

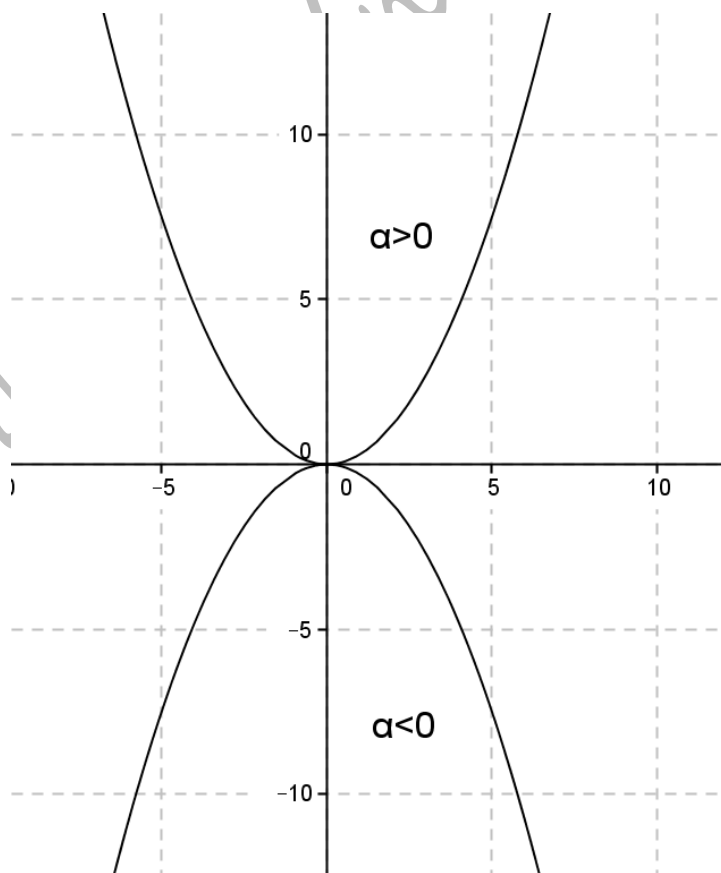
Παραβολή $\psi = \alpha\chi^2 + \beta\chi + \gamma$, $\alpha \neq 0$

Γενικά : Κάθε συνάρτηση της μορφής $\psi = \alpha\chi^2 + \beta\chi + \gamma$, $\alpha \neq 0$ λέγεται **τετραγωνική συνάρτηση**.

Η παραβολή $\psi = \alpha\chi^2$

Η γραφική παράσταση της συνάρτησης $\psi = \alpha\chi^2$ είναι μια παραβολή, που εφάπτεται του άξονα $\chi\chi'$ στην αρχή των αξόνων (0,0). Πράγματι για $\chi = 0$, $\psi = \alpha \cdot 0 = 0$. Ο άξονας $\psi\psi'$ είναι άξονας συμμετρίας της παραβολής.

- Αν $\alpha > 0$ τότε η γραφική παράσταση της $\psi = \alpha\chi^2$ «βρίσκεται» στα **I-II τεταρτημόρια** του ορθοκανονικού συστήματος συντεταγμένων με **ελάχιστη** τιμή $\psi = 0$ όταν $\chi = 0$.
- ενώ αν $\alpha < 0$ η γραφική παράσταση της $\psi = \alpha\chi^2$ «βρίσκεται» στα **III-IV τεταρτημόρια** του ορθοκανονικού συστήματος συντεταγμένων με **μέγιστη** τιμή $\psi = 0$ όταν $\chi = 0$ (σχήμα 1).



