $L = 2 \text{ m}$. Το ένα άκρο της O στηρίζεται σε τοίχο με άρθρωση, ενώ στο άλλο έχουμε δέσει νήμα το οποίο σχηματίζει γωνία $\phi = 30^\circ$ με το οριζόντιο επίπεδο. Πάνω στη ράβδο βρίσκεται

οριζόντιο ελατήριο σταθεράς $K = 100 \frac{N}{m}$ που στο ένα άκρο του έχουμε δέσει σώμα μάζας $m = 1kg$ που ισορροπεί ακίνητο. Το φυσικό μήκος του ελατηρίου είναι $\ell_0 = \frac{L}{2} = 1m$. Τη χρονική στιγμή $t = 0$ εκτοξεύεται το σώμα με ταχύτητα $v = 5m/s$ προς τα δεξιά, οπότε το σώμα ξεκινάει να εκτελεί γραμμική αρμονική ταλάντωση. (Υπόδειξη: Ως θετική φορά θεωρείστε τη κατεύθυνση προς τα δεξιά.)



Να βρεθεί:

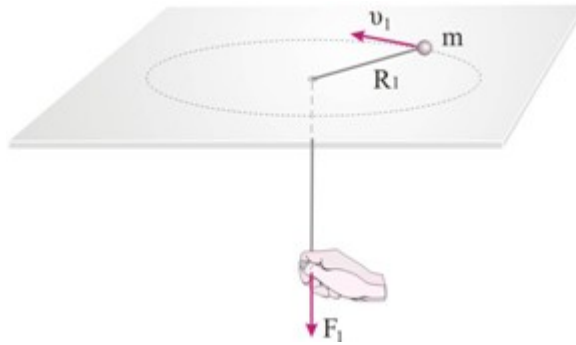
- Η τάση του νήματος πριν την εκτόξευση του σώματος.
- Το πλάτος της ταλάντωσης του σώματος.
- Η τάση του νήματος τη χρονική στιγμή $t = 0,15 \cdot \pi s$.
- Το μέτρο της δύναμης που δέχεται το σώμα από την άρθρωση τη χρονική στιγμή $t = 0,15 \cdot \pi s$.

24. Μια συμπαγής σφαίρα μάζας $m = 1kg$ και ακτίνας $R = 0,2m$ μπορεί να κυλά (χωρίς να ολισθαίνει) σε πλάγιο επίπεδο γωνίας φ . Όταν αυτή αφεθεί ελεύθερη να κυλήσει στο επίπεδο, ο ρυθμός μεταβολής της στροφορμής της ως προς το κέντρο μάζας της έχει μέτρο $2/7 kgm^2/s^2$.

- Να σχεδιάσετε τις δυνάμεις που ασκούνται στη σφαίρα.
- Να υπολογίσετε το μέτρο της στατικής τριβής.
- Να υπολογίσετε την επιτάχυνση του κέντρου μάζας.
- Να υπολογίσετε το ημφ της γωνίας φ του πλάγιου επιπέδου.

Δίνονται: $g = 10m/s^2$ και η ροπή αδράνειας της σφαίρας ως προς άξονα που περνά από το κέντρο μάζας $I_{cm} = 2mR^2/5$

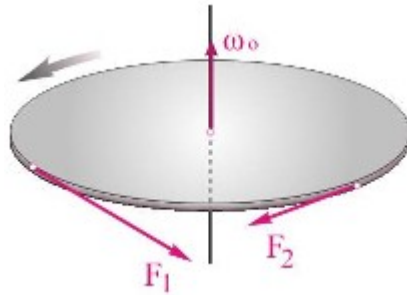
25. Το σφαιρίδιο του σχήματος έχει μάζα $m = 1\text{kg}$ και εκτελεί ομαλή κυκλική κίνηση ακτίνας $R_1 = 0,5\text{m}$ με γωνιακή ταχύτητα μέτρου $\omega_1 = 2\text{rad/s}$ πάνω σε λείο οριζόντιο επίπεδο που έχει στο μέσο του οπή. Το σφαιρίδιο είναι δεμένο σε λεπτό αβαρές και μη εκτατό νήμα το οποίο περνά από την κατακόρυφη οπή και καταλήγει στο χέρι του πειραματιστή. Το νήμα μπορεί να ολισθαίνει στα τοιχώματα της οπής χωρίς τριβές. Ο πειραματιστής κατεβάζει κατακόρυφα το χέρι του προσφέροντας στο σφαιρίδιο ενέργεια $7,5\text{J}$, οπότε η ακτίνα περιστροφής του σφαιριδίου μειώνεται σε R_2 .



Να υπολογίσετε:

- α. το μέτρο της κεντρομόλου δύναμης που ασκεί το χέρι μέσω του νήματος στο σφαιρίδιο, καθώς αυτό περιστρέφεται με γωνιακή ταχύτητα μέτρου ω_1 .
- β. το μέτρο της στροφορμής του σφαιριδίου.
- γ. τη γραμμική ταχύτητα περιστροφής του σφαιριδίου στην ακτίνα R_2 .
- δ. την κατακόρυφη μετατόπιση του χεριού του πειραματιστή.

