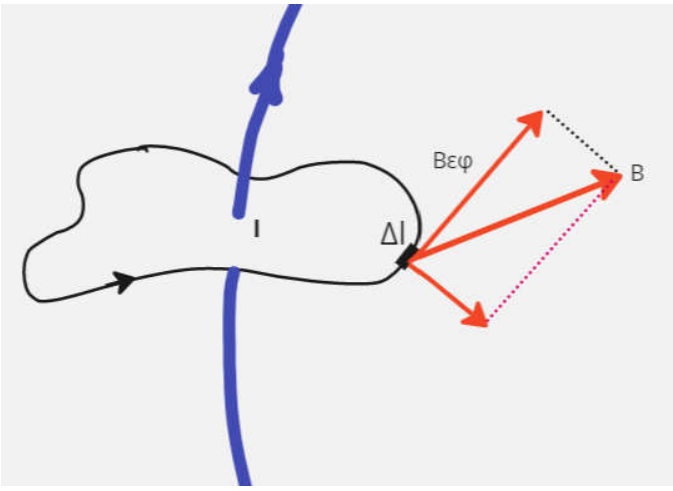
Ο νόμος του Ampere ως συνέπεια του νόμου των Biot-Savart

Ως γνωστό ο νόμος του Ampere είναι ένα από τα 4 αξιώματα πάνω στα οποία στηρίζεται ο ηλεκτρομαγνητισμός. Η ολοκληρωτική του μορφή είναι η παρακάτω:

$$\oint_C \vec{B}d\vec{l} = \iint_S (\mu_o \vec{J} + \mu_o \varepsilon_o \frac{\partial \vec{E}}{\partial t})d\vec{S}$$

Αν δεν έχουμε μεταβολές του ηλεκτρικού πεδίου τότε η εξίσωση απλοποιείται στην :

$$\oint_C \vec{B}d\vec{l} = \mu_o I_{o\lambda} \rightarrow \oint_C Bdl\cos\varphi = \mu_o I_{o\lambda} \qquad (1)$$



Το πρώτο μέλος της εξίσωσης ονομάζεται και **μαγνητική κυκλοφορία**. Με πιο απλά λόγια μας λέει ότι αν πάρουμε μία οποιαδήποτε κλειστή γραμμή τότε το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα της εφαπτομενικής συνιστώσας πάνω σ' αυτή τη γραμμή, δηλαδή το $\Sigma Bi_{\varepsilon\varphi}\Delta\ell i$ είναι ίσο με το συνολικό ρεύμα που περικλείει αυτή η γραμμή πολλαπλασιασμένο με τη μαγνητική διαπερατότητα του κενού.

Από την άλλη ο νόμος των Biot-Savart μας δίνει το μαγνητικό πεδίο που δημιουργεί ένα στοιχειώδες μήκος αγωγού σε κάποιο σημείο του χώρου. Η έκφραση του νόμου είναι η:

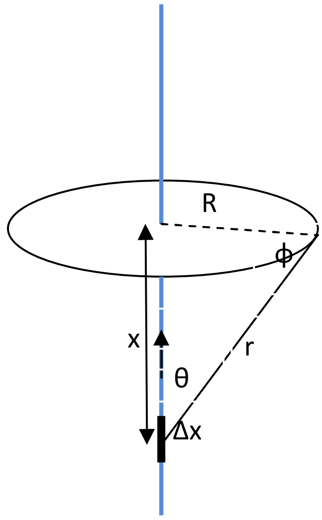
$$d\vec{B} = \frac{\mu_o}{4\pi}\frac{Id\vec{l} \times \hat{r}}{r^2} \qquad (2)$$

Ο στόχος του άρθρου είναι ξεκινώντας από τη σχέση (2) με μαθηματικά λυκείου να καταλήξουμε στη σχέση (1). Αυτό θα πρέπει να είναι εφικτό, αφού οι δύο νόμοι είναι μαθηματικά ισοδύναμοι αφενός και αφετέρου, ότι μπορούμε ν' αποδείξουμε με προχωρημένο απειροστικό λογισμό, μπορούμε να το κάνουμε και με απλά ολοκληρώματα, αλλά με μεγαλύτερη πολυπλοκότητα και δυσκολία. Είναι σαν τα προβλήματα πρακτικής αριθμητικής τα οποία μπορούμε να τα λύσουμε και με τη μέθοδο των τριών αλλά και καταστρώνοντας εξισώσεις και συστήματα εξισώσεων.