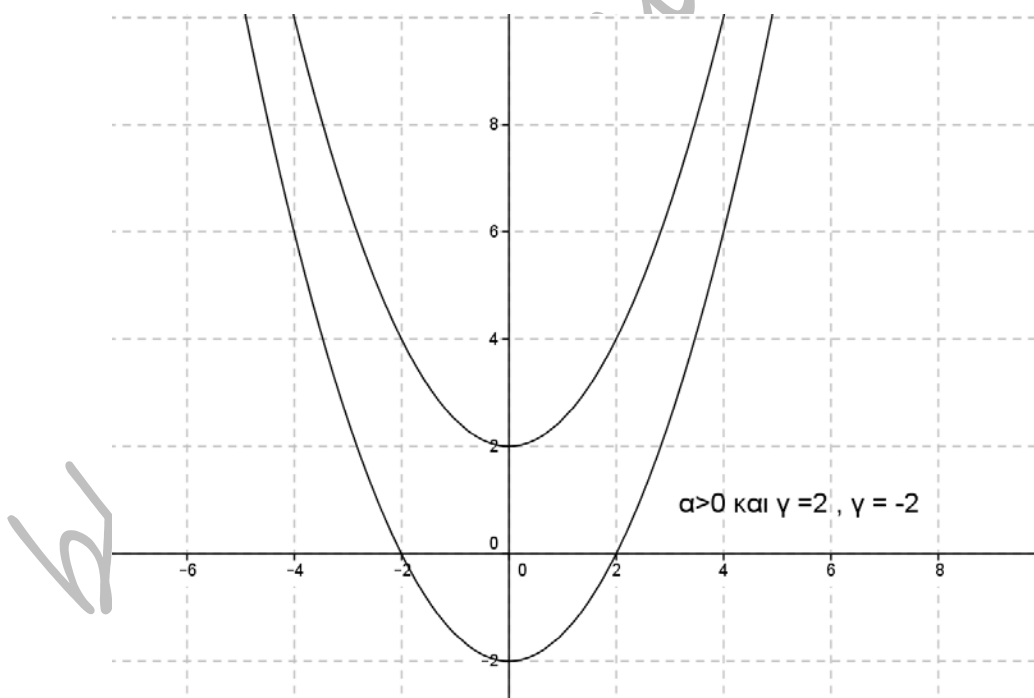
Σχήμα 1 $\psi = \alpha\chi^2$

Η παραβολή $\psi = \alpha x^2 + \gamma$

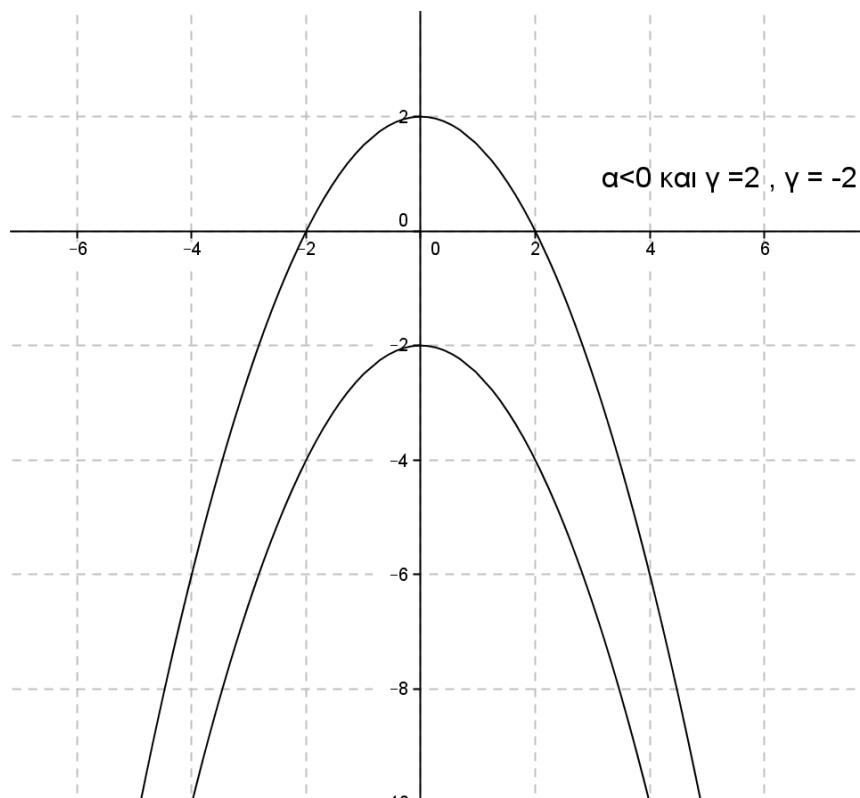
Η γραφική παράσταση της συνάρτησης $\psi = \alpha x^2 + \gamma$ προκύπτει από την **κατακόρυφη** μετατόπιση της $\psi = \alpha x^2$ κατά $|\gamma|$. Η παραβολή περνά από το σημείο $(0, \gamma)$. πράγματι για $x = 0$, $\psi = \alpha \cdot 0 + \gamma = \gamma$

Αν $\gamma > 0$ τότε η παραβολή $\psi = \alpha x^2$ μετατοπίζεται προς τα «πάνω», ενώ αν $\gamma < 0$ η παραβολή $\psi = \alpha x^2$ μετατοπίζεται προς τα «κάτω». Ο άξονας $\psi\psi'$ είναι άξονας συμμετρίας της παραβολής.