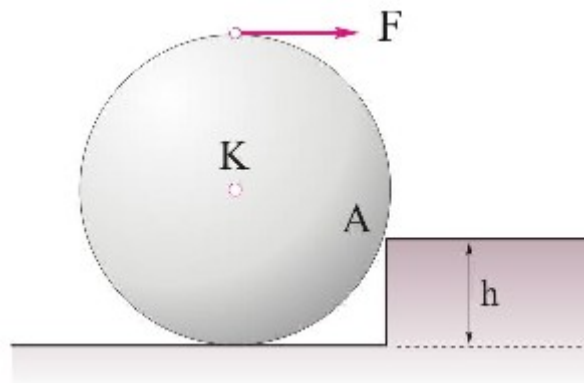
26. Ο οριζόντιος δίσκος του σχήματος στρέφεται χωρίς τριβές γύρω από σταθερό κατακόρυφο άξονα που συμπίπτει με τον άξονα συμμετρίας του με γωνιακή ταχύτητα μέτρου $\omega_0 = 10\text{rad/s}$. Τη χρονική στιγμή $t = 0$ ασκούνται στο δίσκο δύο εφαπτομενικές οριζόντιες σταθερές δυνάμεις $F_1 = 18\text{N}$ και F_2 όπως στο σχήμα. Τη στιγμή $t_1 = 5\text{s}$ που το μέτρο της γωνιακής ταχύτητας του δίσκου είναι $\omega_1 = 30\text{rad/s}$, η F_1 καταργείται και τη στιγμή $t_2 = 20\text{s}$, ο δίσκος σταματά στιγμιαία.



- A. Να βρείτε τα μέτρα των γωνιακών επιταχύνσεων του δίσκου από τη χρονική στιγμή $t = 0$ μέχρι τη στιγμή t_2 που θα σταματήσει στιγμιαία.
- B. Να σχεδιάσετε το διάγραμμα της γωνιακής ταχύτητας του δίσκου σε συνάρτηση με το χρόνο από τη χρονική στιγμή $t = 0$ μέχρι τη στιγμή t_2 σε αριθμημένους άξονες.
- Γ. Να υπολογίσετε τον αριθμό των περιστροφών του δίσκου από τη χρονική στιγμή $t = 0$ μέχρι τη στιγμή t_2 .
- Δ. Να βρείτε το μέτρο της δύναμης F_2 .

27. Η σφαίρα του διπλανού σχήματος έχει μάζα $m = 60\text{kg}$, ακτίνα $R = 1\text{m}$ και το εμπόδιο έχει ύψος $h = 0,4\text{m}$. Ασκούμε στο ψηλότερο σημείο της σφαίρας εφαπτομενικά οριζόντια δύναμη μέτρου $F = 400\text{N}$ η οποία παραμένει διαρκώς σταθερή σε κατεύθυνση και μέτρο, με συνέπεια η σφαίρα να υπερπηδά το εμπόδιο.

A. Να υπολογίσετε τη ροπή αδράνειας της σφαίρας ως προς τον οριζόντιο άξονα που διέρχεται από το σημείο A και είναι κάθετος στο επίπεδο της σελίδας.



B. Τη χρονική στιγμή που βρίσκονται στην ίδια κατακόρυφο το σημείο A, το κέντρο μάζας K της σφαίρας και το σημείο εφαρμογής της δύναμης F, να:

1. σχεδιάσετε τις δυνάμεις που ακούονται στη σφαίρα (να αγνοηθεί η στατική τριβή).
2. υπολογίσετε τη γωνιακή επιτάχυνση της σφαίρας ως προς τον άξονα περιστροφής που διέρχεται από το σημείο A.
3. υπολογίσετε τη γωνιακή ταχύτητα της σφαίρας ως προς τον άξονα περιστροφής που διέρχεται από το σημείο A.

Δίνονται $g = 10\text{m/s}^2$ και η ροπή αδράνειας της σφαίρας ως προς άξονα που περνά από το κέντρο μάζας της $I_{cm} = 2mR^2/5$.

28.

29.

30.

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

1. $20\text{rad/s}, 2\text{s}, 40\text{rad/s}, 6\text{J}$
2. $4\text{kgm}^2, 4, 2\pi, 10$
3. $0,03, 5, 0,5, 2,25$
4. $-2, 0, 10/\pi, -2,4, 0,8$
5. $40, 0,02, 4, 10/\pi$
6. $2, 2, 8, 1,6, 3,2$
7. $0,18, 20-20/3t \text{ [0, 3]}, 3,6-1,2t \text{ [0, 3]}, -1,2$
8. $20/3, 6/7, 10, 20^{1/2}$
9. $4, 2000, 50, 200$
10. $5^{1/2}, 0,2 \cdot 10^{1/2}, 0,15, 5$
11. $5/3, 65/99, 1, 65 \cdot 2^{1/2}/99$
12. $0,32, 1, 5, 20, 5$
13. $10, 50, 0,1, 5$
14. $5, 1/2, 2, 3$
15. $20/3, 4, 1,5, 20 \cdot 21^{1/2}, 3^{1/2}/5$
16. $10 \cdot 2^{1/2}, 10 \cdot 3^{1/2}, 10\text{N}, 45^\circ, 0,5$
17. $1,5 \cdot 10^{-2}, 5 \cdot 10^{-3}, 20, 20$
- 18.
19. μηδέν, $2,5, 81, 25^{1/2}$
20. $400, 100 \cdot 13^{1/2}, 150 \cdot 28^{1/2}$
21. $1,6, 1000, \text{δεξιόστροφα}$
22. $100, 0,5, 50 \cdot 5^{1/2}$
23. $20, 0,2\pi, 15, 5 \cdot 3^{1/2}$
24. $[10/7 \text{ N}, 25/7 \text{ m/s}^2, 1/2]$
25. $[2\text{N}, 0,5\text{kgm}^2/\text{s}, 4\text{m/s}, 0,375\text{m}]$
26. $[4, 2, 162,5/\pi, 6\text{N}]$
27. $[84, 200/21, 40/21^{1/2}]$
- 28.
- 29.
- 30.