Την απόδειξη θα την κάνουμε με βήματα:

1^o ΒΗΜΑ:

Ο νόμος του Αμπερ για έναν ευθύγραμμο αγωγό απείρου μήκους και η κλειστή καμπύλη για την οποία τον εφαρμόζουμε είναι ένας κύκλος που έχει κέντρο πάνω στον αγωγό και το επίπεδό του είναι κάθετο στον αγωγό.



$$r^2 = R^2 + x^2 \to r^2 = R^2(1+\varepsilon\varphi^2\varphi) \qquad (3)$$

$$x = R\varepsilon\varphi\varphi \to dx = \frac{R}{\sigma\upsilon\nu^2\varphi}d\varphi \qquad (4)$$

Το μαγνητικό πεδίο που δημιουργείται από το στοιχειώδες τμήμα dx στην περιφέρεια του κύκλου δίνεται από τη σχέση:

$$dB = \frac{\mu_o}{4\pi}\frac{i\cdot dx}{r^2}\eta\mu\theta = \frac{\mu_o}{4\pi}i\frac{R}{\sigma\upsilon\nu^2\varphi}\frac{\sigma\upsilon\nu\varphi}{R^2(1+\varepsilon\varphi^2\varphi)}d\varphi = \frac{\mu_o}{4\pi}i\frac{\sigma\upsilon\nu\varphi}{R}d\varphi \qquad (5)$$

Η στοιχειώδης κυκλοφορία που δημιουργείται από το στοιχειώδες τμήμα dx του αγωγού θα δίνεται από τη σχέση:

$$dK = \int dB_{i,\varepsilon\varphi}dl_i = dB\int dl_i = dB\cdot 2\pi R = \frac{\mu_o\cdot i\cdot\sigma\upsilon\nu\varphi\cdot d\varphi}{2} \qquad (6)$$

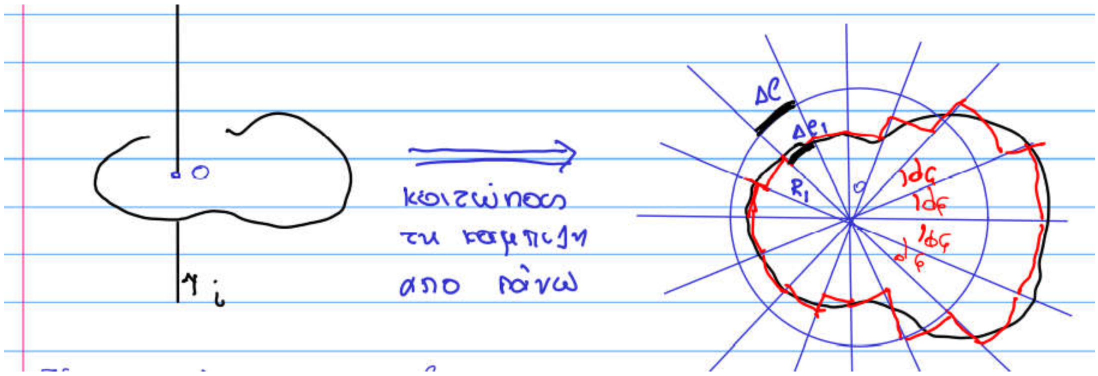
Για να βρούμε την κυκλοφορία για όλον τον αγωγό ολοκληρώνουμε ως προς τη γωνία φ από το –π/2 έως το π/2. Οπότε

$$K = \int dK = \frac{\mu_o i}{2}\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\sigma\upsilon\nu\varphi\cdot d\varphi = \mu_o i \qquad (7)$$

Αποδείξαμε το νόμο του Αμπέρ για ευθύγραμμο αγωγό και για καμπύλη που είναι κύκλος κάθετος στον αγωγό με κέντρο πάνω στον αγωγό. Γνωρίζουμε όμως ότι ο νόμος ισχύει για οποιοδήποτε σχήμα αγωγού αλλά και οποιαδήποτε γραμμή που περιβάλλει τον αγωγό. Πως θα κάνουμε τη γενίκευση αυτή;

ΒΗΜΑ 2ο :

Ευθύγραμμος αγωγός αλλά οποιαδήποτε ομοεπίπεδη καμπύλη που περιβάλλει τον αγωγό και βρίσκεται σε επίπεδο κάθετο στον αγωγό.