- Αν $\alpha > 0$ τότε η γραφική παράσταση της $\psi = \alpha x^2 + \gamma$ «προεκτείνεται» προς τα **I-II τεταρτημόρια** του ορθοκανονικού συστήματος συντεταγμένων με **ελάχιστη** τιμή $\psi = \gamma$ όταν $x = 0$,
- ενώ αν $\alpha < 0$ η γραφική παράσταση της $\psi = \alpha x^2 + \gamma$ «προεκτείνεται» προς τα **III-IV τεταρτημόρια** του ορθοκανονικού συστήματος συντεταγμένων με **μέγιστη** τιμή $\psi = \gamma$ όταν $x = 0$ (σχήματα 2 και 3).



Σχήμα 2 $\psi = \alpha x^2 + \gamma$ ($\alpha > 0$)



Σχήμα 3 $\psi = \alpha\chi^2 + \gamma$ ($\alpha < 0$)

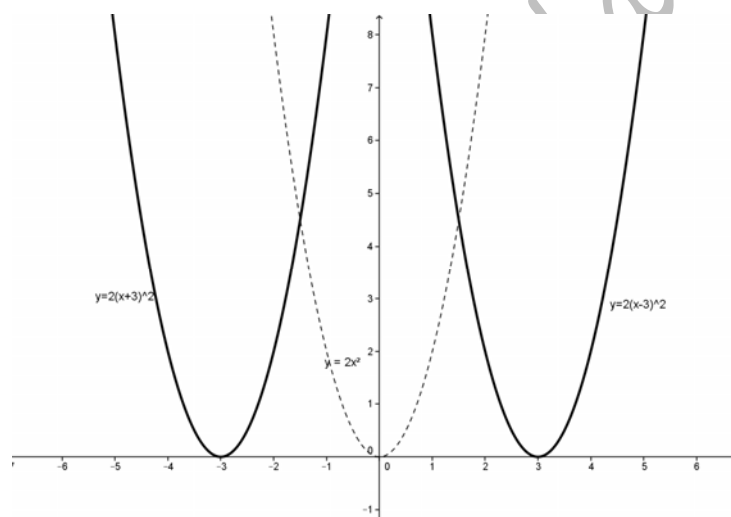
Τέμνει η παραβολή τον άξονα $\chi\chi'$ και αν ναι σε ποια σημεία;

Τα σημεία τομής της παραβολής $\psi = \alpha\chi^2 + \gamma$ με τον $\chi\chi'$, αν υπάρχουν, έχουν τεταγμένη $\psi = 0$. Οι τετμημένες λοιπόν των σημείων τομής προκύπτουν από την επίλυση της εξίσωσης $\alpha\chi^2 + \gamma = 0$, η οποία έχει λύση μόνο αν $-\frac{\gamma}{\alpha} \geq 0$

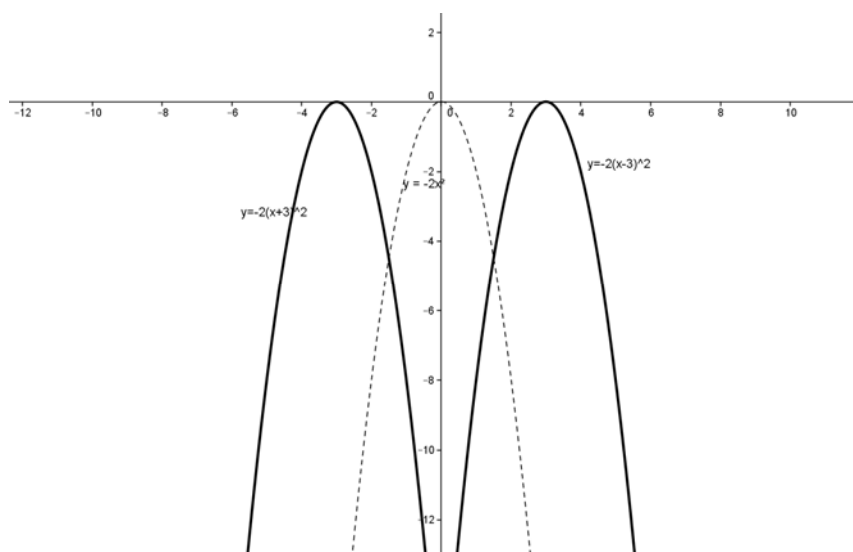
$$\alpha\chi^2 + \gamma = 0 \Leftrightarrow \alpha\chi^2 = -\gamma \Leftrightarrow \chi = \pm\sqrt{-\frac{\gamma}{\alpha}}$$

Η παραβολή $\psi = \alpha(x-\lambda)^2$

Η γραφική παράσταση της συνάρτησης $\psi = \alpha(x-\lambda)^2$ είναι μια παραβολή, που προκύπτει από την **οριζόντια μετατόπιση** της $\psi = \alpha x^2$ κατά $|\lambda|$, δηλ η παραβολή περνά από το σημείο $(\lambda, 0)$. Πράγματι αν $\psi = 0$ τότε $0 = \alpha(x-\lambda)^2 \Leftrightarrow (x-\lambda)^2 = 0 \Leftrightarrow x = \lambda$, δηλαδή αν $\lambda > 0$ η παραβολή $\psi = \alpha x^2$ μετατοπίζεται **δεξιά** κατά λ , ενώ αν $\lambda < 0$ η παραβολή $\psi = \alpha x^2$ μετατοπίζεται **αριστερά** κατά $|\lambda|$. Αν $\alpha > 0$ η παραβολή εφάπτεται στον άξονα xx' στο σημείο $(\lambda, 0)$, που είναι και η **ελάχιστη** τιμή της συνάρτησης. Αν $\alpha < 0$ η παραβολή εφάπτεται στον άξονα xx' στο σημείο $(\lambda, 0)$, που είναι και η **μέγιστη** τιμή της συνάρτησης. Άξονας συμμετρίας της παραβολής είναι η ευθεία $x = \lambda$. (σχήματα 4 και 5).



Σχήμα 4 $\psi = \alpha(x-\lambda)^2$



Σχήμα 5 $\psi = \alpha(x-\lambda)^2$

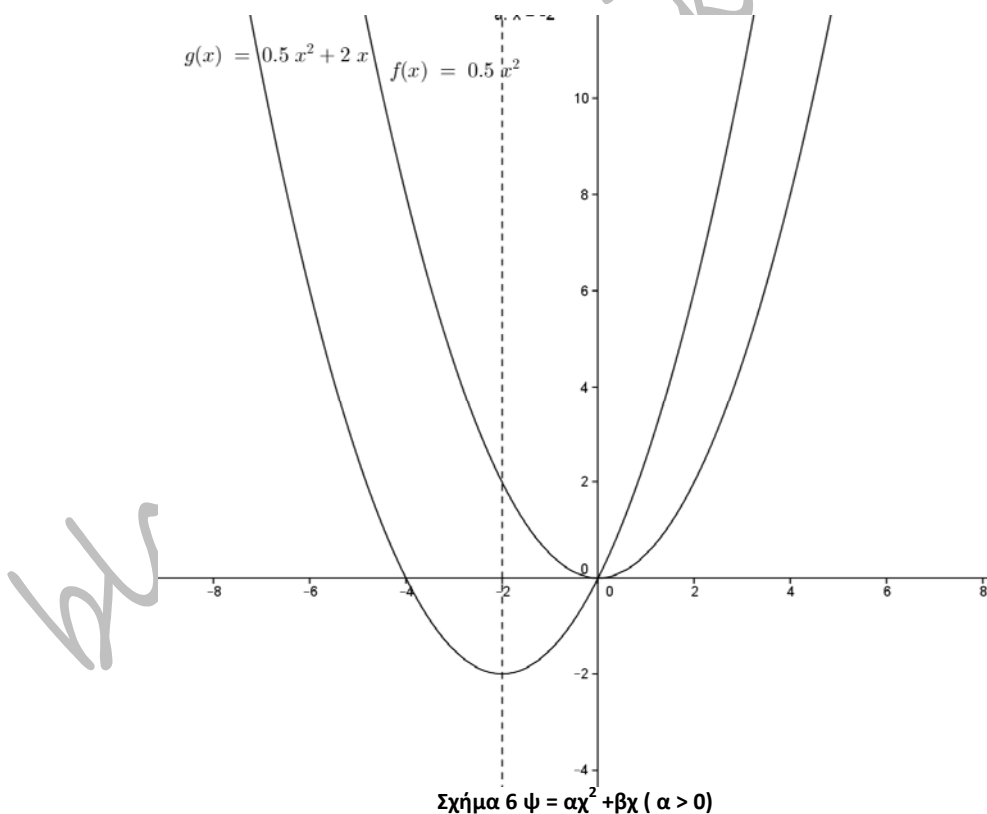
Η παραβολή $\psi = \alpha x^2 + \beta x$