Παίρνουμε κέντρο το Ο από όπου περνάει ο αγωγός και σχηματίζουμε ένα αστέρι με πολύ μικρές γωνίες dφ. Η τυχαία καμπύλη που περιβάλλει τον αγωγό μπορεί να προσεγγιστεί από πολύ μικρά κυκλικά τόξα με κέντρο το Ο και από στοιχειώδεις ακτίνες που συνδέουν αυτά τα τόξα. Για το κάθε τέτοιο στοιχειώδες τόξο η κυκλοφορία θα είναι:

$$dK_i = B_i \cdot dl_i = \frac{\mu_o}{2\pi}\frac{\mathrm{I}}{R_i}dl_i = \frac{\mu_o}{2\pi}\frac{\mathrm{I}}{R_i}R_i d\varphi_i = \frac{\mu_o}{2\pi}I \cdot d\varphi_i \qquad (8)$$

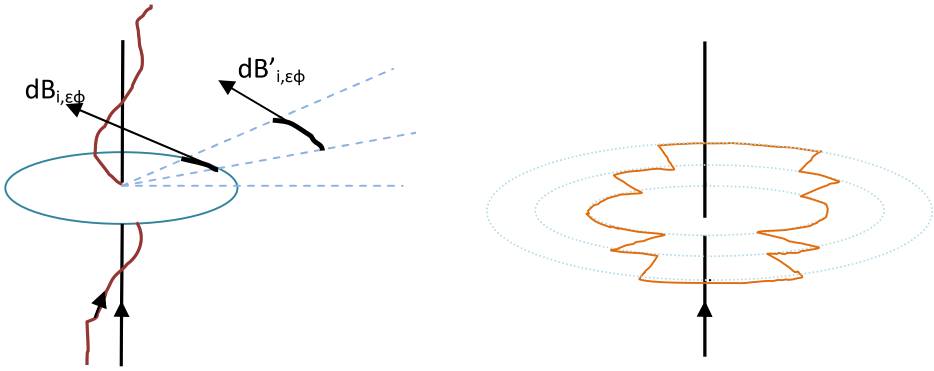
Έτσι η ολική κυκλοφορία θα είναι :

$$K_{o\lambda} = \int dK = \frac{\mu_o}{2\pi}2\pi \cdot I = \mu_o \cdot I \qquad (9)$$

Κατά μήκος των στοιχειωδών ακτίνων η κυκλοφορία είναι μηδέν Ο.Ε.Δ

<u>ΒΗΜΑ 3ο</u> :

Αγωγός οποιουδήποτε σχήματος και κυκλική καμπύλη που τον περιβάλλει. .



Έστω ένας αγωγός οποιουδήποτε σχήματος που διαρρέεται από ρεύμα i. Παίρνουμε γύρω από τον αγωγό αυτό έναν κύκλο. Χωρίζουμε τον κύκλο σε πάρα πολλές και ίσες μεταξύ τους επίκεντρες γωνίες dφ. Παίρνουμε και έναν ευθύγραμμο αγωγό που διέρχεται κάθετα από το κέντρο του κύκλου και που διαρρέεται από το ίδιο ρεύμα i.

Έστω ότι η εφαπτομενική συνιστώσα του καμπυλόγραμμου αγωγού σε κάποιο σημείο Α είναι Bi,εφ. Το γινόμενο της συνιστώσας αυτής επί το τόξο dl θα είναι Bi,εφ dl. Για τον ευθύγραμμο αγωγό παίρνουμε σε κατάλληλη απόσταση r ένα τόξο dl΄ έτσι ώστε να ισχύει για την ίδια στοιχειώδη γωνία dφ στον ευθύγραμμο αγωγό:

$$B_{i,\varepsilon\varphi} \cdot dl_i = B^{'}_{i,\varepsilon\varphi} \cdot dl^{'}_i$$