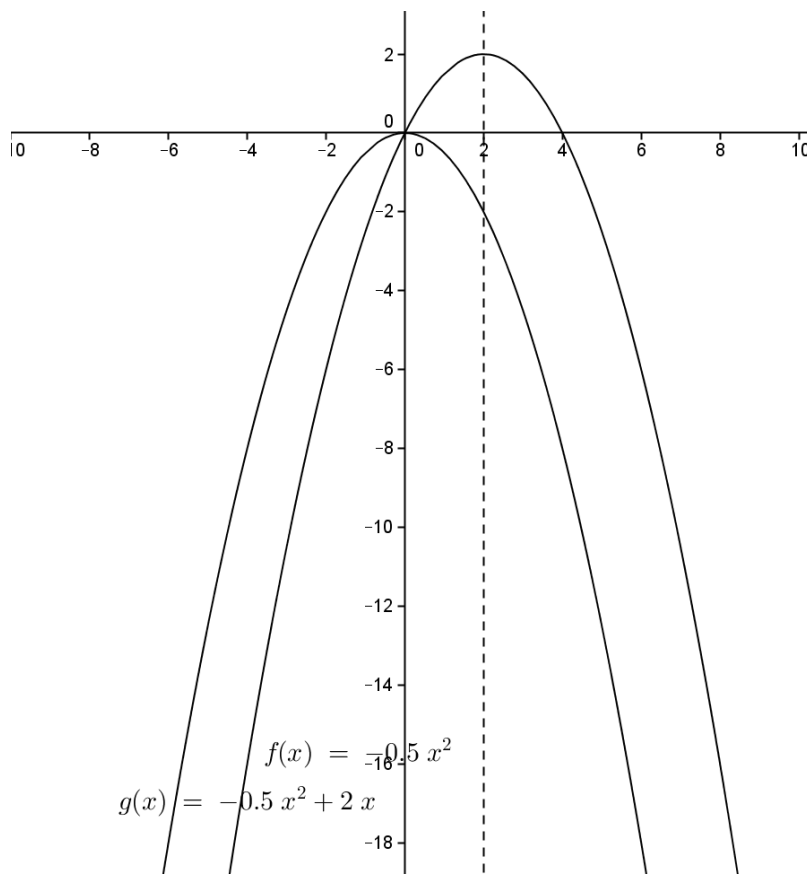
Η γραφική παράσταση της συνάρτησης $\psi = \alpha x^2 + \beta x$ είναι μια παραβολή, με άξονα συμμετρίας την ευθεία $x = -\frac{\beta}{2\alpha}$.

Αν $\alpha > 0$ έχει ελάχιστο το σημείο $(-\frac{\beta}{2\alpha}, -\frac{\beta^2}{4\alpha})$, ενώ αν $\alpha < 0$ έχει μέγιστο το σημείο $(-\frac{\beta}{2\alpha}, -\frac{\beta^2}{4\alpha})$.

Τα σημεία τομής της παραβολής $\psi = \alpha x^2 + \beta x$ με τον x' , έχουν τεταγμένη $\psi = 0$. Οι τετμημένες λοιπόν των σημείων τομής προκύπτουν από την επίλυση της εξίσωσης $\alpha x^2 + \beta x = 0 \Leftrightarrow x(\alpha x + \beta) = 0 \Leftrightarrow x = 0$ ή $x = -\frac{\beta}{\alpha}$

(Σχήματα 6 και 7)





Σχήμα 7 $\psi = \alpha\chi^2 + \beta\chi$ ($\alpha < 0$)

Η παραβολή $\psi = \alpha\chi^2 + \beta\chi + \gamma$

επίλυση της εξίσωσης $\alpha\chi^2 + \beta\chi + \gamma = 0$ ($\alpha \neq 0$)

$$\begin{aligned} \alpha\chi^2 + \beta\chi + \gamma = 0 &\Leftrightarrow \chi^2 + \frac{\beta}{\alpha}\chi + \frac{\gamma}{\alpha} = 0 \Leftrightarrow \chi^2 + \frac{\beta}{\alpha}\chi + \frac{\beta^2}{4\alpha^2} - \frac{\beta^2}{4\alpha^2} + \frac{\gamma}{\alpha} = 0 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \chi^2 + 2\frac{\beta}{2\alpha} + \frac{\beta^2}{4\alpha^2} = \frac{\beta^2}{4\alpha^2} - \frac{4\alpha\gamma}{4\alpha^2} \Leftrightarrow \left(\chi + \frac{\beta}{2\alpha}\right)^2 = \frac{\beta^2 - 4\alpha\gamma}{4\alpha^2} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \left(\chi + \frac{\beta}{2\alpha}\right)^2 = \frac{\Delta}{4\alpha^2} \Leftrightarrow \chi = -\frac{\beta}{2\alpha} \pm \sqrt{\frac{\Delta}{4\alpha^2}} \Leftrightarrow \chi = \frac{-\beta \pm \sqrt{\Delta}}{2\alpha} \end{aligned}$$

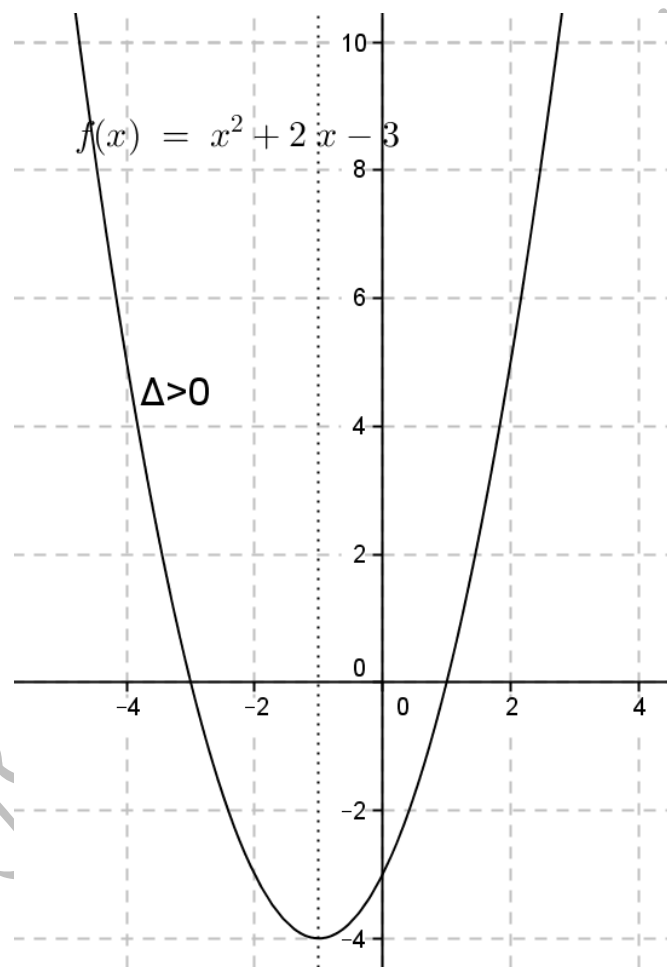
- Αν $\Delta > 0$ ορίζεται η $\sqrt{\Delta}$ και η εξίσωση $\alpha\chi^2 + \beta\chi + \gamma = 0$ έχει δύο πραγματικές ρίζες τις $\chi_1 = \frac{-\beta + \sqrt{\Delta}}{2\alpha}$ και $\chi_2 = \frac{-\beta - \sqrt{\Delta}}{2\alpha}$.
- Αν $\Delta = 0$ η εξίσωση $\alpha\chi^2 + \beta\chi + \gamma = 0$ έχει μια «διπλή» ρίζα $\chi = -\frac{\beta}{2\alpha}$, αφού $\sqrt{\Delta} = 0$
- Αν $\Delta < 0$ η εξίσωση δεν έχει πραγματικές ρίζες, είναι αδύνατη.

Η γραφική παράσταση της $\psi = \alpha x^2 + \beta x + \gamma$ είναι μια παραβολή:

- Με άξονα συμμετρίας την ευθεία την ευθεία $x = -\frac{\beta}{2\alpha}$
- Αν $\alpha > 0$ η παραβολή

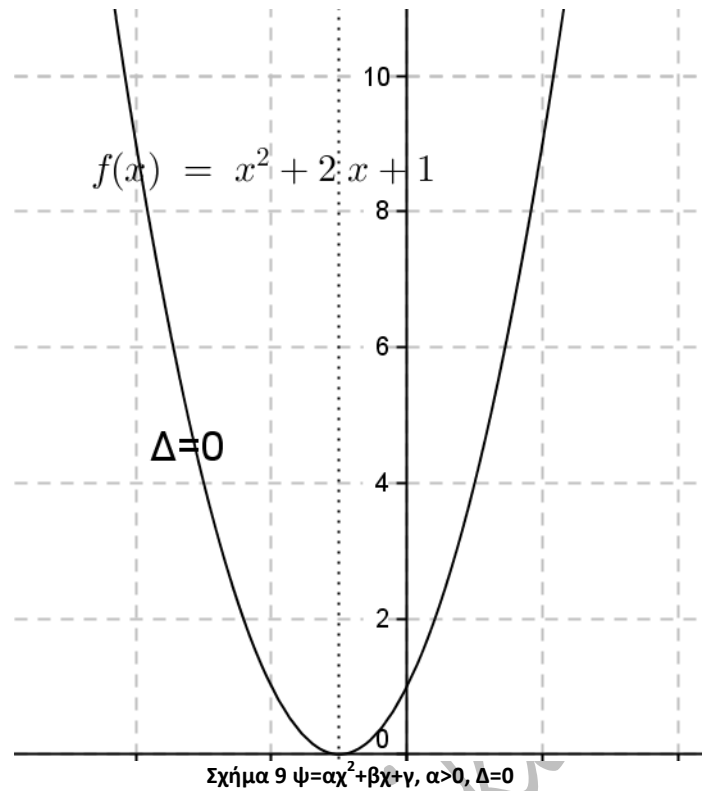
έχει ελάχιστη τιμή για $x = -\frac{\beta}{2\alpha}, \psi = -\frac{\Delta}{4\alpha}$