Οπότε συνεχίζοντας για όλον τον κύκλο την ίδια διαδικασία, θα προκύψει για τον ευθύγραμμο αγωγό μία καμπύλη η οποία θα έχει την ίδια κυκλοφορία με την κυκλοφορία γύρω από τον κύκλο που περιβάλει τον καμπυλόγραμμο αγωγό. Αποδείξαμε όμως ότι οποιαδήποτε καμπύλη που περιβάλει τον ευθύγραμμο αγωγό έχει κυκλοφορία ίση με Κ=μ_oi   Ο.Ε.Δ

Σημειωτέο ότι για τον ευθύγραμμο αγωγό κατά μήκος των ακτίνων η κυκλοφορία είναι μηδέν, οπότε μπορούμε να δημιουργήσουμε την κλειστή καμπύλη από τα στοιχειώδη τόξα και τις ακτίνες.

//

ΚΑΤΙ ΠΙΟ ΠΡΟΧΩΡΗΜΕΝΟ…

ΜΙΑ ΜΕΤΑΒΙΒΑΣΗ ΑΠΟ ΤΗ ΔΙΑΦΟΡΙΚΗ ΜΟΡΦΗ ΤΟΥ ΝΟΜΟΥ ΤΟΥ AMPERE ΣΤΗΝ ΟΛΟΚΛΗΡΩΤΙΚΗ

Η διαφορική μορφή του νόμου του Ampere είναι η

$\vec{\nabla}\times\vec{B}=\mu_o j_{o\lambda}$ όπου j η επιφανειακή πυκνότητα ρεύματος

$$\vec{\nabla}\times\vec{B}=\begin{vmatrix}\hat{i} & \hat{j} & \hat{k}\\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z}\\ B_x & B_y & B_z\end{vmatrix}=\mu_o j_{o\lambda} \tag{10}$$

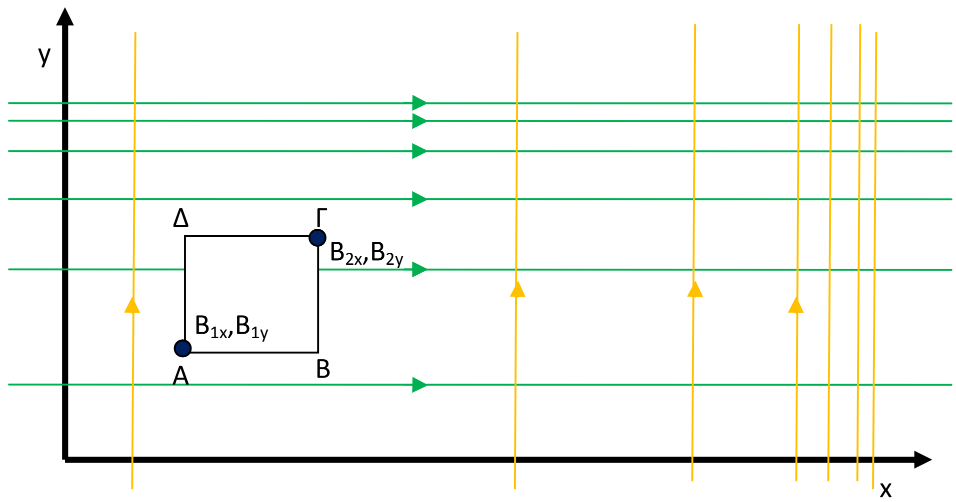
Ενώ η ολοκληρωτική μορφή του νόμου είναι η $\oint_C Bdl\cos\varphi=\mu_o I_{o\lambda}$ (11)

Πως όμως σχετίζεται η διαφορική με την ολοκληρωτική μορφή; Η απάντηση είναι ότι η συσχέτιση γίνεται μέσω ενός πολύ σπουδαίου μαθηματικού θεωρήματος, του θεωρήματος Stokes. Εμείς θα προσπαθήσουμε να κάνουμε τη μεταβίβαση χωρίς τη χρήση του θεωρήματος, χρησιμοποιώντας απλά ένα παράδειγμα.