- i. (σχήμα 8) Αν $\Delta > 0$ τέμνει τον άξονα xx' στα σημεία $(\frac{-\beta-\sqrt{\Delta}}{2\alpha}, 0)$ και $(\frac{-\beta+\sqrt{\Delta}}{2\alpha}, 0)$

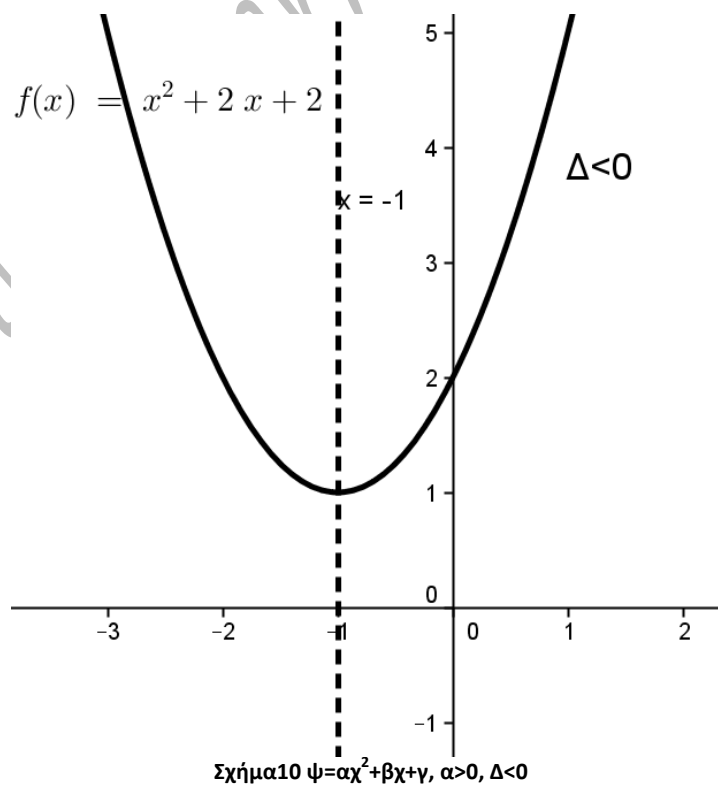


Σχήμα 8 $\psi = \alpha x^2 + \beta x + \gamma, \alpha > 0, \Delta > 0$

- ii. (σχήμα 9) Αν $\Delta = 0$ εφάπτεται του άξονα xx' στο σημείο $(-\frac{\beta}{2\alpha}, 0)$, που στην προκειμένη περίπτωση είναι και το ελάχιστο.



- iii. (σχήμα 10) Αν $\Delta < 0$ δεν τέμνει και δεν εφάπτεται του άξονα x ' (η εξίσωση $\alpha x^2 + \beta x + \gamma = 0$ είναι αδύνατη - δεν έχει ρίζες.)

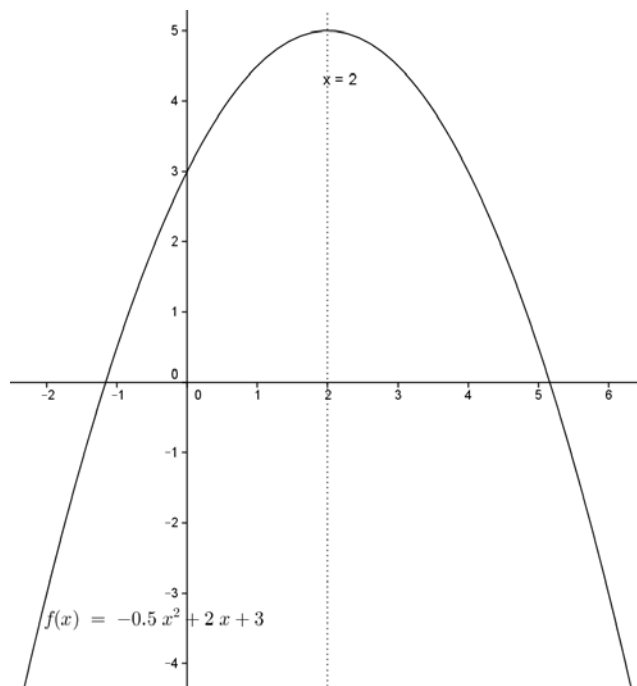


1. Αν $\alpha < 0$ η παραβολή

έχει μέγιστη τιμή για $x = -\frac{\beta}{2\alpha}$, $\psi = -\frac{\Delta}{4\alpha}$

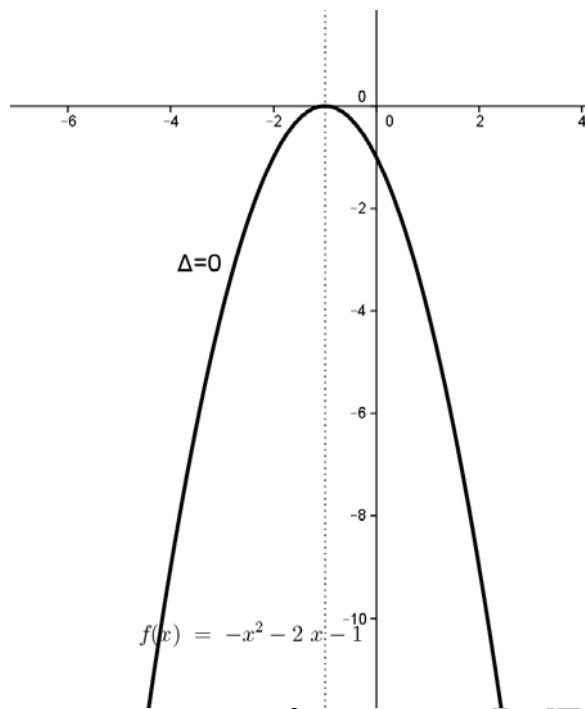
i. (σχήμα 11) Αν $\Delta > 0$ τέμνει τον άξονα x στα σημεία

$$\left(\frac{-\beta - \sqrt{\Delta}}{2\alpha}, 0\right) \text{ και } \left(\frac{-\beta + \sqrt{\Delta}}{2\alpha}, 0\right)$$



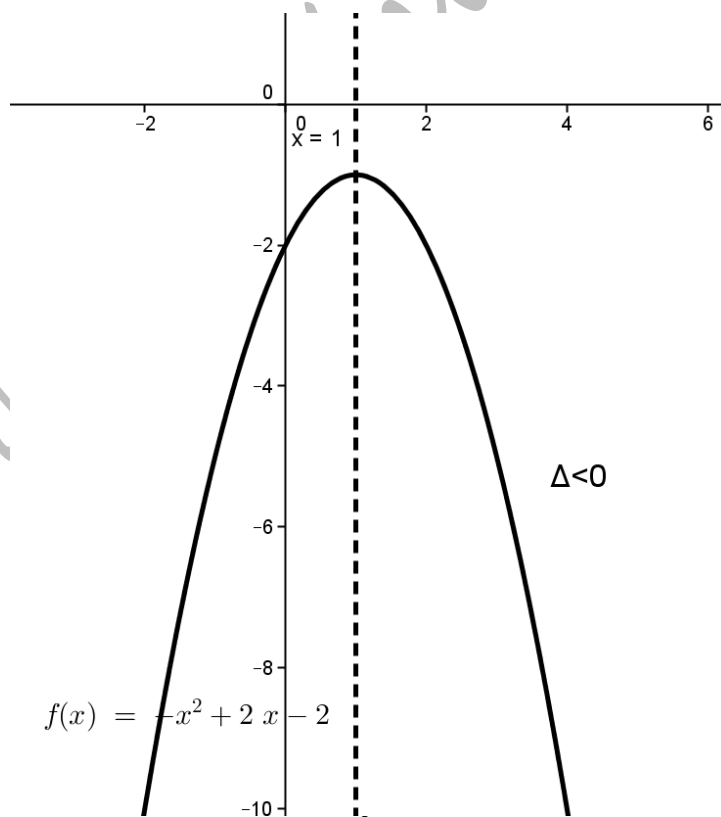
Σχήμα 2 $\psi = \alpha x^2 + \beta x + \gamma$, $\alpha < 0$, $\Delta > 0$

ii. (σχήμα 12) Αν $\Delta = 0$ εφάπτεται του άξονα x στο σημείο $\left(-\frac{\beta}{2\alpha}, 0\right)$, που στην προκειμένη περίπτωση είναι και το μέγιστο.



Σχήμα 12 $\psi = \alpha x^2 + \beta x + \gamma$, $\alpha < 0$, $\Delta = 0$

- iii. (σχήμα 13) Αν $\Delta < 0$ δεν τέμνει και δεν εφάπτεται του άξονα x (η εξίσωση $\alpha x^2 + \beta x + \gamma = 0$ είναι αδύνατη - δεν έχει ρίζες).



Σχήμα 13 $\psi = \alpha x^2 + \beta x + \gamma$, $\alpha < 0$, $\Delta < 0$