Έστω ένα μαγνητικό πεδίο με

$$\mathrm{B_x}=a\cdot y \qquad \mathrm{B_y}=\mathrm{b}\cdot \mathrm{x} \qquad \mathrm{B_z}=0$$

$$dB_x=a\cdot dy \qquad dB_y=b\cdot dx \qquad dBz=0$$



Τότε σύμφωνα με την εξίσωση (10) θα έχουμε:

$$\hat{i}\cdot\left(\frac{\partial B_z}{\partial y}-\frac{\partial B_y}{\partial z}\right)-\hat{j}\cdot\left(\frac{\partial B_z}{\partial x}-\frac{\partial B_x}{\partial z}\right)+\hat{z}\left(\frac{\partial B_y}{\partial x}-\frac{\partial B_x}{\partial y}\right)=\mu_0\frac{\mathrm{I}}{dS}\hat{z}\rightarrow\hat{z}\cdot(\mathrm{b}-\mathrm{a})=\mu_0\frac{\mathrm{I}}{dxdy}\hat{z}$$

$$\rightarrow \mathrm{b}\cdot \mathrm{dx}\cdot \mathrm{dy} - \mathrm{a}\cdot \mathrm{dy}\cdot \mathrm{dx} = \mu_0 I \rightarrow dB_y \cdot dy - dB_x \cdot dx = \mu_0 I \rightarrow$$

$$\rightarrow B_{2y}dy - B_{1y}dy - B_{2x}dx + B_{1x}dx = \mu_0 I \rightarrow$$

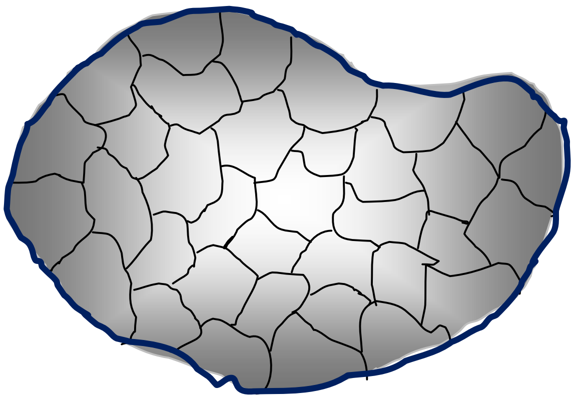
$$\rightarrow B_{2y}(\mathrm{B\Gamma}) + B_{1y}(\Delta\mathrm{A}) + B_{2x}(\Gamma\Delta) + B_{1x}(\mathrm{AB}) = \mu_0 I \rightarrow$$

$$\rightarrow \sum B_{i,\varepsilon\varphi} dl_i = \mu_0 I \rightarrow dK = \mu_0 I$$

Όπου dK η στοιχειώδης κυκλοφορία γύρω από το τετράγωνο του σχήματος ΑΒΓΔ.

Άρα αποδείξαμε ότι σε μία στοιχειώδη επιφάνεια η στοιχειώδης κυκλοφορία γύρω από αυτή την επιφάνεια ισούται με το ρεύμα που διαρρέει την επιφάνεια επί τη μαγνητική σταθερά του κενού.

Αν τώρα η επιφάνεια δεν είναι στοιχειώδης, μπορούμε να χωρίσουμε την επιφάνεια σε ένα πλήθος στοιχειωδών επιφανειών. Τότε παίρνοντας την στοιχειώδη κυκλοφορία για την κάθε στοιχειώδη επιφάνεια και προσθέτοντας όλες αυτές τις στοιχειώδεις κυκλοφορίες, θα διαπιστώσουμε πολύ εύκολα ότι η ολική κυκλοφορία είναι ίση με την κυκλοφορία πάνω στην γραμμή που είναι τα εξωτερικά όρια της επιφάνειας, αφού όλα τα εσωτερικά τμήματα που είναι κοινά μεταξύ τους αλληλοεξουδετερώνονται.



Άρα καταλήγουμε στη σχέση (11) την ολοκληρωτική μορφή του νόμου του Ampere που λέει ότι η κυκλοφορία για οποιαδήποτε κλειστή γραμμή ισούται με το συνολικό ρεύμα που περνάει από μία επιφάνεια που έχει ως όριο αυτή τη γραμμή.

$$\oint_C B_{i,\varepsilon\varphi\alpha\pi} dl_i = \mu_o I_{o\lambda}$$